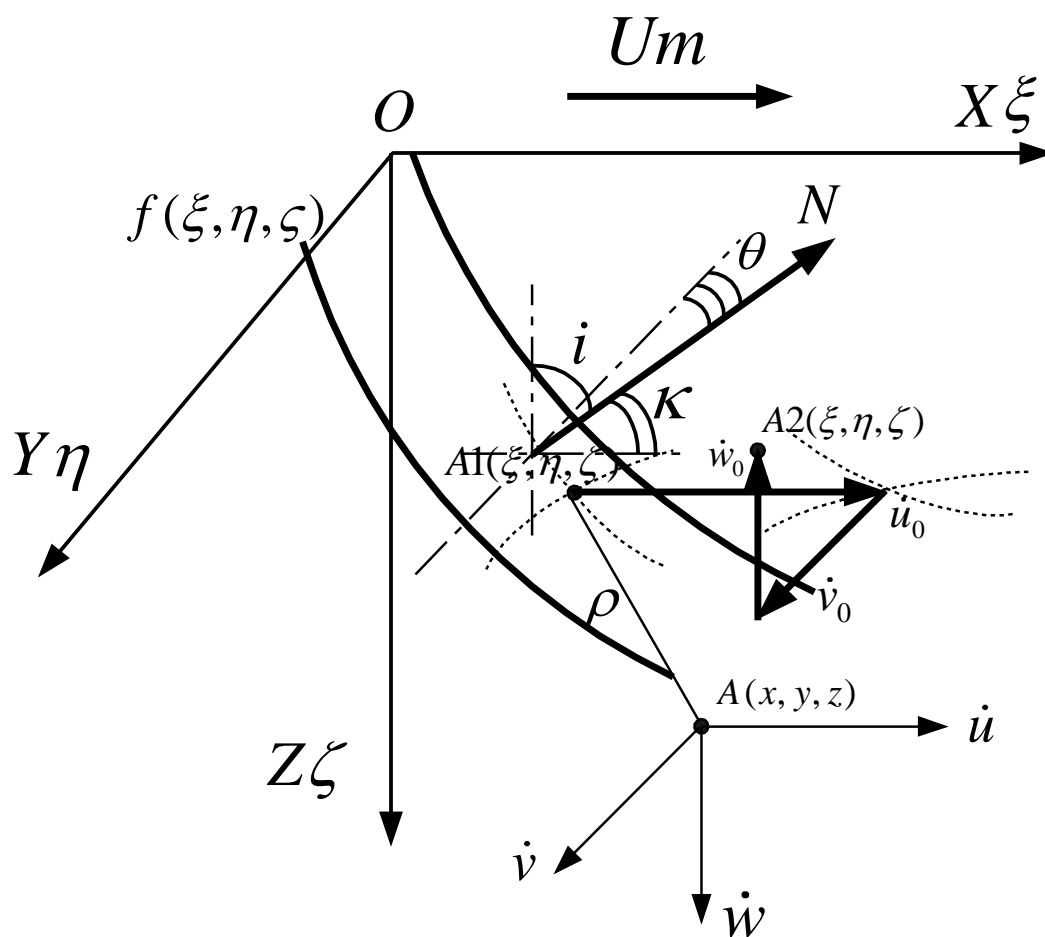


Міністерство освіти і науки України
Національний університет біоресурсів і природокористування
України

В. П. Ковбаса

МЕХАНІКО-ТЕХНОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВЗАЄМОДІЇ
РОБОЧИХ ОРГАНІВ З ҐРУНТОМ

Монографія



Київ 2016

Затверджено вченою радою Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № від

Рецензенти:

Чаусов М. Г., професор, доктор технічних наук, професор кафедри механіки Національного університету біоресурсів і природокористування України

Встохін В. І., професор, доктор технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ»

Ковбаса В. П.

Механіко-технологічні основи взаємодії робочих органів з ґрунтом: Монографія. – Київ, 2016. – 298 с.

Монографію написано за матеріалами теоретичних і експериментальних досліджень взаємодії пасивних робочих органів довільних геометричних форм та розмірів із ґрунтом, що формалізований як суцільне деформівне середовище з властивостями пружності, в'язкості та пластичності.

Розроблено механічну модель і фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями ґрунту в двох фазах деформування: пружно-в'язкого та в'язко-пластичного. Обґрунтовано інтегральний показник оптимізації параметрів і режимів роботи просторових ґрунтообробних робочих органів. На основі розв'язку просторових контактних задач механіки суцільного середовища отримані залежності розподілу переміщень, деформацій і напружень у ґрунтовому напівпросторі перед робочими органами двох типів: пасивним і ротаційним. Виведено функціональні залежності розподілу тиску на поверхні контакту робочий орган - ґрунт для пасивних робочих органів (просторова задача). Визначено інтегральну функцію оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів за різних властивостей ґрунту. Запропоновано нову ефективну методику визначення показників механічних властивостей ґрунту. Розроблено методику оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів пасивного типу для певних ґрунтових умов.

Для наукових працівників, інженерів, конструкторів, аспірантів, викладачів та студентів ВНЗ.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧИХ ОРГАНІВ ІЗ ҐРУНТОМ	9
1.1. Загальна схема формалізації процесу обробітку ґрунту	9
1.2. Ґрунт, його склад та властивості	12
1.3. Формалізація ґрунту, як об'єкту, з яким взаємодіють робочі органи	19
1.4. Загальна модель зміни властивостей ґрунту під дією деформатора	25
1.5. Аналіз критеріїв міцності ґрунту	26
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ ДЕФОРМАТОРІВ ІЗ ҐРУНТОМ	43
2.1. Рівняння механіки суцільних середовищ, критерії оцінки	43
2.1.1. Загальні положення	43
2.1.2. Фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями в ґрунті	48
2.1.3. Обґрунтування критерію оптимізації параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	71
2.1.4. Визначення розподілу напружень у ґрунтовому середовищі	79
2.1.5. Визначення роботи деформацій і зусиль на поверхні деформатора	80
2.2. Аналіз взаємодії пасивного деформатора з ґрунтом	83
2.2.1. Визначення швидкості переміщень на поверхні контакту робочий орган-ґрунт (початкові умови)	83
2.2.2. Визначення швидкостей переміщень та деформацій в ґрунтовому середовищі перед пасивним робочим органом	89
2.2.3. Аналіз розподілу напружень у ґрунтовому середовищі	112
2.2.4. Оцінка потужності деформацій ґрунту пасивним робочим органом	122
2.2.5. Функція критерію вигляду напружено-деформованого стану та її екстремуми	131
2.2.6. Функція розподілу тиску та зусиль по поверхні пасивного робочого органу	135
2.3. Взаємодія дискового робочого органу з ґрунтом	142
2.3.1. Швидкості переміщень на поверхні контакту диска з ґрунтом (початкові умови)	142
2.3.2. Визначення швидкостей переміщень та деформацій у ґрунтовому середовищі під дією дискового робочого органу	155
2.3.3. Визначення розподілу напружень у ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом	185

2.3.4.	Оцінка потужності деформацій ґрунту дисковим робочим органом	189
2.3.5.	Визначення критерію напружено-деформованого стану ґрунту під дією дискового робочого органу	193
РОЗДІЛ 3.	ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ	200
3.1.	Програма експериментальних досліджень	200
3.2.	Методика проведення експериментальних досліджень	200
3.2.1.	Методика визначення реологічних властивостей ґрунту	200
3.2.2.	Нова методика визначення модулів пружності та коефіцієнтів в'язкості ґрунту	207
3.2.3.	Методика визначення розподілу тиску по поверхні робочого органу	215
3.3.	Результати експериментальних досліджень	223
3.3.1.	Модулі пружності ґрунту при об'ємних та зсувних деформаціях	223
3.3.2.	Модулі в'язкості ґрунту при об'ємних та зсувних деформаціях	229
3.3.3.	Граничні напруження зсуву ґрунту	233
3.3.4.	Результати досліджень розподілу тиску по поверхні деформатора	235
3.3.5.	Розподіл деформацій у ґрунті під дією простих деформаторів	241
РОЗДІЛ 4.	ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ І РЕЖИМІВ РОБОТИ ҐРУНТООБРОБНИХ РОБОЧИХ ОРГАНІВ	247
4.1.	Функція та загальна методика оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	247
4.2.	Обґрунтування вибору методу оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	249
4.3.	Методика оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	251
4.3.1.	Розміщення пасивного робочого органу в ґрунті	251
4.3.2.	Розміщення дискового сферичного робочого органу в ґрунті	253
4.4.	Впровадження методики оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	258
4.4.1.	Програма та методика експериментальної перевірки оптимізації параметрів робочих органів	258
4.4.2.	Умови та обсяг проведення експериментальної перевірки методики оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів	259
4.4.3.	Результати та обсяг впровадження методики оптимізації параметрів робочих органів	264
	ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	270
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	273

ПЕРЕДМОВА

„...Скласти формулу на підставі точної теорії орних знарядь – це справа далекого майбутнього, внаслідок надзвичайної складності процесу різання, але зовсім відмовлятися від вирішення цього завдання немає потреби”.

В. П. Горячкін

Формалізація ґрунту у вигляді суцільного пружно-в'язкопластичного середовища, яка обґрунтована А. С. Кушнар'євим [108] і в подальшому використовувалась цілим рядом дослідників [7,8,14,39,73,107,155,208,230], є необхідною, але недостатньою умовою для вирішення проблем механізації обробітку ґрунту, що включає задачі адаптації конструктивно-технологічних параметрів робочих органів до ґрунтово-кліматичних умов.

Однією з основних задач, яка повинна бути вирішена для адаптації робочих органів, є задача про взаємодію робочих органів із ґрунтом. Вона повинна включати в себе визначення умов на поверхні робочого органу (переміщення ґрунту, деформації ґрунту, напруження та їх розподіл по поверхні, сили, що діють на робочий орган з боку ґрунтового середовища), розподіл переміщень та деформацій у ґрунтовому середовищі перед робочим органом та енергомісткість процесу взаємодії.

Для вирішення задач взаємодії робочих органів із ґрунтом необхідно, крім формалізації ґрунту, встановити адекватність представлення рішень у вигляді одномірних, плоских розв'язків та поєднання двох плоских взаємно перпендикулярних рішень.

Дослідження, в яких вирішувались одномірні задачі взаємодії робочих органів із ґрунтом [57, 124,149], не враховують геометричні розміри та

форму робочих органів. Розподілений по поверхні робочого органу тиск зводиться до рівнодіючої, прикладеної в деякій точці поверхні. Така постановка задач дозволяє враховувати лише проекцію площі робочого органу на площину, перпендикулярну до напрямку його переміщення, й не дозволяє враховувати навіть відмінність в опорі переміщенню робочих органів із різним співвідношенням глибини обробітку та ширини захвату. Такі рішення ґрунтуються на відомій раціональній формулі В. П. Горячкіна, яка являє собою розвиток феноменологічної залежності Ейлера, що характеризує опір переміщенню тіла в середовищі [167], й можуть мати лише історичне значення. Неправомірність таких рішень підтверджується, зокрема результатами досліджень А. Н. Зеленіна [71].

Аналіз взаємодії на основі плоских задач та поєднання двох плоских рішень дозволяє в деякій мірі врахувати вплив кривизни робочого органу на характер розподілу тиску по його поверхні, а отже, й частково її вплив на енергомісткість процесу обробітку ґрунту [108, 109]. Суттєвим недоліком плоских рішень є те, що вони не можуть враховувати сумісність деформацій і напружень (основний постулат механіки суцільного середовища) у ґрунті, а отже, не можуть бути використані для вирішення задач взаємодії робочих органів із ґрунтом, а саме, – визначення оптимальних геометричних форм робочих органів та їхнього взаємного розташування.

Аналіз результатів досліджень взаємодії робочих органів із ґрунтом дозволяє зробити висновки щодо відсутності адекватного вирішення задачі про вплив параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів машин на якість виконання процесів обробітку ґрунту та адаптованість параметрів до ґрунтових умов.

Визначити функціональні зв'язки змін властивостей ґрунту в процесі його обробітку та енергомісткість цих змін можна на основі аналізу розподілу деформацій та напружень у ґрунтовому напівпросторі, за умов його формалізації як суцільного пружно-в'язко-пластичного середовища.

При цьому повинні бути вирішені просторові задачі контактної взаємодії робочий орган - ґрунт. Такі рішення дозволять встановити функціональні залежності параметрів робочих органів та властивостей ґрунту для визначення функції оптимізації параметрів і режимів робочих органів. Це дозволить забезпечити зниження енергомісткості процесів обробітку ґрунту та підвищити його якість.

Метою роботи є зниження енергомісткості та підвищення якості роботи машин шляхом розробки нової концепції оптимізації параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів на основі вирішення просторових контактних задач.

Для досягнення поставленої мети вирішувались такі **задачі**:

- обґрунтувати критерій оптимізації геометричної форми та розмірів робочих органів, а також кінематичних режимів їх роботи;
- визначити умови на поверхні контакту ґрунт-робочий орган різної геометричної форми та розмірів при різних кінематичних режимах для пасивних розпушувальних та ротаційного дискового робочих органів;
- розробити математичні моделі розподілу компонентів тензорів деформацій та напружень у ґрунтовому середовищі у просторовій постановці для пасивних розпушувальних та ротаційного дискового робочих органів;
- встановити функціональні залежності розподілу тиску та зусиль по поверхні пасивних розпушувальних та ротаційного дискового робочих органів;
- перевірити адекватність розроблених математичних моделей;
- розробити методику оптимізації параметрів та режимів роботи робочих органів.

В основу роботи покладено узагальнення результатів наукових досліджень автора, виконаних у 2002-2015 роках. В роботі доведена правомірність формалізації ґрунту як суцільного середовища, визначений спрощений критерій вигляду напружено-деформованого стану ґрунту, який

може використовуватись для прогнозування змін його технологічних властивостей при обробітку.

Автору приємно скористатись можливістю висловити щире подяку рецензентам за корисні зауваження та пропозиції.

Робота буде корисною працівникам науково-дослідних та проектно-конструкторських організацій і виробничих підприємств, аспірантам, докторантам, викладачам та студентам ВНЗ, що займаються питаннями механіки взаємодії робочих органів із ґрунтом, що формалізований як суцільне деформівне середовище з властивостями пружності, в'язкості та пластичності; а також багатьом спеціалістам, що цікавляться сучасним станом теоретичних та експериментальних досліджень у цій галузі.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧИХ ОРГАНІВ ІЗ ҐРУНТОМ

1.1. Загальна схема формалізації процесу обробітку ґрунту

Механічна дія робочих органів ґрунтообробних машин (обробіток ґрунту) спрямована на зміну фізико-механічних властивостей ґрунту з метою підвищення його потенціальної енергії, яка використовується рослинами.

Мета механічного обробітку ґрунту може бути представлена схемою, наведеною на рис. 1.1. [86].

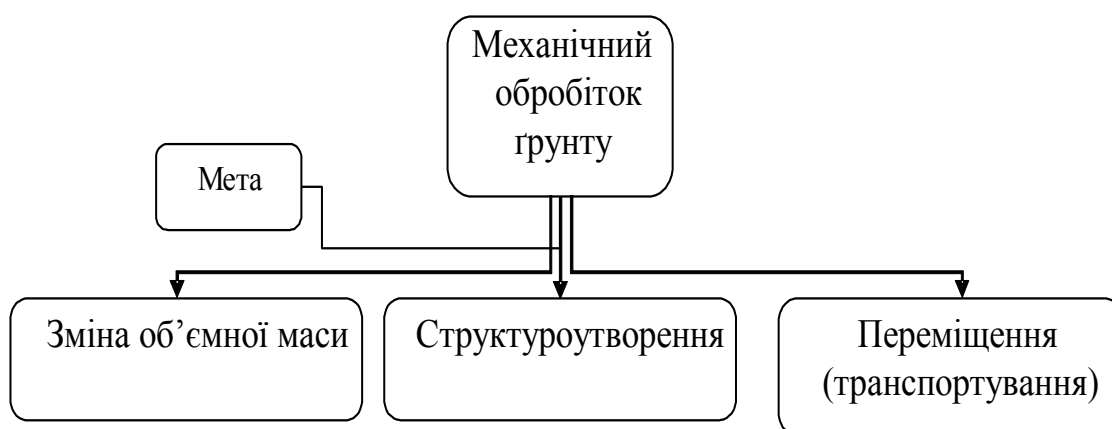


Рис. 1.1. Схема механічного обробітку ґрунту

Механічний обробіток ґрунту здійснюється при взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом.

Зміна об'ємної маси ґрунту відбувається в результаті реакцій ґрунту на послідовні дії на нього робочого органу ґрунтообробної машини. Ці дії проявляються в створенні напружено-деформованого стану ґрунту, в результаті чого виникають пружні зворотні деформації (пружна складова), а після перевищення граничного значення критерію міцності (межі пластичності) відбуваються незворотні деформації. Формалізована схема механічного обробітку ґрунту наведена на рис. 1.2.

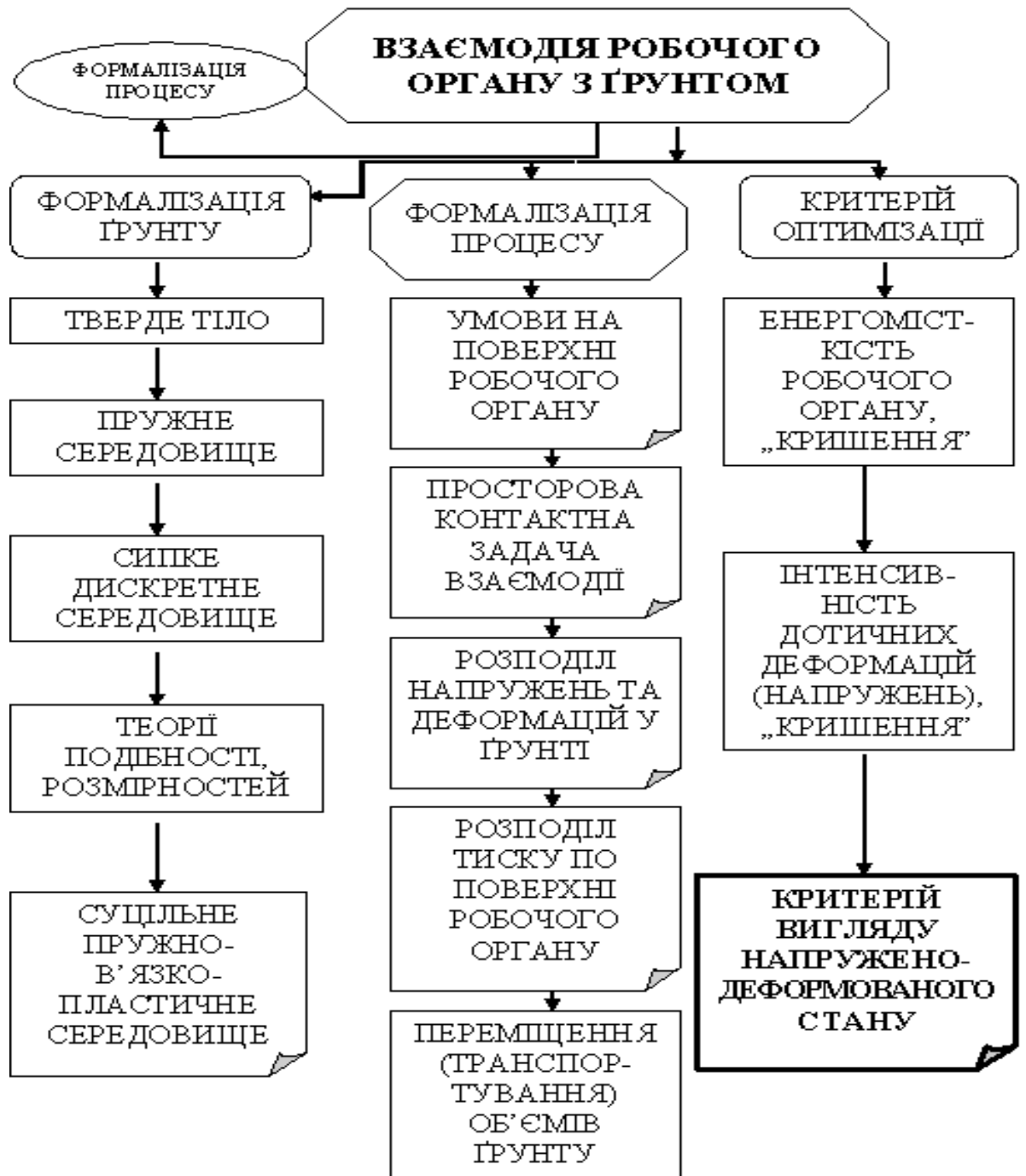
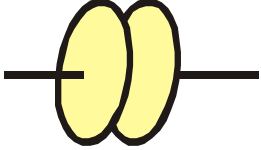

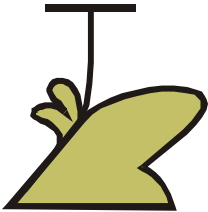
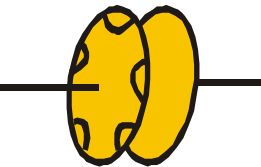

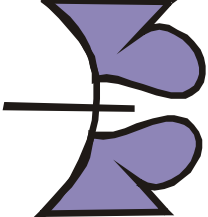
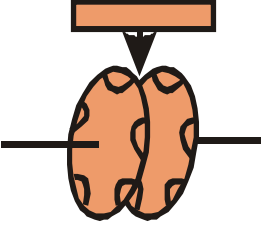


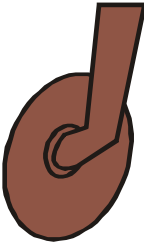



Рис. 1.2. Схема формалізації механічного обробітку ґрунту

Зміни технологічних властивостей ґрунту при механічному його обробітку відбуваються під дією робочих органів пасивної або активної дії. Класифікація робочих органів пасивної дії виконана проф. Дубровіним В.О. [65] наведена в таблиці 1.1.

Основні типи пасивних робочих органів ґрунтообробних машин

Вид та глибина (см) обробітку ґрунту	Типи ґрунтообробних машин для основного обробітку ґрунту		
	Плуги полицеві	Дискові знаряддя	Чизельні знаряддя
Поверхневий (0-8)	-	Дискові лушпильники 	Легкі культиватори 
Мілкий (8-16)	Плуги-лушпильники 	Дискові борони 	Важкі культиватори 
Середній (16-24)	Обертові плуги загального призначення 	Важкі дискові борони 	Плоскорізи, чизель-культиватори 
Глибокий (24-32)	Плуги ярусні 	Дискові плуги 	Чизельні плуги, глибокорозпушувачі 

1.2. Ґрунт, його склад та властивості

Ґрунтом називають поверхневий диспергований (здрібнений) шар земної кори, найважливішою властивістю якого є родючість. Під родючістю розуміють здатність ґрунту задовольняти впродовж усього вегетаційного періоду потребу культурних рослин у поживних речовинах, воді, повітрі й теплі.

Ґрунт є багатофазним середовищем з певним запасом теплової, хімічної енергії та енергії живих організмів, що живуть у ній. До складу ґрунту входять три основні фази: тверда, рідка і газоподібна.

Тверда фаза має складну будову: поряд з мінеральною частиною вона містить органічну частину (гумус), а також мікрофлору і мікрофауну.

Рідка фаза складається, в основному, з водного розчину мінеральних і органічних солей та кислот, а газоподібна — з повітря, в якому містяться різні гази і пари води.

Ґрунт, як уже зазначалося, є пористим тілом. Під пористістю ґрунту розуміють відношення об'єму всіх пор, заповнених водою та повітрям, до загального об'єму ґрунту. Розрізняють некапілярні і капілярні пори. Некапілярні пори – це проміжки між ґрунтовими агрегатами й окремими структурними грудочками. Маючи порівняно великі розміри, некапілярні пори не затримують дощову воду і вона під дією сили тяжіння вільно стікає у нижні шари ґрунту, а проміжки заповнюються повітрям. Капілярні пори пронизують переважно структурні агрегати й грудочки, мають дуже малі розміри, добре затримують дощову воду. По капілярах ґрунтового води піднімаються до поверхні.

Ґрунтове повітря, що заповнює великі пори, вільно сполучається з атмосферним повітрям і реагує на зміну температури, тиску, вологості атмосферного повітря.

Основним джерелом води для живлення і життєдіяльності рослин є ґрунтова волога. У ґрунті розрізняють чотири основних категорії води: зв'язану, капілярну, вільну (гравітаційну) і пароподібну. Зв'язана вода (не вільна), тонким шаром розташовується навколо ґрунтових часток і міцно утримується адсорбційними силами. Капілярна вода утримується в найбільш тонких порах між ґрунтовими агрегатами та у внутрішньо агрегатних капілярах і під дією меніскових сил може переміщатися в ґрунті в напрямку розташування капілярних пор. Пароподібна вода знаходиться в ґрунтовому повітрі у формі водяної пари. Вона завжди перебуває в стані руху і може пасивно переміщуватися разом з потоками повітря.

Тверді мінеральні елементи ґрунту являють собою частинки різних розмірів, класифікація яких (за І. А. Качинським) наведена в таблиці 1.2. [84]

Таблиця 1.2.

Структурний склад ґрунту

Фракція	Діаметр фракцій, мм
Каміння	> 3
Гравій	1-3
Пісок	0.05 – 1.0
Пил	0.001 – 0.05
Мул	0.0001 – 0.001
Колоїди	< 0.0001

Процентний вміст твердих мінеральних елементів ґрунтових фракцій характеризує тип та фізико-механічні властивості ґрунту. Так, ґрунти з високим відсотком вмісту мулкуватих частинок відносяться до важких. Ґрунти з великим вмістом піску характеризуються як легкі. Найбільш

цінними за механічним складом вважають суглинкові та супіщані ґрунти з вмістом мулистих частинок від 10 до 40 %.

Згідно з класифікацією І. А. Качинського, в залежності від співвідношення частинок „фізичної глини” ($d \leq 0,0001\text{мм}$) та „фізичного піску” ($d \geq 0,0001\text{мм}$) ґрунти умовно ділять на такі основні типи (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

Класифікація ґрунтів за гранулометричним складом

Тип ґрунту	Вміст частинок „фізичної глини” та „фізичного піску”, %	
	„Фізична глина”	„Фізичний пісок”
Пісок незв’язний	0-5	100-95
Пісок зв’язний	5-10	90-95
Супісь	10-20	80-90
Суглинок легкий	20-30	70-80
Суглинок середній	20-45	55-80
Суглинок важкий	30-60	40-70
Глина легка	40-75	25-60
Глина середня	50-85	15-50
Глина важка	>65	<35

Розрізняють ґрунти структурні і безструктурні. Структурні ґрунти можуть розпадатися на окремі, різні за величиною і формою агрегати, грудочки, зерна й утворювати ґрунтовий об’єм із різними типами упаковки агрегатів, що суттєво впливає на їх агрономічну цінність. Безструктурний ґрунт звичайно представляє собою або щільну масу з дрібних пилоподібних частинок (діаметром менше 0,25 мм), або складається з переущільнених (із низькою пористістю) великих агрегатів діаметром від 1 до 10 см і більше.

Властивість окремих частинок ґрунту створювати стійкі механічні системи називають зв'язністю. Зв'язність залежить від механічного складу ґрунту, вмісту в ньому води, повітря, золів, гелів і т. д. Фізична природа походження фізико-механічних зв'язків не належить до об'єкту та предмету досліджень, пов'язаних із дослідженнями напружено-деформованого стану ґрунту при зміні його фізико-механічних властивостей механічною дією робочих органів ґрунтообробних машин.

У зв'язку з цим, слід розглядати лише ті властивості ґрунту, які можуть бути змінені в процесі механічного його обробітку.

Ґрунт – це трифазне середовище, що складається з твердої, рідкої та газоподібної фаз (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Схема будови ґрунту

Фізичні властивості ґрунту характеризуються показниками, співвідношення між якими наведені нижче. Тут і далі в тексті буде використовуватись термін „густина” ґрунту, під яким слід розуміти поняття, яке в фундаментальних природничих науках визначає відношення маси до

об'єму (об'ємна маса, щільність), а одиницями виміру є $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$
 [10,16,17,25,37,43,46,49,107,108,109].

Об'ємні та масові співвідношення складових ґрунту виражаються такими залежностями [10,25,42,43,49]:

густина твердої фази $[\text{кг} / \text{м}^3]$: $\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$;

густина сухої фази $[\text{кг} / \text{м}^3]$: $\rho_b = \frac{M_s}{V_t} = \frac{M_s}{(V_s + V_a + V_w)}$;

загальна густина $[\text{кг} / \text{м}^3]$: $\rho_t = \frac{M_t}{V_t} = \frac{M_s + M_w}{(V_s + V_a + V_w)}$;

питомий об'єм сухої фази (BWV) $[\text{м}^3 / \text{кг}]$: $v_b = \frac{V_t}{M_s} = \frac{1}{\rho_b}$;

пористість (відносні величини): $p = \frac{V_f}{V_t} = \frac{V_a + V_w}{V_s + V_a + V_w}$;

коефіцієнт пористості (відносні величини): $e = \frac{V_a + V_w}{V_s} = \frac{V_f}{V_t - V_s}$;

масова вологість $[\text{кг} / \text{кг}]$: $\Theta = \frac{M_w}{M_s}$;

об'ємна вологість $[\text{м}^3 / \text{м}^3]$: $W = \frac{V_w}{V_t} = \frac{V_f}{V_t - V_s}$.

Залежність, яка виражає зв'язок BWV із напруженнями, має вигляд [107, 109]:

$$BVW = m \log \sqrt{\sigma_m^2 + \tau_{\max}^2} + n \left(\frac{\tau_{\max}}{\sigma_m} \right) + b, \quad (1.1)$$

де m, n, b – емпіричні коефіцієнти, які визначаються з експериментів по деформуванню ґрунту.

Найбільш поширеною залежністю зміни густини ґрунту від напружень, що діють у ньому, є залежність, отримана А. С. Кушнар'овим [108,109]:

$$\rho = \rho_0 + b \ln \left[\sigma_m (1 + \tau_{\max}) \right], \quad (1.2)$$

Мета механічного обробітку ґрунту зводиться до зміни його фізико-механічних властивостей. У результаті різних видів механічного обробітку можуть бути змінені такі властивості ґрунту: пористість, BWV , коефіцієнт пористості та загальна густина ρ , як наслідок зміни пористості – зміна об'ємної вологості ґрунту. Всі ці величини функціонально зв'язані між собою (рис. 1.4).

Аналіз графіків зв'язку BWV з інваріантами напружень та головними напруженнями (рис. 1.5-1.6) свідчить про те, що зміна об'ємної маси та пористості відбувається внаслідок дилатансії та дисторсії, які в свою чергу, є наслідком створення напружено-деформованого стану певного вигляду.

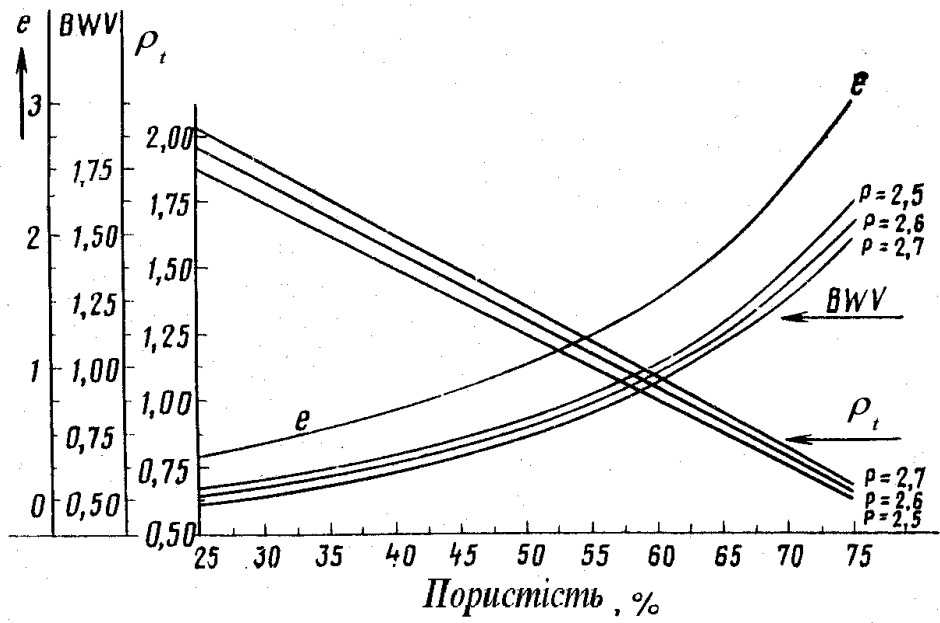


Рис. 1.4. Зв'язок між пористістю, BWV , коефіцієнтом пористості та загальною густиною [107]

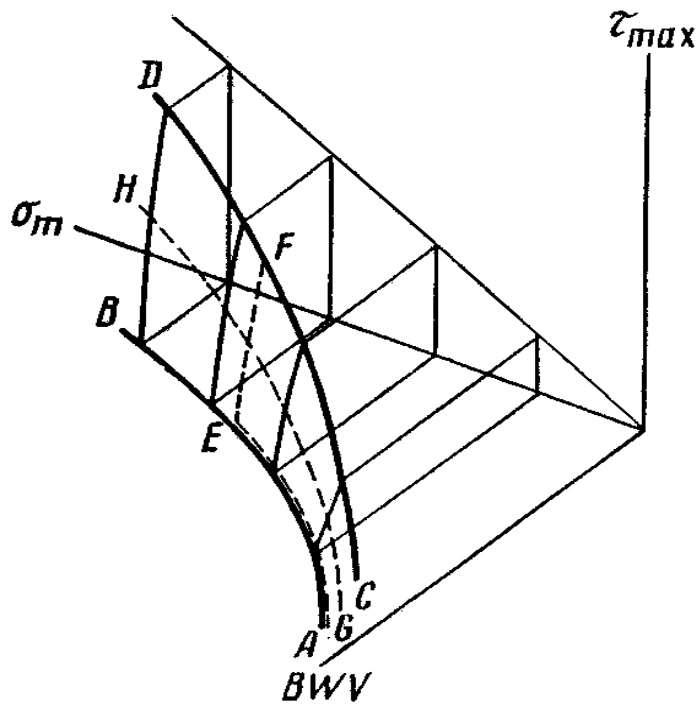


Рис. 1.5. Зв'язок між BWV та інваріантами напружень у ґрунті [107]

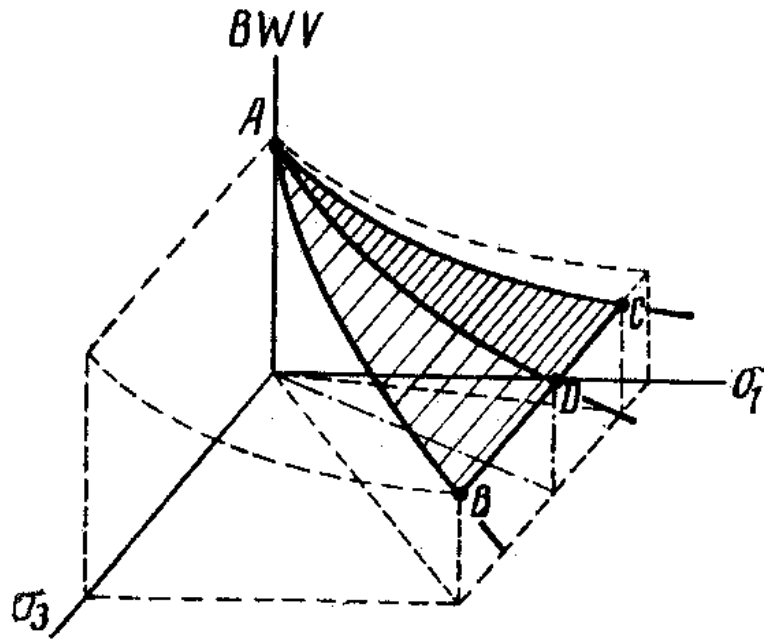


Рис. 1.6. Зв'язок між BWV та головними напруженнями в ґрунті [107]

1.3. Формалізація ґрунту, як об'єкту, з яким взаємодіють робочі органи

Для аналізу взаємодії робочих органів з ґрунтом останній повинен бути формалізований у вигляді моделі того чи іншого середовища таким чином, щоб властивості цієї моделі найбільш повно відповідали властивостям реального ґрунту.

Проблемі взаємодії ґрунтообробних робочих органів із ґрунтом присвячена значна кількість робіт. Великої уваги заслуговує класифікація моделей взаємодії, зроблена проф. А. С. Кушнар'євим. [97, 98]. В основу цієї класифікації покладено форму представлення моделі будови ґрунту й види деформацій, які виникають в процесі взаємодії. Такий підхід дозволяє згрупувати зроблені багатьма дослідниками спроби розробити ті чи інші моделі взаємодії різних робочих органів за певними ознаками. Це полегшує аналіз виконаних досліджень і дозволяє зробити необхідні висновки. По

формі представлення моделі побудови ґрунту всі роботи, які стосуються взаємодії робочих органів із ґрунтом, можна розділити на чотири групи:

- 1) тверде тіло;
- 2) суцільне пружне середовище;
- 3) суцільне нестискуване сипке середовище;
- 4) суцільне пружно-в'язко-пластичне середовище.

При цьому, в якості аналітичного апарату використовуються: методи механіки твердого тіла, методи теорії пружності та її спрощені варіанти, методи механіки ґрунтів, методи теорії подібності та розмірностей, методи статистичної механіки.

1) *Модель ґрунту у вигляді твердого тіла* [41,63,65,103,141,142].

Це найбільш поширене представлення ґрунту при аналізі взаємодії з ним робочих органів ґрунтообробних машин. При розгляді таких моделей зовнішні сили з боку робочих органів зводяться до рівнодіючої, яка прикладена в точці. При цьому робиться припущення, що в напрямку дії рівнодіючої в ґрунті розвивається тріщина, а руйнування твердого тіла відбувається тоді, коли головний вектор перевищує критичне значення. Таке перетворення системи не змінює результати дії сил на тіло, коли його представляють як абсолютно тверде.

Таким чином, у розрахунковій схемі та її аналітичних наслідках відсутнє явище деформування ґрунту. Крім того, такий аналіз не дозволяє пояснити зміни фізико-механічних властивостей ґрунту. При зведенні дії на поверхню робочого органа до рівнодіючої неможливо визначити вплив геометричної форми поверхні на показники якості його обробітку та його енергомісткість.

2) *Модель ґрунту у вигляді суцільного пружного середовища* [11,68,210,211,213].

При використанні моделі ґрунту у вигляді суцільного пружного середовища, ґрунт схематизується як однорідне, ізотропне, суцільне, пружне середовище. Деформації, які виникають під дією робочого органу, вважаються прямо пропорційними напруженням у межах закону Гука й не залежать від часу деформування (тобто швидкості руху деформатора). Робиться припущення, що після припинення дії зовнішніх сил густина ґрунту повертається до вихідної. При розробці розрахункової схеми вводиться спрощення в геометрії реального об'єкта. Скиба ґрунту розглядається як брус (балка), і використовується гіпотеза про плоскі перерізи. Розподілений тиск робочого органу на скибу часто замінюється зосередженою силою (реакцією робочого органу на скибу ґрунту).

При побудові моделі ґрунту у вигляді пружного суцільного середовища в розрахункові залежності можуть бути введені такі властивості ґрунту, як опір його стисканню та зсуву.

Проте, застосування методів теорії пружності пов'язане із введенням цілого ряду припущень і гіпотез. Так, теорія пружності розглядає задачі, в яких найбільш суттєвими є пружні (зворотні) властивості тіл. Крім того, теорія пружності розглядає лише однорідні суцільні середовища в межах дії закону Гука. Реальні матеріальні схеми базуються на однорідному суцільному середовищі незалежно від особливостей їх мікроструктури.

Отже, модель ґрунту у вигляді пружного середовища дозволяє пояснити деякі особливості його деформації під дією робочого органу. Проте, введення припущень про заміну розподіленої сили рівнодіючою приводить до висновку, що геометрія робочого органу не повинна впливати на вигляд деформованого стану та тяговий опір, що в свою чергу, суперечить експериментальним даним. Крім того, теорія пружності передбачає незалежність об'ємної маси від дії напружень, що також не відповідає реальності. Слід зазначити також, що застосування теорії пружності не

дозволяє пояснити зміну енергомісткості обробітку як функції швидкості деформацій.

3) *Модель ґрунту у вигляді суцільного нестискуваного сипкого середовища* [20,21,24,133,140,177].

Типова розрахункова схема при побудові такої моделі зводиться до того, що дія робочого органу призводить до утворення блока ґрунту, обмеженого поверхнею ковзання, що задовольняє рівнянням міцності. В задачах про граничну рівновагу ґрунтового масиву визначаються умови рівноваги під дією зовнішніх сил і сили ваги сколотого ґрунту.

При побудові моделі ґрунту у вигляді суцільного нестискуваного середовища ґрунт розглядається як суцільне однорідне ізотропне середовище. При цьому робиться припущення про те, що опір ґрунту не залежить від величини деформацій. Опір зсуву визначається як лінійна функція нормального напруження. Рух по поверхні зсуву відбувається після подолання моменту рівноваги без зупинки й без подальшого збільшення напружень у зоні поверхні ковзання (пластична течія матеріалу). Сколотий масив ґрунту розглядається як абсолютно тверде тіло.

Більшість дослідників при побудові моделі ґрунту у вигляді сипкого середовища використовують метод В. В. Соколовського [177].

За цим методом, ґрунт розглядається як середовище, в якому опір зсуву по даній площині є лінійною функцією нормального напруження. Межа міцності в цьому випадку залежить лише від величини зсувних напружень і не залежить від нормальних напружень на поверхні ковзання. Фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями не враховують пружних властивостей ґрунту та його в'язкість, яка суттєво впливає на зміну напружень при зміні швидкості деформацій.

Для розв'язання конкретних задач граничної рівноваги сипкого середовища за методом В. В. Соколовського треба визначити цілий ряд

показників для точок однієї з границь області граничної рівноваги й складові граничного тиску на поверхні контакту ґрунту з робочим органом. Розв'язання таких задач є досить складним і громіздким. Крім того, використання теорії граничної рівноваги в задачах взаємодії ґрунтообробних робочих органів із ґрунтом не може пояснити ряд суттєвих явищ, які при цьому виникають. Згідно теорії граничної рівноваги, визначається лише поверхня руйнування (ковзання). При цьому передбачається, що всередині об'єму скиби, що охоплена поверхнею ковзання, не відбувається зміни густини (пористості) *BWV*.

4) *Модель ґрунту у вигляді суцільного пружно-в'язко-пластичного середовища* [14,39,43,108,109,155,156,208]

Серед усіх моделей будови реальних середовищ лише модель деформованого суцільного середовища відображає характер зміни густини (пористості, *BWV*) та інших технологічних властивостей ґрунту в процесі дії робочих органів ґрунтообробних машин.

Використання гіпотези про суцільну будову ґрунту передбачає наявність внутрішніх сил (зв'язків) між елементарними частками. Внутрішні зв'язки між елементарними ґрунтовими частками зумовлені між собою такими факторами:

- питомою поверхнею ґрунту;
- станом ґрунтових колоїдів;
- властивостями води, зв'язаної первинними й вторинними ґрунтовими частками.

Саме наявність механічних, фізичних і хімічних зв'язків між окремими твердими частками ґрунту дозволяє прийняти за модель його будови суцільне деформоване середовище.

Внутрішні зв'язки всіх типів ґрунтів (за механічним складом) мають одну й ту саму природу, зумовлену властивостями капілярної та слабо-зв'язаної води. Особливості механічного, хімічного та мінералогічного складу впливають на інтенсивність внутрішніх зв'язків. Тому механізм деформації та руйнування всіх типів ґрунтів у діапазоні вологостей, які не перевищують повного заповнення капілярів, однаковий, а кількісні характеристики реологічних властивостей обумовлюються механічними, мінералогічними і хімічними властивостями ґрунту, рівнем вологості та його біологічною природою [42,43,107,134].

Ґрунту, як природному середовищу, властива статистична неоднорідність будови. Це призводить до нерівномірного розподілу реологічних властивостей і локальному відхиленню від теоретичного розподілу напружень і деформацій за об'ємом, який деформується під дією зовнішнього навантаження. Крім того, в ґрунті нерівномірно розподілені залишкові напруження, які утворені попередньою дією робочих органів і ходових систем машинно-тракторних агрегатів [39,107].

В дійсності, в об'ємі, обмеженому поверхнею ковзання, відбуваються пружні й залишкові деформації. Теорія граничної рівноваги в деякій мірі може бути використана для розв'язання задач, пов'язаних із дією пасивних робочих органів на ґрунт (при мінімальних швидкостях деформацій), і зовсім не придатна для активних робочих органів.

Формалізація взаємодії на основі методів теорії подібності та розмірностей.

Методи теорії подібності та розмірностей знайшли досить широке використання для формалізації процесів взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом [4,81,114,123]. При формалізації таких процесів використовуються три види подібності, а саме фізичної, механічної та геометричної. В усіх випадках застосування такого виду формалізації

розвиток таких методів веде до суттєвих ускладнень моделей, що застосовуються, але не дає можливості пояснити фізику процесів взаємодії й розробити моделі, що пов'язували би параметри та режими роботи ґрунтообробних робочих органів і властивостей ґрунту з можливими змінами його фізико-механічних властивостей.

Таким чином, всі розглянуті моделі будови ґрунту не можуть дати пояснення факту зміни технологічних властивостей ґрунту в процесі дії на нього робочих органів ґрунтообробних машин, в тому числі й такого, найбільш інтегрованого показника, як густина ґрунту. Ці теорії не дозволяють встановити вплив геометричних розмірів та форм робочих органів, а також режимів їх роботи на зміну фізико-механічних властивостей ґрунту та енергомісткість його обробітку. Більше того, застосування розглянутих вище моделей ґрунту не дозволяє пояснити зміни таких показників, як структура та текстура ґрунту (на зміну яких впливає вигляд напружено-деформованого стану), інших важливих показників фізико механічних властивостей із позиції родючості ґрунту.

1.4. Загальна модель зміни властивостей ґрунту під дією деформатора

Результатом процесу обробітку ґрунту є зміна його фізико-механічних властивостей. Ураховуючи механічну дію робочих органів ґрунтообробних машин на ґрунт, можна змінити функціонально зв'язані між собою густину, пористість та питомий об'єм твердої фази. В залежності від мети обробітку ґрунту, ці величини необхідно змінювати в сторону збільшення або зменшення [22, 58, 124].

Механічний обробіток ґрунту здійснюється за рахунок взаємодії робочого органу ґрунтообробної машини з ґрунтовим середовищем. Для формалізації цієї взаємодії необхідно виділити два послідовних процеси. Перший – це створення напружено-деформованого стану й другий –

забезпечення переміщення ґрунту в просторі та часі. Як в першому, так і в другому процесі, відбуваються зміни фізико-механічних властивостей ґрунту.

В першому процесі під дією деформатора в ґрунті виникають напруження. Напруження середовища викликають в ньому деформації об'ємні (деформації першого роду) та формозміни, або зсувні (деформації другого роду). При цьому, перший процес (створення напружено-деформованого стану) слід розділити на дві фази – фазу малих деформацій до порушення суцільності й руйнування зв'язків між ґрунтовими частинками – фазу руйнування суцільності й пластичної течії.

Напруження, які створює робочий орган, функціонально зв'язані з деформаціями $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = f(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \psi(x_i))$. Цей функціональний зв'язок має вигляд, який залежить від пружності, в'язкості та граничного напруження руйнування міцності. Умовно вплив співвідношень компонентів напружень (деформацій) на зміну властивостей можна виразити графічно через функцію BWV (рис. 1.4), яка залежить від гідростатичних напружень σ_m та максимальних дотичних напружень τ_{\max} . Ці напруження виражаються через головні таким чином [17,43,83,116]:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3); \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (1.3)$$

де σ_1, σ_3 – найбільше та найменше головне напруження, відповідно.

Деформації, які відбуваються в ґрунті, можуть бути зворотними в межах дії закону пружності Гука та залишковими при виконанні умови Сен-Венана [43,80,107,155].

Під дією гідростатичної складової напружень відбуваються об'ємні деформації (зворотні або залишкові), при яких змінюються густина,

пористість та BWV . В залежності від знаку величини σ_m , густина та пов'язані з нею величини збільшуються або зменшуються. Крім того, зміна густини ґрунту може відбуватися під дією зсувних деформацій (дилатація) [19,43,49,50].

Елементарний об'єм ґрунту (в подальшому для простоти – точка) під дією робочого органу знаходиться в напруженому стані, який повністю визначається повним тензором напружень [116,132].

1.5. Аналіз критеріїв міцності ґрунту

Для визначення умов порушення суцільності ґрунту або настання пластичної течії необхідно визначити критерії, які характеризують критичний стан середовища. Умови настання пластичної течії або порушення суцільності характеризуються певними співвідношеннями значень напружень або деформацій (критеріями міцності).

До критеріїв міцності ставляться такі основні вимоги [48,125,129,155]:

- критерій повинен давати умови руйнування (початку течії) для елемента ґрунту, який знаходиться в довільному напруженому стані;
- в аналітичний вираз критерія міцності разом із тензором напружень повинні входити скалярні або тензорні величини, що характеризують властивості ґрунту;
- критерій повинен враховувати різницю границь міцності на стискання та на розтягнення;
- критерій міцності повинен мати форму інваріанта, тобто не залежати від вибору системи координат.

У загальному випадку критерій міцності може бути представлений у вигляді гіперповерхні дев'ятимірного простору компонентів напружень $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$. Ця поверхня повинна бути опуклою у відповідності з

постулатом Друкера (наявність пластичних деформацій до початку руйнування).

Для визначення адекватної для ґрунту теорії міцності слід проаналізувати найбільш поширені критерії.

Для ізотропних середовищ використовується теорія найбільших нормальних напружень і лінійних деформацій.

Критерій найбільших нормальних напружень.

Пластичні деформації або руйнування крихких матеріалів настають тоді, коли найбільше головне напруження досягає деякого граничного значення:

$$|\sigma_1| = \sigma_T \Rightarrow |\sigma_1| \leq [\sigma]. \quad (1.4)$$

Цей критерій не відображує умови переходу в пластичний стан та його руйнування, що характерні для процесу обробітку ґрунту. Для умов складного напруженого стану критерій використовувати не можна, оскільки він не відображає співвідношення між компонентами або між головними напруженнями.

Критерій найбільших лінійних деформацій.

Згідно з цим критерієм, руйнування відбувається тоді, коли найбільша за абсолютною величиною лінійна деформація досягає деякого граничного значення (гіпотеза Маріота). Для середовища. фізичні рівняння стану якого описуються законом Гука, руйнування відбувається при виконанні умови [125,129,131]:

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_B}{E} \quad (1.5)$$

Звідки розрахункова формула має вигляд:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (1.5.a)$$

Цей критерій застосовується в інженерній практиці при аналізі складного напружено-деформованого стану середовища в умовах всебічного розтягнення або всебічного стискання. Крім того, критерій не враховує нерівність граничних напружень стискання та розтягнення, які характерні для ґрунту. Для більш складних випадків навантаження критерій також не дає адекватних результатів. Для аналізу напружено-деформованого стану ґрунту цей критерій використовувати не можна, оскільки граничні напруження руйнування у випадку розтягнення та стискання суттєво відрізняються.

Критерій найбільших дотичних напружень (критерій Кулона, Нав'є, Треска, Бельтрамі) [43,47].

У відповідності з цим критерієм, пластичні деформації середовища з'являються тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає деякого граничного значення:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \geq [\tau]. \quad (1.6)$$

Для випадку чистого розтягнення критерій приводиться до вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_T}{2}, \quad (1.6.a)$$

Таким чином, пластична деформація повинна починатися при виконанні умови:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \geq [\sigma]. \quad (1.6.6)$$

В системі координат σ_1, σ_3 граничне рівняння (1.6.6) має вигляд прямої II – II (рис. 1.7). Пряма I – I обмежує область можливих напружених станів, які задовольняють умові $\sigma_1 \gg \sigma_3$ (стан, наближений до чистого стискання, або стан розтягнення). Заштрихована частина площі характеризує область напружених станів, при яких відсутні пластичні деформації. У просторі напружень критерій представляє собою шестигранну призму, вісь якої нахилена під кутом до головних осей напружень.

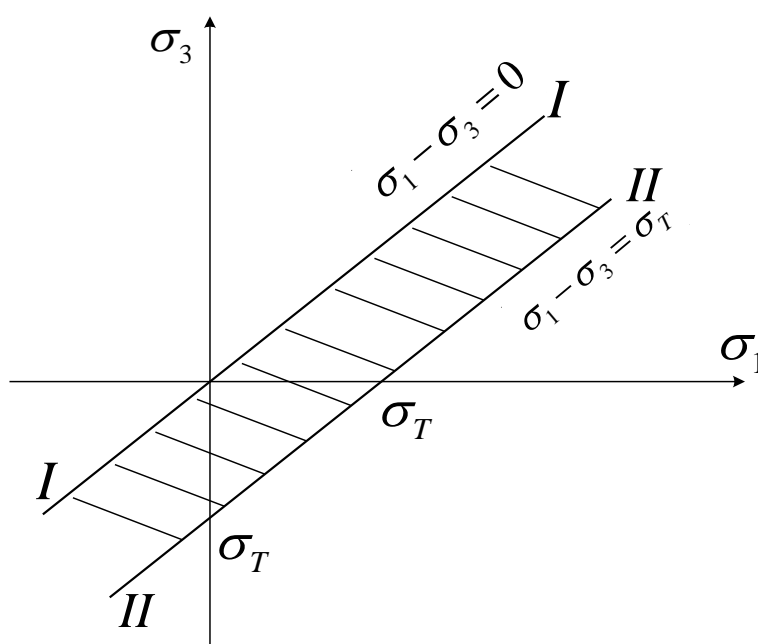


Рис. 1.7. Критерій найбільших дотичних напружень

Цей критерій широко застосовують для аналізу складних напружено-деформованих станів середовищ. Однак для випадків відмінних напружень розтягнення та стискання критерій неадекватний, тобто для ґрунту не прийнятний.

Енергетичні критерії.

Середовище переходить у стан пластичного деформування у випадку, коли повна *питома енергія деформації* досягає деякого граничного значення (гіпотеза Бельтрамі) [184,192].

Для середовища до настання пластичної течії рівняння повної питомої енергії деформації має вигляд:

$$A = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz} + \tau_{zy} \varepsilon_{zy}; \quad (1.7)$$

для випадку чистого розтягнення:

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}; \quad (1.7.a)$$

для випадку складного напруженого стану:

$$A = \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) \right] + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) \quad (1.7.6)$$

Розрахункова формула має вигляд:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) \leq [\sigma]^2. \quad (1.7.В)$$

Залежність (1.7.в) адекватна другому інваріанту тензора напружень. Цей критерій має дуже складну функцію для визначення, не підтверджується результатами експериментальних досліджень і має лише історичне значення.

Критерій *питомої енергії формозміни*. Пластичний стан настає при досягненні питомою енергією формозміни певного граничного значення (гіпотеза Губера-Генки-Мізеса) [48,80,119]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2)} \leq [\sigma]. \quad (1.8)$$

У просторі напружень критерій представляє собою круговий циліндр.

Критерій побудований на основі аналізу інтенсивності дотичних напружень і не враховує впливу нормальних напружень на площадках ковзання. Цей критерій узгоджується з результатами експериментальних досліджень при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu \rightarrow 0.5$ (середовище близьке до рідини). Застосування енергетичних критеріїв для аналізу умов міцності ґрунту не дає адекватних результатів [19,43,49].

Критерій Мора.

Критерій базується на припущенні, що середнє головне напруження несуттєво впливає на настання граничного стану й може не враховуватися. Критерій має вигляд [48,63]:

$$\sigma_1 - K\sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad K = \frac{\sigma^p}{\sigma^c}, \quad (1.9)$$

де σ^p, σ^c – граничні напруження при чистому розтягненні та чистому стисканні, відповідно.

Критерій Мора враховує різницю граничних напружень пластичності при розтягненні та стисканні й широко використовується для аналізу напруженого стану середовища для плоских задач. При аналізі просторового напруженого стану критерій не може використовуватись через припущення про несуттєвість середнього головного напруження.

До відносно нових критеріїв міцності належать критерії Шлейхера, Баландіна, Миродюбова, Янга і т.д.

Критерій Шлейхера.

За критерій міцності середовища, яке чинить неоднаковий опір стисканню та розтягненню, повинна бути прийнята величина повної питомої енергії деформації, причому граничне її значення повинно бути функцією середнього напруження [43,125]:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (1.10)$$

При припущенні вигляду залежності питомої енергії деформації від σ_{cp} лінійною, Шлейхер запропонував умову міцності у вигляді:

$$\begin{aligned} & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ & + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) + \\ & + (\sigma^c - \sigma^p)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma^c\sigma^p \end{aligned} \quad , (1.10.a)$$

звідки границя міцності на зсув:

$$\tau_B = \sqrt{\frac{\sigma^p\sigma^c}{2(1+\nu)}} \quad (1.10.6)$$

Поверхня критерію в просторі напружень має вигляд еліпсоїда (рис. 1.8)

При $\sigma^p = \sigma^c$ критерій зводиться до критерію повної питомої енергії деформації.

Критерій Шлейхера не знайшов широкого застосування через недостатню адекватність результатам експериментальних досліджень руйнування ґрунту [104,211,213].

Критерій П.П.Баландіна.

Для однорідного ізотропного середовища мірою міцності є питома потенціальна енергія, яка зв'язана зі зміною форми тіла, причому граничний стан її не постійний, а залежить від напруженого стану, а саме, лінійно від σ_{cp} , а два параметри $\sigma^p = \sigma^c$ визначаються з дослідів [48,125].

Ця умова може бути записана у вигляді:

$$A_{\phi} = \bar{A}_{\phi} \quad (1.11)$$

$$\text{де } A_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + \right. \\ \left. + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) \right];$$

$$\bar{A}_{\phi} = a\sigma_{cp} + b = \frac{a}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + b. \quad (1.11.a)$$

Для одновісного розтягнення:

$$\frac{1+\nu}{3E}(\sigma^p)^2 = a\frac{\sigma^p}{3} + b \quad (1.11.б)$$

Для одновісного стискання:

$$\frac{1+\nu}{3E}(\sigma^c)^2 = -a\frac{\sigma^c}{3} + b \quad (1.11.в)$$

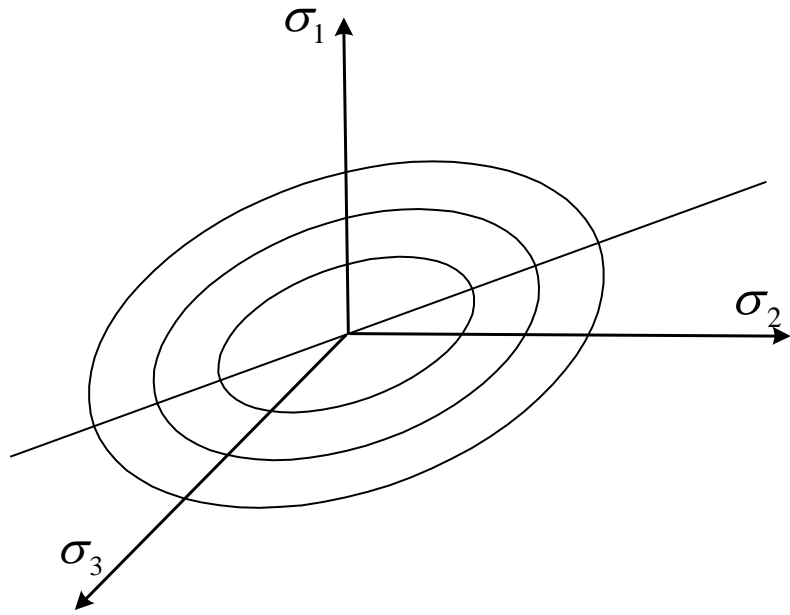


Рис. 1.8 . Критерій Шлейхера у просторі головних напружень

При розв'язку спільно рівнянь (1.11.б) та (1.11.в) знаходяться значення:

$$a = \frac{1+\nu}{E}(\sigma^p - \sigma^c); \quad b = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma^p \sigma^c). \quad (1.11.г)$$

У розгорнутому вигляді критерій Баландіна за умови (1.11.г) має вигляд:

$$\begin{aligned} & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \\ & \quad + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) - \\ & \quad - (\sigma^p - \sigma)^c (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma^c \sigma^p \end{aligned} \quad (1.11.д)$$

Границя міцності на зсув:

$$\tau_b = \sqrt{\frac{\sigma^p \sigma^c}{3}}. \quad (1.11.e)$$

За умов $\sigma^p = \sigma^c$ критерій зводиться до критерію міцності енергії формозміни Губера-Генки-Мізеса.

У просторі головних напружень поверхня критерію має вигляд параболоїда.

Застосування цього критерію для різних середовищ дає досить високу адекватність. Нажаль, перевірки адекватності критерію для визначення міцності ґрунту виявити не вдалось.

Критерій Миролюбова І. М.

Цей критерій представляється у вигляді полінома [48,125]:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma^p + \sigma^c)}{8\sigma^p \sigma^c} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \right. \\ & \left. + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) \right] - \\ & - \frac{(\sigma^p - \sigma^c)}{4\sigma^p \sigma^c} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \\ & + (\sigma^c - \sigma^p)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma^c \sigma^p \end{aligned} \quad ; (1.12)$$

$$\tau_B = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sigma^p \sigma^c}{\sigma^p + \sigma^c}}. \quad (1.12.a)$$

У просторі напружень критерій є однополостним гіперболоїдом. Ця поверхня не має точок перетину зі своєю віссю, а це означає, що міцність, як при всебічному розтягненні, так і всебічному стисканні, необмежена. Поверхня має від'ємну кривизну, що суперечить постулату Друкера. Тому цей критерій не знайшов застосування.

Критерій Янга Ю. І.

Цей критерій представляє собою поліном другого ступеня, симетричного відносно всіх трьох головних напружень (остання вимога витікає з умов ізотропності матеріалу):

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + a - \\ & - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c \quad , \quad (1.13) \end{aligned}$$

де a, b, c – емпіричні коефіцієнти, які знаходяться з експериментів на одновісне розтягнення, одновісне стискання та чистий зсув.

Розтягнення:

$$2(\sigma^p)^2 + a(\sigma^p)^2 + b\sigma^p = c. \quad (1.13.a)$$

Стискання:

$$2(\sigma^c)^2 + a(\sigma^c)^2 - b\sigma^c = c. \quad (1.13.б)$$

Зсув:

$$2\tau_B^2 = c. \quad (1.13.в)$$

Спільний розв'язок цих рівнянь дає:

$$a = \frac{6(\tau_B)^2 - 2\sigma^p \sigma^c}{\sigma^p \sigma^c}; b = \frac{6(\tau_B)^2 (\sigma^p - \sigma^c)}{\sigma^p \sigma^c}; c = 6(\tau_B)^2. \quad (1.13.г)$$

За умови $\tau_B = \sqrt{\frac{\sigma^p \sigma^c}{3}}$ (а) – цей критерій зводиться до критерію

Баландіна П. П.

За умови $\tau_B = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sigma^p \sigma^c}{\sigma^p + \sigma^c}}$ (б) – цей критерій зводиться до

критерію Миролюбова І. М.

За умови $\sigma^p = \sigma^c = \sigma_B, \tau_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{3}}$ (в) – цей критерій зводиться до

критерію питомої енергії формозміни.

Таким чином, поверхні критерію в просторі головних напружень можуть бути різними: параболоїд, гіперболоїд або циліндр. Відповідно й адекватність цього критерію міцності залежить від умов (а), (б), (в).

В цілому, проблема вибору критерію міцності зводиться до визначення деякої функції, наприклад вигляду:

$$K = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) \quad (1.14)$$

Функція **Ошибка! Источник ссылки не найден.** за граничних станів повинна зберігати своє значення K незалежно від співвідношення компонентів тензора напружень при навантаженні.

Всім вимогам, які ставляться до критерію міцності, може відповідати **критерій, запропонований Лебедевим А. О.** [111]:

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 = \sigma^P, \quad (1.15)$$

де χ – параметр, який характеризує ступінь відповідальності за мікроруйнування зсувними деформаціями, що створюють сприятливі умови для розпушення матеріалу та утворенню тріщин: $\chi = \frac{\sigma^P}{\sigma^c}$,

де σ_i – інтенсивність напружень, σ_1 – максимальне нормальне напруження:

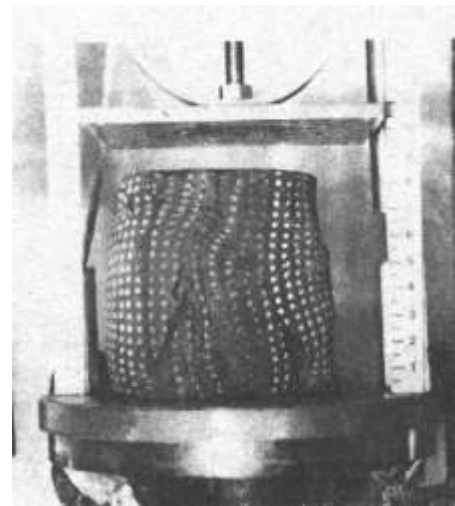
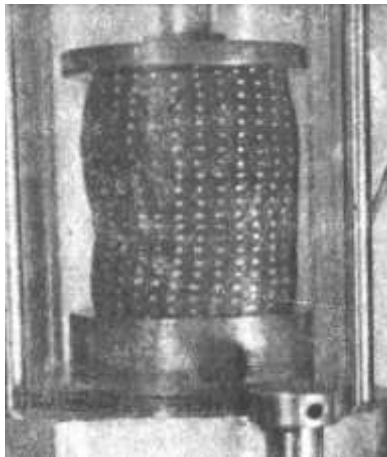
$$\sigma_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \tau_{oct}. \quad (1.15.a)$$

Поверхня, яка інтерпретує цей критерій у просторі головних напружень, є некруговим конусом із девіаторним перетином у вигляді опуклого криволінійного трикутника, в який вписана шестигранна піраміда, що інтерпретує критерій Кулона-Мора. Структура критерію узгоджується з сучасними уявленнями про два механізми руйнування – руйнування відривом та руйнування зсувом.

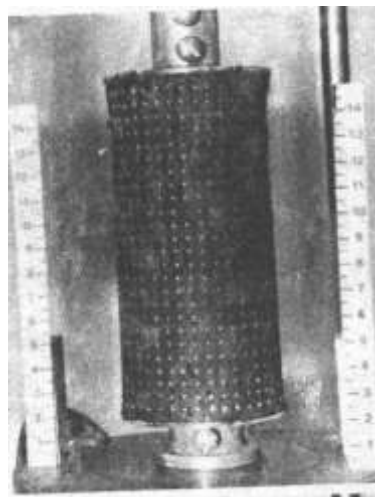
Для ґрунту критерій χ , що характеризує його зв'язність, має значення, яке знаходиться в межах $\chi = 6 \dots 8$ в залежності від типу та фізичного стану ґрунту [107,108,155,194,230]. Цей критерій близький за фізичною суттю до

критерію Мізеса-Шлейхера-Боткіна, який широко використовують для аналізу міцності ґрунту в механіці ґрунтів [19,49,121].

Характер руйнування суглинкового ґрунту за різних видів навантаження представлений на рис. 1.9. [230].



а



б

Рис. 1.9. Характер руйнування ґрунту за різних видів навантаження:
а – одновісне стискання; б – одновісне розтягнення

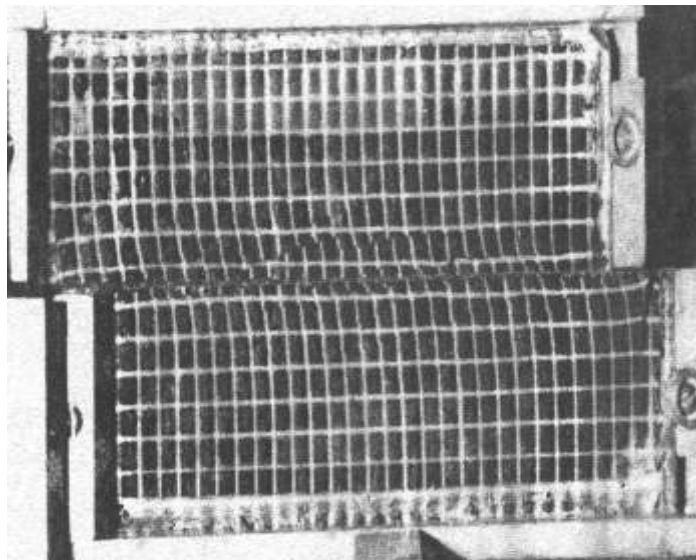
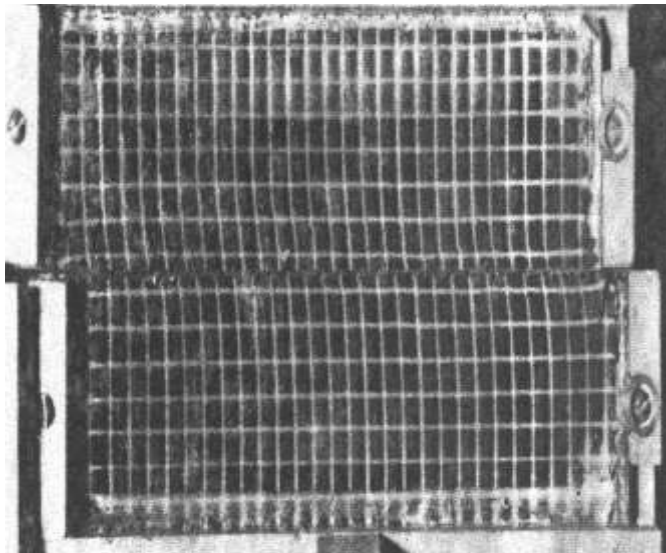


Рис. 1.10. Характер руйнування ґрунту при чистому зсуві

Аналіз вигляду руйнування ґрунту (рис. 1.9. - 1.10) свідчить про те, що ґрунт руйнується при стисканні, розтягненні та зсуві. При цьому превалює руйнування при розтягненні та зсуві, що відповідає критерію міцності Лебедева А. О.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ ДЕФОРМАТОРІВ ІЗ ГРУНТОМ

2.1. Рівняння механіки суцільних середовищ, критерії оцінки

2.1.1. Загальні положення

Під дією ґрунтообробних робочих органів у ґрунті виникає об'ємний напружено-деформований стан, який залежить від величини та розподілу зовнішнього навантаження й фізико-механічних властивостей ґрунту.

Напружено-деформований стан ґрунту, як суцільного середовища, в загальному випадку характеризується тензорами напружень і деформацій та їх інваріантами. Повний тензор напружень або деформацій являє собою суму гідростатичної та девіаторної їх складових:

$$T_n = T_h + T_d; D_n = D_h + D_d,$$
$$T_n = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}; T_h = \begin{Bmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{Bmatrix};$$
$$T_D = \begin{Bmatrix} \sigma_x \pm \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \pm \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \pm \sigma_{cp} \end{Bmatrix};$$
$$D_n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}; D_h = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{Bmatrix};$$

$$D_d = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x \pm \varepsilon_{cp} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \pm \varepsilon_{cp} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \pm \varepsilon_{cp} \end{array} \right\}; \quad (2.1.1.)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3},$$

де $\sigma_i, \tau_{ij}, \varepsilon_i, \gamma_{ij}, \sigma_{cp}, \varepsilon_{cp}$ – компоненти нормальних та зсувних напружень, лінійних та кутових деформацій, а також гідростатичні напруження та об’ємні деформації, відповідно.

Інваріанти тензорів напружень і деформацій, що не залежать від положення системи координат, в якій розглядається напружено-деформований стан, мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_{2\sigma} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2; \\ I_{3\sigma} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_z \tau_{xy}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2; \\ I_{1\varepsilon} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_{2\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{xz}^2; \\ I_{3\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz} - \varepsilon_x \gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{xz}^2. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

У загальному випадку напружено-деформований стан суцільного середовища може бути визначений на основі вирішення трьох груп рівнянь.

Перша група включає статичні рівняння рівноваги та умов на поверхні:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \bar{X}; \quad \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l = \bar{Y};$$

$$\sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m = \bar{Z}, \quad (2.1.3)$$

де l, m, n – спрямовуючі косинуси зовнішньої нормалі до поверхні, яка обмежує середовище.

Друга група рівнянь включає геометричні рівняння: рівняння зв'язку переміщень із деформаціями (рівняння Коші) та рівняння суцільності середовища (характеризують сумісність та нерозривність деформацій).

Для першої фази деформацій (до настання пластичних незворотних деформацій):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.1.4)$$

де u, v, w – компоненти переміщень точок середовища.

Для другої фази деформацій (пластична течія):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right); \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right); \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right); \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (2.1.5)
 \end{aligned}$$

Для вирішення задач взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом складовими другого порядку в рівняннях (2.1.5) можна нехтувати (таке спрощення вважається коректним [16,80,83]), оскільки деформації ґрунту, при яких настає пластична течія, на один – два порядки нижчі за одиницю [43,108].

Рівняння суцільності середовища:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2};$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.1.6)$$

Для швидкостей деформацій $\dot{\varepsilon}_{i,j}, \dot{\gamma}_{i,j}$ справедливі вирази (2.1.4-2.1.6), в яких замість переміщень входять компоненти швидкостей переміщень $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$.

Третя група рівнянь – це фізичні рівняння, які характеризують суцільне середовище та містять функціональні зв'язки напружень із деформаціями.

Ця група рівнянь може бути представлена реологічними рівняннями стану ґрунту.

Наведені рівняння разом із фізичними, включають 15 невідомих. Розв'язок рівнянь (2.1.3)- (2.1.6) у сукупності з фізичними рівняннями зв'язку напружень із деформаціями можна виконати різними способами, в

залежності від того, які величини прийняті за невідомі, або в залежності від початкових умов:

– розв’язок у напруженнях (швидкостях переміщень), коли на поверхні задані напруження, – пряма задача:

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), ;$$
$$\tau_{xy}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z), \tau_{zy}(x, y, z)$$

– розв’язок у переміщеннях (швидкостях переміщень), коли на поверхні задані переміщення (швидкості переміщень), – обернена задача:

$$\dot{u}(x, y, z), \dot{v}(x, y, z), \dot{w}(x, y, z);$$

– змішана задача, коли відомі деякі з переміщень (швидкостей переміщень) та деякі з напружень.

Умови постановки задач взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин відповідають постановці оберненої задачі, оскільки початковими умовами є кінематика робочого органу ґрунтообробної машини.

2.1.2. Фізичні рівняння зв’язку напружень із деформаціями в ґрунті

Для аналізу напружено-деформованого стану ґрунтового середовища, представленого у вигляді суцільного пружно-в’язко-пластичного середовища, необхідне використання фізичних рівнянь зв’язку напружень із деформаціями, що найбільш адекватно відображають реальний процес деформування ґрунту під дією напружень, які в ньому виникають.

Найбільш адекватною є формалізація ґрунту як суцільного середовища з властивостями пружності, в’язкості та пластичності [3,14,30,57,91,93,134,135,136,203,204]. Для виконання аналізу адекватності фізичних рівнянь зв’язку напружень із деформаціями ґрунту необхідно

визначити фізичні рівняння для цих механічних моделей. Фізичні рівняння для суцільного середовища в залежності від наявності таких властивостей, як в'язкість, пружність та пластичність, можуть бути представлені механічними моделями суцільного середовища, які складаються з трьох основних елементів: тіла Гука, тіла Н'ютона та тіла Сен-Венана (рис. 2.1) і мають такі зв'язки напружень із деформаціями:

тіло Н'ютона (рис. 2.1.а.):

$$\sigma_{ij}N = \mu \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \tau_{ij}N = \eta \dot{\gamma}_{ij}; \quad (2.1.7)$$

тіло Гука (рис. 2.1.б):

$$\sigma_{ij}H = K \varepsilon_{ij}, \quad \tau_{ij}H = G \gamma_{ij}, \quad K = \frac{2G(1-\nu)}{3(1-\nu)}; \quad (2.1.8)$$

тіло Сен-Венана (рис. 2.1.в.):

$$\sigma_{i,j}StV \leq \sigma_s, \quad \tau_{i,j}StV \leq \tau_s, \quad (2.1.9)$$

де σ_{ij}, τ_{ij} – компоненти напружень,

$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}$ – компоненти деформацій та швидкостей деформацій, відповідно,

σ_s, τ_s – граничне значення пластичності середовища,

V – коефіцієнт Пуассона,

G – модуль пружності при зсувних деформаціях,

K – об'ємний модуль пружності,

μ , η – модуль в'язкості об'ємних та зсувних деформацій, відповідно.

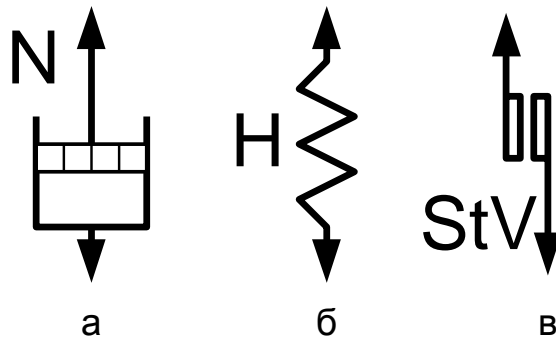


Рис. 2.1. Елементи механічних моделей суцільного середовища

Найбільш поширеними механічними моделями суцільного середовища є тіла Максвела, Бінгама, Кельвіна-Фойгта, Гольдштейна, Вялова та інші, більш складні, багатоелементні моделі. Графічне зображення таких механічних моделей наведено на рис. 2.2.

Ці моделі є послідовно або паралельно з'єднаними елементами тіл Гука, Н'ютона та Сен-Венана. При складанні механічних моделей у разі паралельного з'єднання елементів підсумовуються напруження для відповідних елементів, що входять в модель, а в разі послідовного з'єднання – деформації.

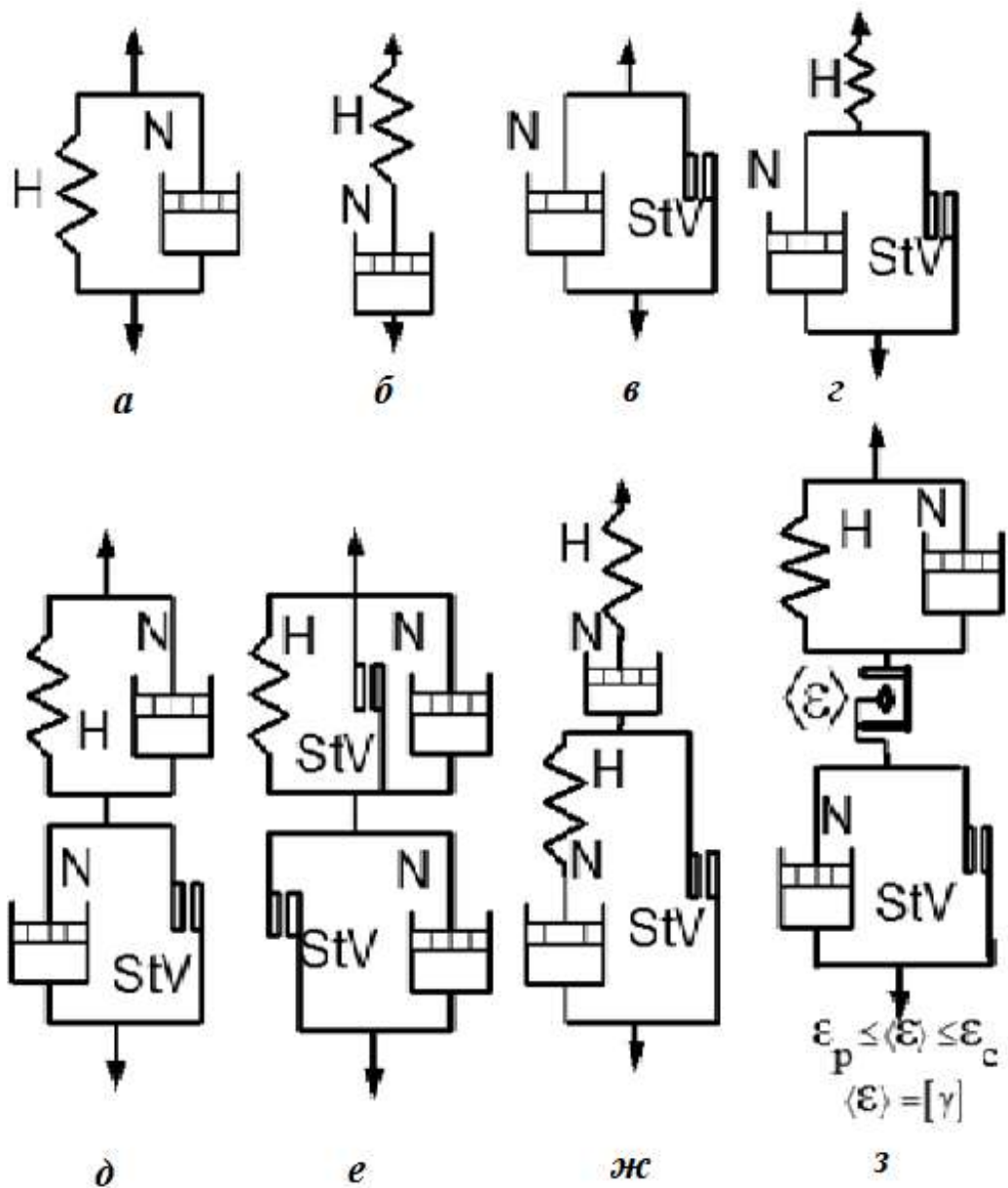


Рис. 2.2. Механічні моделі суцільного середовища: *a* – Кельвіна-Фойгта, *б* – Максвелла, *в* – Бінгама, *г* – Бінгама „Н” з послідовно з’єднаним елементом Гука, *д* – тіло Вялова, *е* – тіло Гольдштейна, *ж* – тіло Кушнарьова, *з* – тіло KV

Для побудови фізичних рівнянь для складних тіл необхідно виразити величини деформацій та їх похідні за часом із рівнянь (2.1.7)-(2.1.9).

$$\text{Для тіла Гука: } \varepsilon_{i,j} = \frac{(1-\gamma)\sigma_{i,j}}{2G(1+\gamma)}; \gamma_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{G} . \quad (2.1.10)$$

Значення деформацій для тіла Н'ютона визначаються шляхом вирішення рівнянь (2.1.7) відносно швидкостей деформацій та інтегрування їх за часом:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\mu}; \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}, \text{ звідки шляхом інтегрування:}$$

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{t\sigma_{i,j}}{\mu}; \gamma_{i,j} = \frac{t\tau_{i,j}}{\eta} . \quad (2.1.11)$$

Для тіла Кельвіна-Фойгта (пружно-в'язкого) "KF" = "H" || "N" (рис. 2.2. а) напруження визначаються шляхом підсумовування напружень для тіла Гука та тіла Н'ютона:

$$\sigma_{i,j} KF = \sigma_{i,j} H + \sigma_{i,j} N = \frac{2G(v+1)\varepsilon_{i,j}}{1-v} + \mu\dot{\varepsilon}_{i,j};$$

$$\tau_{i,j} KF = \tau_{i,j} H + \tau_{i,j} N = G\gamma_{i,j} + \eta\dot{\gamma}_{i,j},$$

звідки:

$$\varepsilon = -\frac{(-1+v)\sigma}{2G(1+v)} + E\left(\frac{2Gt(1+v)}{\mu(-1+v)}\right) C1; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} + E\left(\frac{Gt}{\eta}\right) C2,$$

постійні інтегрування визначаються з початкових умов, при $t = 0$:

$$C1 = -\frac{(-1+\nu)\sigma}{2G(1+\nu)}; \quad C2 = -\frac{\tau}{G},$$

тоді, з урахуванням значення постійної

інтегрування, вираз об'ємних деформацій для тіла Кельвіна-Фойгта матиме вигляд:

$$\varepsilon_{i,j} = -\frac{(-1+\nu)\sigma_{i,j} \left(-1 + E^{\left(\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)} \right)} \right)}{2G(1+\nu)}; \quad \gamma_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{G} - \frac{\tau_{i,j} E^{\left(\frac{Gt}{\eta} \right)}}{G} \quad (2.1.12)$$

Фізичне рівняння зв'язку напружень із деформаціями для тіла Кельвіна-Фойгта має вигляд:

$$\sigma_{ij}^{KF} = \frac{2G\varepsilon_{ij}(1+\nu)}{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}} \right) (-1+\nu)}; \quad \tau_{ij}^{KF} = \frac{\gamma_{ij}}{\left(\frac{1}{G} - \frac{E^{\frac{Gt}{\eta}}}{G} \right)} \quad (2.1.13)$$

Диференціювання за часом правих частин рівнянь (2.1.13) та подальше вираження з них напружень в явному вигляді дає залежності зв'язку напружень із швидкостями деформацій для тіла Кельвіна-Фойгта:

$$\sigma_{ij}^{KF} = E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}} \mu \dot{\varepsilon}_{ij}; \quad \tau_{ij}^{KF} = E^{\frac{Gt}{\eta}} \eta \dot{\gamma}_{ij}, \quad (2.1.14)$$

де t – час деформування.

Для тіла Максвелла (пружно-в'язкого) " M " = " H " – " N " (рис. 2.2. б) підсумовуються деформації (2.1.10) та (2.1.11):

$$\varepsilon M = \varepsilon H + \varepsilon N = \frac{(1-\nu)\sigma}{2G(1+\nu)} + \frac{t\sigma}{\mu}; \quad \gamma M = \gamma H + \gamma N = \frac{\tau}{G} + \frac{t\tau}{\eta}$$

Вираження з цих рівнянь значень напружень в явному вигляді дозволяє отримати вирази зв'язку напружень із деформаціями, а вираження значень напружень після диференціювання правих частин зазначених рівнянь – вирази зв'язку напружень із швидкостями деформацій для тіла Максвелла:

$$\sigma_{ij} M = \frac{2G\varepsilon_{ij}\mu(1+\nu)}{\mu - \mu\nu + 2Gt(1+\nu)}; \quad \tau_{ij} M = \frac{\gamma_{ij}}{\frac{1}{G} + \frac{t}{\eta}};$$

$$\sigma_{ij} M = \mu \dot{\varepsilon}_{ij}; \quad \tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} \quad (2.1.15)$$

Зв'язки напружень із деформаціями та їх швидкостями для тіла Бінгама „ H ” (пружно-в'язко-пластичного) " BH " = " H " – (" N " || " StV ") (рис. 2.2. г) визначаються підсумовуванням напружень тіл Сен-Венана та Н'ютона:

$$\sigma B = \sigma StV + \sigma N = \frac{\varepsilon \mu}{t} + \sigma_s; \quad \tau B = \tau StV + \tau N = \frac{\gamma \eta}{t} + \tau_s,$$

а виражені з цих рівнянь деформації підсумовуються з деформаціями для тіла Гука:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{(1-\nu)\sigma_{i,j}}{2G(1+\nu)} - \frac{t(-\sigma_{i,j} + \sigma_s)}{\mu}; \quad \gamma_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{G} - \frac{t(-\tau_{i,j} + \tau_s)}{\eta}$$

Вираження з останніх рівнянь значень напружень в явному вигляді дає фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями, а вираження значень напружень після диференціювання останніх рівнянь за часом – рівняння зв'язку напружень зі швидкостями деформацій для тіла Бінгама, які мають вигляд:

$$\sigma_{ij}^{BH} = -\frac{2G(1+\nu)(\varepsilon\mu - t\sigma_s)}{2Gt - \mu + 2Gt\nu + \mu\nu}; \quad \tau_{ij}^{BH} = \frac{G(\gamma_{ij}\eta + t\tau_s)}{Gt + \eta};$$

$$\sigma_{ij}^{BH} = \dot{\varepsilon}_{ij}\mu + \sigma_s; \quad \tau_{ij}^{BH} = \eta\left(\dot{\gamma}_{ij} + \frac{\tau_s}{\eta}\right). \quad (2.1.16)$$

Фізичні рівняння тіла Вялова (Лисика) (пружно-в'язко-пластичного) "G" = ("H" "II" "N") – ("N" "II" "StV") (рис. 2.2. д) являють собою послідовне з'єднання тіл Кельвіна-Фойгта та Бінгама. При цьому сума напружень тіл Кельвіна-Фойгта та Бінгама має вигляд:

$$\varepsilon V = \varepsilon KF + \varepsilon B = \frac{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right)(-1+\nu)\sigma}{2G(1+\nu)} + \frac{t(-\sigma + \sigma_s)}{\mu};$$

$$\gamma V = \gamma KF + \gamma B = \frac{\tau - E^{\frac{Gt}{\eta}}\tau}{G} + \frac{t(-\tau + \tau_s)}{\eta};$$

Вираження з цих рівнянь значень напружень в явному вигляді дає фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями, а вираження значень

напружень після диференціювання останніх рівнянь за часом – зв'язок напружень зі швидкостями деформацій для тіла Вялова:

$$\sigma_{ij}V = -\frac{2G(1+\nu)(-\varepsilon_{ij}\mu + t\sigma_s)}{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right)\mu(-1+\nu) + 2Gt(1+\nu)}$$

$$\tau_{ij}V = \frac{E^\eta G(\gamma_{ij}\eta + t\tau_s)}{\eta + E^\eta(Gt - \eta)}; \quad \sigma_{ij}V = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}\mu - \sigma_s}{-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}};$$

$$\tau_{ij}V = \frac{E^\eta(\dot{\gamma}_{ij}\eta - \tau_s)}{-1 + E^\eta} \quad (2.1.17)$$

Фізичні рівняння зв'язку складного тіла Гольдштейна (пружно-в'язко-пластичного) $G = (H \| N \| StV) - (N \| StV)$ (рис. 2.2. e) виражаються залежностями та отримуються шляхом підсумовування деформацій для тіла Бінгама та складного тіла $G1 = H \| N \| StV$. Деформації для останнього тіла отримуються з рівнянь:

$$\sigma G1 = \sigma H + \sigma N + \sigma StV = \frac{2G\varepsilon(1+\nu)}{1-\nu} + \mu\dot{\varepsilon} + \sigma_s;$$

$$\tau G1 = \tau H + \tau N + \tau StV = G\gamma + \eta\dot{\gamma} + \tau_s.$$

Рішення цих диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\varepsilon G1 = -\frac{(-1+\nu)(\sigma - \sigma_s)}{2G(1+\nu)} + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}} C1 \quad ; \quad \gamma G1 = -\frac{\tau - \tau_s}{G} + E^{-\frac{Gt}{\eta}} C2$$

Постійні інтегрування $C1$, $C2$ визначаються з початкових умов: при $t = 0 - \varepsilon G1 = \gamma G1 = 0$:

$$C1 = -\frac{(-1+\nu)(\sigma - \sigma_s)}{2G(1+\nu)} \quad ; \quad C2 = -\frac{\tau - \tau_s}{G}$$

З урахуванням постійних інтегрування, зв'язок деформацій із напруженнями для тіла $G1$ має вигляд:

$$\varepsilon G1 = \frac{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right)(-1+\nu)(\sigma - \sigma_s)}{2G(1+\nu)} \quad ;$$

$$\gamma G1 = \frac{E^{-\frac{Gt}{\eta}} \left(-1 + E^{-\frac{Gt}{\eta}}\right)(\tau - \tau_s)}{G}$$

Тоді деформації для тіла Гольдштейна матимуть вигляд:

$$\varepsilon G = \varepsilon G_1 + \varepsilon B = \frac{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right)(-1+\nu)(\sigma - \sigma_s)}{2G(1+\nu)} + \frac{t(-\sigma + \sigma_s)}{\mu} ;$$

$$\gamma G = \gamma G_1 + \gamma B = \frac{E^\eta(-\eta + E^\eta(Gt + \eta))(\tau - \tau_s)}{G_\eta} .$$

Вираження в явному вигляді напружень із останніх рівнянь дозволяє отримати фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями для тіла Гольдштейна, а вираження напружень після диференціювання останніх рівнянь за часом – зв'язку напружень зі швидкостями деформацій:

$$\sigma_{i,j} G = - \frac{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right) \mu(-1+\nu) \sigma_s + 2G(1+\nu)(\mu \varepsilon_{i,j} - t \sigma_s)}{-\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right) \mu(-1+\nu) + 2Gt(1+\nu)} ;$$

$$\tau_{i,j} G = \frac{-\eta \tau_s + E^{\frac{Gt}{\eta}} (G \eta \gamma_{i,j} + Gt \tau_s + \eta \tau_s)}{-\eta + E^{\frac{Gt}{\eta}} (Gt + \eta)}$$

$$\sigma_{i,j} G = - \frac{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right) \sigma_s + \mu \dot{\varepsilon}_{i,j}}{-\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}\right)} ;$$

$$\tau_{i,j} G = \frac{\tau_s + E^{\frac{Gt}{\eta}} \tau_s + E^{\frac{Gt}{\eta}} \eta \dot{\gamma}_{i,j}}{1 + E^{\frac{Gt}{\eta}}}$$

(2.1.18)

Для отримання фізичних рівнянь зв'язку напружень із деформаціями та швидкостями деформацій для тіла Кушнарьова (рис. 2.2. ж) (пружно-в'язко-пластичного) $\sigma_{KU} = (\sigma_H - \sigma_N) - ((\sigma_H - \sigma_N) \Pi_{StV})$ необхідно підсумувати напруження для тіл Максвела та Сен-Венана, а деформації, виражені з цієї суми, підсумувати з деформаціями тіла Максвела.

Напруження для тіла $(\sigma_H - \sigma_N) \Pi_{StV}$ мають вигляд:

$$\sigma_{K1} = \sigma_M + \sigma_{StV} = \frac{2G\varepsilon\mu(1+\nu)}{\mu - \mu\nu + 2Gt(1+\nu)} + \sigma_s ;$$

$$\tau_{K1} = \tau_M + \tau_{StV} = \frac{G\gamma\eta}{Gt + \eta} + \tau_s ,$$

звідки деформації цього тіла:

$$\varepsilon_{K1} = \frac{(\mu - \mu\nu + 2Gt(1+\nu))(\sigma - \sigma_s)}{2G\mu(1+\nu)} ; \quad \gamma_{K1} = \frac{(\eta + Gt)(\tau - \tau_s)}{G\eta} .$$

Підсумовування отриманих деформацій із деформаціями для тіла Максвела дозволяє отримати зв'язок деформацій із напруженнями для тіла Кушнарьова:

$$\varepsilon_{KU} = \varepsilon_{K1} + \varepsilon_M = \frac{(\mu - \mu\nu + 2Gt(1+\nu))(2\sigma - \sigma_s)}{2G\mu(1+\nu)} ;$$

$$\gamma_{K1} = \gamma_M + \gamma_{K1} = \frac{(\eta + Gt)(2\tau - \tau_s)}{G\eta} .$$

Вираження з останніх рівнянь значень напружень в явному вигляді дозволяє отримати фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями, а вираження напружень із продиференційованих за часом рівнянь – зв'язку напружень зі швидкостями деформацій для тіла Кушнарьова:

$$\begin{aligned}\sigma_{KU_{i,j}} &= \frac{-\mu(-1+\nu)\sigma_s + 2G(1+\nu)(\varepsilon_{i,j} + t\sigma_s)}{2(\mu - \mu\nu + 2tG(1+\nu))} ; \\ \tau_{KU_{i,j}} &= \frac{G\gamma_{i,j} + Gt\tau_s + \eta\tau_s}{2(tG + \eta)} ; & \sigma_{KU_{i,j}} &= \frac{1}{2}(\sigma_s + \mu\dot{\varepsilon}_{i,j}) ; \\ \tau_{KU_{i,j}} &= \frac{1}{2}(\tau_s + \eta\dot{\gamma}_{i,j}) .\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

Стосовно тіла Бінгама, слід зазначити, що в літературних джерелах зустрічається модель тіла Бінгама як в'язко-пластичного, так і пружно-в'язко-пластичного [39,141,144,161].

Модель тіла Вялова може трактуватись наступним чином. В першій фазі деформування ґрунту під дією робочого органу відбуваються лише пружно-в'язкі оборотні деформації, які представлені в моделі паралельним з'єднанням елементів "H"/"N", при цьому сумарне напруження в середовищі складається з напружень пружних та в'язких деформацій, а за умов перевищення границі міцності (пластичності) разом із зворотними пружно-в'язкими деформаціями відбуваються необоротні в'язко-пластичні деформації, при цьому сумарні напруження середовища не перевищують напружень в'язко-пластичних деформацій. Сумарні деформації середовища, представленого тілом Вялова, складаються з оборотних пружно-в'язких деформацій та необоротних в'язко-пластичних.

Модель тіла Кушнарьова складається із послідовно з'єднаних тіл Максвела та пружно-в'язко-пластичного тіла, яке являє собою паралельно

з'єднані тіла Максвела та Сен-Венана. Деформування ґрунту, представленого таким тілом в першій фазі пружно-в'язких деформацій, відбувається при напруженнях, які відповідають сумарним деформаціям пружним та в'язким. У першій фазі деформацій напруження мають лінійну залежність лише від швидкості деформування й не залежать від модуля пружності (2.1.8), що не відповідає реальному процесу. Тіло Максвела, яке в цій моделі послідовно з'єднане з пружно-в'язко-пластичним тілом, застосовується для формалізації деформування середовищ, у яких модуль в'язкості має однаковий порядок або більший за модуль пружності. У зворотному випадку наявність елемента Сен-Венана втрачає сенс. Для ґрунтів характерним є значне перевищення інтеграла модуля пружності $\int G dt$ за часом деформування ґрунту ($t \leq 0.1c$) робочим органом над модулем в'язкості η .

На основі викладеного, така модель не може вважатися адекватною для описання деформування ґрунту робочими органами ґрунтообробних машин.

Графічно залежності напружень від швидкостей деформацій та властивостей ґрунту для тіл, механічні аналоги яких представлені на рис. 2.2. а, б, в, г, д, е, ж, з, а рівняння зв'язку напружень із деформаціями описуються залежностями (2.1.12-2.1.19), представлені на рис. 2.3, 2.5-2.10.

Аналіз графіків фізичних рівнянь для різних тіл при значеннях модуля пружності, коефіцієнта в'язкості та граничного напруження зсуву, характерних для ґрунтів, дає підстави зробити висновок, що для розглянутих моделей існує лінійний зв'язок напружень зі швидкостями деформацій у широкому діапазоні їх змін. Причому, при значеннях швидкостей деформацій, близьких до нуля, напруження вже мають досить великі значення (рис. 2.3, 2.7, 2.8).

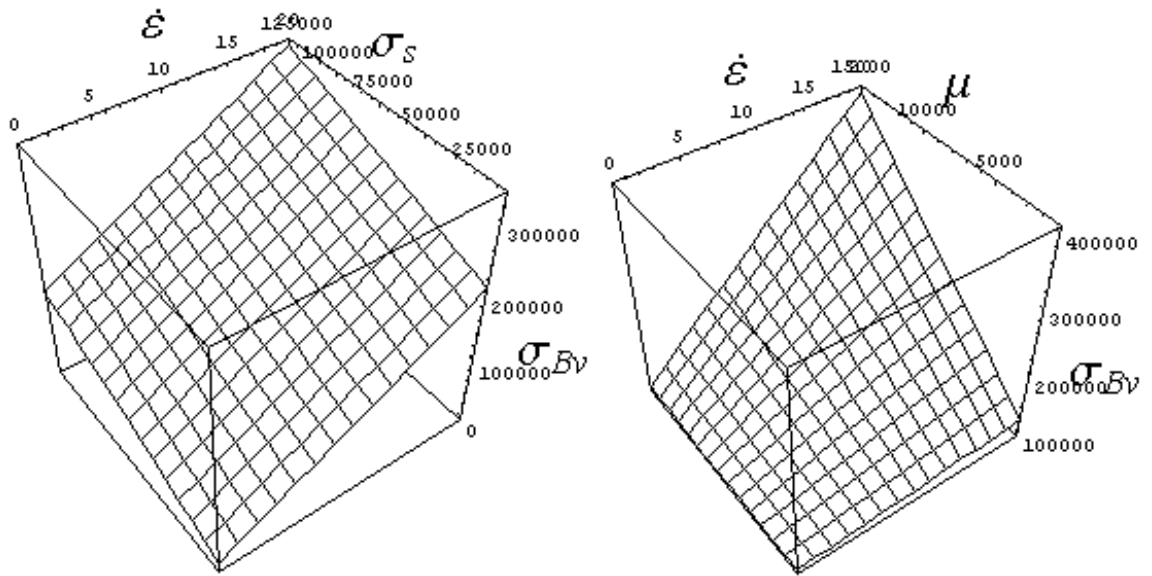


Рис. 2.3. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, граничного напруження пластичності σ_s та в'язкості μ для тіла Бінгама (рис. 2.2. в)

Напруження, які виникають у ґрунті у відповідності до цих моделей, зростають до нескінченності, тобто в цих моделях відсутня або перша фаза пружно-в'язких деформацій, або друга фаза в'язко-пластичних деформацій, характерних для ґрунту. Таким чином, приведені моделі зв'язку напружень із деформаціями (швидкостями деформацій) не можуть адекватно описувати характер деформування ґрунту, хоч і використовуються при аналізі його напружено-деформованого стану [38,39,43,107,108].

Для адекватного описання деформування ґрунту в двох фазах необхідно, щоб механічна модель забезпечувала можливість розвитку пружно-в'язких деформацій до настання межі пластичності без впливу пластичної складової Сен-Венана. Для забезпечення пружно-в'язкого

деформування ґрунту без впливу в'язко-пластичних деформацій у механічну модель повинен бути введений елемент, який забезпечує незалежність двох фаз деформування до настання пластичної течії.

Відомі такі елементи обмеження напружень та деформацій [214]: ковзаючий блок Кепеса (рис. 2.4. а), який дозволяє деформування лише в певних межах напружень $-K(\varepsilon) \leq \sigma \leq K(\varepsilon)$; регулятор, який не чинить опору деформації до настання певної швидкості деформацій $-\dot{\varepsilon}_c \leq \dot{\varepsilon} \leq \dot{\varepsilon}_c$; стопори, що обмежують розвиток деформації в одному або в двох напрямках $-\varepsilon_c \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c$.

Для забезпечення розвитку деформації в межах пружно-в'язкості без впливу в'язкопластичності в механічній моделі може бути застосований двосторонній обмежувач деформацій у вигляді стопора $\langle \varepsilon \rangle$ (рис. 2.4. д) [214], послідовно встановленого між пружно-в'язким та в'язко-пластичним тілами механічної моделі (рис. 2.2. з). Таку модернізовану механічну модель Вялова умовно назовемо *моделью KV*.

У фізичних рівняннях зв'язку напружень із деформаціями роль стопора виконує приблизне значення дельта функції Дірка:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} \delta(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\pi} \frac{k}{1 + (k\varepsilon)^2} d\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}[k\varepsilon],$$

де k – велике число; при $k \rightarrow \infty$ приблизне значення дельта функції дорівнює першому інтегралу.

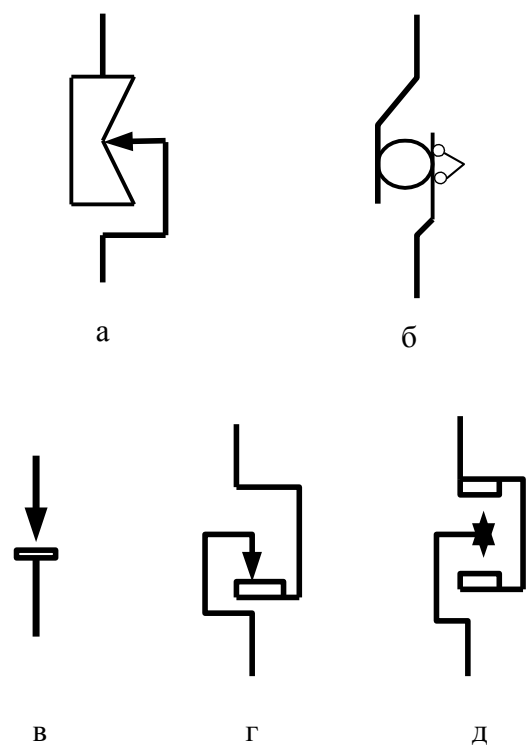


Рис. 2.4. Елементи обмеження напружень та деформацій: а – блок Кепеса; б – регулятор; в, г, д – стопори

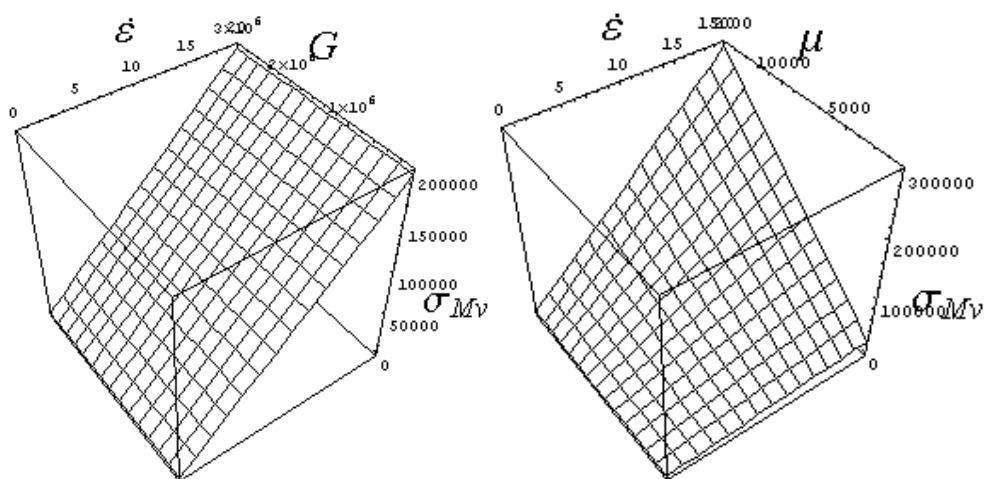


Рис. 2.5. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, модуля пружності G та в'язкості μ для тіла Максвела (рис. 2.2. б)

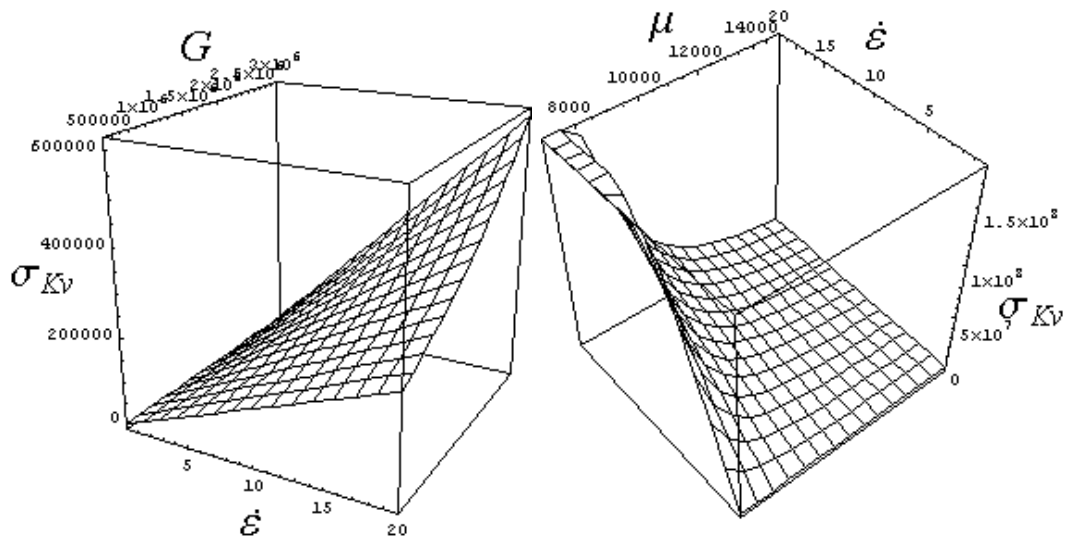


Рис. 2.6. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, модуля пружності G та в'язкості μ для тіла Кельвіна-Фойгта (рис. 2.2. а)

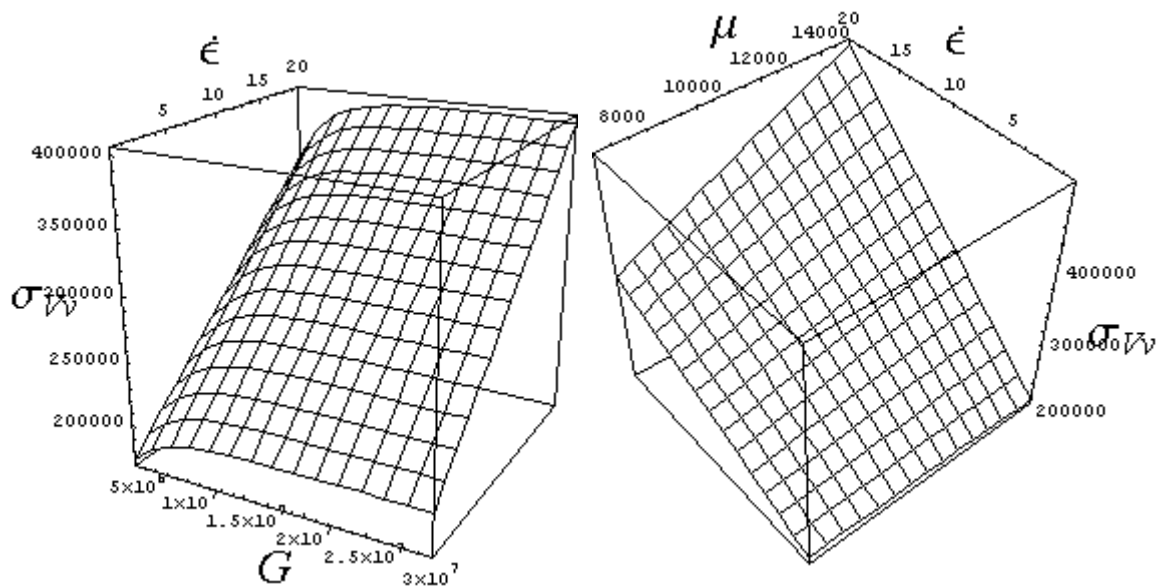


Рис. 2.7. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, модуля пружності G та в'язкості μ для тіла Вялова (рис. 2.2. д)

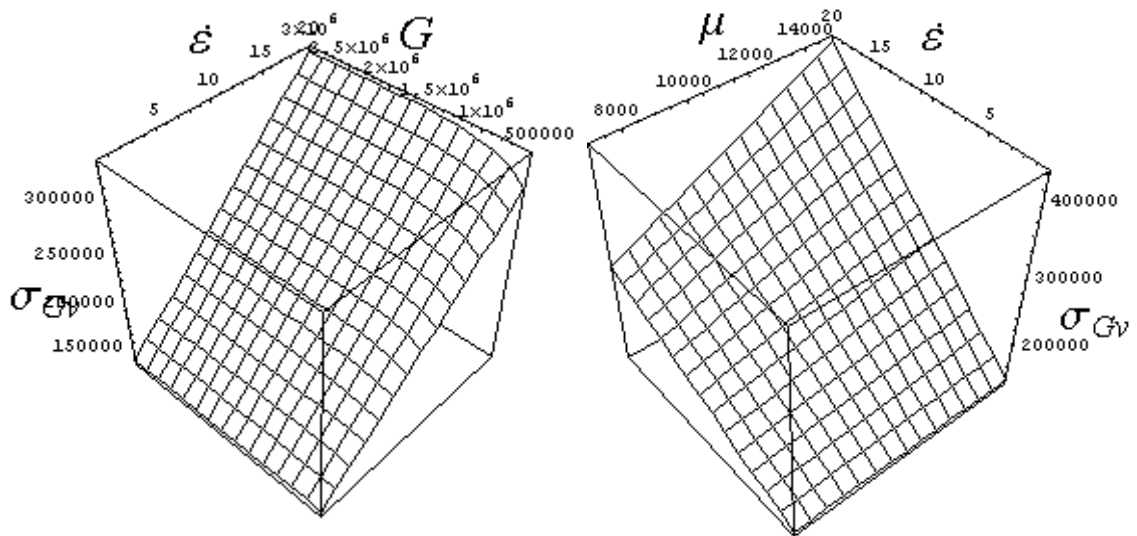


Рис. 2.8. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, модуля пружності G та в'язкості μ для тіла Гольдштейна (рис. 2.2. е)

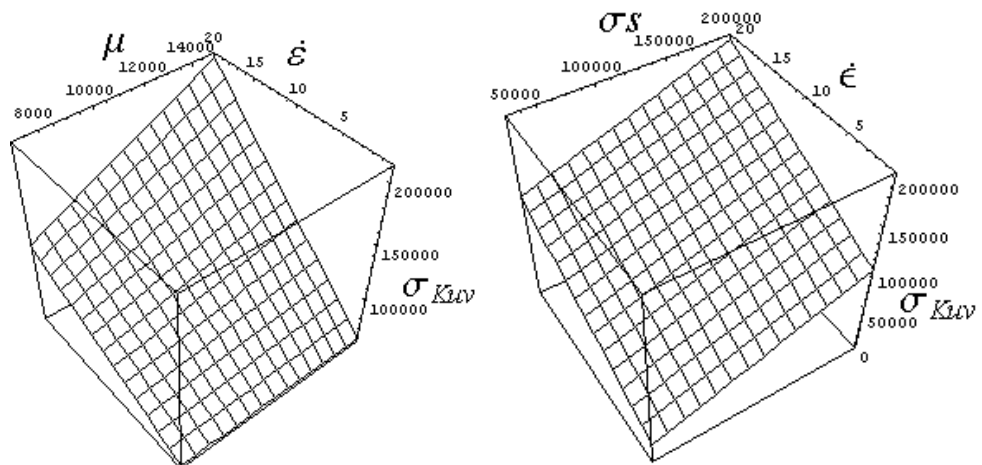


Рис. 2.9. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, граничного напруження пластичності σ_s та в'язкості μ для тіла Кушнарьова (рис. 2.2. ж)

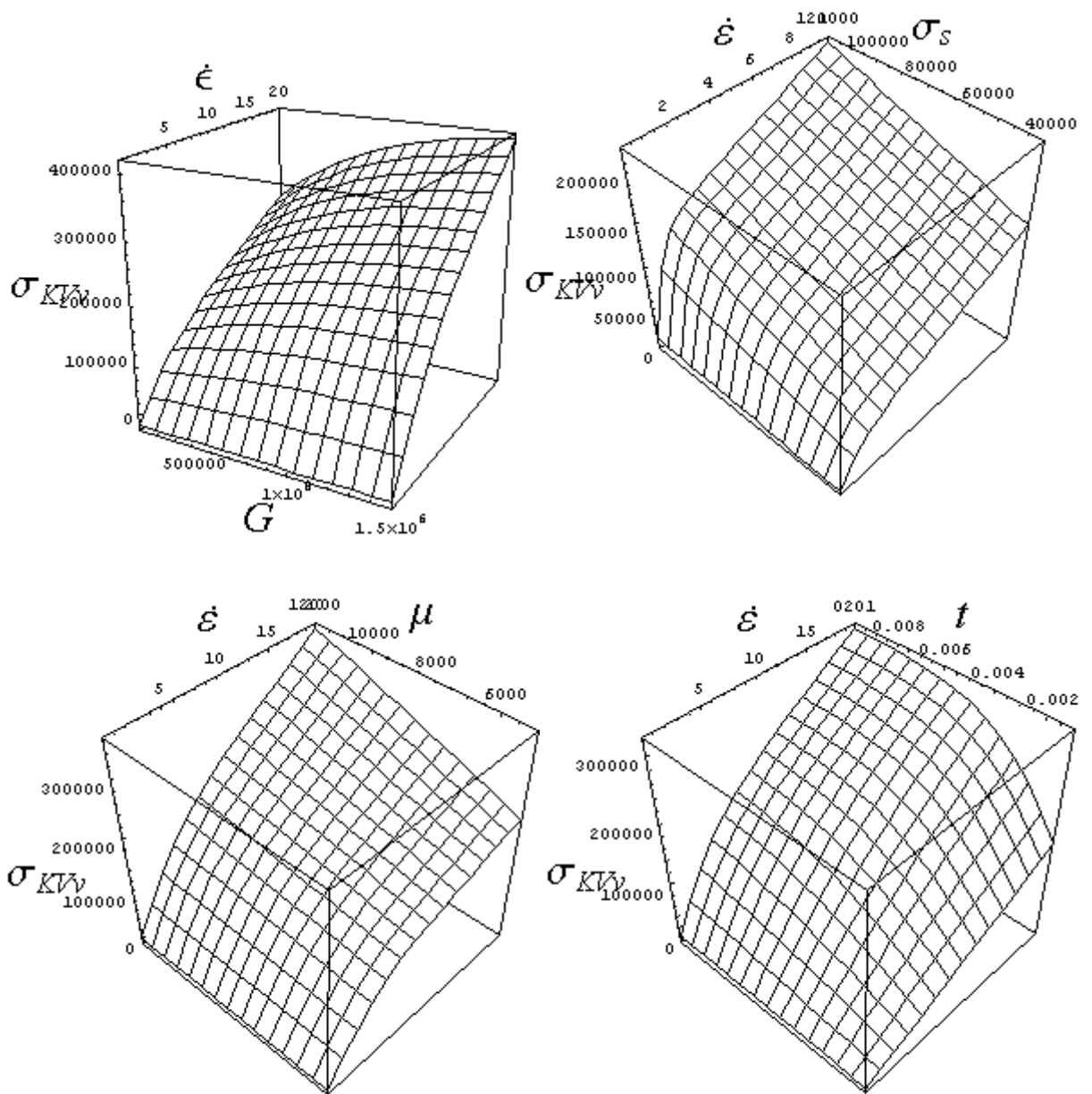


Рис. 2.10. Залежності напружень від швидкостей деформацій $\dot{\epsilon}$, модуля пружності G , в'язкості μ , граничного напруження пластичності σ_s та часу деформування t для модернізованого тіла Вялова – KV (рис. 2.2. з)

Ця модель зв'язку напружень із деформаціями може трактуватися наступним чином. При величинах деформації або швидкостях деформацій, що не перевищують граничне їх значення (перша фаза деформування), при якому починається пластична течія, можуть відбуватися пружно-в'язкі зворотні деформації. Зв'язок напружень із деформаціями характеризується моделлю тіла Кельвіна-Фойгта. Після досягнення граничного значення пружних деформацій стопор дозволяє деформацію послідовно з'єднаного з тілом Кельвіна-Фойгта в'язко-пластичного тіла Бінгама (друга фаза деформацій). Рівняння зв'язку напружень із швидкостями деформацій для тіла KV має вигляд:

$$\sigma_{ij}^{KV} = - \frac{2G(1+\nu) \left(-\varepsilon_{ij} \mu + \text{Sign}[\varepsilon_{ij}] \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \varepsilon_{ij}] \right) t \sigma_s \right)}{\left(-1 + E^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}} \right) \mu(-1+\nu) + 2Gt(1+\nu) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \varepsilon_{ij}] \right)}$$

$$\tau_{ij}^{KV} = \frac{E^{\frac{Gt}{\eta}} G \left(\gamma_{ij} \eta + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \gamma_{ij}] \right) t \tau_s \right)}{\eta - E^{\frac{Gt}{\eta}} \eta + E^{\frac{Gt}{\eta}} G t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \gamma_{ij}] \right)} ;$$

$$\sigma_{ij}^{KV} = \frac{\sigma_s \text{Sign}[\dot{\varepsilon}_{ij}] \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \dot{\varepsilon}_{ij}] \right) + \mu \dot{\varepsilon}_{ij}}{E^{\frac{2Gt(\nu+1)}{\mu(\nu-1)}} + 1} ;$$

$$\tau_{ij}^{KV} = \frac{\tau_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg[k \dot{\gamma}_{ij}] \right) + \mu \dot{\gamma}_{ij}}{\frac{Gt}{E^\eta + 1}} \quad (2.1.20)$$

В останніх рівняннях функція $Sign[\varepsilon_{ij}]$ забезпечує знак перед значенням граничного напруження пластичності при стисканні або розтягненні.

Характеру деформування ґрунту робочими органами ґрунтообробних машин найбільш повно відповідає модель тіла KV [194,230,231] (рис. 2.11, 2.12, 2.13).

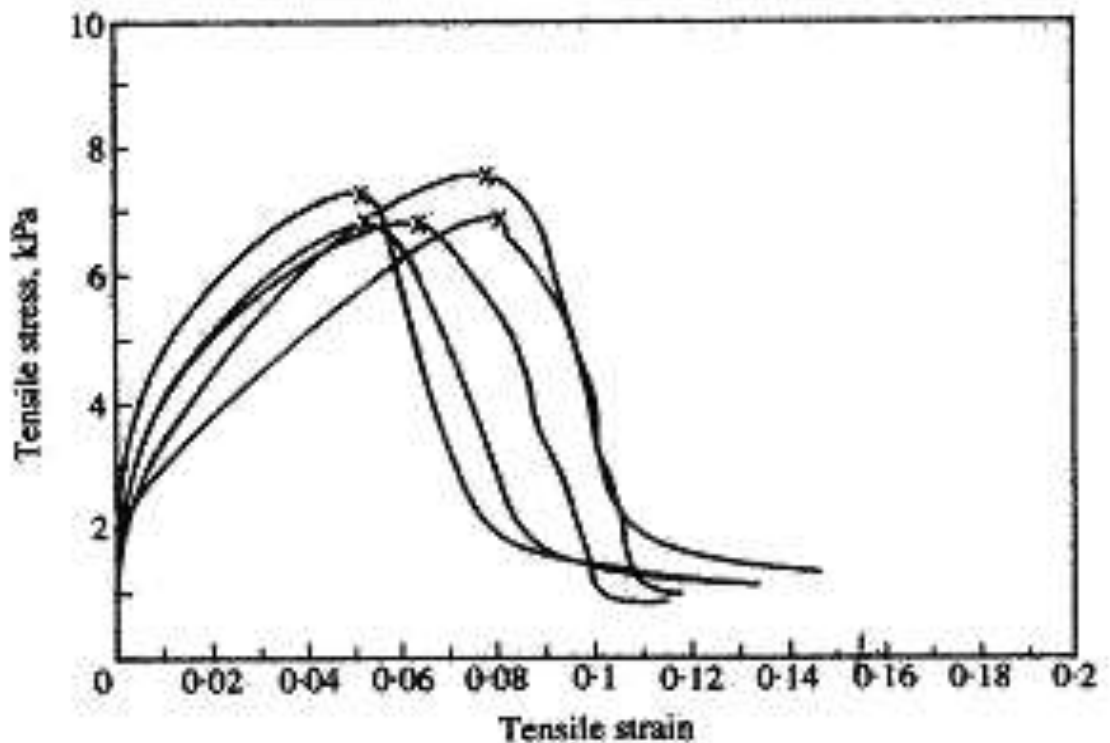


Рис. 2.11. Графік залежності напружень від деформацій при одновісному стисканні суглинкового ґрунту [230]

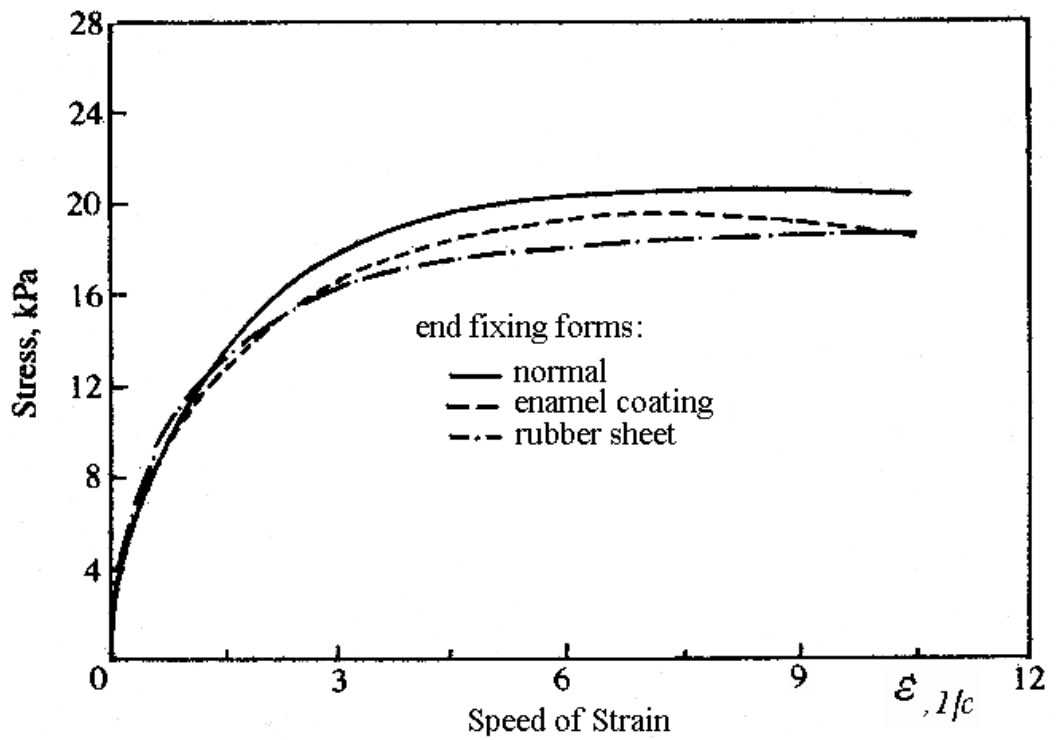


Рис. 2.12. Графіки залежності напружень від швидкості деформації при одновісному стисканні суглинкового ґрунту [230]

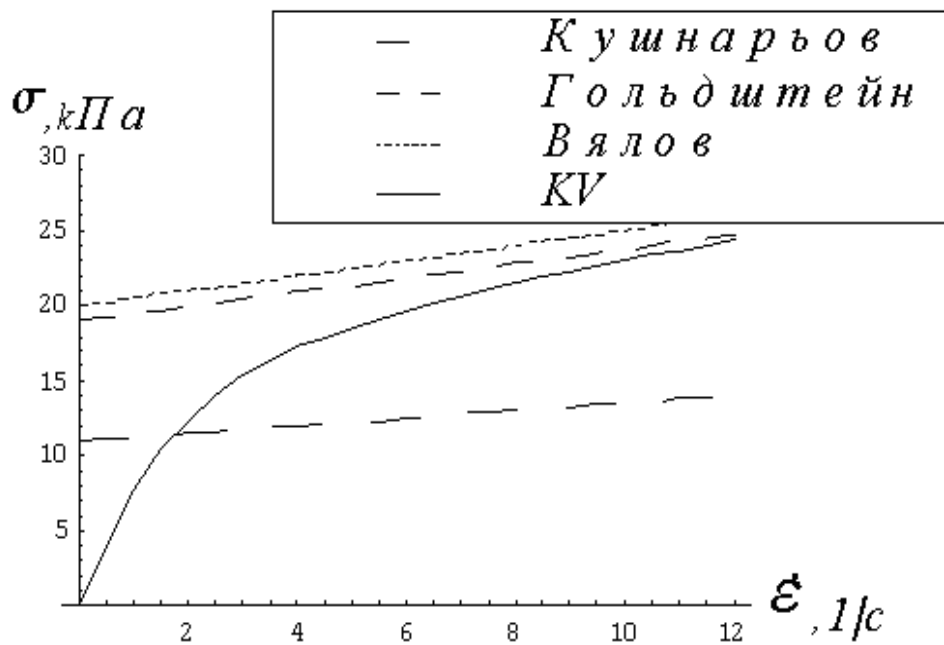


Рис. 2.13. Теоретичні залежності напружень від швидкостей деформацій для розглянутих моделей

2.1.3. Обґрунтування критерію оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів

У процесі взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин із ґрунтом в останньому виникає напружено-деформований стан, характер якого суттєво впливає на зміну властивостей ґрунту та енергомісткість його обробітку. Так, превалювання гідростатичної складової тензора напружень та деформацій (знак „-“) стискання призводить до зростання об’ємної маси, та навпаки. Збільшення дівіаторної складової тензора напружень (деформацій) призводить до зменшення об’ємної маси за рахунок дилатації ґрунту. Причому найменша енергомісткість деформування та руйнування ґрунту спостерігається при розтягненні та зсуві, що підтверджує й критерій міцності Лебедева.

Тому для оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів повинен бути прийнятий критерій, який характеризує вигляд напружено-деформованого стану ґрунту у напівпросторі перед робочим органом.

У багатьох процесах, пов’язаних із дослідженнями напружень та деформацій у середовищі, що виникають при дії на нього робочих органів машин, постає питання про вигляд напружено-деформованого стану середовища. Мова йде про визначення напружень і деформацій, які превалюють в тій чи іншій точці (тут і далі, для скорочення, під точкою середовища будемо розуміти елементарний об’єм середовища), тобто який вид напружень в ній превалює: стискання, розтяг чи зсув. Превалювання того чи іншого виду напружень і відповідно, деформацій, зумовлює зміну фізико-механічних властивостей середовища та енергомісткість процесу цієї зміни.

В задачах плоского напруженого стану превалювання того чи іншого напруження (деформації) вирішується просто, оскільки напружено-

деформований стан характеризується трьома складовими. В площині XOY співвідношення між напруженнями (якщо головні напруження співпадають з напрямками осей) (рис. 2.14) мають вигляд:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha; \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha. \quad (2.1.21)$$

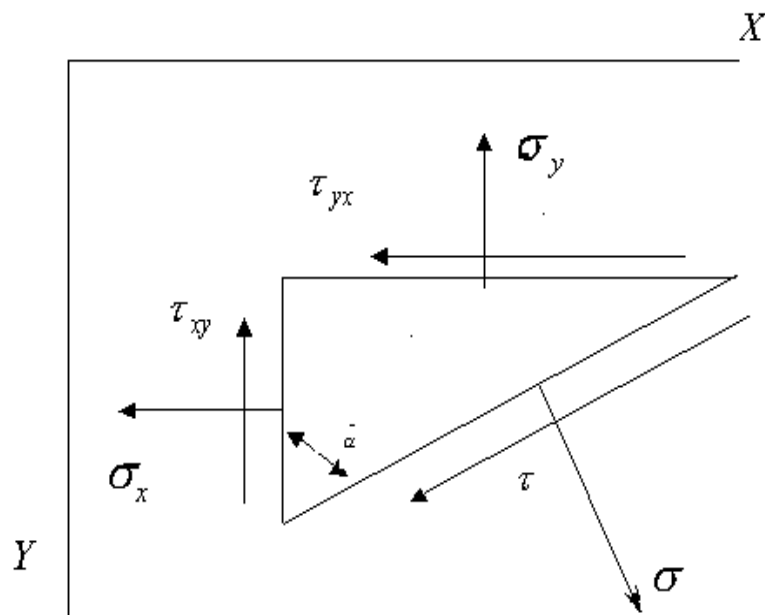


Рис. 2.14. Схема напружень для випадку плоского напруженого стану

Тобто, визначення виду напружено-деформованого стану середовища для плоского випадку не викликає ніяких труднощів.

У випадку, коли мова йде про просторовий напружено-деформований стан, вигляд напружень визначається взаємодією дев'яти компонент повного тензора напружень (2.1.1).

Вигляд напруженого стану для просторової задачі визначається кутом виду напруженого стану W та параметром Лоде-Надаї μ [43,83,132].

Значення величини $0 \leq w \leq \pi/3$ лежить в межах $w = \pi/3$ – при чистому розтягненні, стисканні – $w = 0$, зсуві – $w = \pi/6$.

Кутом вигляду напружено-деформованого стану ґрунту є кут між нормаллю до поверхні рівних головних напружень та нормаллю до поверхні головних напружень (октаедричної площадки) (рис. 2.15).

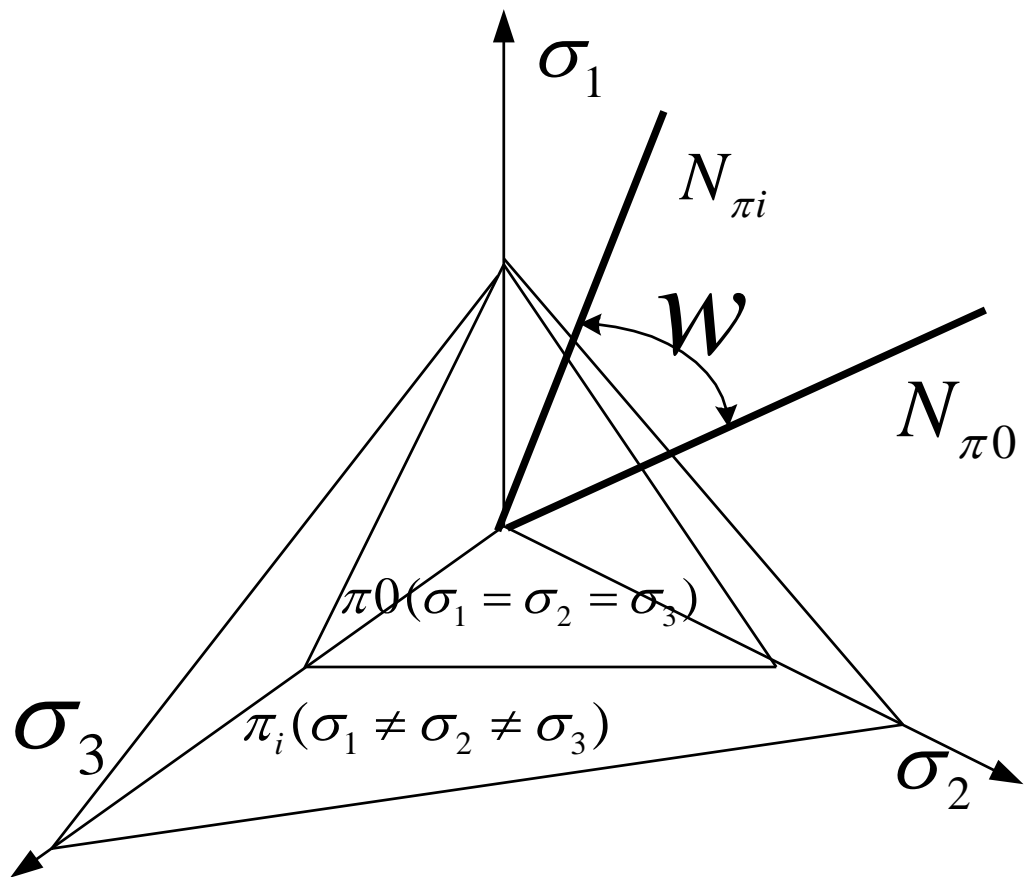


Рис. 2.15. До визначення кута вигляду напружено-деформованого стану (
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження)

Кут вигляду є функцією інваріантів напружень (деформацій):

$$-\cos 3w = \frac{3\sqrt{3}I_{3\sigma}}{2(I_{2\sigma})^{\frac{3}{2}}}; \quad -\cos 3w = \frac{3\sqrt{3}I_{3\varepsilon}}{2(I_{2\varepsilon})^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1.22)$$

Параметр Лоде-Надаї має значення:

$$\mu = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(w + \frac{\pi}{3} \right), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad (2.1.23)$$

при $\mu = -1$ – чисте розтягнення, $\mu = 1$ – стискання, $\mu = 0$ – зсув.

Графічно зміни цих величин представлені на рис. 2.16.

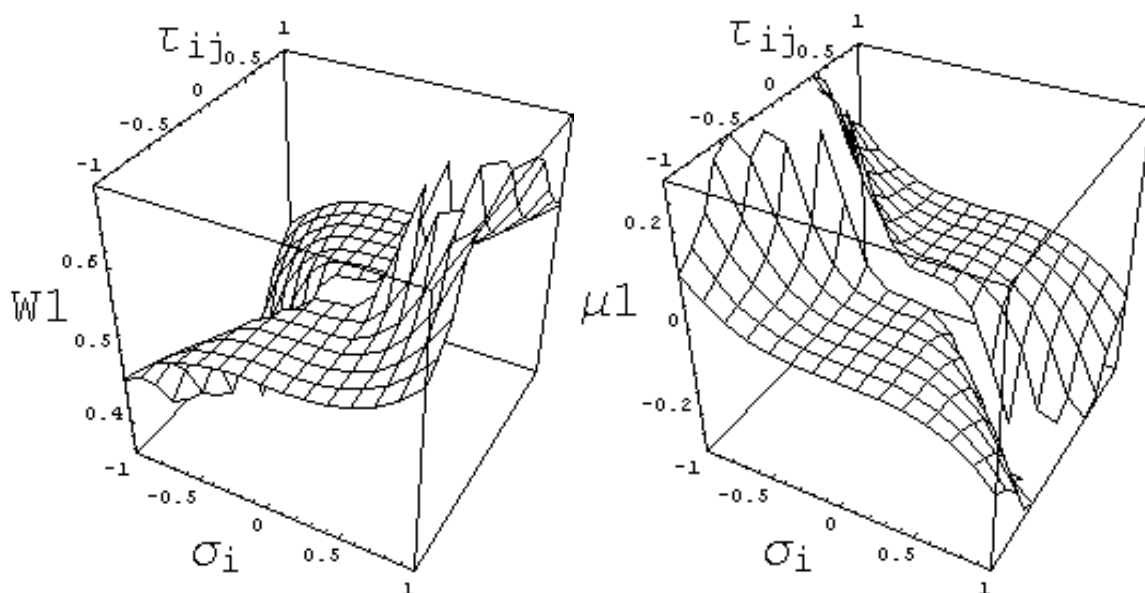


Рис. 2.16. Графіки змін параметрів w_1 та μ_1 , розрахованих за залежностями (2.1.22), (2.1.23)

Застосування для аналізу вигляду напружено-деформованого стану залежностей (2.1.22), (2.1.23) пов'язане з певними труднощами, оскільки кожне зі значень компонент напружень для точки простору має свою складну функціональну залежність координат та властивостей середовища. Нами зроблена спроба спрощення критеріїв вигляду напруженого стану для можливості їх використання в практиці аналізу процесів взаємодії робочих органів із суцільним середовищем.

Так, за результатами досліджень В. В. Новожилова [137], інтенсивність дотичних напружень (другий інваріант тензора) пропорційна середньому квадратичному значенню дотичних напружень. У свою чергу, інтенсивність дотичних напружень: $I_\tau = \sqrt{I_{2\sigma}}$; тому у виразі (2.1.22) знаменник спрощується, й замість $I_{2\sigma}$ можна записати I_τ .

Значення коефіцієнта μ_2 змінюється відповідно:

$$\mu_2 = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(w_2 + \frac{\pi}{3} \right). \quad (2.1.24)$$

$$w_2 = \frac{1}{3} \arccos \left[- \frac{(\sigma_x - \sigma_m)(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m)}{6\sqrt{3}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{\frac{3}{4}}} \right]. \quad (2.1.25)$$

Проте, навіть у формі виразів (2.1.24), (2.1.25) критерії вигляду напруженого стану мають складний вид. Фізична суть критеріїв не зміниться, якщо в чисельнику виразу параметра Лоде-Надаї замінити третій інваріант напружень першим і знехтувати тригонометричною функцією. В цьому

випадку кінцева функція компонентів напружень значно спрощується, і може з успіхом бути використана для визначення вигляду напружено-деформованого стану середовища:

$$\mu_3 = -\frac{\sqrt{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{2\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}}. \quad (2.1.26)$$

Недоліком спрощеного таким чином критерію є невизначеність абсолютних крайових значень, які характеризують чистий розтяг та чисте стискання, але в цьому випадку чистому зсуві відповідає значення критерію $\mu_3 = 0$. Значення μ_3 зі знаком “-“ відповідає превалюванню розтягуючих напружень (деформацій), знак “+” відповідає превалюванню стиснення. Функція критерію в розгорнутому вигляді представлена рівнянням (2.1.26), а графічне її зображення для різних за величиною нормальних компонент напружень представлена на рис. 2.17.

У спрощеному формулюванні критерій вигляду напружено-деформованого стану може бути застосований як критерій оптимізації параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів.

Аналіз наведених вище графіків змін критеріїв вигляду напруженого стану свідчить про можливість застосування спрощеного критерію вигляду напруженого стану для досліджень напружено-деформованого стану суцільного середовища у прикладних дослідженнях.

На основі наведеного вище, можна стверджувати, що максимуму деформацій, які викликають розпушення ґрунту під дією деформатора при мінімальній енергомісткості процесу, можна досягти за мінімального значення критерію вигляду напружено-деформованого стану середовища. При мінімальному значенні критерію вигляду напружено-деформованого

стану характер деформування й подальшого руйнування буде відповідати зсувові з відривом. При необхідності досягти ущільнення (збільшення густини або об'ємної маси) ґрунту значення критерію вигляду – $\mu_3 \rightarrow \max$, що відповідає превалюванню деформацій стискання.

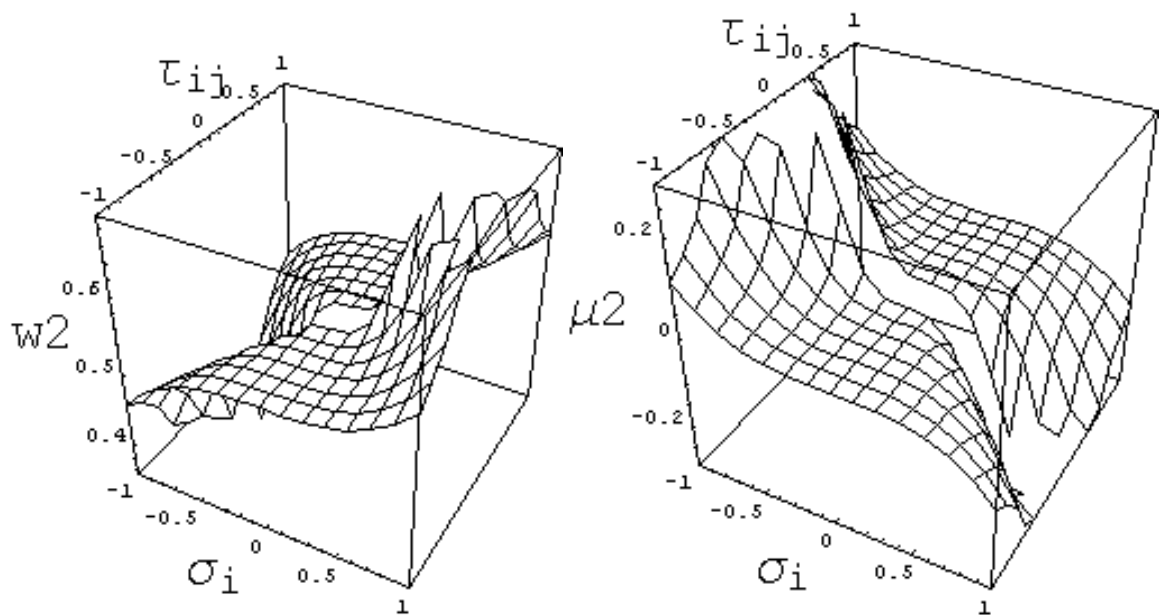


Рис. 2.17. Графіки змін параметрів W_2 та μ_2 , розрахованих за залежностями (2.1.24), (2.1.25)

Визначення критерію вигляду деформованого стану середовища за співвідношеннями компонентів деформацій приводить до аналогічних результатів.

Таким чином, для визначення оптимальних параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів може бути використана залежність (2.1.26).

Як видно з графіків зв'язку нормальних та зсувних напружень з критерієм вигляду напружено-деформованого стану (рис. 2.18) чистому зсувові відповідає значення критерія $\mu_3 = 0$. Значенням напружень, при яких відбувається розтяг (додатні значення σ), відповідають від'ємні значення критерію, й навпаки. Тобто, цей критерій повністю відображає характер просторового напружено-деформованого стану середовища.

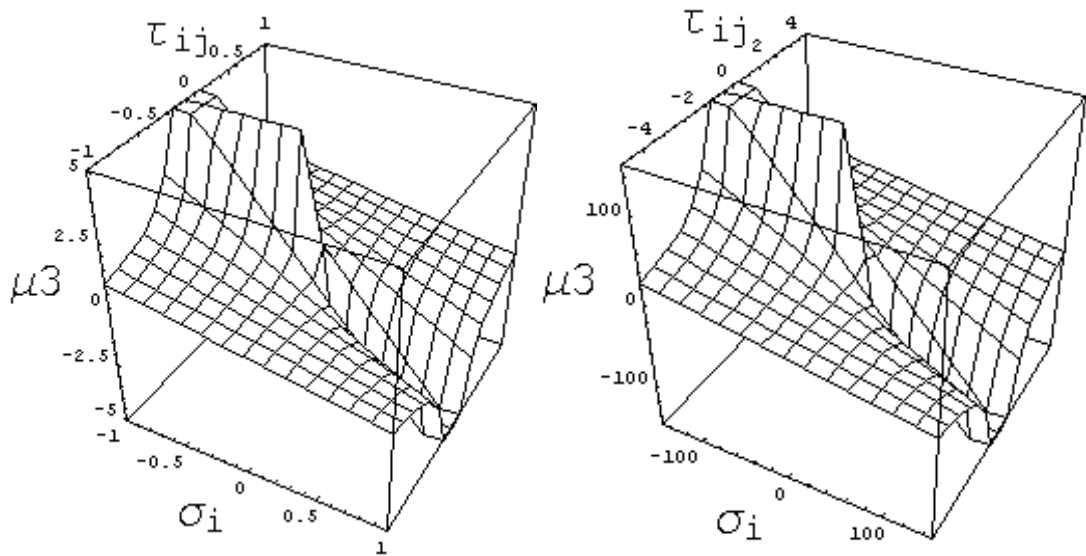


Рис. 2.18. Графіки змін спрощеного критерію вигляду напруженого стану (2.1.26) для різних співвідношень нормальних та дотичних напружень

Функція параметру вигляду напружено-деформованого стану (2.1.26) повністю визначає можливі зміни технологічних властивостей ґрунту, оскільки входить у вираз зв'язку інваріантів тензора напружень зі зміною BWV .

Крім того, ця функція відображає енергомісткість змін технологічних властивостей ґрунту в результаті механічного обробітку, оскільки повністю визначає превалювання стискання або розтягнення в деформованому об'ємі ґрунту.

2.1.4. Визначення розподілу напружень у ґрунтовому середовищі

При взаємодії деформатора з ґрунтом в останньому виникає напружено-деформований стан, причому розподіл компонент деформацій є функцією геометричної форми та розмірів робочого органу [8,71,91,93,108], тобто залежить від умов на поверхні контакту робочий орган-ґрунт. В свою чергу, напруження, які діють у ґрунтовому середовищі, зв'язані з деформаціями фізичними рівняннями та залежать від властивостей ґрунту, що входять до цих рівнянь: σ_s , τ_s – граничних значень пластичності середовища, ν – коефіцієнта Пуассона, G – модуля пружності при зсувних деформаціях, μ , η – модулів в'язкості об'ємних та зсувних деформацій, відповідно.

Розподіл напружень у ґрунтовому середовищі може бути визначений із застосуванням рівнянь зв'язку напружень із деформаціями для тіла KV (2.1.20).

При визначенні напружень у ґрунті під дією робочого органу повинні бути використані девіаторні складові повного тензора швидкостей деформацій, які характеризують в'язко-пластичну течію, а саме:

$$\dot{\varepsilon}_{xp} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\dot{\varepsilon}_{yp} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\dot{\varepsilon}_{zp} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\dot{\gamma}_{xyp} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^{1/2};$$

$$\dot{\gamma}_{yzp} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^{1/2};$$
(2.1.27)

$$\dot{\gamma}_{xzp} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right)^{1/2}$$

2.1.5. Визначення роботи деформацій і зусиль на поверхні деформатора

Сумарна робота деформацій, які виникають у ґрунті під дією робочих органів, може бути розділена на дві складові: робота об'ємних деформацій та робота зсувних деформацій.

У загальному випадку робота деформацій визначається виразом:

$$A = \iiint_V \delta A dX dY dZ,$$

$$\delta A = \left(\begin{array}{l} \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \end{array} \right),$$
(2.1.28)

де $X = x - \xi, Y = y - \eta, Z = z - \zeta$,

$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{xz}$ – приріст компонентів деформацій,

$dXdYdZ$ – об'єм зони деформування ґрунту, обмежений поверхнею робочого органу.

З урахуванням адитивності інтегрування, складові роботи об'ємних та зсувних деформацій мають вигляд, відповідно:

$$A_\varepsilon = \iiint_V \varepsilon_{cp} \sigma_{cp} dXdYdZ; A_\gamma = \iiint_V \gamma_i \tau_i dXdYdZ, \quad (2.1.29)$$

де $\tau_i = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2}$ – інтенсивність дотичних напружень,

$\gamma_i = \sqrt{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{zy}^2}$ – інтенсивність зсувних деформацій [137].

Сумарна робота деформацій та її складові не можуть бути критерієм оцінки мінімуму енергомісткості процесу обробітку ґрунту, оскільки робота об'ємних деформацій є добутком напружень та деформацій, які в свою чергу, змінюють знак від „-” до „+”. Тому не можна однозначно відповісти на питання про роботу об'ємних деформацій (стискання або розтягнення). Максимальне значення роботи об'ємних деформацій може відповідати і максимуму стискання, і максимуму розтягнення. Сумарна робота деформацій дозволяє лише оцінити витрати енергії конкретного ґрунтообробного робочого органу.

Складові зусиль, які діють на робочий орган із боку ґрунтового середовища за його обробітку, можуть бути визначені інтегруванням рівнянь (2.1.3) по поверхні робочого органу. В тому випадку, коли система координат поверхні робочого органу позначена $\xi\eta\zeta$, а рівняння поверхні робочого

органу буде мати вигляд $f = f(\xi, \eta, \zeta)$, то при співпаданні напрямків осей $O\xi$ із Ox , $O\eta$ із Oy , $O\zeta$ із Oz проекції зусиль, що діють на робочий орган в напрямку осей $-Ox$, $-Oy$, $-Oz$, матимуть вигляд:

$$R_X = \int_0^a \int_0^b (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) d\eta d\zeta$$

$$R_Y = \int_0^a \int_0^s (\sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l) d\xi d\zeta;$$

$$R_Z = \int_0^b \int_0^s (\sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m) d\xi d\eta, \quad (2.1.30)$$

де l, m, n – спрямовуючі косинуси між нормаллю до поверхні деформатора та гранями координатної системи,

a, b, s – висота, ширина та довжина робочого органу відповідно.

Спрямовуючі косинуси визначаються як відношення площі поверхні контакту до відповідної проекції цієї площі на координатні площини, перпендикулярні відповідній осі, тобто [2]:

$$l = \frac{F_x}{F_N} = \cos(x, N); m = \frac{F_y}{F_N} = \cos(y, N); n = \frac{F_z}{F_N} = \cos(z, N),$$

$$F_N = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; F_x = \frac{\partial f}{\partial x}; F_y = \frac{\partial f}{\partial y}; F_z = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.1.31)$$

Значення компонентів напружень в цих залежностях повинні бути визначені для тіла KV на поверхні робочого органу, тобто за умови:

$$x = \xi; y = \eta; z = \zeta .$$

2.2. Аналіз взаємодії пасивного деформатора з ґрунтом

2.2.1. Визначення швидкості переміщень на поверхні контакту робочий орган-ґрунт (початкові умови)

Величини деформацій та вигляд деформованого стану середовища за взаємодії з ним робочих органів суттєво впливають на протікання процесів його обробітку [71,74,75,101,102,107,108,133,145,147]. У загальному випадку поверхня деформатора (просторового пасивного робочого органу довільної геометричної форми та розмірів) (рис. 2.19) може бути описана рівнянням у неявному вигляді:

$$f = \xi - sl + b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma \quad (2.2.1)$$

Для аналізу кінематики точок середовища на поверхні контакту деформатор-ґрунт необхідно ввести такі припущення та спрощення:

- поверхня деформатора абсолютно гладка, а точки середовища рухаються по її поверхні без тертя. Правомірність такого припущення базується на пропорційному впливові на зміни компонентів швидкостей ковзання в усіх напрямках;

- поверхня рухається прямолінійно та рівномірно у напрямку осі Ox ;

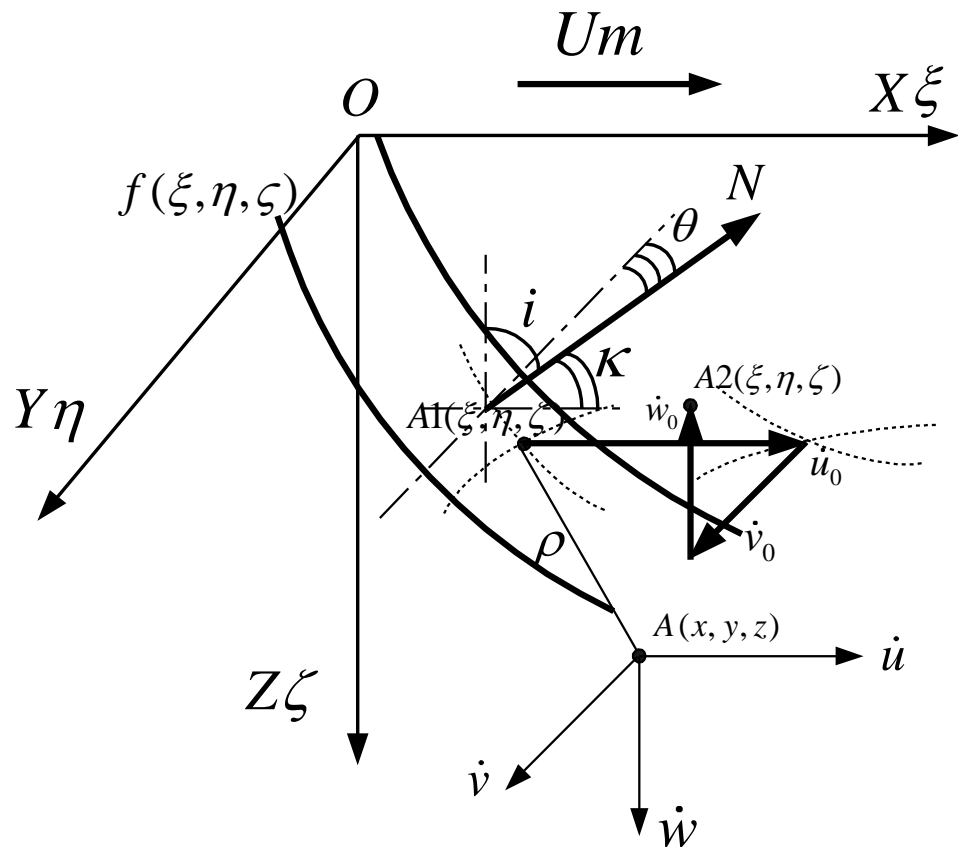


Рис. 2.19. Схема взаємодії робочого органу з ґрунтовим середовищем

- контакт середовища з поверхнею відбувається на всій її робочій частині;
- рівняння поверхні є аналітичною, гладкою, безперечною та такою, що диференціюється по всіх незалежних змінних, функцією;
- величина переміщень середовища вважається такою малою, що криволінійні траєкторії можуть вважатися прямолінійними;
- переміщення вважаються настільки малими, що порушення суцільності середовища та його руйнування при цьому не відбувається (тобто аналіз проводиться методами теорії пружності).

Довільно обрані коефіцієнти та показники ступенів рівняння (2.2.1) дозволяють визначити поверхню будь-якої геометричної форми.

За умов переміщення деформатора в середовищі зі швидкістю Um за час t його поверхня переміститься в напрямку осі Ox на відстань, що дорівнює різниці абсцис точки $Ax2$ та $Ax1$, тобто Umt ; одночасно за рахунок кривизни поверхні точка A переміститься з положення $A1(\xi1, \eta1, \zeta1)$ в положення $A2(\xi2, \eta2, \zeta2)$, пройшовши шлях $\dot{u}_0 t$ в напрямку осі Ox , $\dot{v}_0 t$ – в напрямку осі Oy та $\dot{w}_0 t$ – в напрямку Oz (рис. 2.20).

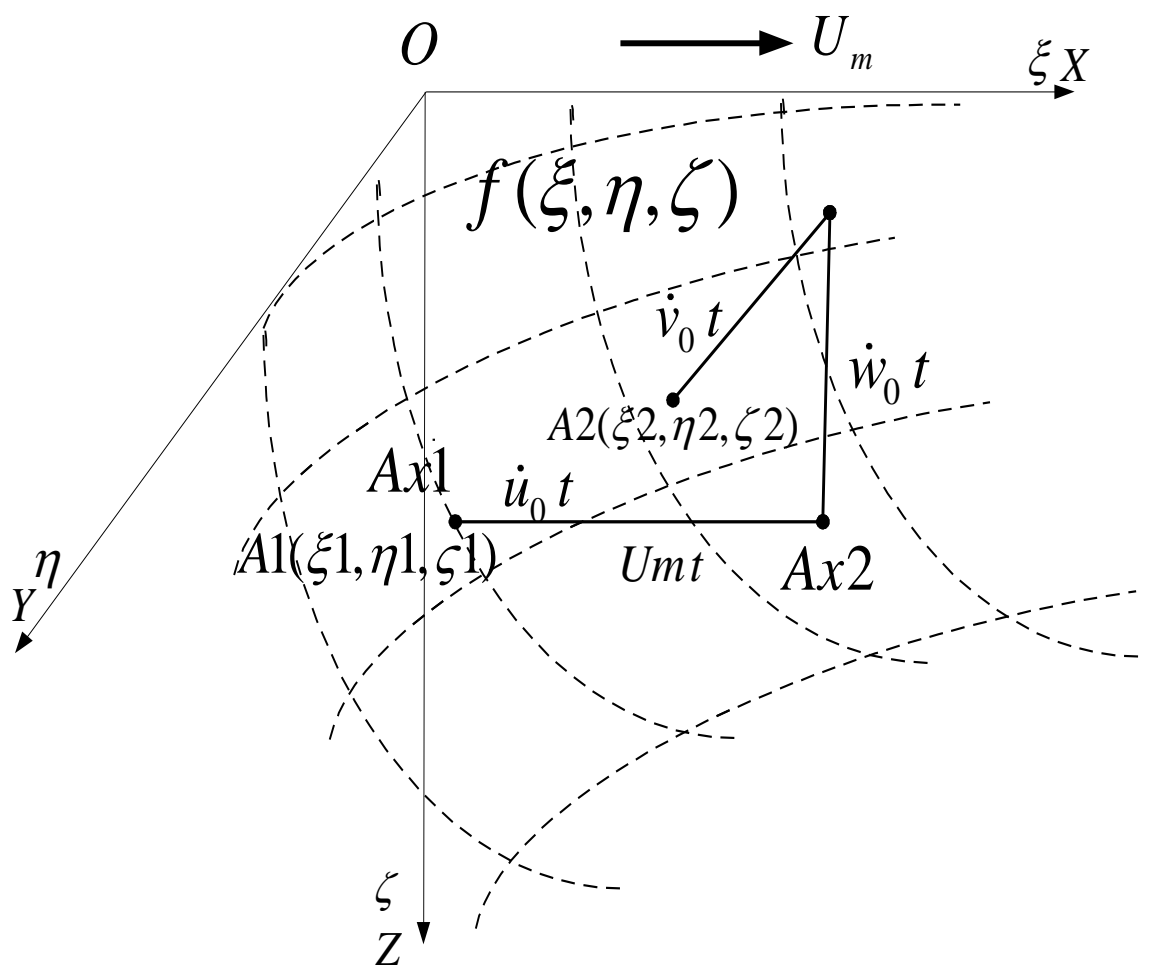


Рис. 2.20. Схема переміщень точки по криволінійній поверхні деформатора

При цьому тертям по поверхні деформатора можна знехтувати або врахувати коефіцієнт тертя φ , оскільки воно вносить однакові зміни за умов переміщення в усіх напрямках, а для визначення вигляду деформованого стану важливе співвідношення величин деформацій. Для простоти можна розглядати не самі переміщення, а їхні швидкості. При невеликих значеннях переміщень траєкторії руху точки по криволінійній поверхні можна вважати прямолінійними.

Переміщення поверхні зі швидкістю Um викличе переміщення точки $A1(\xi1, \eta1, \zeta1)$ в положення $A2(\xi2, \eta2, \zeta2)$, при цьому проекція абсолютної швидкості її переміщення в проекції на зовнішню нормаль до поверхні $f(\xi, \eta, \zeta)$ у відповідній точці становитиме:

$$U = Um \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2} =$$

$$= Um \sqrt{1 + c^2 \gamma^2 (-H + \zeta)^{-2+2\gamma} + b^2 \beta^2 (-bs + \eta)^{-2+2\beta}} \quad (2.2.2)$$

Компоненти швидкостей переміщень в проекціях на осі координат становитимуть:

$$\dot{u}_0 = U l ; \dot{v}_0 = U m ; \dot{w}_0 = U n ,$$

$$\text{де } l = \frac{\partial f / \partial \xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}} ;$$

$$n = \frac{\partial f / \partial \zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}};$$

$$m = \frac{\partial f / \partial \eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}};$$

$$\dot{u}_0 = \varphi U m; \quad \dot{v}_0 = \varphi b U m \beta (-bs + \eta)^{-1+\beta};$$

$$\dot{w}_0 = \varphi c U m \gamma (-bs + \zeta)^{-1+\gamma}. \quad (2.2.3)$$

Графічно залежності впливу параметрів геометричної форми деформатора на швидкості переміщень точок його поверхні представлені на рис. 2.21, 2.22.

Наведені залежності характеризують зміни величин компонент швидкостей переміщень точок поверхні просторового пасивного деформатора довільної геометричної форми та розмірів для конкретних точок на його поверхні.

Отримані залежності свідчать про суттєвий вплив кривизни поверхні (геометричної форми) на зміни компонент швидкостей переміщень по ній.

Тертя на поверхні контакту вносить пропорційний вплив на компоненти швидкостей переміщень і враховане коефіцієнтом тертя φ .

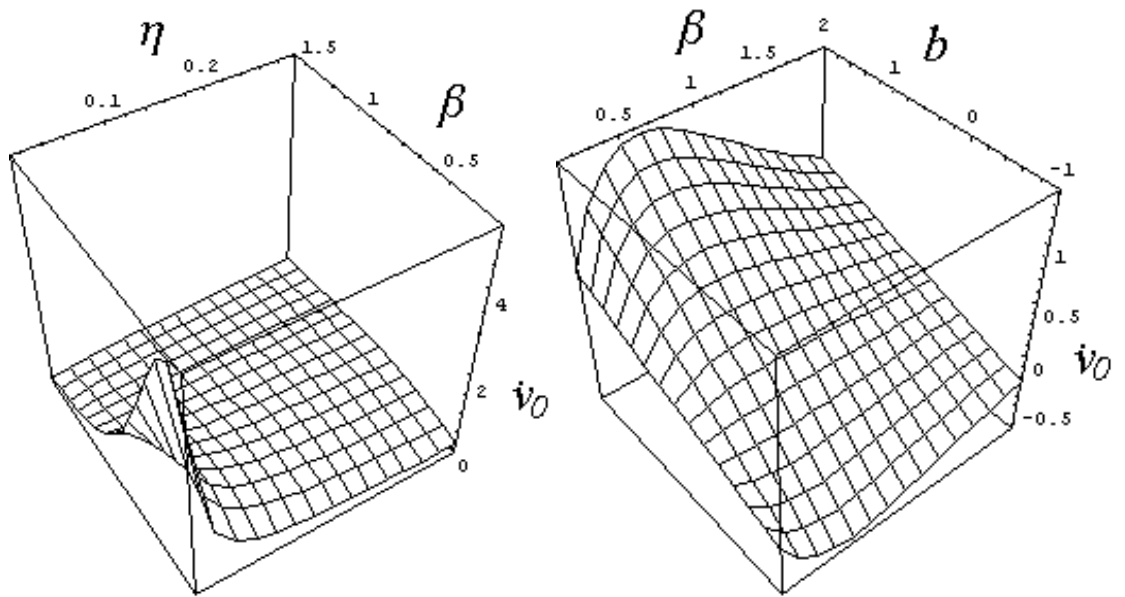


Рис. 2.21. Залежність горизонтально-поперечної компоненти швидкості переміщень точок поверхні \dot{v}_0 від її геометричної форми, яка визначається показником ступеня та коефіцієнтом рівняння (2.2.2)

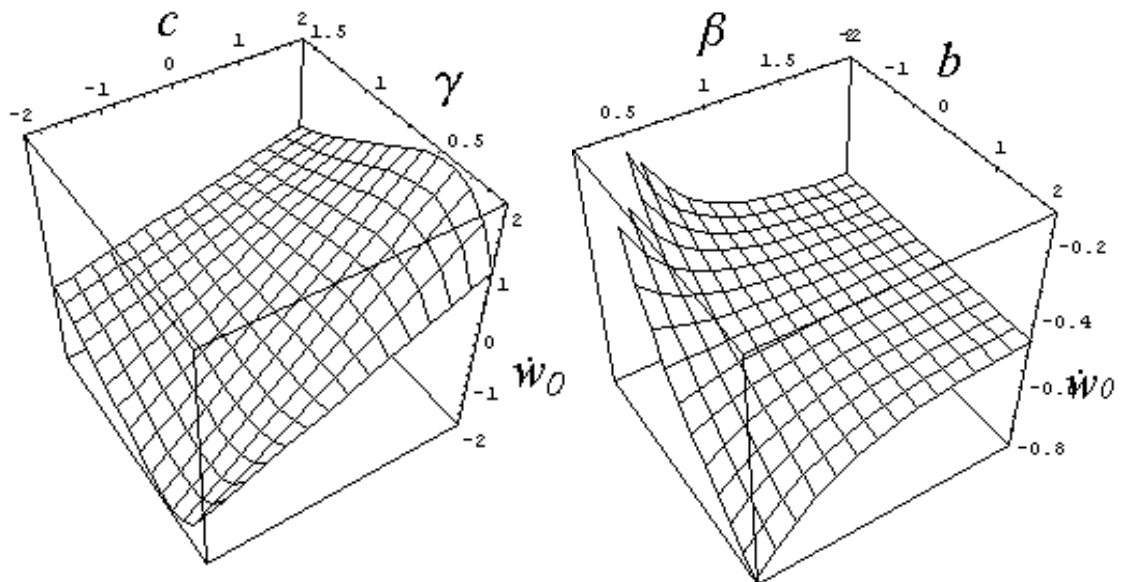


Рис. 2.22. Залежність вертикальної компоненти швидкості переміщень точок деформатора \dot{w}_0 від його геометричної форми та висоти

Залежності (2.2.3) є умовами на поверхні ґрунтообробного робочого органу, геометрична форма якого описується рівнянням (2.2.1). Ці початкові умови визначаються характером взаємодії робочого органу довільної геометричної форми з ґрунтом і в подальшому будуть використані при аналізі напружено-деформованого стану ґрунтового середовища перед робочим органом.

Аналіз залежностей впливу геометричних параметрів пасивного робочого органу на величини компонентів швидкостей переміщень точок ґрунтового середовища на поверхні контакту свідчить про суттєвий вплив кривизни та кутів установки робочого органу на величину та напрямок можливих переміщень ґрунту в зоні контакту.

2.2.2. Визначення швидкостей переміщень та деформацій в ґрунтовому середовищі перед пасивним робочим органом

Для визначення компонент переміщень, деформацій та напружень в просторі перед робочим органом або деформатором, який взаємодіє з ґрунтом, необхідно розглянути схему взаємодії, яка представлена на рис. 2.23.

У загальному випадку деформатор може бути представлений поверхнею загального вигляду $f(x, y, z)$ (2.2.1).

Початок координат $\xi\eta\zeta$ та напрямки осей, в яких визначена поверхня деформатора, співпадає з системою координат ґрунтового середовища $xуz$. Денна поверхня ґрунтового середовища співпадає з площиною xOy . Система координат $\xi\eta\zeta$, в якій розташований деформатор, рухається в напрямку осі Ox зі швидкістю Um . Переміщення точки середовища безпосередньо по поверхні деформатора визначені вище (2.2.3).

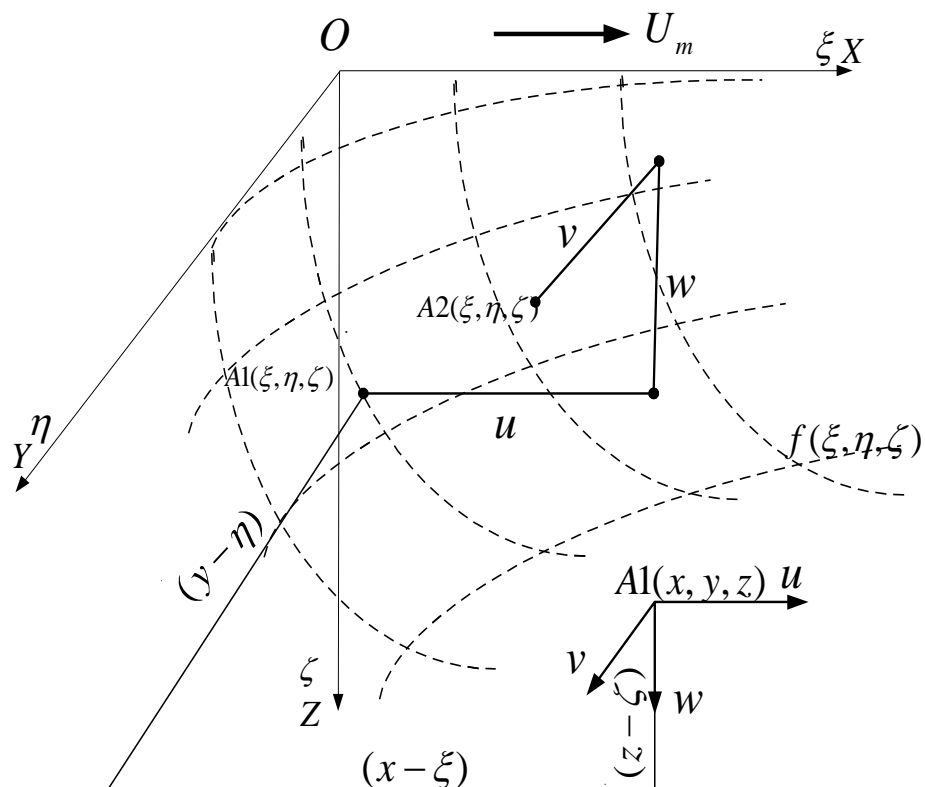


Рис. 2.23. Схема переміщень точки у ґрунтовому напівпросторі

Задача полягає у визначенні переміщень та деформацій в середовищі на будь-якій відстані від поверхні деформатора. Для цього слід розглянути точку $A1(x, y, z)$ в ґрунтовому напівпросторі xYZ , яка знаходиться на відстані ρ від будь якої точки поверхні деформатора. Тут і далі в тексті під точкою слід розуміти елементарний об'єм середовища. Ця відстань становить:

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Вирішення такої задачі має давню історію, але всі існуючі розв'язки отримані для випадків точкового навантаження, навантаження по площині певних розмірів або по осесиметричній поверхні

[17,18,44,62,107,108,112,115,118,167,190] та для випадків плоского напружено-деформованого стану [93].

Більшість рішень ґрунтується на визначенні певної кількості потенціальних гармонічних функцій, які відповідають постановкам крайових задач Діріхле або Неймана [105]. Найбільш відомими загальними рішеннями є рішення у формі Тедоне, Трефтца, Лява, Бусінеска-Черруті, Гальоркіна та Папковича-Нейбера [17,44,62,116,190].

Найбільш простим рішенням, на наш погляд, може бути рішення у формі Тедоне [115,116], коли компоненти швидкостей переміщень виражаються залежностями:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a_1 - \frac{x\Phi}{2(1-2\nu)}; & \dot{v} &= a_2 - \frac{y\Phi}{2(1-2\nu)}; \\ \dot{w} &= a_3 - \frac{z\Phi}{2(1-2\nu)}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

де a_1, a_2, a_3, Φ - гармонічні потенціальні функції;

ν - коефіцієнт Пуассона.

Початкові умови для вирішення цієї задачі можуть бути сформульовані на основі попередніх досліджень (граничні умови на поверхні контакту деформатор-середовище (п. 2.3.1)) таким чином:

$$\text{при } \rho = 0: \quad \dot{u} = \dot{u}_0 = \dot{u}(\eta, \zeta); \quad \dot{v} = \dot{v}_0 = \dot{v}(\xi, \zeta); \quad \dot{w} = \dot{w}_0 = \dot{w}(\eta, \zeta).$$

На поверхні деформатора при $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{u}0 = \dot{u}(\eta, \zeta) = a_1, \quad \dot{v} = \dot{v}0 = \dot{v}(\eta, \zeta) = a_2, \\ \dot{w} = \dot{w}0 = \dot{w}(\eta, \zeta) = a_3. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Гармонічні потенціальні функції в рівняннях (2.2.4) можуть бути виражені у вигляді потенціалів подвійного шару [18,188], розподіленого по поверхні деформатора:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_1} \frac{\dot{u}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\eta d\zeta; \\ a_2 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_2} \frac{\dot{v}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\xi d\zeta; \\ a_3 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_3} \frac{\dot{w}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

де $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – межі інтегрування по ширині, висоті та довжині робочого органу в проєкціях на поперечно-вертикальну, поздовжньо-вертикальну та поздовжньо-горизонтальну площини, відповідно,

$$X = (x - \xi + \delta); \quad Y = (y - \eta + \delta); \quad Z = (z - \zeta + \delta),$$

де δ – мінімальне зміщення, яке дозволяє позбутися сингулярності потенціальних гармонічних функцій.

Межами інтегрування потенціальної гармонічної функції a_1 є ширина та висота робочого органу. Тобто, інтегрування за висотою здійснюється від

h_1 до h_2 , а за шириною – від bs до B . Для a_2 – за довжиною робочого органу в напрямку його переміщення від $\xi_{\eta 1}$ до $\xi_{\eta 2}$ та за висотою – від h_1 до h_2 . Для a_3 – за довжиною робочого органу в напрямку його переміщення від $\xi_{\zeta 1}$ до $\xi_{\zeta 2}$ та за шириною – від bs до B . Межі інтегрування за довжиною робочого органу для потенціальних функцій a_2 та a_3 мають вигляд:

$$\begin{aligned}\xi_{\eta 1} &= -b(\eta - bs)^\beta - c(h_1 - H)^\gamma + sl; \\ \xi_{\eta 2} &= -b(\eta - bs)^\beta - c(h_2 - H)^\gamma + sl; \quad \xi_{\eta l} = sl - c(\zeta - H)^\gamma; \\ \xi_{\zeta 1} &= -b(B - bs)^\beta - c(\zeta - H)^\gamma + sl.\end{aligned}$$

Потенціальна гармонічна функція Φ в рівняннях (2.2.4) є нічим іншим, як об'ємною деформацією, й виражається через переміщення таким чином:

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y, Z) &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}, & \text{тому:} \\ \Phi|_{x=0} &= \frac{1}{2(1-2\nu)} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right).\end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Інтегрування гармонічних потенціальних функцій здійснювалось після розкладання компонентів швидкостей переміщень на поверхні деформатора та виразів η , ζ в ряд Тейлора в околах $q = \eta / 2, S = \zeta / 2$.

Вираз

$$\zeta = \left(-\frac{b(\eta - bs)^\beta - sl + \xi}{c} \right)^{1/\gamma} + H$$

після розкладання в ряд Тейлора в околах S має вигляд:

$$\zeta_{RT} = \left(-\frac{b(q-bs)^\beta + S - sl}{c} \right)^{1/\gamma} + H - \frac{\left(-\frac{b(q-bs)^\beta + S - sl}{c} \right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} (\zeta - S)}{c \gamma} -$$

$$- \left(b(q-bs)^{\beta-1} \left(-\frac{b(q-bs)^\beta + S - sl}{c} \right)^{1/\gamma} \beta(q-\eta) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (b \gamma (q-bs)^\beta - sl \gamma + S(2\gamma-1) - \gamma \zeta + \zeta') \right) /$$

$$/ \left((b(q-bs)^\beta + S - sl)^2 \gamma^2 \right)$$

Вираз

$$\eta = \left(-\frac{c(\zeta - H)^\gamma - sl + \zeta'}{b} \right)^{1/\beta} + bs$$

після розкладання в ряд Тейлора в околах q має вигляд:

$$\eta_{RT} = -\frac{(\zeta - S) \left(-\frac{c(p-H)^\gamma + S - sl}{b} \right)^{\frac{1}{\beta} - 1}}{b \beta} + \left(-\frac{c(p-H)^\gamma + S - sl}{b} \right)^{1/\beta} +$$

$$+ bs - \left(c(p-H)^{\gamma-1} \left(-\frac{c(p-H)^\gamma + S - sl}{b} \right)^{1/\beta} \gamma \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (p-\zeta)(c \beta (p-H)^\gamma + (2\beta-1)S - sl \beta - \beta \zeta + \zeta') \right) /$$

$$/ \left((c(p-H)^\gamma + S - sl)^2 \beta^2 \right)$$

У розгорнутому вигляді ці функції дуже громіздкі, й не наводяться в даній монографії.

Для випадку, коли початок робочого органу співпадає з початком координат ґрунтового напівпростору, тобто $h1=0$, $bs=0$, $sl=0$, та $h2=\zeta$, $B=\eta$, після нехтування у вищезгаданих функціях величинами

порядків малості вище другого – потенціальні гармонічні функції (2.2.5), (2.2.6) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
a_1 = & -\left(hl^2 Um(c x^2 \gamma hl^{\gamma-1} - c z^2 \gamma hl^{\gamma-1} - c z hl^\gamma + 2 c z \gamma hl^\gamma + c hl^{\gamma+1} - \right. \\
& c \gamma hl^{\gamma+1} + c^2 x z \gamma^2 hl^{2\gamma-2} - c^2 x \gamma^2 hl^{2\gamma-1} + \\
& 2 c^2 x \gamma hl^{2\gamma-1} + c^3 z \gamma^2 hl^{3\gamma-2} - \\
& \left. c^3 \gamma^2 hl^{3\gamma-1} + c^3 \gamma hl^{3\gamma-1} + x hl - x z) \varphi \right. \\
& \tan^{-1}\left(\left((y - bs)(-c x \gamma hl^\gamma - c^2 \gamma hl^{2\gamma} - hl^2 + z hl)\right) / \right. \\
& \left. \left(\sqrt{(2 c x hl^\gamma + c^2 hl^{2\gamma} + hl^2 - 2 z hl + x^2 + (y - bs)^2 + z^2)} \right. \right. \\
& \left. \left. (c z \gamma hl^\gamma + c hl^{\gamma+1} - c \gamma hl^{\gamma+1} + x hl)\right)\right) / \\
& \left((-c x \gamma hl^\gamma - c^2 \gamma hl^{2\gamma} - hl^2 + z hl) \right. \\
& \left. (c z \gamma hl^\gamma + c hl^{\gamma+1} - c \gamma hl^{\gamma+1} + x hl) \right. \\
& \left. (c^2 \gamma^2 hl^{2\gamma-2} + 1) \right) + \\
& \left(hl^2 Um(-b c^2 hl^{2\gamma-1} \gamma^2 (B - bs)^\beta + b c^2 hl^{2\gamma-2} z \gamma^2 (B - bs)^\beta + b hl \right. \\
& (B - bs)^\beta - b z (B - bs)^\beta + 2 b c^2 hl^{2\gamma-1} \gamma (B - bs)^\beta + \\
& 2 b c hl^{\gamma-1} x \gamma (B - bs)^\beta + b^2 c hl^{\gamma-1} \gamma (B - bs)^{2\beta} + \\
& c hl^{\gamma+1} - c^3 hl^{3\gamma-1} \gamma^2 - c^2 hl^{2\gamma-1} x \gamma^2 + \\
& c^3 hl^{3\gamma-2} z \gamma^2 + c^2 hl^{2\gamma-2} x z \gamma^2 + hl x - c hl^\gamma z - \\
& x z - c hl^{\gamma+1} \gamma + c^3 hl^{3\gamma-1} \gamma + c hl^{\gamma-1} x^2 \gamma - \\
& \left. c hl^{\gamma-1} z^2 \gamma + 2 c^2 hl^{2\gamma-1} x \gamma + 2 c hl^\gamma z \gamma) \times \dots \right. \\
& \left. \varphi \tan^{-1}\left(\left((y - B)(-b c hl^\gamma \gamma (B - bs)^\beta - hl^2 + hl z - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. c^2 hl^{2\gamma} \gamma - c hl^\gamma x \gamma)\right) / \right. \\
& \left. \left(\sqrt{(2 b c hl^\gamma (B - bs)^\beta + 2 b x (B - bs)^\beta + b^2 (B - bs)^{2\beta} + c^2 \right. \right. \\
& \left. \left. hl^{2\gamma} + hl^2 + x^2 + (y - B)^2 + z^2 + 2 c hl^\gamma x - 2 hl z) \right. \right. \\
& \left. \left. (b hl (B - bs)^\beta + c hl^{\gamma+1} + hl x - c hl^{\gamma+1} \gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. c hl^\gamma z \gamma)\right)\right) / \\
& \left((-b c hl^\gamma \gamma (B - bs)^\beta - hl^2 + hl z - c^2 hl^{2\gamma} \gamma - c hl^\gamma x \gamma) \right. \\
& \left. (b hl (B - bs)^\beta + c hl^{\gamma+1} + hl x - c hl^{\gamma+1} \gamma + c hl^\gamma z \gamma) \right. \\
& \left. (c^2 \gamma^2 hl^{2\gamma-2} + 1) \right) + \\
& \left(h^2 Um(c^2 x z \gamma^2 h^{2\gamma-2} + c^3 z \gamma^2 h^{2\gamma-2} + c x^2 \gamma h^{2\gamma-1} - \right. \\
& c z^2 \gamma h^{2\gamma-1} - c^2 x \gamma^2 h^{2\gamma-1} + 2 c^2 x \gamma h^{2\gamma-1} - \\
& c^3 \gamma^2 h^{2\gamma-1} + c^3 \gamma h^{2\gamma-1} + c h^{2\gamma+1} - \\
& \left. c \gamma h^{2\gamma+1} - c z h^{2\gamma} + 2 c z \gamma h^{2\gamma} + x h^2 - x z) \varphi \right. \\
& \left. \tan^{-1}\left(\left((y - bs)(-c x \gamma h^{2\gamma} - c^2 \gamma h^{2\gamma} - h^{2\gamma} + z h^2)\right) / \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / \left(\sqrt{2 c x h 2^\gamma + c^2 h 2^{2\gamma} + h 2^2 - 2 z h 2 + (y - b s)^2 + x^2 + z^2} \right. \\
& \quad \left. (c h 2^{\gamma+1} - c \gamma h 2^{\gamma+1} + c z \gamma h 2^\gamma + x h 2) \right) / \\
& \quad \left((-c x \gamma h 2^\gamma - c^2 \gamma h 2^{2\gamma} - h 2^2 + z h 2) \right. \\
& \quad \left. (c h 2^{\gamma+1} - c \gamma h 2^{\gamma+1} + c z \gamma h 2^\gamma + x h 2) (c^2 \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + 1) \right) + \\
& \quad \frac{1}{c^2 \gamma^2 h 1^{2\gamma-2} + 1} \left(c h 1^{\gamma-1} U m \gamma \varphi \log \left(-b s + y + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{2 c x h 1^\gamma + c^2 h 1^{2\gamma} + h 1^2 - 2 z h 1 + (y - b s)^2 + x^2 + z^2} \right) \right) - \\
& \quad \frac{1}{c^2 \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + 1} \left(c h 2^{\gamma-1} U m \gamma \varphi \log \left(-b s + y + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{2 c x h 2^\gamma + c^2 h 2^{2\gamma} + h 2^2 - 2 z h 2 + (y - b s)^2 + x^2 + z^2} \right) \right) - \\
& \quad \frac{1}{c^2 \gamma^2 h 1^{2\gamma-2} + 1} \left(c h 1^{\gamma-1} U m \gamma \varphi \log \right. \\
& \quad \left. \left(-B + y + \sqrt{2 b c h 1^\gamma (B - b s)^\beta + 2 b x (B - b s)^\beta + b^2 (B - b s)^{2\beta} +} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. c^2 h 1^{2\gamma} + (y - B)^2 + h 1^2 + x^2 + z^2 + 2 c h 1^\gamma x - 2 h 1 z \right) \right) + \\
& \quad \frac{1}{c^2 \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + 1} \left(c h 2^{\gamma-1} U m \gamma \varphi \left(\log \left(-B + y + \sqrt{2 b c h 2^\gamma (B - b s)^\beta +} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 b x (B - b s)^\beta + b^2 (B - b s)^{2\beta} + c^2 h 2^{2\gamma} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y - B)^2 + h 2^2 + x^2 + z^2 + 2 c h 2^\gamma x - 2 h 2 z \right) \right) \right) - \\
& \quad (h 2^2 U m (b (B - b s)^\beta c^2 z \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + c^2 x z \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + c^3 z \gamma^2 h 2^{3\gamma-2} + \\
& \quad c x^2 \gamma h 2^{\gamma-1} - c z^2 \gamma h 2^{\gamma-1} + b^2 (B - b s)^{2\beta} c \gamma h 2^{\gamma-1} + \\
& \quad 2 b (B - b s)^\beta c x \gamma h 2^{\gamma-1} - b (B - b s)^\beta c^2 \gamma^2 h 2^{2\gamma-1} - \\
& \quad c^2 x \gamma^2 h 2^{2\gamma-1} + 2 b (B - b s)^\beta c^2 \gamma h 2^{2\gamma-1} + 2 c^2 x \gamma h 2^{2\gamma-1} - \\
& \quad c^3 \gamma^2 h 2^{3\gamma-1} + c^3 \gamma h 2^{3\gamma-1} + c h 2^{\gamma+1} - c \gamma h 2^{\gamma+1} - c z h 2^\gamma + \\
& \quad 2 c z \gamma h 2^\gamma + b (B - b s)^\beta h 2 + x h 2 - b z (B - b s)^\beta - x z) \varphi((y - B) \\
& \quad (-b c h 2^\gamma \gamma (B - b s)^\beta - h 2^2 + h 2 z - c^2 h 2^{2\gamma} \gamma - c h 2^\gamma x \gamma))) / \\
& \quad \left(\left(\tan \left(\sqrt{2 b c h 2^\gamma (B - b s)^\beta + 2 b x (B - b s)^\beta + b^2 (B - b s)^{2\beta} +} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. c^2 h 2^{2\gamma} + (y - B)^2 + h 2^2 + x^2 + z^2 + 2 c h 2^\gamma x - 2 h 2 z \right) \right) \right. \\
& \quad \left. (c h 2^{\gamma+1} - c \gamma h 2^{\gamma+1} + c z \gamma h 2^\gamma + b (B - b s)^\beta h 2 + x h 2) \right) \\
& \quad \left((-b c h 2^\gamma \gamma (B - b s)^\beta - h 2^2 + h 2 z - c^2 h 2^{2\gamma} \gamma - c h 2^\gamma x \gamma) \right. \\
& \quad \left. (c h 2^{\gamma+1} - c \gamma h 2^{\gamma+1} + c z \gamma h 2^\gamma + b (B - b s)^\beta h 2 + x h 2) \right. \\
& \quad \left. (c^2 \gamma^2 h 2^{2\gamma-2} + 1) \right)
\end{aligned}$$

;

(2.2.8)

$$\begin{aligned}
a_2 = & b(B - bs)^\beta \operatorname{Um} \varphi \left(\log \left(-h_1 + z + \sqrt{(B^2 - 2yB + (z - h_1)^2 +} \right. \right. \\
& \left. \left. (-b(B - bs)^\beta - c(h_1 - H)^\gamma + sl)^2 + x^2 + y^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. 2(-b(B - bs)^\beta - c(h_1 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) - \log \left(\right. \\
& \left. -h_1 + z + \sqrt{(B^2 - 2yB + (z - h_1)^2 + (-c(h_1 - H)^\gamma + sl)^2 +} \right. \\
& \left. \left. x^2 + y^2 - 2(-c(h_1 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) - \\
& -b(B - bs)^\beta \operatorname{Um} \varphi \left(\log \left(-h_2 + z + \sqrt{(B^2 - 2yB + (z - h_2)^2 +} \right. \right. \\
& \left. \left. (-b(B - bs)^\beta - c(h_2 - H)^\gamma + sl)^2 + x^2 + y^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. 2(-b(B - bs)^\beta - c(h_2 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) - \log \left(\right. \\
& \left. -h_2 + z + \sqrt{(B^2 - 2yB + (z - h_2)^2 + (-c(h_2 - H)^\gamma + sl)^2 +} \right. \\
& \left. \left. x^2 + y^2 - 2(-c(h_2 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) + \dots \quad ; \\
\end{aligned}
\tag{2.2.9}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & c((h_1 - H)^\gamma - (h_2 - H)^\gamma) \operatorname{Um} \varphi \left(\log \left(-B + y + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{((y - B)^2 + h_2^2 + (-b(B - bs)^\beta - c(h_2 - H)^\gamma + sl)^2 + x^2 +} \right. \right. \\
& \left. \left. z^2 - 2zh_2 - 2(-b(B - bs)^\beta - c(h_2 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) - \\
& -\log \left(-B + y + \sqrt{((y - B)^2 + h_2^2 +} \right. \\
& \left. \left. (-b(B - bs)^\beta - c(h_1 - H)^\gamma + sl)^2 + x^2 + z^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. 2zh_2 - 2(-b(B - bs)^\beta - c(h_1 - H)^\gamma + sl)x \right) \right) - \\
& -c((h_1 - H)^\gamma - (h_2 - H)^\gamma) \operatorname{Um} \varphi \left(\log \left(-bs + y + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{((y - bs)^2 + h_2^2 + (-c(h_2 - H)^\gamma - 0^\beta b + sl)^2 + x^2 + z^2 -} \right. \right. \\
& \left. \left. 2zh_2 - 2(-c(h_2 - H)^\gamma - 0^\beta b + sl)x \right) \right) - \log \left(-bs + \right. \\
& \left. y + \sqrt{((y - bs)^2 + h_2^2 + (-c(h_1 - H)^\gamma - 0^\beta b + sl)^2 + x^2 +} \right. \\
& \left. \left. z^2 - 2zh_2 - 2(-c(h_1 - H)^\gamma - 0^\beta b + sl)x \right) \right) + \dots \quad ; \\
\end{aligned}
\tag{2.2.10}$$

$\Phi =$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(1-\nu)} \left((H-hl)^2 Um \left((sl-b(B-bs)^\beta) c^2 hl \gamma^2 (hl-H)^{2\gamma-2} - c^2 hl x \right. \right. \\
& \quad \gamma^2 (hl-H)^{2\gamma-2} - c^2 (sl-b(B-bs)^\beta) z \gamma^2 (hl-H)^{2\gamma-2} + \\
& \quad c^2 x z \gamma^2 (hl-H)^{2\gamma-2} - c^3 hl \gamma^2 (hl-H)^{3\gamma-2} + c^3 z \gamma^2 \\
& \quad (hl-H)^{3\gamma-2} - c hl^2 \gamma (hl-H)^{\gamma-1} + c x^2 \gamma (hl-H)^{\gamma-1} - \\
& \quad c z^2 \gamma (hl-H)^{\gamma-1} + (sl-b(B-bs)^\beta)^2 c \gamma (hl-H)^{\gamma-1} - \\
& \quad 2c(sl-b(B-bs)^\beta) x \gamma (hl-H)^{\gamma-1} + 2c hl z \gamma (hl-H)^{\gamma-1} - \\
& \quad 2c^2 (sl-b(B-bs)^\beta) \gamma (hl-H)^{2\gamma-1} + 2c^2 x \gamma (hl-H)^{2\gamma-1} + \\
& \quad c^3 \gamma (hl-H)^{3\gamma-1} + c hl (hl-H)^\gamma - c z (hl-H)^\gamma - \\
& \quad \left. hl (sl-b(B-bs)^\beta) + hl x + (sl-b(B-bs)^\beta) z - x z \right) \\
& \left(-((2c(hl-H)^\gamma - 2(sl-b(B-bs)^\beta) + 2x)(y-B) \right. \\
& \quad \left. ((sl-b(B-bs)^\beta) c \gamma (hl-H)^\gamma - cx \gamma (hl-H)^\gamma - \right. \\
& \quad \left. c^2 \gamma (hl-H)^{2\gamma} - hl^2 + H hl - H z + hl z)) / \right. \\
& \quad \left(2(-2(sl-b(B-bs)^\beta) c (hl-H)^\gamma + 2cx (hl-H)^\gamma + \right. \\
& \quad \left. c^2 (hl-H)^{2\gamma} + (y-B)^2 + (sl-b(B-bs)^\beta)^2 + \right. \\
& \quad \left. hl^2 + x^2 + z^2 - 2(sl-b(B-bs)^\beta)x - 2hlz) \right)^{3/2} \\
& \quad \left(-cH (hl-H)^\gamma + c hl (hl-H)^\gamma - c hl \gamma (hl-H)^\gamma + \right. \\
& \quad \left. c z \gamma (hl-H)^\gamma - hl (sl-b(B-bs)^\beta) + \right. \\
& \quad \left. (sl-b(B-bs)^\beta) H - Hx + hl x \right) - \\
& \quad \left(c (hl-H)^\gamma (y-B) \gamma \right) / \left(\sqrt{(-2(sl-b(B-bs)^\beta) c (hl-H)^\gamma + \right.} \\
& \quad \left. 2cx (hl-H)^\gamma + c^2 (hl-H)^{2\gamma} + \right. \\
& \quad \left. (y-B)^2 + (sl-b(B-bs)^\beta)^2 + hl^2 + \right. \\
& \quad \left. x^2 + z^2 - 2(sl-b(B-bs)^\beta)x - 2hlz) \right) \\
& \quad \left(-cH (hl-H)^\gamma + c hl (hl-H)^\gamma - c hl \gamma (hl-H)^\gamma + \right. \\
& \quad \left. c z \gamma (hl-H)^\gamma - hl (sl-b(B-bs)^\beta) + \right. \\
& \quad \left. (sl-b(B-bs)^\beta) H - Hx + hl x \right) - ((hl-H)(y-B) \\
& \quad \left((sl-b(B-bs)^\beta) c \gamma (hl-H)^\gamma - cx \gamma (hl-H)^\gamma - \right. \\
& \quad \left. c^2 \gamma (hl-H)^{2\gamma} - hl^2 + H hl - H z + hl z)) / \right. \\
& \quad \left(\sqrt{(-2(sl-b(B-bs)^\beta) c (hl-H)^\gamma + 2cx (hl-H)^\gamma + \right.} \\
& \quad \left. c^2 (hl-H)^{2\gamma} + (y-B)^2 + (sl-b(B-bs)^\beta)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h1^2 + x^2 + z^2 - 2(sl - b(B - bs)^\beta)x - 2h1z) \\
& \quad (-cH(h1 - H)^\gamma + ch1(h1 - H)^\gamma - ch1\gamma(h1 - H)^\gamma + \\
& \quad \quad cz\gamma(h1 - H)^\gamma - h1(sl - b(B - bs)^\beta) + \\
& \quad \quad (sl - b(B - bs)^\beta)H - Hx + h1x^2))\varphi) / \\
& \quad ((sl - b(B - bs)^\beta)c\gamma(h1 - H)^\gamma - cx\gamma(h1 - H)^\gamma - \\
& \quad \quad c^2\gamma(h1 - H)^{2\gamma} - h1^2 + Hh1 - Hz + h1z) \\
& \quad (-cH(h1 - H)^\gamma + ch1(h1 - H)^\gamma - ch1\gamma(h1 - H)^\gamma + \\
& \quad \quad cz\gamma(h1 - H)^\gamma - h1(sl - b(B - bs)^\beta) + \\
& \quad \quad (sl - b(B - bs)^\beta)H - Hx + h1x)(c^2\gamma^2(h1 - H)^{2\gamma-2} + 1) \\
& \quad (((y - B)^2((sl - b(B - bs)^\beta)c\gamma(h1 - H)^\gamma - cx\gamma(h1 - H)^\gamma - \\
& \quad \quad c^2\gamma(h1 - H)^{2\gamma} - h1^2 + Hh1 - Hz + h1z)^2) / \\
& \quad \quad ((-2(sl - b(B - bs)^\beta)c(h1 - H)^\gamma + 2cx(h1 - H)^\gamma + \\
& \quad \quad c^2(h1 - H)^{2\gamma} + (y - B)^2 + (sl - b(B - bs)^\beta)^2 + \\
& \quad \quad h1^2 + x^2 + z^2 - 2(sl - b(B - bs)^\beta)x - 2h1z) \\
& \quad \quad (-cH(h1 - H)^\gamma + ch1(h1 - H)^\gamma - ch1\gamma(h1 - H)^\gamma + \\
& \quad \quad \quad cz\gamma(h1 - H)^\gamma - h1(sl - b(B - bs)^\beta) + \\
& \quad \quad \quad (sl - b(B - bs)^\beta)H - Hx + h1x^2) + 1)) + \\
& \quad ((H - h2)^2 Um(c^2 h2 sl \gamma^2 (h2 - H)^{2\gamma-2} - c^2 h2 x \gamma^2 (h2 - H)^{2\gamma-2} - \\
& \quad \quad c^2 sl z \gamma^2 (h2 - H)^{2\gamma-2} + c^2 x z \gamma^2 (h2 - H)^{2\gamma-2} - \\
& \quad \quad c^3 h2 \gamma^2 (h2 - H)^{3\gamma-2} + c^3 z \gamma^2 (h2 - H)^{3\gamma-2} - \\
& \quad \quad c h2^2 \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} + c sl^2 \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} + c x^2 \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} - \\
& \quad \quad c z^2 \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} - 2 c sl x \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} + \\
& \quad \quad 2 c h2 z \gamma (h2 - H)^{\gamma-1} - 2 c^2 sl \gamma (h2 - H)^{2\gamma-1} + \\
& \quad \quad 2 c^2 x \gamma (h2 - H)^{2\gamma-1} + c^3 \gamma (h2 - H)^{3\gamma-1} + c h2 (h2 - H)^\gamma - \dots
\end{aligned}
\tag{2.2.11}$$

Функції (2.2.8) - (2.2.11) є потенціальними та гармонічними, оскільки всі вони задовольняють рівнянню Лапласа в ортогональних прямолінійних координатах $x y z$:

$$\Delta(a_1) = 0, \Delta(a_2) = 0, \Delta(a_3) = 0, \Delta(\Phi) = 0,$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Тепер, з урахуванням (2.2.8) - (2.2.11) компоненти швидкостей переміщень ґрунту (2.2.4) у напівпросторі перед робочим органом у формі Тедоне (2.2.4) матимуть вигляд У розгорнутому вигляді ці функції дуже громіздкі, і не наводяться в даній монографії.

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -\frac{1}{2(1-\nu)} \\ & \left(U m x \left(\frac{(-(-z-\delta)(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta))}{(2(-sl+x+\delta) \right.} \right. \\ & \quad \left. \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 \right)^{3/2} \right) - \\ & \quad \left((-z-\delta)(-bs+y+\delta) \right) / \left((-sl+x+\delta)^2 \right) \\ & \quad \sqrt{\left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2 \right.} \\ & \quad \left. \left. z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 \right) \right) / \\ & \quad \left((-z-\delta) \left(1 + ((-z-\delta)^2 (-bs+y+\delta)^2) \right) / \right. \\ & \quad \left. \left((-sl+x+\delta)^2 \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. 2x\delta + 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 \right) \right) \right) - \\ & \quad \left((-(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta)(-z-\delta+\zeta)) / \right. \\ & \quad \left. \left(2(-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma) \right) \right. \\ & \quad \left. \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} = & -\frac{1}{2(1-\nu)} \\
& (Um y \left(\frac{-((-z-\delta)(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta))}{(2(-sl+x+\delta) \right. \\
& \quad (sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+ \\
& \quad \quad \left. 2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2)^{3/2}} \right) - \\
& \frac{((-z-\delta)(-bs+y+\delta))}{((-sl+x+\delta)^2} \\
& \quad \sqrt{(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2 \\
& \quad \quad z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2)} \Big) / \\
& \frac{((-z-\delta)(1+((-z-\delta)^2(-bs+y+\delta)^2))}{((-sl+x+\delta)^2(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+ \\
& \quad \quad 2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2))} - \\
& \frac{(-((-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta)(-z-\delta+\zeta))}{(2(-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma))} \\
& \quad (sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+ \\
& \quad \quad 2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2-2z\zeta-2\delta\zeta+ \\
& \quad \quad \zeta^2-2csl\zeta^\gamma+2c\delta\zeta^\gamma+c^2\zeta^{2\gamma})^{3/2} - \\
& \frac{((-bs+y+\delta)(-z-\delta+\zeta))}{((-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)^2} \\
& \quad \sqrt{(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z \\
& \quad \quad \delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2-2z\zeta-2\delta \\
& \quad \quad \zeta+\zeta^2-2csl\zeta^\gamma+2c\delta\zeta^\gamma+c^2\zeta^{2\gamma})} \Big) / \\
& \frac{((-z-\delta+\zeta)(1+((-bs+y+\delta)^2(-z-\delta+\zeta)^2))}{((-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)^2} \\
& \quad (sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+ \\
& \quad \quad 2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2-2z\zeta-2\delta\zeta+ \\
& \quad \quad \zeta^2-2csl\zeta^\gamma+2c\delta\zeta^\gamma+c^2\zeta^{2\gamma})) - \\
& \frac{(-((-z-\delta)(y+\delta-\eta)(-2sl+2x+2\delta+2b(-bs+\eta)^\beta))}{(2(-sl+x+\delta+b(-bs+\eta)^\beta)(sl^2-2slx+x^2+z^2- \\
& \quad \quad 2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(y+\delta-\eta)^2- \\
& \quad \quad 2b sl(-bs+\eta)^\beta+2bx(-bs+\eta)^\beta+...
\end{aligned}$$

(2.2.13)

$$\begin{aligned}
\dot{w} = & -\frac{1}{2(I-\nu)} \\
& (Um z \left(\left(-((-z-\delta)(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta)) \right) / \left(2(-sl+x+\delta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 \right)^{3/2} \right) - \\
& \left((-z-\delta)(-bs+y+\delta) \right) / \left((-sl+x+\delta)^2 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2 \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2) \right) \right) / \\
& \left((-z-\delta)(1 + ((-z-\delta)^2(-bs+y+\delta)^2) / \right. \\
& \quad \left. ((-sl+x+\delta)^2(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + \right. \\
& \quad \quad \left. 2x\delta + 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2) \right) \right) - \\
& \left(-((-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta)(-z-\delta+\zeta)) \right) / \\
& \quad \left(2(-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma) \right. \\
& \quad \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \\
& \quad \quad \left. 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \\
& \quad \quad \left. \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma} \right)^{3/2} \right) - \\
& \left((-bs+y+\delta)(-z-\delta+\zeta) \right) / \left((-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)^2 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z \right. \\
& \quad \quad \left. \delta + 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta \right. \\
& \quad \quad \left. \zeta + \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma}) \right) \right) / \\
& \left((-z-\delta+\zeta)(1 + ((-bs+y+\delta)^2(-z-\delta+\zeta)^2) / \right. \\
& \quad \left. ((-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)^2 \right. \\
& \quad \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \\
& \quad \quad \left. 2\delta^2 + (-bs+y+\delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \\
& \quad \quad \left. \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma}) \right) \right) - \\
& \left(-((-z-\delta)(y+\delta-\eta)(-2sl+2x+2\delta+2b(-bs+\eta)^\beta) \right) / \\
& \quad \left(2(-sl+x+\delta+b(-bs+\eta)^\beta)(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - \right. \\
& \quad \quad \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + 2\delta^2 + (y+\delta-\eta)^2 - \right. \\
& \quad \quad \left. 2b sl(-bs+\eta)^\beta + 2bx(-bs+\eta)^\beta + \right. \\
& \quad \quad \left. 2b\delta(-bs+\eta)^\beta + b^2(-bs+\eta)^{2\beta} \right)^{3/2} \right) - \dots
\end{aligned}$$

(2.2.14)

Шляхом диференціювання швидкостей переміщень (2.2.12) - (2.2.14) по x, y, z визначаються 6 компонент швидкостей деформацій у ґрунтовому напівпросторі:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x = & \left(Um(z + \delta - \zeta) \zeta \eta \right. \\ & \left. \left(-((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)(2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - \right. \right. \\ & \left. \left. 2sl + 2x + 2\delta)) / (2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - \right. \right. \\ & \left. \left. sl + x + \delta)(2bc(\zeta - H)^\gamma(\eta - bs)^\beta - \right. \right. \\ & \left. \left. 2b sl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\ & \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \right. \\ & \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2} \right) - \right. \\ & \left. ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \right. \\ & \left. ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\ & \left. \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma(\eta - bs)^\beta - 2b sl(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2 \right. \right. \\ & \left. \left. (\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\ & \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \right. \\ & \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)) \right) \varphi) / \right. \\ & \left. (2\pi(-z - \delta + \zeta)((-z - \delta + \zeta)^2(y + \delta - \eta)^2) / \right. \\ & \left. ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\ & \left. (2bc(\zeta - H)^\gamma(\eta - bs)^\beta - 2b sl(\eta - bs)^\beta + \right. \\ & \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \\ & \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \\ & \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \\ & \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + \right. \\ & \left. 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta) + 1) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_y = & \left(Um y(z + \delta - \zeta) \zeta \eta \left((2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)) / \right. \right. \\
& \left. \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \right. \\
& \left. \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \left. \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \right. \\
& \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta \right) \right) - \\
& \left(2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^3 \right) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \\
& \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \\
& \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta^2 \right) \\
& \left(-((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)(2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - \right. \\
& \left. 2sl + 2x + 2\delta)) \right) / \\
& \left(2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \right. \\
& \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \right. \\
& \left. 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \left. c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \right. \\
& \left. (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - \right. \\
& \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta^{3/2} \right) - ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left. \sqrt{2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right.} \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z = & \left(Um z(z + \delta - \zeta) \zeta \eta \right. \\
& \left. (-2(-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)^2) / \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. sl + x + \delta)^2 (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2b sl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta \right) \right) - \\
& \left((2z + 2\delta - 2\zeta)(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2 \right) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \quad \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \quad \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \quad \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \quad \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \\
& \quad \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \\
& \quad \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta \right)^2 \right) \\
& \left(-((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)(2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2sl + 2x + 2\delta)) \right) / \\
& \left(2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \right. \\
& \quad \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \quad \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \right. \\
& \quad \left. 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \quad \left. c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - \right. \\
& \quad \left. \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta \right)^{3/2} \right) - ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \dots \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{xy} = & \\
& (Um(z + \delta - \zeta) \zeta \eta ((-z - \delta + \zeta) / ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \\
& \delta) \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \\
& 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \\
& c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \\
& (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - \\
& 2z\zeta - 2\delta\zeta})) - ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)^2) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2 \\
& (\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \\
& x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2})) \varphi) / \\
& (2\pi(-z - \delta + \zeta) (((-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \\
& b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)) + 1)) + \\
& (Um x(z + \delta - \zeta) \zeta \eta ((2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \\
& b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)) - \\
& (2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^3) / \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{zy} = & \left(U m z (z + \delta - \zeta) \zeta \eta \left((2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)) / \right. \right. \\
& \left. \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \right. \\
& \left. \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \right. \\
& \left. \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \right. \\
& \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta \right) \right) - \\
& \left(2(-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^3 \right) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \right. \\
& \left. z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \right. \\
& \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta^2 \right) \left. \right) \\
& \left(-((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)(2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - \right. \\
& \left. 2sl + 2x + 2\delta)) \right) / \\
& \left(2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \right. \\
& \left(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \right. \\
& \left. 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \left. c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \right. \\
& \left. (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - \right. \\
& \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta^{3/2} \right) - \left((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta) \right) / \\
& \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left. \sqrt{2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \right. \\
& \left. b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \right. \\
& \left. 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{xz} = & \\
& (Um (z + \delta - \zeta) \zeta \eta (-(y + \delta - \eta) / ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \\
& \delta) \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2 \\
& (\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \\
& x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta})) - \\
& ((2z + 2\delta - 2\zeta)(-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& (2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2 \\
& (\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \\
& x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2})) \varphi) / \\
& (2\pi(-z - \delta + \zeta) (((-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \\
& b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)) + 1)) + \\
& (Um x (z + \delta - \zeta) \zeta \eta (-(2(-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)^2) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \dots
\end{aligned}
\tag{2.2.15}$$

Перший та третій інваріанти швидкостей деформацій (швидкості об'ємних та інтенсивність швидкості зсувних деформацій у загальному випадку мають громіздкий вигляд, тому не представлені в монографії.

Залежності швидкостей деформацій на поверхні контакту робочого органу отримані з виразів (2.2.15) при

$$x = \xi = -c(-H + \zeta)^\gamma - b\eta^\beta, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

Адекватність одержаних залежностей для компонент швидкостей деформацій (2.2.15) може бути перевірена за допомогою рівнянь сумісності їх дії:

$$\frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_z}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial z^2};$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right). \quad (2.2.16)$$

Рівняння (2.2.16) виконуються при підстановці в них значень компонент швидкостей деформацій.

Графічно зміни компонент швидкостей деформацій у ґрунтовому напівпросторі в залежності від геометричних форм і розмірів деформатора, від відстані до нього представлені на рис. 2.24-2.26.

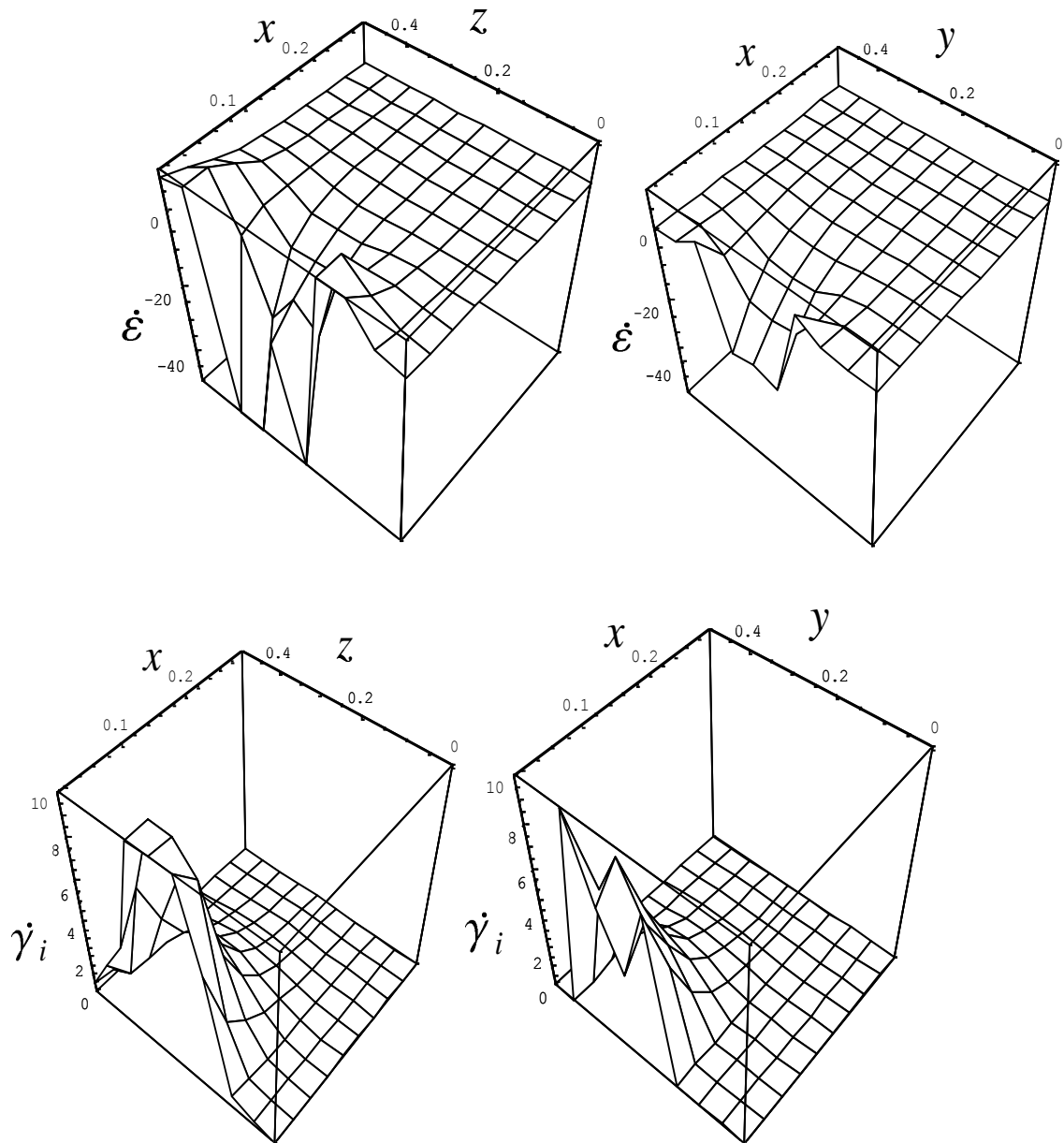


Рис. 2.24. Характерні графіки зміни швидкостей об'ємних $\dot{\epsilon}$ та інтенсивності зсувних $\dot{\gamma}_i$ деформацій ґрунту під дією плоского деформатора з розмірами $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.4$, $bs = 0.2$, $B = 0.4$, що переміщується в напрямку осі Ox

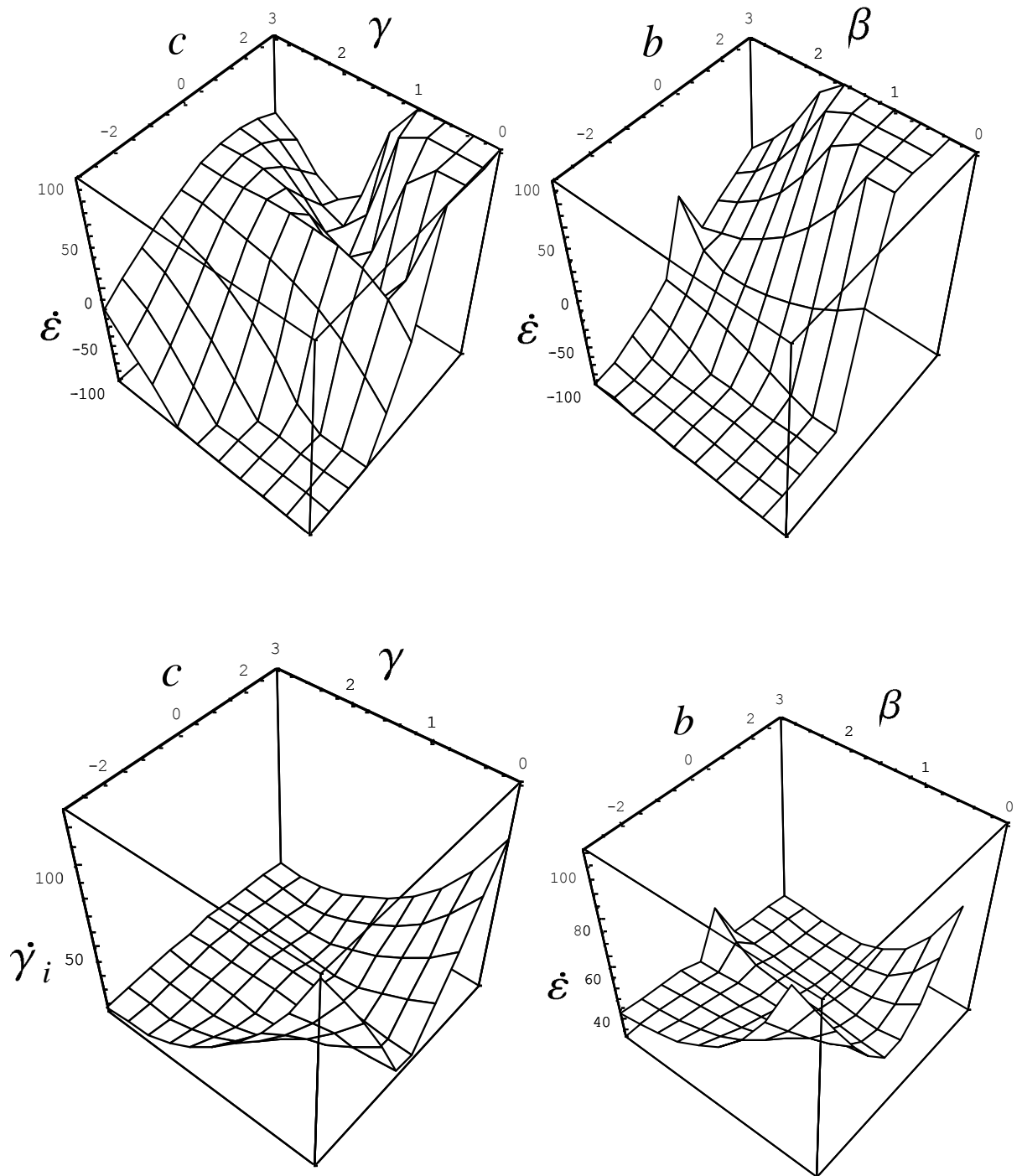


Рис. 2.25. Характерні графіки змін швидкостей об'ємних $\dot{\epsilon}$ та інтенсивності зсувних $\dot{\gamma}_i$ деформацій ґрунту на поверхні контакту в залежності від параметрів поверхні робочого органу

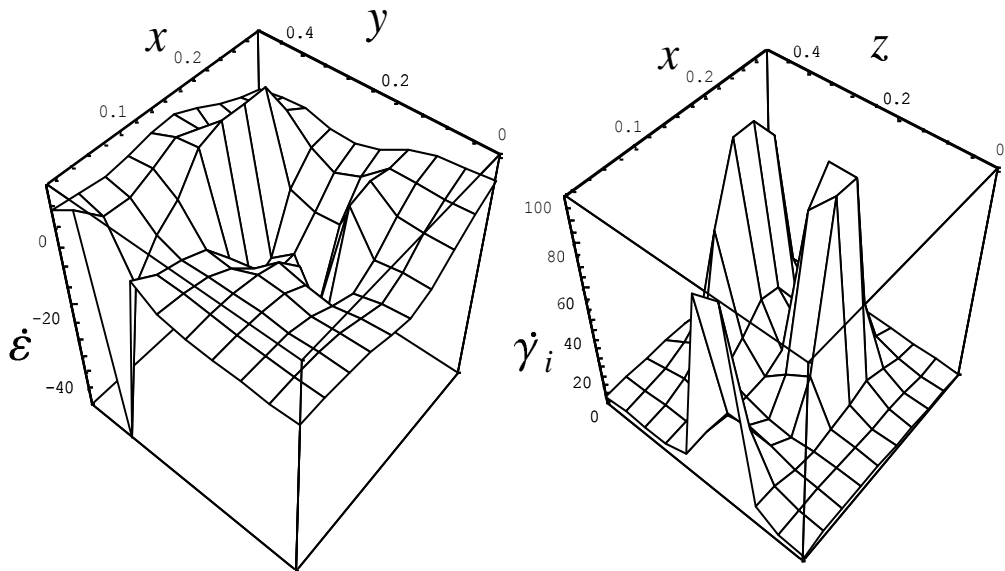


Рис. 2.26. Характерні графіки зміни швидкостей об'ємних $\dot{\varepsilon}$ та інтенсивності зсувних $\dot{\gamma}_i$ деформацій ґрунту під дією плоского деформатора з розмірами $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.4$, $bs = 0.2$, $B = 0.4$, що переміщується в напрямку осі Ox з кутом нахилу до осей Ox та Oy

$$(f = \xi + 1(\eta - bs)^1 - 1(\zeta - H)^1)$$

Аналіз одержаних залежностей компонент швидкостей деформацій у ґрунті на відстані від деформатора та на поверхні контакту дозволяє зробити висновки про суттєвий вплив геометричних розмірів та форми поверхні робочого органу на їх розподіл і величину.

2.2.3. Аналіз розподілу напружень у ґрунтовому середовищі

При відомому розподілі компонентів швидкостей деформацій у ґрунтовому середовищі під дією деформатора, представленого рівнянням (2.2.1), значення компонент напружень можуть бути визначені з використанням фізичних рівнянь зв'язку напружень із деформаціями (швидкостями деформацій) для тіла KV (2.1.20). З урахуванням значень компонент швидкостей деформацій у ґрунтовому середовищі (2.2.15) під дією просторового робочого органу компоненти напружень мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \frac{1}{1 + e^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}} \\
& \left(\mu \left(Um \left(\left(-((-z - \delta)(-bs + y + \delta)(-2sl + 2x + 2\delta)) / \left(2(-sl + x + \delta) \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 \right)^{3/2} \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left((-z - \delta)(-bs + y + \delta) \right) / \left((-sl + x + \delta)^2 \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \sqrt{\left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 \right) \right) \right) \right) \right) / \\
& \quad \left((-z - \delta) \left(1 + \left((-z - \delta)^2 (-bs + y + \delta)^2 \right) / \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left((-sl + x + \delta)^2 \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2x\delta + 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 \right) \right) \right) \right) - \\
& \quad \left(-((-bs + y + \delta)(-2sl + 2x + 2\delta)(-z - \delta + \zeta)) / \right. \\
& \quad \quad \left. \left(2(-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma} \right)^{3/2} \right) - \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left((-bs + y + \delta)(-z - \delta + \zeta) \right) / \left((-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2 \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \sqrt{\left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma} \right) \right) \right) \right) \right) / \\
& \quad \left((-z - \delta + \zeta) \left(1 + \left((-bs + y + \delta)^2 (-z - \delta + \zeta)^2 \right) / \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left((-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \zeta^2 - 2csl\zeta^\gamma + 2c\delta\zeta^\gamma + c^2\zeta^{2\gamma} \right) \right) \right) \right) \right) - \\
& \quad \left(-((-z - \delta)(y + \delta - \eta)(-2sl + 2x + 2\delta + \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2b(-bs + \eta)^\beta \right) \right) / \dots
\end{aligned}$$

;

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \frac{1}{1 + e^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}} \left(\mu \left(-(b Um (2 y + 2 \delta - 2 \eta) (-bs + \eta)^\beta \varphi) / \right. \right. \\
& \left. \left. \begin{aligned} & (2 \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta +} \\ & \eta^2 + (-sl + x + \delta + b (-bs + \eta)^\beta)^2) \\ & (z + \delta + \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2 y \eta - 2} \\ & \delta \eta + \eta^2 + (-sl + x + \delta + b (-bs + \eta)^\beta)^2}) \right) \right) + \\ & (b Um (2 y + 2 \delta - 2 \eta) (-bs + \eta)^\beta \varphi) / \\ & \left(2 \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta + \eta^2 +} \right. \\ & \left. (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b (-bs + \eta)^\beta)^2) (z + \delta - \zeta + \right. \\ & \left. \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta +} \right. \\ & \left. \eta^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b (-bs + \eta)^\beta)^2) \right) \right) - \\ & \frac{1}{2(1 - \nu)} \left(Um y \left((3(-z - \delta) (-bs + y + \delta)^2 (-2 sl + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 x + 2 \delta)) / (2 (-sl + x + \delta) \right. \right. \\ & \left. \left. (sl^2 - 2 sl x + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 z \delta + 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{5/2} \right) + \right. \\ & \left. ((-z - \delta) (-bs + y + \delta)^2) / ((-sl + x + \delta)^2 \right. \\ & \left. (sl^2 - 2 sl x + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + \right. \\ & \left. 2 z \delta + 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) - \\ & \left. ((-z - \delta) (-2 sl + 2 x + 2 \delta)) / (2 (-sl + x + \delta) \right. \\ & \left. (sl^2 - 2 sl x + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + 2 z \delta + \right. \\ & \left. 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) - (-z - \delta) / \\ & \left. ((-sl + x + \delta)^2 \sqrt{(sl^2 - 2 sl x + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + \right.} \\ & \left. 2 x \delta + 2 z \delta + 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2) \right) \right) / \\ & \left. ((-z - \delta) (1 + ((-z - \delta)^2 (-bs + y + \delta)^2) / \right. \\ & \left. ((-sl + x + \delta)^2 \right. \\ & \left. (sl^2 - 2 sl x + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + \dots \right. ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \frac{1}{1 + e^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}} \left(\mu \left((c Um (2z + 2\delta - 2\zeta) \zeta^\gamma \varphi) / \right. \right. \\
& (2 \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta -} \\
& \quad \left. 2\delta\zeta + \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2} \right. \\
& \left. \left. (-bs + y + \delta + \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 -} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2} \right) \right) - \\
& (c Um (2z + 2\delta - 2\zeta) \zeta^\gamma \varphi) / \\
& (2 \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 +} \\
& \quad \left. (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2} \right) \\
& (y + \delta - \eta + \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - 2z\zeta -} \\
& \quad \left. 2\delta\zeta + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 +} \right. \\
& \quad \left. \left. (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2} \right) \right) - \\
& \frac{1}{2(1-\nu)} \left(Um z \left((3(-z - \delta)(-bs + y + \delta)(-2sl + 2x + 2\delta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (2z + 2\delta)) / (4(-sl + x + \delta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta +} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{5/2} \right) + \right. \\
& \left. ((-bs + y + \delta)(-2sl + 2x + 2\delta)) / \right. \\
& \left. (2(-sl + x + \delta)(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 -} \right. \\
& \quad \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta + 2\delta^2 +} \right. \\
& \quad \left. \left. (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) + ((-z - \delta) \right. \\
& \quad \left. (-bs + y + \delta)(2z + 2\delta)) / (2(-sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \quad \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta +} \right. \\
& \quad \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) + \\
& \left. (-bs + y + \delta) / ((-sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta +} \right. \\
& \quad \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2} \right) \right) / \\
& ((-z - \delta)(1 + ((-z - \delta)^2(-bs + y + \delta)^2) / \\
& \quad ((-sl + x + \delta)^2 \\
& \quad (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \\
& \quad 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2))) - \dots ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{1}{1 + e^{\frac{Gt}{\eta}}} \left(e^{\frac{Gt}{\eta}} \left(\eta l \left(-(b Um (-bs + \eta)^\beta (-sl + x + \delta + b (-bs + \eta)^\beta) \varphi) / \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta + \eta^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-sl + x + \delta + b (-bs + \eta)^\beta)^2 \right) (z + \delta + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \eta^2 + (-sl + x + \delta + b (-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) \right) + \\
& (b Um (-bs + \eta)^\beta (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b (-bs + \eta)^\beta) \varphi) / \\
& \left(\sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - 2 y \eta - 2 \delta \eta + \right. \right. \\
& \left. \left. \eta^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b (-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) \\
& \left(z + \delta - \zeta + \sqrt{(y^2 + 2 y \delta + \delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. 2 y \eta - 2 \delta \eta + \eta^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b (-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) + \\
& Um \left(\left(-((-z - \delta) (-bs + y + \delta)^2) / ((-sl + x + \delta) \right. \right. \\
& \left. \left. (sl^2 - 2 slx + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2 z \delta + 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) + \right. \\
& \left. (-z - \delta) / ((-sl + x + \delta) \sqrt{(sl^2 - 2 slx + \right. \right. \\
& \left. \left. x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + 2 z \delta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2}) \right) / ((-z - \delta) \right. \\
& \left. (1 + ((-z - \delta)^2 (-bs + y + \delta)^2) / ((-sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left. (sl^2 - 2 slx + x^2 + z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + \right. \\
& \left. 2 z \delta + 2 \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2))) - \right. \\
& \left. \left(-((-bs + y + \delta)^2 (-z - \delta + \zeta)) / \right. \right. \\
& \left. \left. ((-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma) (sl^2 - 2 slx + x^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. z^2 - 2 sl \delta + 2 x \delta + 2 z \delta + 2 \delta^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-bs + y + \delta)^2 - 2 z \zeta - 2 \delta \zeta + \zeta^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. 2 c sl \zeta^\gamma + 2 c \delta \zeta^\gamma + c^2 \zeta^{2\gamma})^{3/2} \right) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zy} = & \frac{1}{1 + e^{\frac{Gt}{\eta}}} \left(e^{\frac{Gt}{\eta}} \left(\eta l \left((c Um \zeta^\gamma (1 + (-bs + y + \delta) / (\sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2 \right) \right) \right) \varphi / \right. \\
& \left. (-bs + y + \delta + \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - \right. \\
& \left. \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma)^2 \right) - \right. \\
& \left. (b Um (-bs + \eta)^\beta (1 + (z + \delta) / (\sqrt{(y^2 + 2y\delta + \right. \\
& \left. \left. \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2y\eta - 2\delta\eta + \eta^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-sl + x + \delta + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) \right) \varphi / \right. \\
& \left. (z + \delta + \sqrt{(y^2 + 2y\delta + \delta^2 + (z + \delta)^2 - 2y\eta - \right. \\
& \left. \left. 2\delta\eta + \eta^2 + (-sl + x + \delta + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) - \right. \\
& \left. (c Um \zeta^\gamma (1 + (y + \delta - \eta) / (\sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - \right. \\
& \left. \left. 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 + (-sl + \right. \\
& \left. \left. x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) \right) \varphi / \right. \\
& \left. (y + \delta - \eta + \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \right. \\
& \left. \left. \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) + \right. \\
& \left. (b Um (-bs + \eta)^\beta (1 + (z + \delta - \zeta) / (\sqrt{(y^2 + 2y\delta + \delta^2 + \right. \\
& \left. \left. (z + \delta - \zeta)^2 - 2y\eta - 2\delta\eta + \eta^2 + (-sl + \right. \\
& \left. \left. x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) \right) \varphi / \right. \\
& \left. (z + \delta - \zeta + \sqrt{(y^2 + 2y\delta + \delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - \right. \\
& \left. \left. 2y\eta - 2\delta\eta + \eta^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. (-sl + x + \delta + c\zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \right) - \right. \\
& \left. \frac{1}{2(1 - \nu)} (Um z ((3(-z - \delta)(-bs + y + \delta)^2 \right. \\
& \left. (-2sl + 2x + 2\delta)) / (2(-sl + x + \delta) \right. \\
& \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} = & \frac{1}{1 + e^{\frac{Gt}{\eta}}} \left(e^{\frac{Gt}{\eta}} \left(\eta l \left((c Um \zeta^\gamma (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma) \varphi) / \right. \right. \right. \\
& \left(\sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma)^2) (-bs + y + \delta + \right. \\
& \left. \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 + (-bs + y + \delta)^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma)^2)} \right) - \\
& \left. (c Um \zeta^\gamma (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta) \varphi) / \right. \\
& \left(\sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2) \right. \\
& \left. (y + \delta - \eta + \sqrt{(z^2 + 2z\delta + \delta^2 - 2z\zeta - 2\delta\zeta + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 + (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2)} \right) - \\
& \left. (-sl + x + \delta + c \zeta^\gamma + b(-bs + \eta)^\beta)^2 \right) \left. \right) - \\
& \frac{1}{2(1 - \nu)} \left(Um z \left(((3(-z - \delta)(-bs + y + \delta) \right. \right. \\
& \left. \left. (-2sl + 2x + 2\delta)^2) / (4(-sl + x + \delta) \right. \right. \\
& \left. \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{5/2} \right) - \\
& ((-z - \delta)(-bs + y + \delta)) / ((-sl + x + \delta) \right. \\
& \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \\
& \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) + \\
& ((-z - \delta)(-bs + y + \delta)(-2sl + 2x + 2\delta)) / \\
& \left. ((-sl + x + \delta)^2 \right. \\
& \left. (sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \\
& \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)^{3/2} \right) + \\
& (2(-z - \delta)(-bs + y + \delta)) / ((-sl + x + \delta)^3 \\
& \left. \sqrt{(sl^2 - 2slx + x^2 + z^2 - 2sl\delta + 2x\delta + \right. \\
& \left. 2z\delta + 2\delta^2 + (-bs + y + \delta)^2)} \right) \left. \right) / \\
& ((-z - \delta)(1 + ((-z - \delta)^2(-bs + y + \delta)^2) / \dots
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

де η_1 – коефіцієнт в'язкості зсувних деформацій;

τ_s – граничне напруження зсуву.

В розгорнутому вигляді вирази напружень у ґрунті під дією просторового пасивного ґрунтообробного робочого органу громіздкі, і не можуть бути наведені в даній монографії.

Графічно середні нормальні напруження та інтенсивність дотичних напружень (функції (2.2.17) в залежності від геометричної форми, розмірів та швидкості переміщення робочих органів, а також властивостей ґрунту представлені на рис. 2.27-2.32.

Аналіз цих залежностей, свідчить про суттєвий вплив параметрів і режимів роботи робочих органів та властивостей ґрунту на величину та розподіл напружень у ґрунтовому напівпросторі.

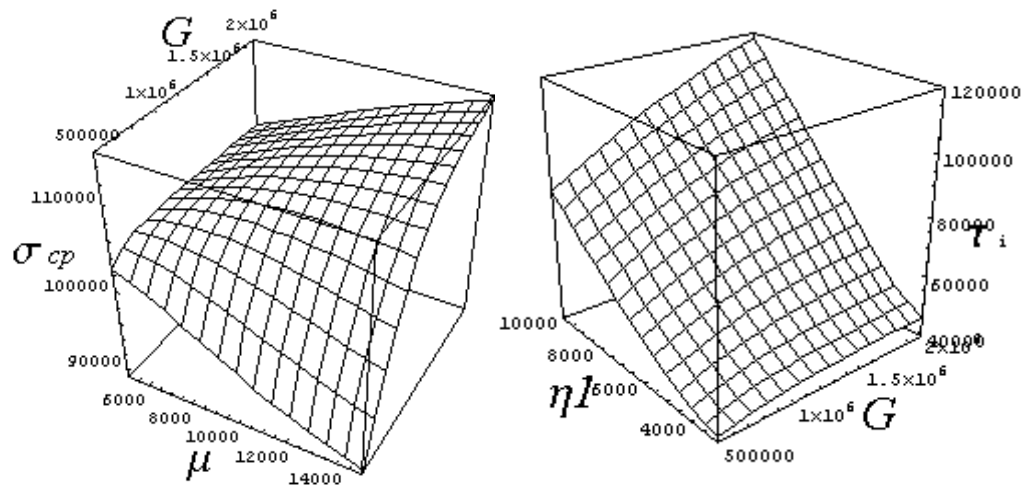


Рис. 2.27. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від модуля пружності та в'язкості ґрунту

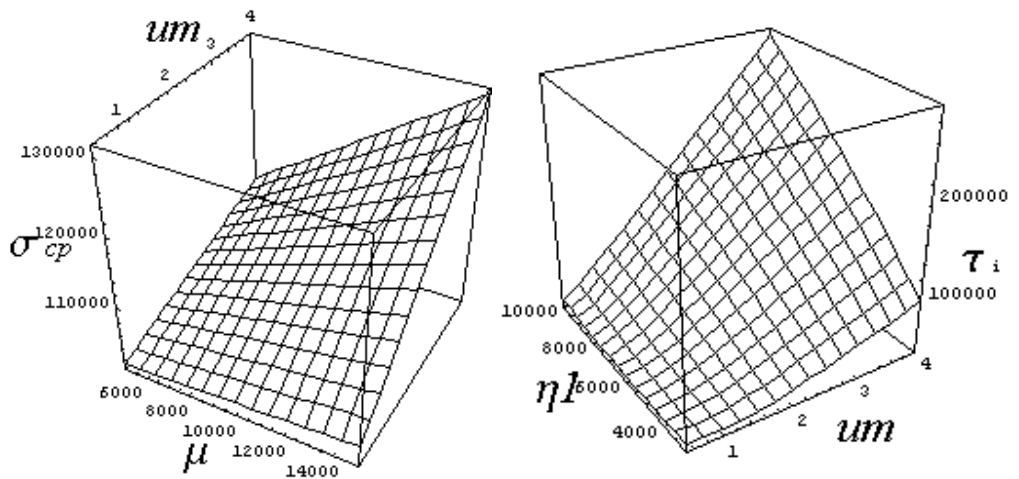


Рис. 2.28. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від швидкості переміщення деформатора та в'язкості ґрунту

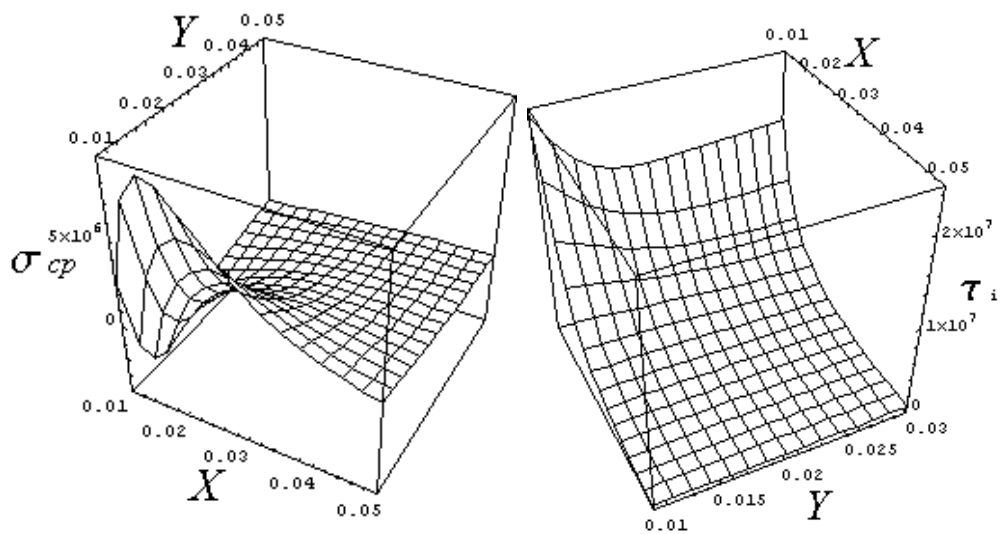


Рис. 2.29. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від відстані точки в напівпросторі від поверхні деформатора

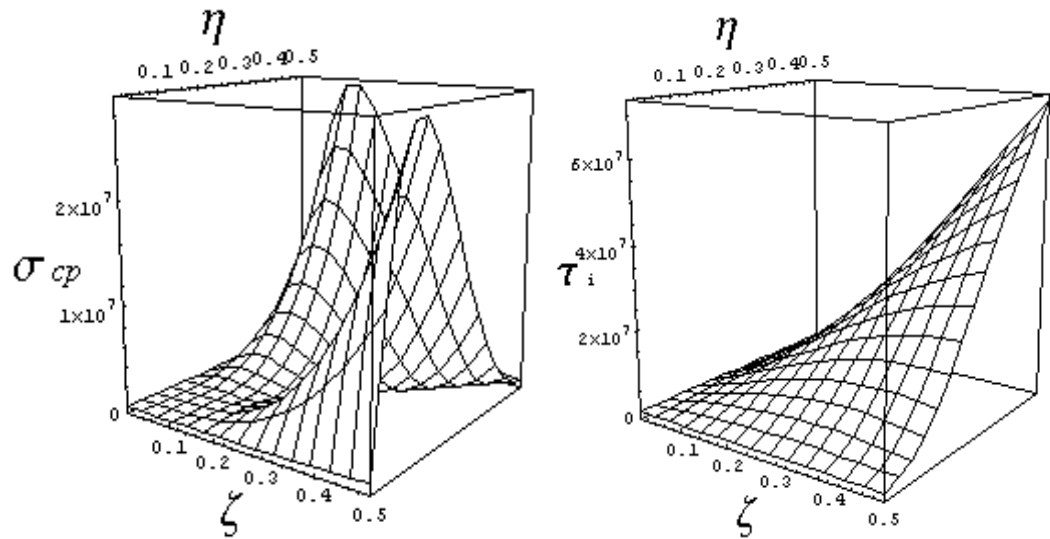


Рис. 2.30. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від збільшення фронтальних розмірів деформатора

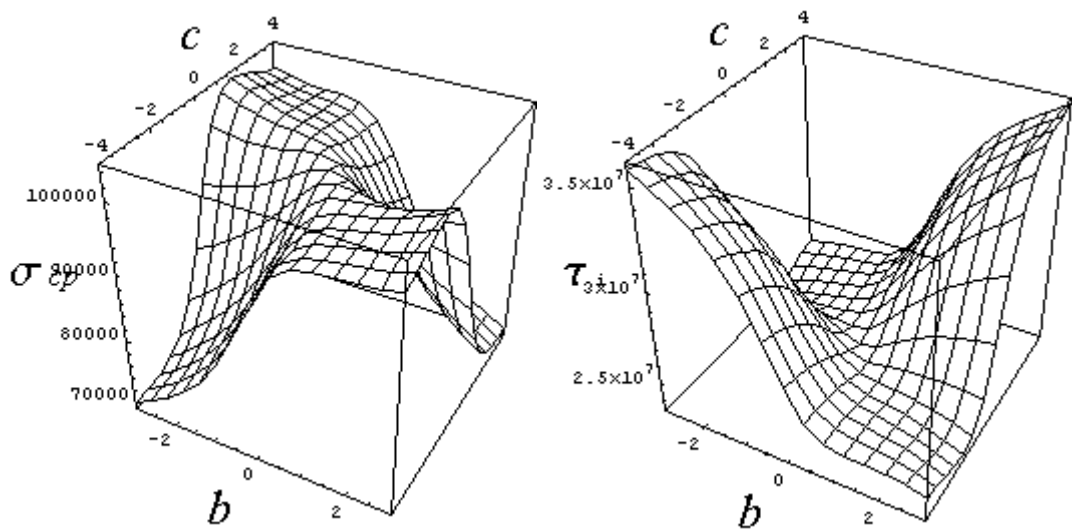


Рис. 2.31. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від геометричної форми поверхні деформатора (коефіцієнтів в рівнянні поверхні)

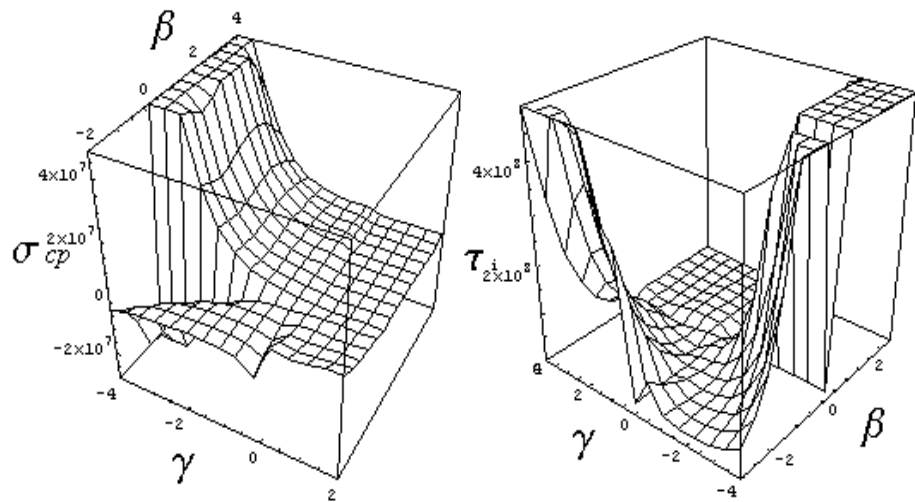


Рис. 2.32. Характерні графіки змін гідростатичних σ_{cp} та інтенсивності зсувних τ_i напружень в залежності від геометричної форми поверхні деформатора (показників ступеня в рівнянні поверхні)

2.2.4. Оцінка потужності деформацій ґрунту пасивним робочим органом

Оцінкою енергомосткості процесу обробітку ґрунту може служити робота деформацій або її диференціал за часом – потужність деформацій, що створені ґрунтообробним робочим органом. При обробітку ґрунту деформації, які виникають в середовищі перед робочим органом, можуть перевищувати граничні значення деформацій, при яких виникає пластична течія, тому при аналізі енергомосткості доцільно використовувати модель ґрунту у вигляді тіла KV.

Згідно з п. 2.1.4. та цієї глави, диференціал роботи в часі (потужність деформування ґрунту об'ємних деформацій) становить:

$$N_{\varepsilon} = \iiint_V (\dot{\varepsilon}_x \sigma_x + \dot{\varepsilon}_y \sigma_y + \dot{\varepsilon}_z \sigma_z) dXdYdZ;$$

$$N_{\gamma} = \iiint_V (\dot{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \dot{\gamma}_{xz} \tau_{xz} + \dot{\gamma}_{zy} \tau_{zy}) dXdYdZ;$$

$$N = N_{\varepsilon} + N_{\gamma}, \quad (2.2.18)$$

де $V = XYZ$, об'єм деформованого ґрунту.

З урахуванням адитивності інтегрування, вирази для визначення потужності об'ємних та зсувних деформацій приймуть вигляд:

$$N_{\varepsilon} = \iiint_V (\dot{\varepsilon}_{cp} \sigma_{cp}) dXdYdZ; \quad N_{\gamma} = \iiint_V (\dot{\gamma}_i \tau_i) dXdYdZ. \quad (2.2.19)$$

Інтегрування виразів (2.2.19) у загальному вигляді неможливе через ірраціональність цих функцій. Із деяким наближенням, оцінкою потужності деформацій може бути сума підінтегральних виразів у вигляді:

$$N_{\varepsilon S} = \sum_{i=1}^i \left(\sum_{j=1}^j \left(\sum_{k=1}^k (\dot{\varepsilon}_{cp} \sigma_{cp}) / .Z \rightarrow kZ_k \right) / .Y \rightarrow jY_j \right) / .X \rightarrow iX_i;$$

$$N_{\gamma S} = \sum_{i=1}^i \left(\sum_{j=1}^j \left(\sum_{k=1}^k (\dot{\gamma}_i \tau_i) / .Z \rightarrow kZ_k \right) / .Y \rightarrow jY_j \right) / .X \rightarrow iX_i, \quad (2.2.20)$$

де i, j, k – кількість кроків підсумовування за відповідними напрямками,

X_i, Y_j, Z_k – крок підсумовування за відповідними напрямками:

$$X_i = X / i, \quad Y_j = Y / j, \quad Z_k = Z / k.$$

Точність отриманих результатів обчислення потужності деформування залежить від величин i, j, k та X_i, Y_j, Z_k . Найбільшої точності отриманих результатів можна досягти при $(i, j, k) \rightarrow \max \text{ idem}$

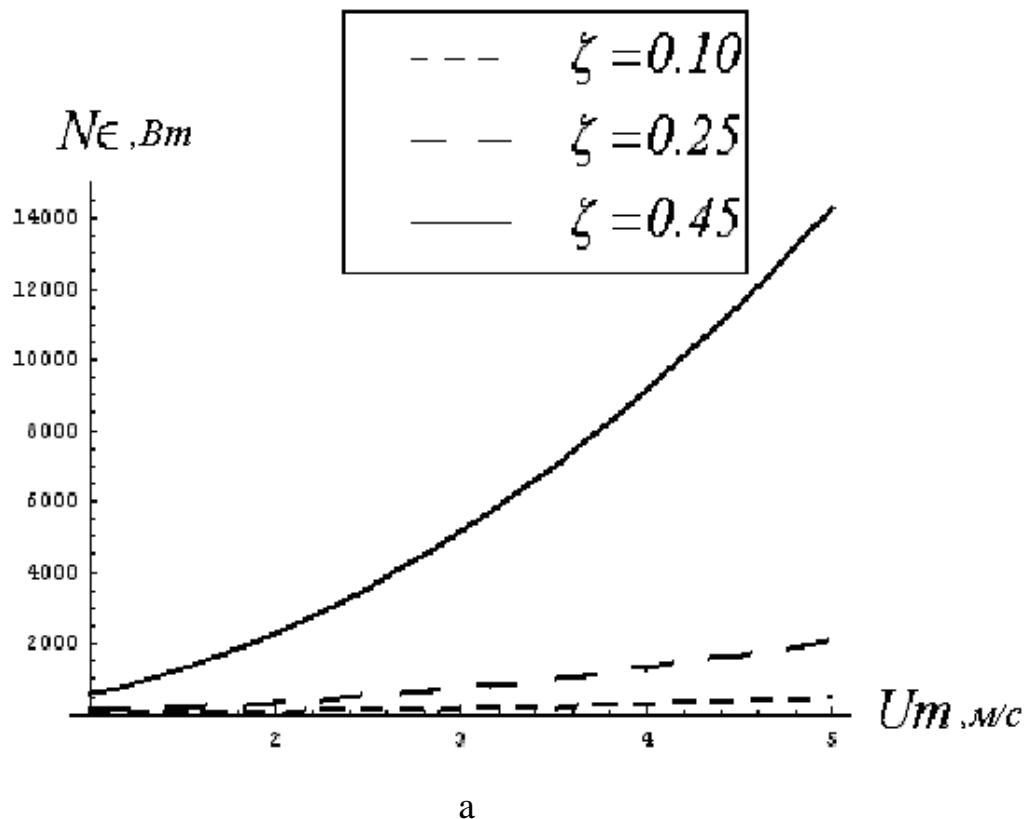
$(X_i, Y_j, Z_k) \rightarrow \min$, однак реалізація цих умов залежить від можливостей ПЕОМ.

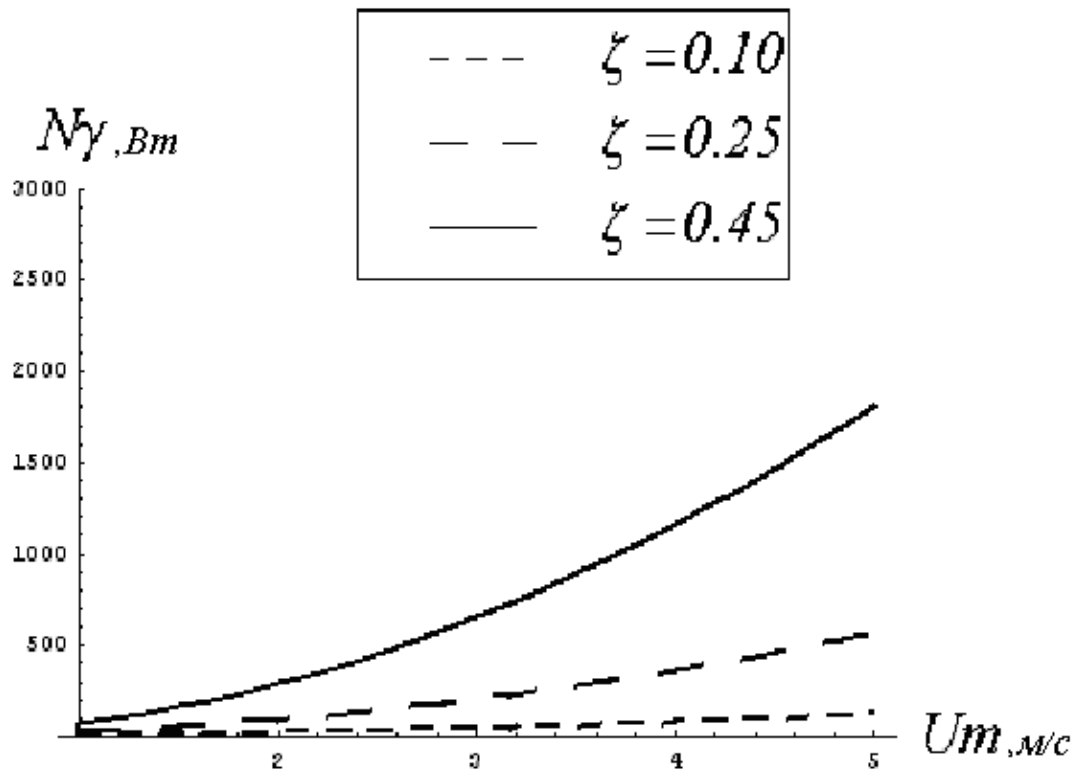
Оцінити співвідношення потужності, яка витрачається на об'ємне деформування та зсув, можна коефіцієнтом:

$$KN = \frac{N_\gamma}{N_\varepsilon} \quad (2.2.21)$$

Аналітична залежність компонентів потужності деформування ґрунту має надто громіздкий вигляд.

Графічно залежності потужності зміни об'єму (об'ємних деформацій), потужності формозміни (зсувних деформацій), сумарної потужності та відношення потужності зсувних до потужності об'ємних деформацій представлені на рис. 2.32-2.37.





б

Рис. 2.32. Залежність потужності об'ємних (а) та зсувних (б) деформацій від швидкості переміщення робочого органу за різної глибини ходу деформатора

Аналіз залежностей потужності деформування ґрунту пасивним ґрунтообробним органом дозволяє зробити висновок, що зниження енергомісткості процесу обробітку ґрунту можна досягти вибором оптимальних співвідношень параметрів та режимів його роботи.

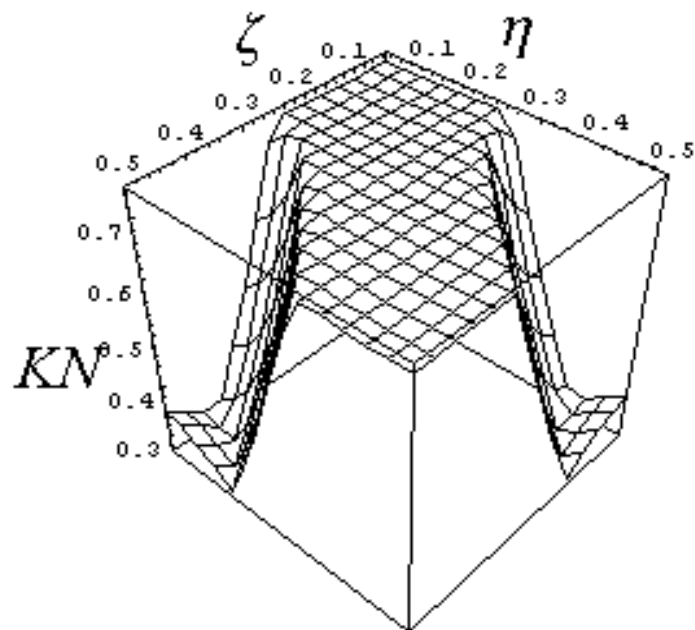
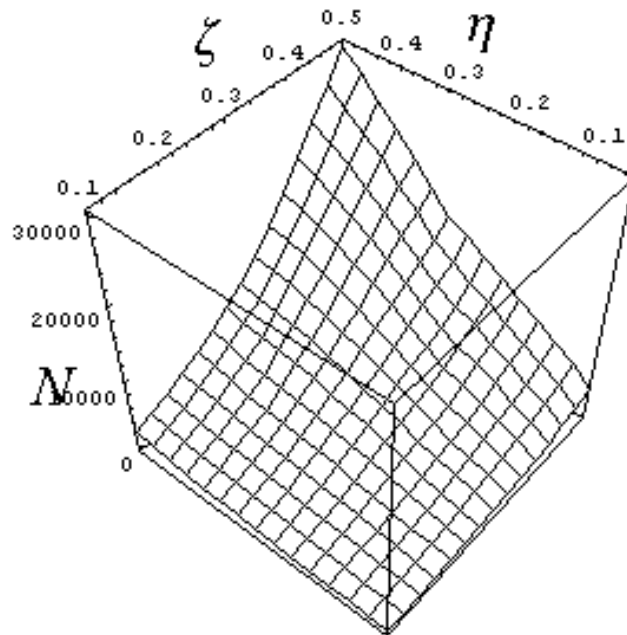


Рис. 2.33. Залежність повної потужності деформацій та співвідношення потужностей від геометричних розмірів робочого органу (η – ширина та ζ – глибина обробітку)

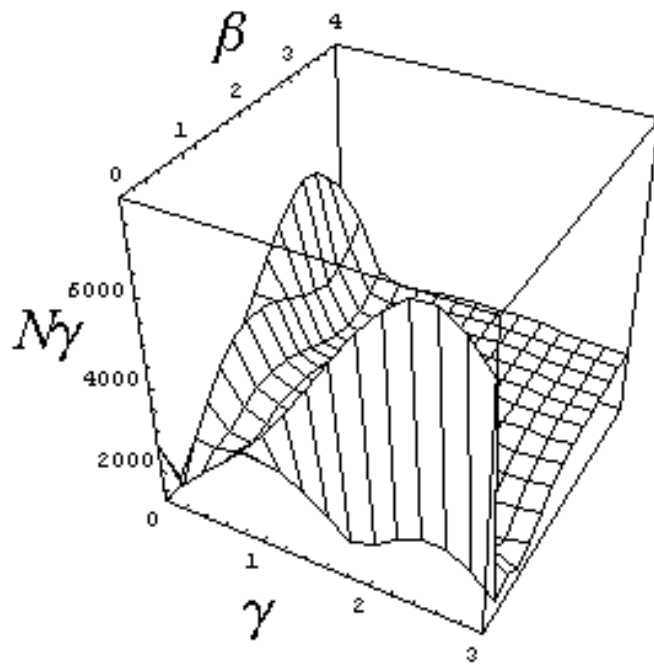
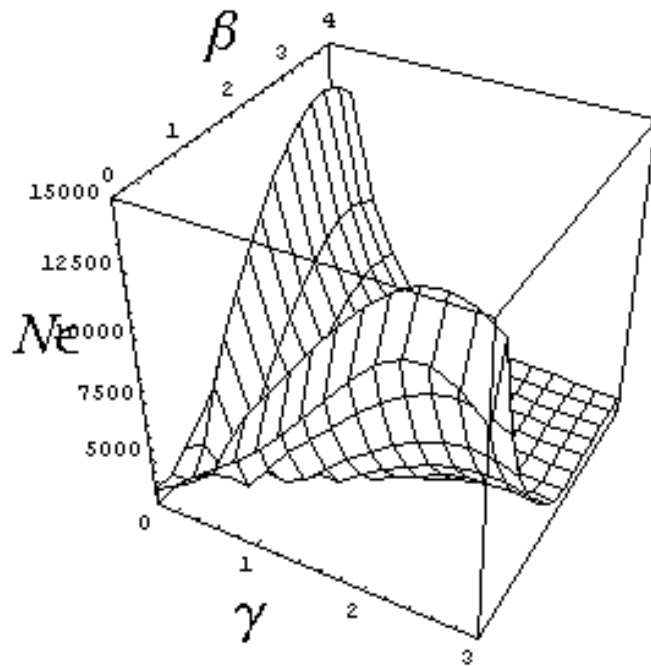


Рис. 2.34. Залежність потужності об'ємних та зсувних деформацій від форми поверхні робочого органу (показників ступенів рівняння поверхні)

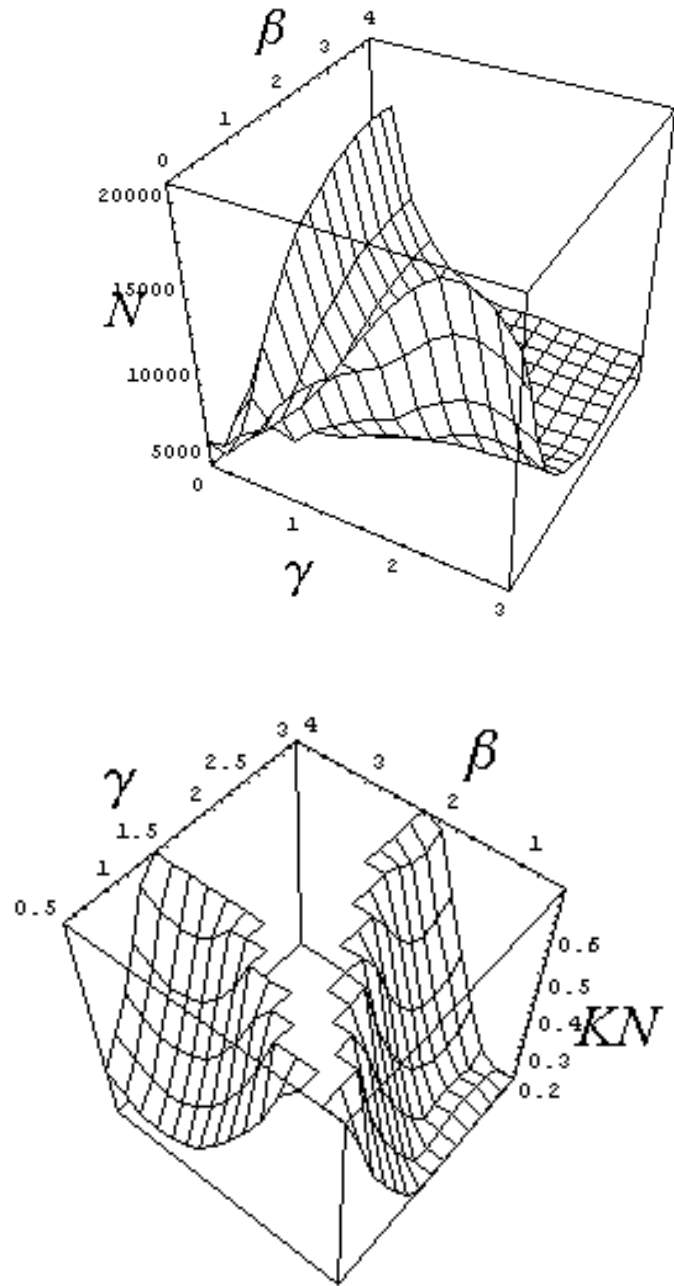


Рис. 2.35. Залежність сумарної потужності деформацій та співвідношення потужностей від форми поверхні робочого органу (показників ступенів рівняння поверхні)

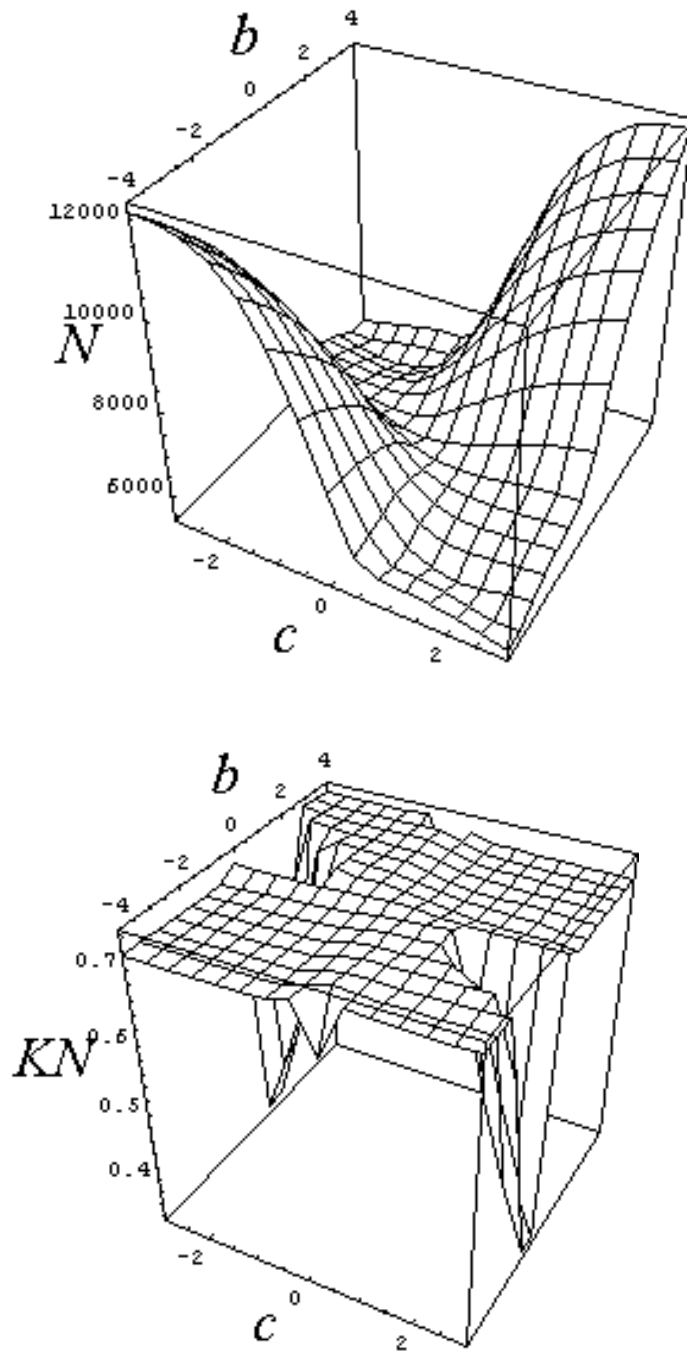


Рис. 2.36. Залежність потужності деформацій та співвідношення потужностей від форми поверхні робочого органу (коефіцієнтів рівняння поверхні)

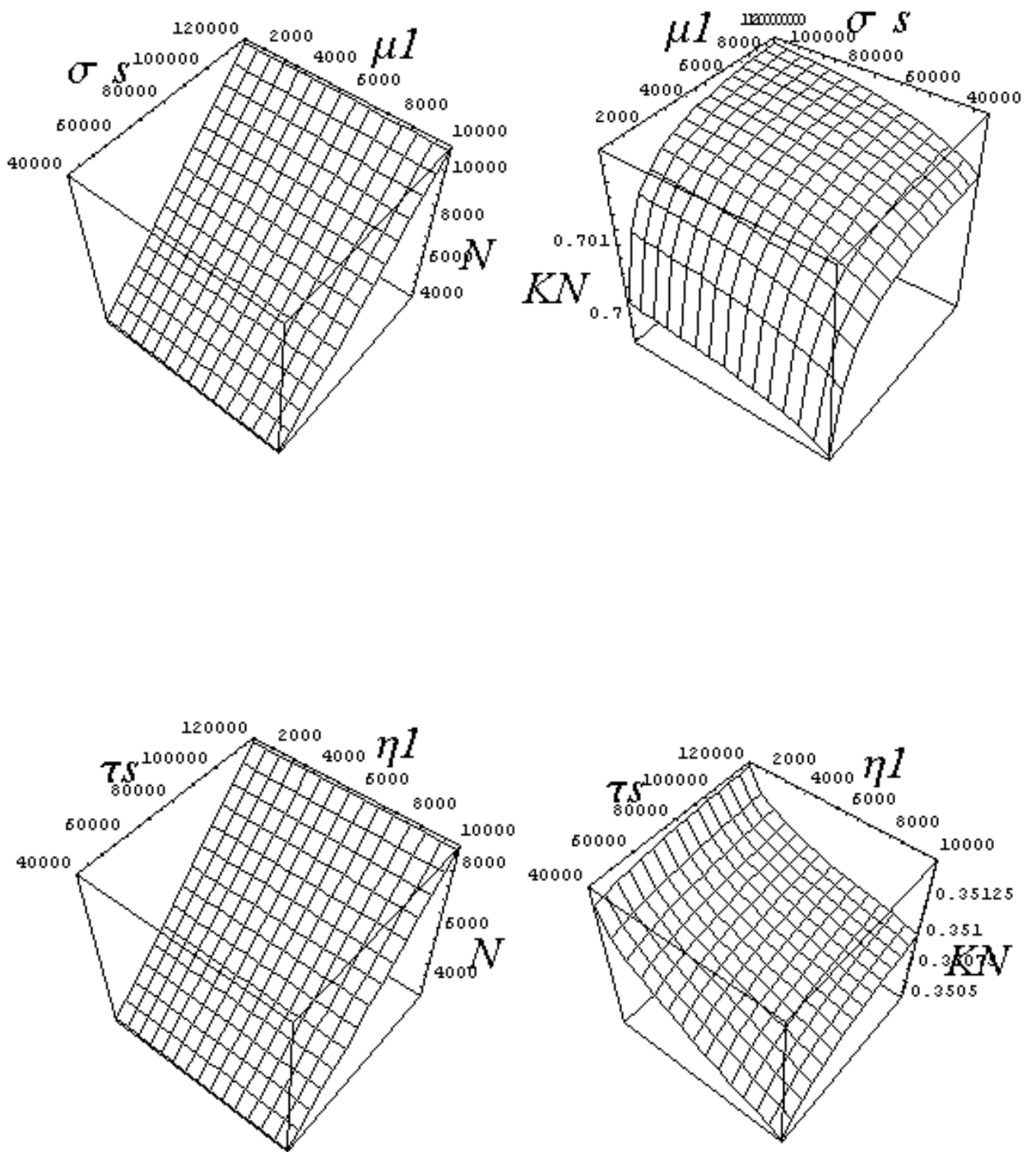


Рис. 2.37. Залежність потужності деформацій та відношення потужностей від властивостей ґрунту

2.2.5. Функція критерію вигляду напружено-деформованого стану та її екстремуми

У відповідності до п. 2.1.3, для визначення раціональних геометричних форм та розмірів робочого органу необхідно визначити та дослідити на екстремум критерій вигляду напружено-деформованого стану ґрунту. Для забезпечення мінімальної енергомісткості процесу обробітку ґрунту (розпушення та порушення суцільності) необхідно забезпечити превалювання девіаторної складової повного тензора деформацій (напружень). Ці вимоги задовольняє мінімум інтегрального значення критерію вигляду деформованого (напруженого) стану, при якому в максимальному об'ємі ґрунту відбуваються зсув та об'ємні деформації, що викликають збільшення об'єму (розтягнення). Інтегральне значення критерію вигляду деформованого (напруженого) стану ґрунту під дією просторового деформатора довільної геометричної форми та розмірів має вигляд:

$$I_{\mu d} = \iiint_V \frac{\sqrt{3}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)}{2\sqrt{\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2}} dXdYdZ; ,$$
$$I_{\mu} = \iiint_V \frac{\sqrt{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{2\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}} dXdYdZ. \quad (2.2.22)$$

Для отриманих значень компонентів деформацій від дії робочого органу довільної геометричної форми та розмірів підінтегральна функція повинна бути проінтегрована чисельно, оскільки її вигляд не дозволяє виконати інтегрування аналітично. Через громіздкість цієї функції, в даній монографії вона не наведена. Фрагмент її має вигляд:

$$\mu\sigma = - \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{2Gt(1+\nu)}{\mu(-1+\nu)}}} \right) \left(\mu \left(Um \left(\frac{(-(-z-\delta)(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta))}{(2(-sl+x+\delta)(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2)^{3/2})} - \frac{((-z-\delta)(-bs+y+\delta))}{((-sl+x+\delta)^2} \sqrt{(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2)} \right) \right) / \left((-z-\delta)(1+((-z-\delta)^2(-bs+y+\delta)^2) / ((-sl+x+\delta)^2(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2))) \right) - \left(\frac{(-(-bs+y+\delta)(-2sl+2x+2\delta)(-z-\delta+\zeta))}{(2(-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2-2z\zeta-2\delta\zeta+\zeta^2-2csl\zeta^\gamma+2c\delta\zeta^\gamma+c^2\zeta^{2\gamma})^{3/2})} - \frac{((-bs+y+\delta)(-z-\delta+\zeta))}{((-sl+x+\delta+c\zeta^\gamma)^2} \sqrt{(sl^2-2slx+x^2+z^2-2sl\delta+2x\delta+2z\delta+2\delta^2+(-bs+y+\delta)^2-2z\zeta-2\delta\zeta+\zeta^2-2csl\zeta^\gamma+2c\delta\zeta^\gamma+c^2\zeta^{2\gamma})} \right) / \dots \right) \quad (2.2.23)$$

Графічно залежність інтегрального критерію вигляду деформованого стану ґрунту від геометричної форми, розмірів, режимів роботи пасивного робочого органу та властивостей ґрунту представлена на рис. 2.38-2.39.

Аналіз графіків залежності вигляду напружено-деформованого стану ґрунту дає підстави зробити висновок про суттєвий вплив на її вид параметрів робочих органів за їхньої взаємодії з ґрунтом, а отже, й про можливість використання цієї функції для оптимізації їх параметрів.

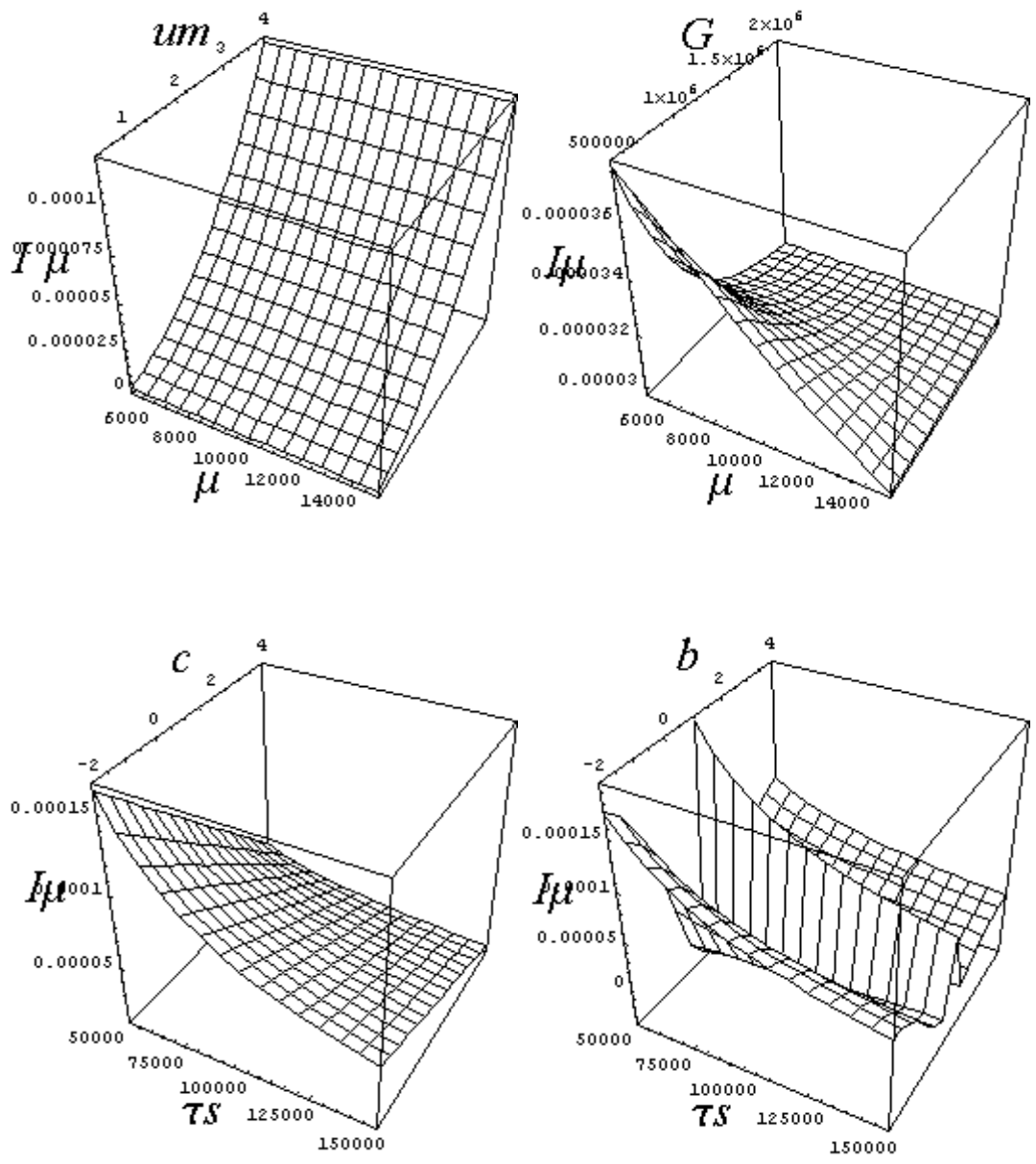


Рис. 2.38. Залежність інтегрального значення критерію вигляду деформованого стану ґрунту від параметрів і режимів роботи робочого органу та властивостей ґрунту

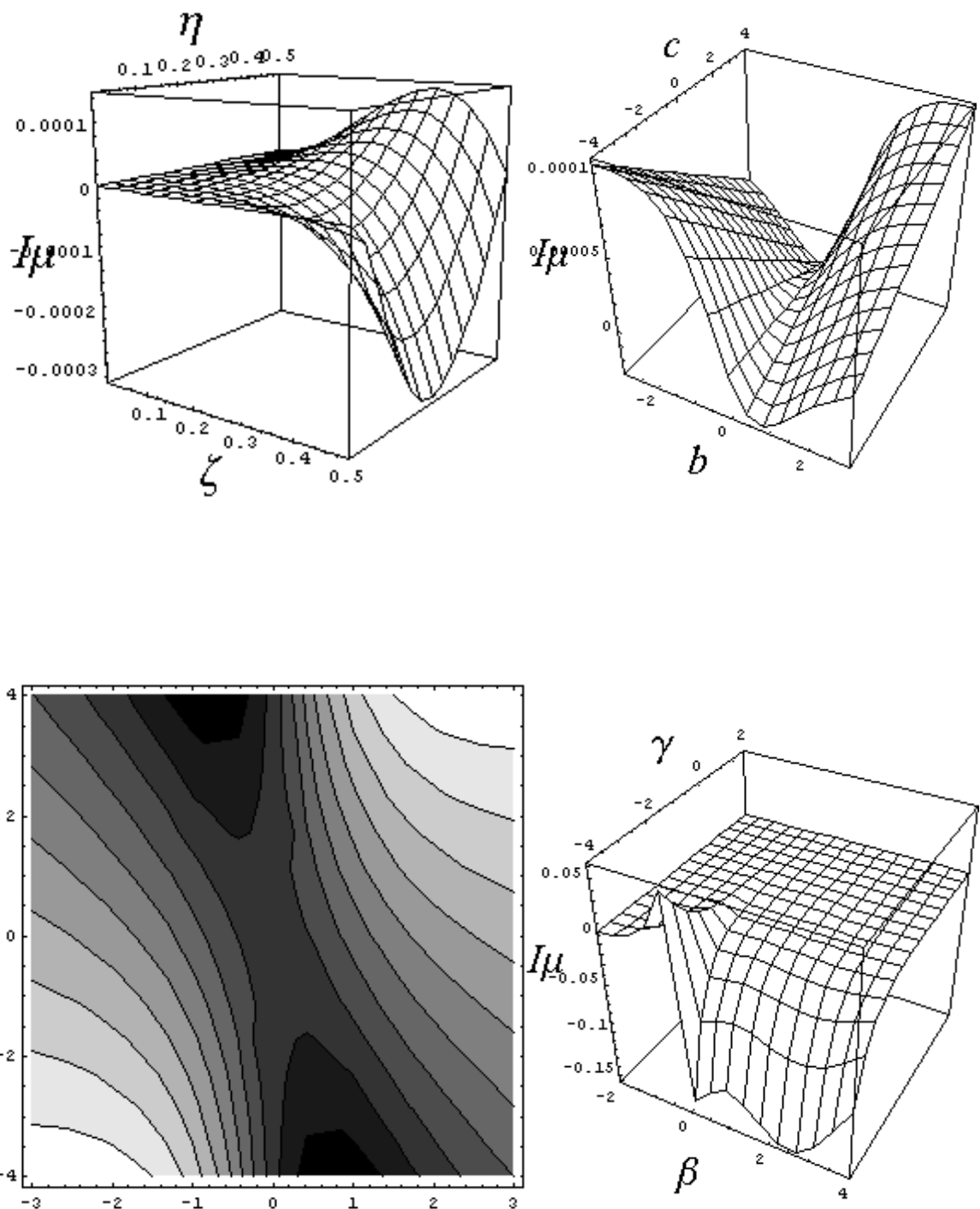


Рис. 2.39. Залежність інтегрального значення критерію вигляду деформованого стану ґрунту від параметрів і режимів роботи робочого органу

Залежність (2.2.22) з урахуванням (2.2.23) може бути використана для оптимізації параметрів та режимів роботи пасивного ґрунтообробного робочого органу. Для зменшення щільності ґрунту в результаті взаємодії з ним пасивного робочого органу необхідно визначити керовані фактори (коефіцієнти рівняння поверхні робочого органу та його геометричні розміри, а також швидкість його переміщення) при відомих властивостях (модуль пружності, коефіцієнти в'язкості, граничні напруження пластичності), які забезпечать виконання необхідної умови: $I\mu \rightarrow \min$, що відповідає превалюванню зсувних та розтягуючих деформацій.

Велика кількість незалежних змінних та нелінійність залежності (2.2.23) не дозволяє використати аналітичні методи пошуку її екстремуму.

Пошук мінімуму інтегрального показника вигляду напружено-деформованого стану ґрунту повинен проводитись для кожного конкретного типу ґрунту з відомими межами змін його властивостей числовими методами із застосуванням ПЕОМ (наприклад методом прямого пошуку або градієнтного спуску).

Для знаходження екстремуму функції багатьох змінних при наявності декількох екстремумів (рис. 2.39) можна вести мову лише про локальні екстремуми в певних межах змін незалежних змінних. Методи знаходження екстремумів функцій багатьох змінних розроблені для досить широкого класу задач оптимізації, але застосування їх для функцій оптимізації, представлених в аналітичному вигляді, має суттєві обмеження. Найбільш ефективним способом пошуку екстремуму в цьому випадку є метод градієнтного спуску, який реалізується, наприклад, функцією "FindMinimum" пакету системи комп'ютерної математики "Mathematica-3, 4, 5**".

2.2.6. Функція розподілу тиску та зусиль по поверхні пасивного робочого органу

Витрати енергії на деформацію та руйнування ґрунту при його обробітку пасивними робочими органами можуть бути визначені шляхом

інтегрування тиску ґрунту на поверхні робочого органу по його поверхні. Тиск на поверхні робочого органу визначається зі статичних рівнянь рівноваги на поверхні:

$$\begin{aligned} P_X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; & P_Y &= \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l; \\ P_Z &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

З урахуванням значень компонент напружень у ґрунтовому середовищі при $(x - \xi) = 0; (y - \eta) = 0; (z - \zeta) = 0$, тобто на поверхні контакту робочий орган-ґрунт складові тиску мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_x &= \left(c e^{\frac{Gt}{\eta}} \gamma (\zeta - H)^{\gamma-1} \right. \\ &\quad \left((Um(z + \delta - \zeta) \zeta \eta (-y + \delta - \eta) / ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \right. \\ &\quad \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)} - \\ &\quad \left. ((2z + 2\delta - 2\zeta)(-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \right. \\ &\quad \left. (2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \right. \\ &\quad \left. (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2} \right) \varphi \Big/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (2 \pi (-z - \delta + \zeta)) \\
& \left(((-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2) / \left((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \right. \\
& \quad (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& \quad 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + \\
& \quad 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + \\
& \quad sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& \quad \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta\right) + 1 \right) + \\
& \frac{1}{2\pi} (cUm\eta \left(((\zeta - H)^\gamma (2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - 2sl + 2x + 2\delta)) / \right. \\
& \quad (2\sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta} \\
& \quad (\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& \quad 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \\
& \quad (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta) \\
& \quad (y + \delta - \eta + \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + \\
& \quad 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \\
& \quad 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \\
& \quad c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - \\
& \quad \left. \left. 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta\right) \right) - \\
& \quad \left. \left. ((-H)^\gamma (2b(\eta - bs)^\beta + 2c(-H)^\gamma - 2sl + 2x + 2\delta)) / \right. \right. \\
& \quad (2\sqrt{(2bc(-H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& \quad 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} + c^2(-H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& \quad z^2 + 2\delta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2c(-H)^\gamma sl + 2c(-H)^\gamma x - \\
& \quad 2slx + 2c(-H)^\gamma \delta - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta) \\
& \quad (y + \delta - \eta + \sqrt{(2bc(-H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2b} \\
& \quad x(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} + c^2(-H)^{2\gamma} + \\
& \quad sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2c(-H)^\gamma sl + 2c(-H)^\gamma \\
& \quad \left. \left. x - 2slx + 2c(-H)^\gamma \delta - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta\right) \right) \varphi) + \\
& \frac{1}{2\pi(-z - \delta + \zeta)} (Um\zeta\eta\varphi\tan^{-1}(((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& \quad ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& \quad \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& \quad 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma + \\
& \quad 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \\
& \quad x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + \\
& \quad \left. \left. 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta\right) \right) + \frac{1}{2\pi(-z - \delta + \zeta)^2} (\dots
\end{aligned}$$

$Py =$

$$\begin{aligned}
 & \left(e^{\frac{Gt}{\eta l}} \left(\eta l \left((Um(z + \delta - \zeta) \zeta \eta \left((-z - \delta + \zeta) / ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \delta) \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta +} \\
 & \quad 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} -} \\
 & \quad 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma +} \\
 & \quad c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 +} \\
 & \quad (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta -} \\
 & \quad 2z\zeta - 2\delta\zeta) - ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)^2) / \\
 & \quad ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) (2bc(\zeta - H)^\gamma \\
 & \quad (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta +} \\
 & \quad 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma +} \\
 & \quad 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} +} \\
 & \quad sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx -} \\
 & \quad 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2} \Big) \Big) \Big) / \\
 & \quad (2\pi(-z - \delta + \zeta) \left(((-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2) / \right. \\
 & \quad \left. ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2 \right. \\
 & \quad (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta +} \\
 & \quad 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} -} \\
 & \quad 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma +} \\
 & \quad c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 -} \\
 & \quad \left. \left. 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta) + 1 \right) \right) + \\
 & \quad \frac{1}{2\pi} (bUm\zeta \left(((\eta - bs)^\beta (2b(\eta - bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - 2sl + 2x + 2\delta)) / \right. \\
 & \quad (2\sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2bsl(\eta - bs)^\beta +} \\
 & \quad 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} -} \\
 & \quad 2csl(\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma +} \\
 & \quad c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + y^2 + 2\delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 +} \\
 & \quad \left. \left. \eta^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2y\delta - 2y\eta - 2\delta\eta) \right. \right. \\
 & \quad \left. (z + \delta - \zeta + \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta -} \right. \\
 & \quad 2bsl(\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta +} \\
 & \quad 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2csl(\zeta - H)^\gamma +} \\
 & \quad 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} +} \\
 & \quad \left. \left. sl^2 + x^2 + y^2 + 2\delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 + \eta^2 - 2slx -} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 2sl\delta + 2x\delta + 2y\delta - 2y\eta - 2\delta\eta) \right) \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((-bs)^\beta (2b(-bs)^\beta + 2c(\zeta - H)^\gamma - 2sl + 2x + 2\delta)) / \\
& (2\sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (-bs)^\beta - 2b sl (-bs)^\beta + 2bx(-bs)^\beta + \\
& 2b\delta(-bs)^\beta + b^2(-bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + \\
& 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& y^2 + 2\delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2y\delta) \\
& (z + \delta - \zeta + \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (-bs)^\beta - 2b sl (-bs)^\beta + \\
& 2bx(-bs)^\beta + 2b\delta(-bs)^\beta + b^2(-bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + \\
& 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + y^2 + \\
& 2\delta^2 + (z + \delta - \zeta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2y\delta})) \varphi) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \left(2\pi \tan^{-1} \left(\frac{1}{\gamma s} \left(t \left((Um(z + \delta - \zeta) \zeta \eta (-z - \delta + \zeta) / \right. \right. \right.
\right.$$

$$\begin{aligned}
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma \\
& (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl \\
& (\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \\
& c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + \\
& (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - \\
& 2z\zeta - 2\delta\zeta)) - ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)^2) /
\end{aligned}$$

$$(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)$$

$$\begin{aligned}
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - \\
& bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + \\
& x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)^{3/2}) \varphi) /
\end{aligned}$$

$$(2\pi(-z - \delta + \zeta) \left(((-z - \delta + \zeta)^2 (y + \delta - \eta)^2) / \right.$$

$$(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta)^2$$

$$\begin{aligned}
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + \\
& b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + \\
& 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + \\
& 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - 2sl\delta + \\
& 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta) + 1) + \dots
\end{aligned}$$

Pz =

$$\begin{aligned}
 & \left(e^{\frac{Gt}{\eta}} \left((Um(z+\delta-\zeta)\zeta\eta(-(y+\delta-\eta)/((b(\eta-bs)^\beta+c(\zeta-H)^\gamma-sl+x+\delta)) \right. \right. \\
 & \quad \sqrt{(2bc(\zeta-H)^\gamma(\eta-bs)^\beta-2bsl(\eta-bs)^\beta+} \\
 & \quad \quad 2bx(\eta-bs)^\beta+2b\delta(\eta-bs)^\beta+} \\
 & \quad \quad b^2(\eta-bs)^{2\beta}-2csl(\zeta-H)^\gamma+2cx(\zeta-H)^\gamma+} \\
 & \quad \quad 2c\delta(\zeta-H)^\gamma+c^2(\zeta-H)^{2\gamma}+sl^2+x^2+} \\
 & \quad \quad z^2+2\delta^2+\zeta^2+(y+\delta-\eta)^2-2slx-} \\
 & \quad \quad 2sl\delta+2x\delta+2z\delta-2z\zeta-2\delta\zeta) -} \\
 & \quad \left. ((2z+2\delta-2\zeta)(-z-\delta+\zeta)(y+\delta-\eta)) / \right. \\
 & \quad \left. (2(b(\eta-bs)^\beta+c(\zeta-H)^\gamma-sl+x+\delta)) \right. \\
 & \quad \left. (2bc(\zeta-H)^\gamma(\eta-bs)^\beta-2bsl(\eta-bs)^\beta+2bx(\eta-bs)^\beta+} \right. \\
 & \quad \left. 2b\delta(\eta-bs)^\beta+b^2(\eta-bs)^{2\beta}-2csl(\zeta-H)^\gamma+} \right. \\
 & \quad \left. 2cx(\zeta-H)^\gamma+2c\delta(\zeta-H)^\gamma+c^2(\zeta-H)^{2\gamma}+} \right. \\
 & \quad \left. sl^2+x^2+z^2+2\delta^2+\zeta^2+(y+\delta-\eta)^2-2slx-} \right. \\
 & \quad \left. 2sl\delta+2x\delta+2z\delta-2z\zeta-2\delta\zeta)^{3/2} \right) \varphi) / \\
 & \quad (2\pi(-z-\delta+\zeta)((-z-\delta+\zeta)^2(y+\delta-\eta)^2) / \\
 & \quad (b(\eta-bs)^\beta+c(\zeta-H)^\gamma-sl+x+\delta)^2 \\
 & \quad (2bc(\zeta-H)^\gamma(\eta-bs)^\beta-2bsl(\eta-bs)^\beta+2bx(\eta-bs)^\beta+} \\
 & \quad 2b\delta(\eta-bs)^\beta+b^2(\eta-bs)^{2\beta}-2csl(\zeta-H)^\gamma+} \\
 & \quad 2cx(\zeta-H)^\gamma+2c\delta(\zeta-H)^\gamma+c^2(\zeta-H)^{2\gamma}+} \\
 & \quad sl^2+x^2+z^2+2\delta^2+\zeta^2+(y+\delta-\eta)^2-2slx-} \\
 & \quad 2sl\delta+2x\delta+2z\delta-2z\zeta-2\delta\zeta)+1)) + \\
 & \quad \frac{1}{2\pi} (cUm\eta(((\zeta-H)^\gamma(2b(\eta-bs)^\beta+2c(\zeta-H)^\gamma-2sl+2x+2\delta)) / \\
 & \quad (2\sqrt{(2bc(\zeta-H)^\gamma(\eta-bs)^\beta-2bsl(\eta-bs)^\beta+} \\
 & \quad \quad 2bx(\eta-bs)^\beta+2b\delta(\eta-bs)^\beta+b^2(\eta-bs)^{2\beta}-} \\
 & \quad \quad 2csl(\zeta-H)^\gamma+2cx(\zeta-H)^\gamma+2c\delta(\zeta-H)^\gamma+} \\
 & \quad \quad c^2(\zeta-H)^{2\gamma}+sl^2+x^2+z^2+2\delta^2+\zeta^2+(y+\delta-\eta)^2-} \\
 & \quad \quad 2slx-2sl\delta+2x\delta+2z\delta-2z\zeta-2\delta\zeta) \\
 & \quad (y+\delta-\eta+\sqrt{(2bc(\zeta-H)^\gamma(\eta-bs)^\beta-} \\
 & \quad \quad 2bsl(\eta-bs)^\beta+2bx(\eta-bs)^\beta+2b\delta(\eta-bs)^\beta+} \\
 & \quad \quad b^2(\eta-bs)^{2\beta}-2csl(\zeta-H)^\gamma+2cx(\zeta-H)^\gamma+} \\
 & \quad \quad 2c\delta(\zeta-H)^\gamma+c^2(\zeta-H)^{2\gamma}+sl^2+x^2+} \\
 & \quad \quad z^2+2\delta^2+\zeta^2+(y+\delta-\eta)^2-2slx-} \\
 & \quad \quad 2sl\delta+2x\delta+2z\delta-2z\zeta-2\delta\zeta))) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((-H)^\gamma (2b(\eta - bs)^\beta + 2c(-H)^\gamma - 2sl + 2x + 2\delta)) / \\
& (2\sqrt{(2bc(-H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} + c^2(-H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& z^2 + 2\delta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2c(-H)^\gamma sl + 2c(-H)^\gamma x - \\
& 2slx + 2c(-H)^\gamma \delta - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta)(y + \delta - \eta + \\
& \sqrt{(2bc(-H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} + c^2(-H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + \\
& z^2 + 2\delta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2c(-H)^\gamma sl + 2c(-H)^\gamma \\
& x - 2slx + 2c(-H)^\gamma \delta - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta))}) \varphi) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi(-z - \delta + \zeta)} (Um \zeta \eta \varphi \tan^{-1}(((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta))) /$$

$$\begin{aligned}
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + \\
& 2bx(\eta - bs)^\beta + 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - \\
& 2c sl (\zeta - H)^\gamma + 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + \\
& c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - \\
& 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta})) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi(-z - \delta + \zeta)^2} (Um (z + \delta - \zeta) \zeta \eta \varphi \tan^{-1}($$

$$\begin{aligned}
& ((-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + \\
& 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + \\
& sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - 2slx - \\
& 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta})) \eta) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \left(2\pi \tan^{-1} \left(\frac{1}{\gamma s} (t (Um (z + \delta - \zeta) \zeta \eta (-y + \delta - \eta)) /$$

$$\begin{aligned}
& ((b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \sqrt{(2bc(\zeta - H)^\gamma \\
& (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + 2bx(\eta - bs)^\beta + \\
& 2b\delta(\eta - bs)^\beta + b^2(\eta - bs)^{2\beta} - 2c sl (\zeta - H)^\gamma + \\
& 2cx(\zeta - H)^\gamma + 2c\delta(\zeta - H)^\gamma + c^2(\zeta - H)^{2\gamma} + \\
& sl^2 + x^2 + z^2 + 2\delta^2 + \zeta^2 + (y + \delta - \eta)^2 - \\
& 2slx - 2sl\delta + 2x\delta + 2z\delta - 2z\zeta - 2\delta\zeta)) - \\
& ((2z + 2\delta - 2\zeta)(-z - \delta + \zeta)(y + \delta - \eta)) / \\
& (2(b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma - sl + x + \delta) \\
& (2bc(\zeta - H)^\gamma (\eta - bs)^\beta - 2b sl (\eta - bs)^\beta + \dots
\end{aligned}$$

Складові зусиль опору переміщенню робочого органу в ґрунті визначаються шляхом інтегрування складових тиску по поверхні робочого органу:

$$R_X = \int_0^a \int_0^b P_x d\eta d\zeta; \quad R_Y = \int_0^a \int_0^b P_y d\eta d\zeta;$$

$$R_Z = \int_0^b \int_0^a P_z d\zeta d\eta,$$

де a, b – відповідно висота та ширина робочого органу.

Інтегрування останніх рівнянь можливе лише числовим способом при відомих значеннях коефіцієнтів рівняння поверхні робочого органу та відомих його геометричних розмірах. Крім того, для визначення складових зусиль тягового опору повинні бути відомими механічні властивості ґрунту, з яким взаємодіє робочий орган ґрунтообробної машини.

2.3. Взаємодія дискового робочого органу з ґрунтом

2.3.1. Швидкості переміщень на поверхні контакту диска з ґрунтом (початкові умови)

В процесах обробітку ґрунту широко застосовуються ротаційні робочі органи дискового типу. Аналіз взаємодії такого робочого органу з ґрунтом може бути виконаний на основі вирішення контактної задачі за умови формалізації ґрунту як суцільного пружно-в'язко-пластичного середовища. Для вирішення такої задачі необхідно визначити умови на поверхні деформатора (диска). Такими умовами є розподіл компонентів швидкостей переміщень точок поверхні диска (кінематика точок поверхні).

Кінематика точок дискового робочого органу досліджувалась у фундаментальних роботах П. С. Нартова [133], Г. Н. Сінекова [175] та інших. Суттєвим недоліком цих досліджень є визначення швидкостей

переміщень точок диска у функції кутових величин повороту диска при відсутності зв'язку з системою координат ґрунтового середовища. Тобто, кінематичні параметри роботи дискового робочого органу не зв'язані із системою координат середовища, з яким він контактує.

Для аналізу кінематики точок диска та точок середовища на його поверхні введемо такі припущення та спрощення:

1) поверхня диска абсолютна гладка, а точки середовища рухаються по ній разом з нею без ковзання; – правомірність такого припущення базується на пропорційному впливові на зміни компонентів швидкостей ковзання в усіх напрямках;

2) центр осі обертання диска O_1 в системі координат XUZ рухається прямолінійно та рівномірно у напрямку осі Ox ;

3) контакт середовища з поверхнею відбувається по частині диска, пов'язаній із глибиною ходу диска та кутами його нахилу у поздовжньо-горизонтальній та поперечно-вертикальній площинах;

4) величину переміщень середовища слід вважати такою малою, що криволінійні траєкторії можуть вважатися прямолінійними;

5) переміщення вважаються настільки малими, що порушення суцільності середовища та його руйнування при цьому не відбувається.

Для визначення напружень та деформацій у ґрунтовому середовищі повинні бути визначені компоненти швидкостей переміщень точок диска в системі координат ґрунтового середовища.

Дисковий робочий орган являє собою частину сфери радіуса r , рівняння якої в системі координат $\xi'_1 \eta'_1 \zeta'_1$ (рис. 2.40.) має вигляд:

$$R^2 = \zeta_1'^2 + \eta_1'^2 + \xi_1'^2. \quad (2.3.1)$$

Висота b та діаметр $2r$ сектора сферичного диска зв'язані з радіусом сфери залежністю:

$$r = \sqrt{2bR - b^2}; b = R - \sqrt{R^2 - r^2} \quad (2.3.2)$$

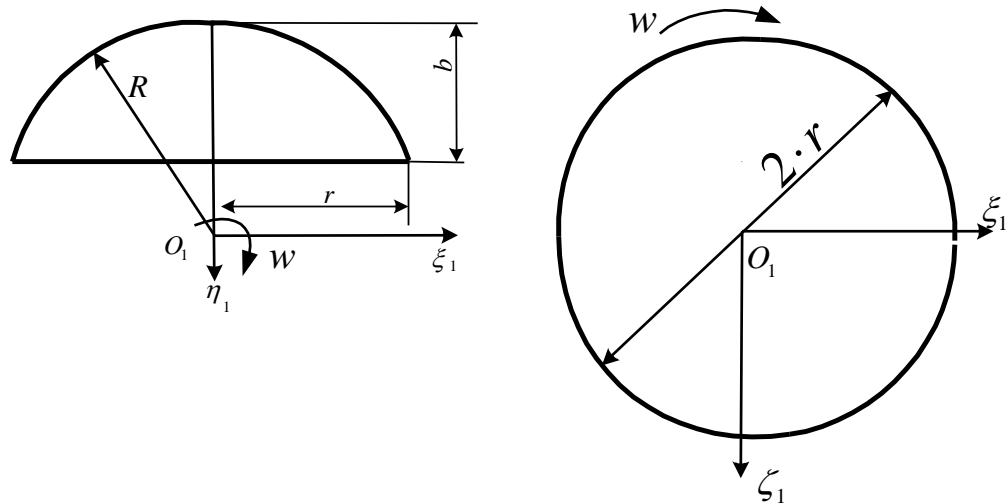


Рис. 2.40. Схема проєкцій сектора сферичного диска в системі координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$

Система координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, в якій побудований сектор сфери, зміщена та повернена по відношенню до координатної системи напівпростору ґрунту XUZ з центром координат в точці O (рис. 2.41).

При переміщенні центра диска O_1 у ґрунтовому середовищі зі швидкістю u_m , за рахунок взаємодії з ґрунтом, диск обертається відносно осі O_w з кутовою швидкістю w_m . Ця величина має вигляд:

$$w_m = \frac{u_m}{(1 - \delta) r \cos \alpha \cos \gamma}, \quad (2.3.3)$$

де δ – коефіцієнт ковзання диска при його обертанні.

$$\delta = \frac{S - 2\pi r}{2\pi r}, \quad (2.3.4)$$

де S – фактичний шлях, що проходить диск в площині ріжучої кромки за один оберт.

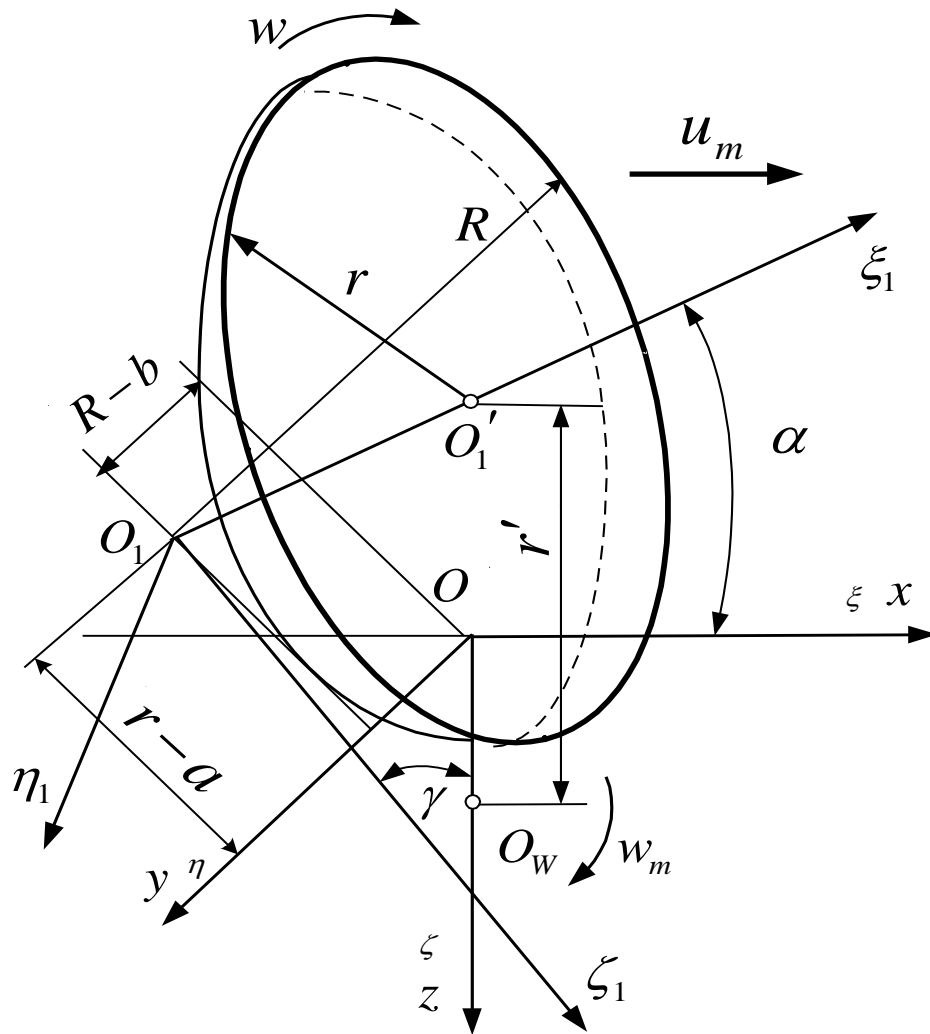


Рис. 2.41. Схема розміщення сферичного диска в системі координат xuz ґрунтового напівпростору

В залежності від величини δ („ $+\delta$ ” відповідає ковзанню, „ $-\delta$ ” – буксуванню) на осі Oz знайдеться точка, абсолютна швидкість якої в координатній системі xuz дорівнюватиме нулю. Ця точка O_w є миттєвим

центром обертання диска. Точка може знаходитись в межах сектора диска або за його межами, в залежності від режиму перекочування диска, який в свою чергу, визначається знаком коефіцієнту ковзання диска δ .

За результатами досліджень П. С. Нартова [133], на режим перекочування диска суттєво впливають: кут атаки α , кут нахилу осі обертання γ та радіус кривизни диска R . Регресійний аналіз результатів експериментальних досліджень П. С. Нартова дозволяє встановити залежність впливу параметрів та режимів роботи сферичних дисків на величину коефіцієнта δ . Ця залежність має вигляд:

$$\delta = -0.0042 - 0.4963r + 0.1368R - 0.0001\alpha^2 + 0.0001\gamma^2. \quad (2.3.5)$$

Графічно залежність коефіцієнта ковзання представлена на рис. 2.42. Із рівняння регресії (2.3.5) та їх графічного представлення випливає, що найбільш суттєвий вплив на режим кочення сферичного дискового робочого органу мають радіус кривизни диска R , кут нахилу осі обертання γ та кут атаки α . Причому збільшення радіуса кривизни диска R та кута нахилу осі обертання γ призводять до зменшення буксування диска та переходу режиму його кочення в ковзання, а збільшення кута атаки α – навпаки до зростання буксування.

Точки сектора диска, що контактують з ґрунтовим середовищем в системі координат $\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, яка співпадає з системою координат зміщеного та повернутого диска $\zeta\eta\xi$ (рис. 2.43), мають значення компонентів швидкостей переміщень в проекціях на $\zeta\eta\xi$:

$$\dot{u}_0 = r_u u_m; \dot{v}_0 = r_v u_0; \dot{w}_0 = r_w u_m \quad (2.3.6)$$

де

$$r_u = h - \zeta, r_v = R - \sqrt{R^2 - \zeta^2 - \xi^2}, r_w = \xi.$$

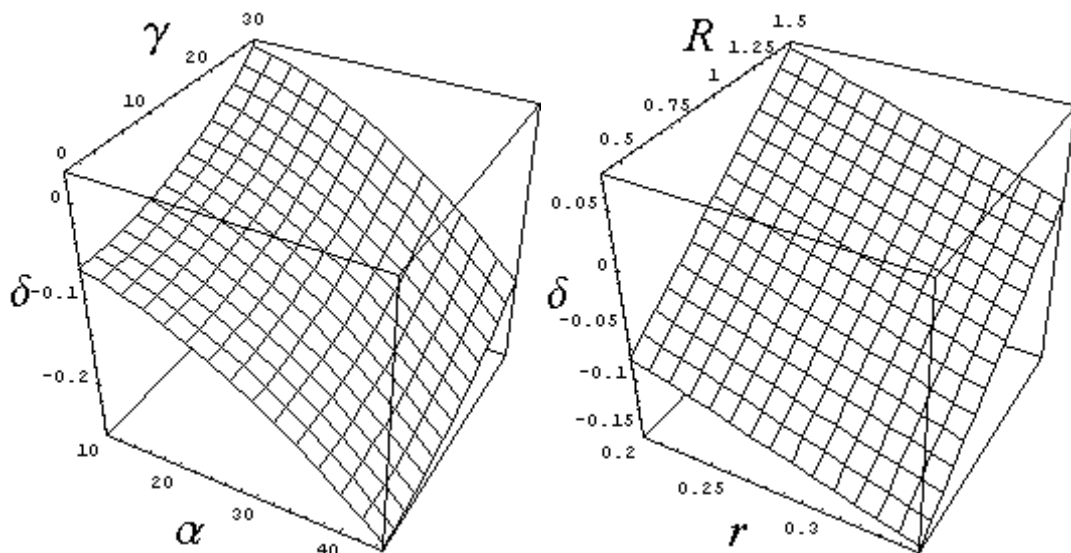


Рис. 2.42. Залежність коефіцієнта ковзання від параметрів та режимів роботи сферичного диска

Дисковий робочий орган взаємодіє з ґрунтовим середовищем в системі координат XYZ . Для представлення поверхні дискового робочого органу в цій системі необхідно виконати перенесення та поворот системи координат $\xi'_1 \eta'_1 \zeta'_1$ в систему $\xi \eta \zeta$ idem XYZ (рис. 2.41, 2.43).

Для випадку встановлення диска з кутом атаки α та кутом нахилу вертикальної осі γ матриця косинусів кутів повороту (кутів Ейлера) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 a11 &= \cos \alpha, a12 = \sin \alpha; \\
 a13 &= 0; a21 = -\cos \gamma \sin \alpha; \\
 a22 &= \cos \gamma \cos \alpha; a23 = \sin \gamma; \\
 a31 &= \sin \alpha \sin \gamma; a32 = -\cos \alpha \sin \gamma; a33 = \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

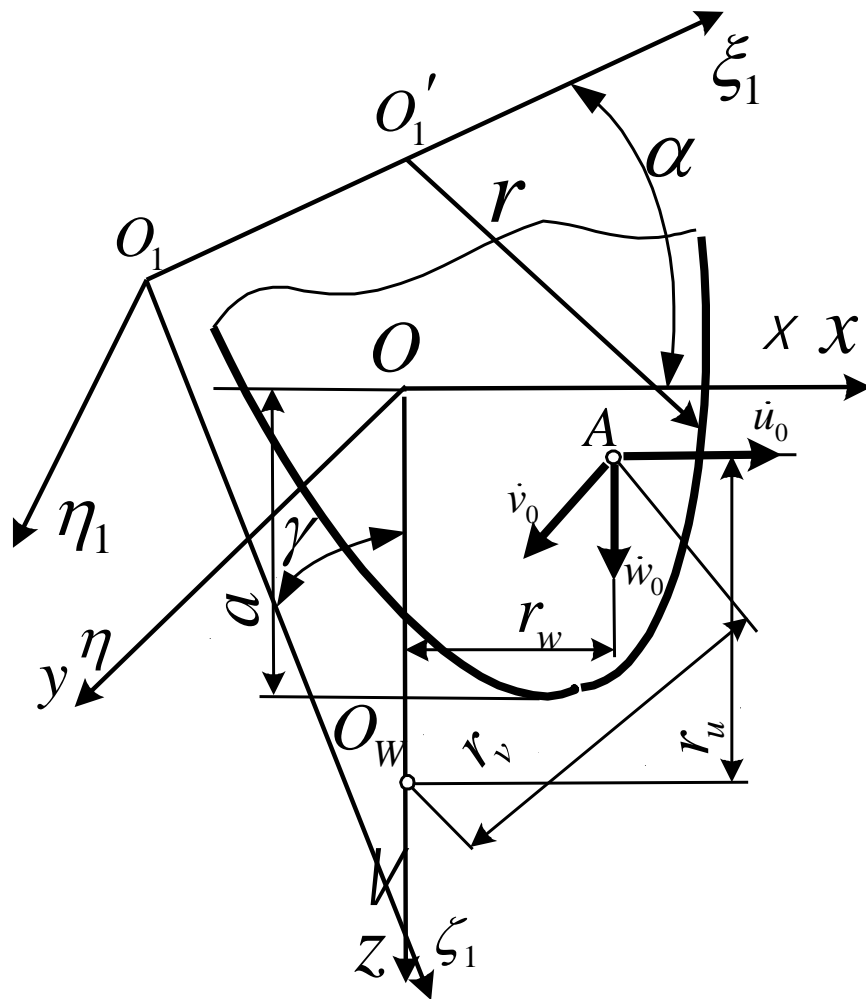


Рис. 2.43.Схема до визначення компонентів швидкостей переміщень точок диска в системі координат $x\chi z$

При цьому центр координатної системи $\xi\eta\zeta$ O_1 (в якій знаходиться центр сфери) зміщений по відношенню до координатної системи $\xi\eta\zeta$.

В цьому випадку координати точок диска в системі координат $\xi\eta\zeta$ іdem $x\chi z$ визначаються залежностями [151]:

$$\begin{aligned}
\xi &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\eta_1 + a_{13}\zeta_1; \\
\eta &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\eta_1 + a_{23}\zeta_1 + R - b; \\
\zeta_1 &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\eta_1 + a_{33}\zeta_1 - r + h,
\end{aligned}
\tag{2.3.8}$$

де a_{ij} – косинуси кутів між осями систем координат.

В розгорнутому вигляді:

$$\xi = \xi_1 \cos(\alpha) - \eta_1 \sin(\alpha) - 2\sqrt{2ar - a^2};$$

$$\begin{aligned}
\eta &= (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + \\
&2\sqrt{2ar - a^2} \sin(\alpha) \cos(\gamma) - (r - \sqrt{a^2 - 2ra + r^2}) \sin(\gamma) - \sqrt{R^2 - r^2};
\end{aligned}$$

$$\zeta = -\xi_1 \sin^2(\gamma) - \eta_1 \cos(\alpha) \sin(\gamma) - a + r + \zeta_1 \cos(\gamma).$$

(2.3.9)

З урахуванням геометрії сферичного диска в системі координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$

$$\xi_1 = 2\sqrt{2ar - a^2}; \quad \eta_1 = R - \sqrt{R^2 - r^2}; \quad \zeta_1 = r - \sqrt{a^2 - 2ra + r^2};$$

$$\xi = 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2ar - a^2};$$

$$\begin{aligned}
\eta &= (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + \\
&2\sqrt{2ar - a^2} \sin(\alpha) \cos(\gamma) - (r - \sqrt{a^2 - 2ra + r^2}) \sin(\gamma) - \sqrt{R^2 - r^2};
\end{aligned}$$

$$\zeta = -a + r + \left(-\sqrt{(a-r)^2} + r\right) \text{Cos}[\gamma] + \\ \left(-R + \sqrt{-r^2 + R^2}\right) \text{Cos}[\alpha] \text{Sin}[\gamma] - 2 \sqrt{-a(a-2r)} \text{Sin}[\gamma]^2 \quad .(2.3.10)$$

Компоненти швидкостей переміщень точок ґрунтового середовища на поверхні контакту диск-ґрунт в системі координат $\xi\eta\zeta$ idem xyz матимуть вигляд:

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{r(1-\delta)} \left(Um \sec(\alpha) \sec(\gamma) \left(2 \sqrt{-a(a-2r)} \sin^2(\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. (\sqrt{R^2 - r^2} - R) \cos(\alpha) \sin(\gamma) + 2a - r - \left(r - \sqrt{(a-r)^2} \right) \cos(\gamma) \right) \right);$$

$$\dot{v}_0 = -\frac{1}{r(1-\delta)} \\ \left(Um \sec(\alpha) \sec(\gamma) \left(2 \sqrt{-a(a-2r)} \sin^2(\gamma) - (\sqrt{R^2 - r^2} - R) \cos(\alpha) \right. \right. \\ \left. \left. \sin(\gamma) + 2a - r - \left(r - \sqrt{(a-r)^2} \right) \cos(\gamma) \right) \tan(\alpha) \right);$$

$$\dot{w}_0 = \frac{1}{r(1-\delta)} \left(Um \sec(\alpha) \sec(\gamma) \right. \\ \left. \left(2 \sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2ar - a^2} \right) \right) \quad .(2.3.11)$$

Таким чином, отримано залежності компонент швидкостей переміщень точок ґрунтового середовища на поверхні контакту ротаційний сферичний диск-ґрунт в межах ґрунтового напівпростору в залежності від геометричних параметрів та кутів встановлення сферичного диска. Залежності (2.3.11) є початковими умовами для вирішення задачі Діріхле. Графічно залежності

(2.3.11) компонентів швидкостей переміщень точок диска в системі координат $\xi\eta\zeta$ ідею xyz представлені на рис. 2.44. - 2.47.

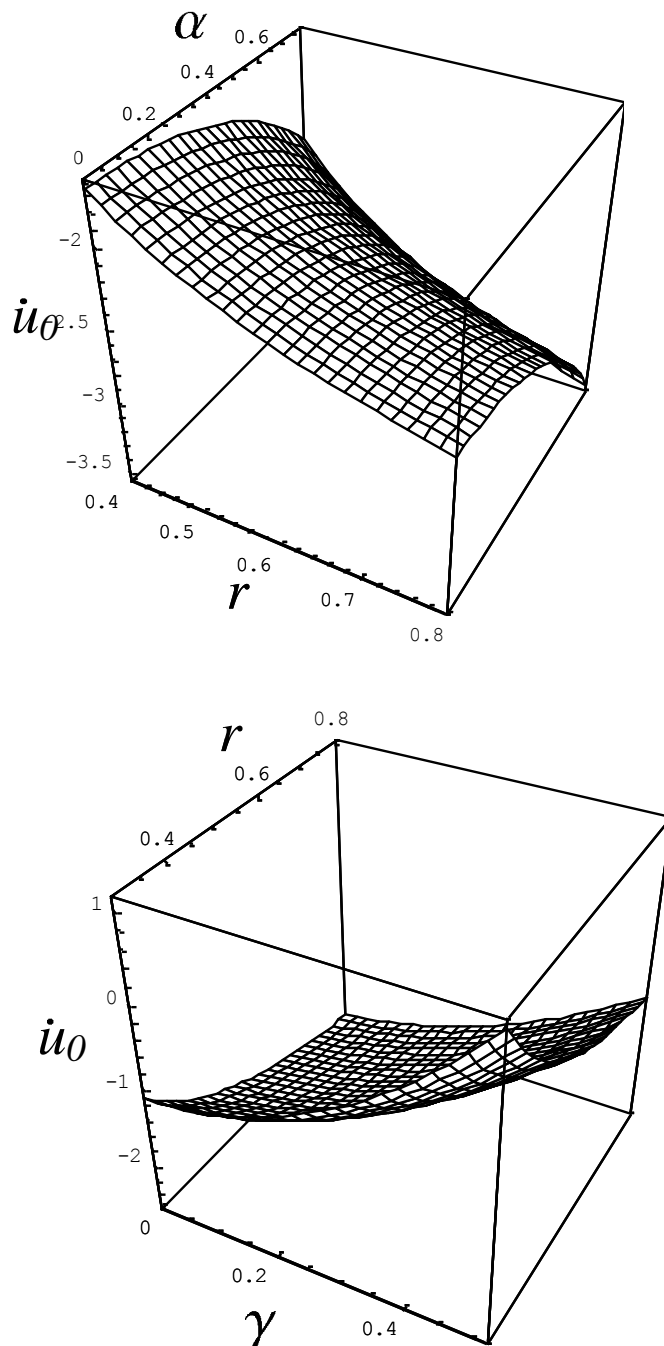


Рис. 2.44. Графіки залежності поздовжньої компоненти швидкості переміщення точок i_0 від діаметра диска $2r$ та кутів установки диска: кута атаки α та кута нахилу осі обертання γ

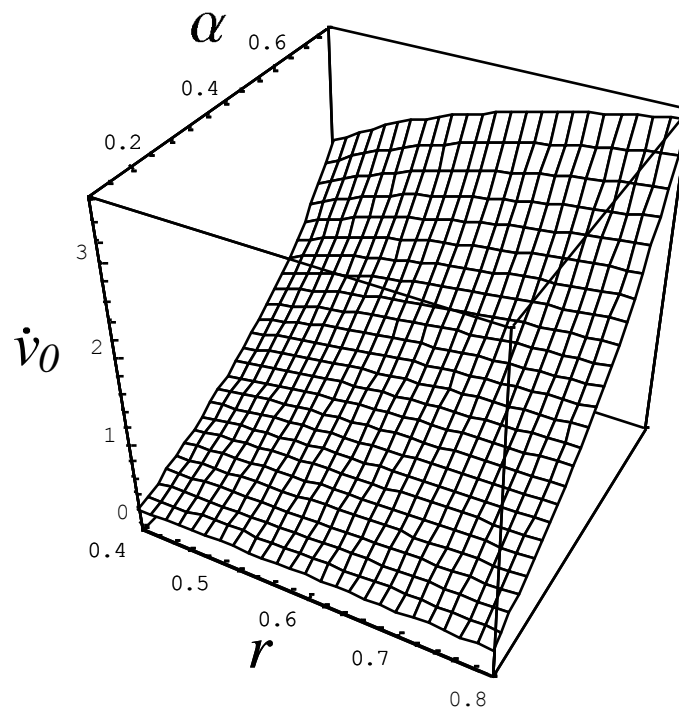
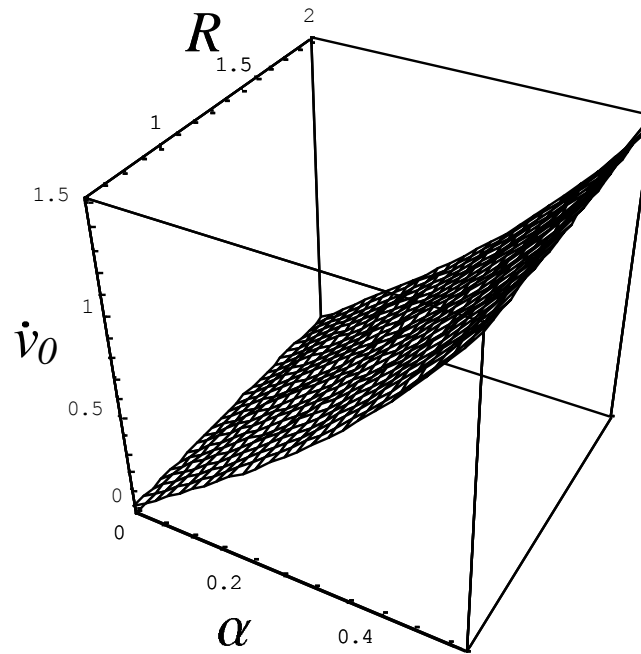


Рис. 2.45. Графіки залежності поперечної компоненти швидкості переміщення точок \dot{v}_0 від діаметра диска $2r$, радіуса сфери R та кута атаки α

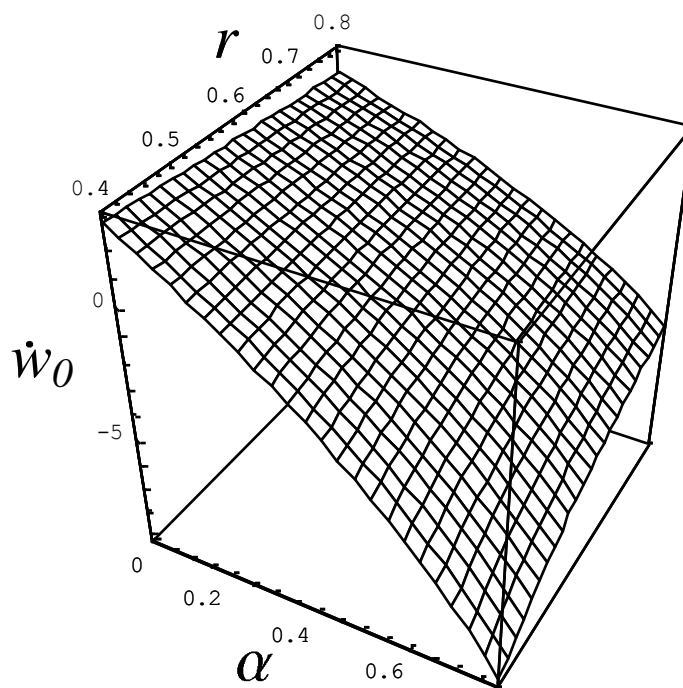
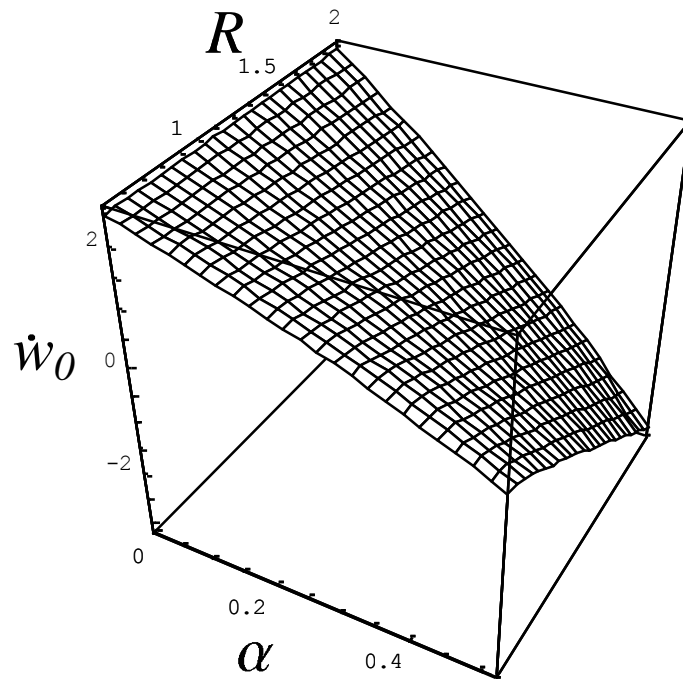


Рис. 2.46. Графіки залежності вертикальної компоненти швидкості переміщення точок \dot{w}_0 від діаметра диска $2r$, радіуса сфери R та кута атаки α

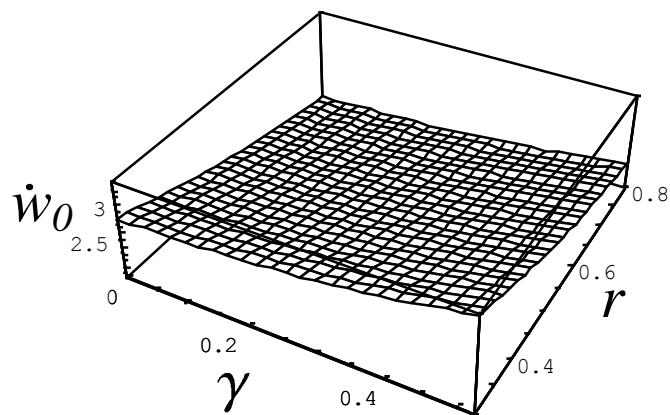
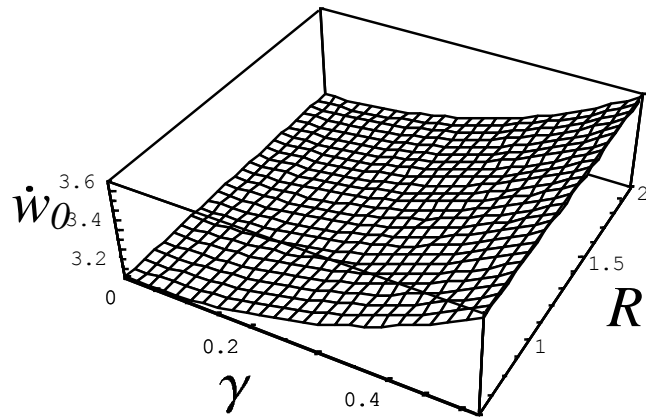


Рис. 2.47. Графіки залежності вертикальної компоненти швидкості переміщення точок \dot{w}_0 від діаметра диска $2r$, радіуса сфери R та кута нахилу осі обертання γ

Аналіз залежності швидкості переміщення точок ґрунту на поверхні контакту в напрямку поступального переміщення дискового робочого органу (рис. 2.44.) свідчить про суттєвий вплив на її величину кута установки диска до напрямку руху α (кута атаки) та кута нахилу осі обертання диска до горизонту γ . Разом із тим, діаметр диска менш суттєво впливає на цю швидкість. При цьому слід відзначити, що швидкість переміщення точок контакту ґрунту-робочий орган в проекції на вісь Ox має від'ємне значення, яке зростає зі збільшенням кута атаки α .

Аналіз залежності швидкості переміщення точок ґрунту на поверхні контакту в поперечному напрямку (рис. 2.45.) свідчить про те, що на цю величину має суттєвий вплив лише кут установки диска α .

Із графіків змін вертикальної компоненти швидкості точок контакту диск-ґрунт (рис. 2.46, 2.47) можна зробити висновок, що на неї більш суттєвий вплив має кут атаки α і незначний вплив – кут нахилу осі обертання γ та діаметр диска $2r$, а геометричні параметри сферичного диска не суттєво впливають на зміни \dot{w}_0 .

Проведений аналіз свідчить про суттєвий вплив геометричних розмірів та форми сферичного диску, а також кутів його установки на розподіл компонентів абсолютних швидкостей переміщень його точок в зоні контакту з ґрунтом. Отримані компоненти швидкостей переміщень можуть бути використані при аналізі просторового напружено-деформованого стану ґрунту перед дисковим робочим органом. Такий аналіз дозволяє визначити оптимальні геометричні розміри та режими роботи дискового робочого органу за критерієм вигляду деформованого або напруженого стану ґрунту перед робочим органом.

2.3.2. Визначення швидкостей переміщень та деформацій у ґрунтовому середовищі під дією дискового робочого органу

Аналогічно з п. 2.2.2. визначаються переміщення та деформації у ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом.

Задача полягає у визначенні швидкостей переміщень та деформацій у середовищі на будь-якій відстані від поверхні деформатора (точка A , яка знаходиться на відстані $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ від будь якої точки поверхні деформатора). Тут і далі в тексті під точкою також слід розуміти елементарний об'єм середовища.

Вирішення такої задачі має давню історію, але всі існуючі рішення отримані для випадків точкового навантаження, навантаження по площині певних розмірів або по осесиметричній поверхні (Лур'є, Галін, Ляв, Трефтц, Безухов, Тимошенко, Джонсон) [45,62] та для випадків плоского напружено-деформованого стану (Мухелішвілі, Кушнар'єв) [108].

Більшість рішень ґрунтується на визначенні певної кількості потенціальних гармонічних функцій, які відповідають постановкам крайових задач Діріхле або Неймана. Найбільш відомими загальними рішеннями є рішення у формі Тедоне, Трефтца, Лява, Бусінеска-Черруті, Гальоркіна та Папковича-Нейбера.

Найбільш простим рішенням, на наш погляд, може бути рішення у формі Тедоне [116], коли компоненти швидкостей переміщень виражаються залежностями:

$$\dot{u} = a_1 - \frac{x\Phi}{2(1-2\nu)}; \dot{v} = a_2 - \frac{y\Phi}{2(1-2\nu)}; \dot{w} = a_3 - \frac{z\Phi}{2(1-2\nu)}, \quad (2.3.12)$$

де a_1, a_2, a_3, Φ – гармонічні потенціальні функції;

ν – коефіцієнт Пуассона;

На поверхні контакту диск-ґрунт компоненти швидкостей переміщень у ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом мають значення: при:

$$\rho = 0: \quad \dot{u} = u_0 = \dot{u}(\eta, \zeta); \dot{v} = v_0 = \dot{v}(\xi, \zeta); \dot{w} = w_0 = \dot{w}(\eta, \zeta). \quad (2.3.13)$$

На поверхні диска при:

$$\begin{aligned} \rho = 0: \quad \dot{u} = \dot{u}_0 = \dot{u}(\eta, \zeta) = a_1; \quad \dot{v} = \dot{v}_0 = \dot{v}(\eta, \zeta) = a_2; \\ \dot{w} = \dot{w}_0 = \dot{w}(\eta, \zeta) = a_3 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Гармонічні потенціальні функції в рівняннях (2.3.12) можуть бути виражені у вигляді потенціалів подвійного шару розподіленого по поверхні деформатора:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\dot{u}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\eta d\zeta; \\ a_2 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\dot{v}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\xi d\zeta; \\ a_3 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\dot{w}_0 X}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Інтегрування здійснюється в проєкціях на вертикально-поперечну, вертикально-поздовжню та горизонтально-поздовжню площини.

Межі інтегрування для $\alpha_1 \zeta \rightarrow \{0, a\}$, $\eta \rightarrow \{0, a\}$; для $\alpha_2 \zeta \rightarrow \{0, a\}$, $\xi \rightarrow \{\xi(0), \xi(a)\}$, $\alpha_3 \xi \rightarrow \{\xi(0), \xi(a)\}$, $\{\eta, 0, a\}$

Потенціальна гармонічна функція Φ є ні що інше, як об'ємна деформація, й виражається через переміщення таким чином:

$$\Phi(X, Y, Z) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z},$$

тому:

$$\Phi|_{X=0} = \frac{1}{2(1-2\nu)} \left(\frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \Big|_{X=0} \right). \quad (2.3.16)$$

Поверхня Ω , по якій повинно проводитись інтегрування, є частиною сегменту сфери, яка контактує з ґрунтовим середовищем.

Після інтегрування виразів (2.3.15) та диференціювання функції (2.3.16) гармонічні потенціальні функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_1 = & -\log \left(x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \right. \\ & \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + \right. \\ & \left. \left. (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2 a r - a^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. (y + \kappa - (2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) - (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \sqrt{2 a r - a^2} \right) \tan(\alpha) \right)^2 + \sqrt{2 a r - a^2} \right) \end{aligned} ;$$

$$a_2 = \frac{1}{r(\delta - 1)}$$

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{Umlog} \left(-a + z + \kappa + \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + (R - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. a\sqrt{R^2 - r^2}\right) \sin(\alpha) + \sqrt{2ar - a^2}\right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(y + \kappa - (2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \sqrt{2ar - a^2}\right) \tan(\alpha)\right)^2 \right) \right) \\ & \sec(\alpha) \sec(\gamma) \left(a \cos^2(\gamma) - 2\sqrt{-a(a - 2r)} \sin^2(\gamma) - 2a + r + \right. \\ & \quad \left. (\sqrt{R^2 - r^2} - R) \cos(\alpha) \sin(\gamma) \right) \tan(\alpha) \end{aligned} ;$$

$$a_3 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r(\delta - 1)} \left(\operatorname{Umlog} \left(y + \kappa + \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + (R - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. a\sqrt{R^2 - r^2}\right) \sin(\alpha) + \sqrt{2ar - a^2}\right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(y + \kappa - (2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \sqrt{2ar - a^2}\right) \tan(\alpha)\right)^2 \right) - \right. \\ & \quad \left. (2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2ar - a^2}) \tan(\alpha) \right) \\ & \sec(\alpha) \sec(\gamma) \left(2\sqrt{-a(a - 2r)} \cos(\alpha) + \right. \\ & \quad \left. (a\sqrt{R^2 - r^2} - R) \sin(\alpha) - \sqrt{-a(a - 2r)} \right) \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned}
\Phi = & - \left((x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2ar - a^2}) / \right. \\
& \left(\sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + \right. \\
& \quad (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2ar - a^2})^2 +} \\
& \quad (y + \kappa - (2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \\
& \quad \left. \left. \sqrt{2ar - a^2}) \tan(\alpha))^2 \right) \right) + 1 \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) + \right. \\
& \quad \quad (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2ar - a^2})^2 +} \\
& \quad \quad (y + \kappa - (2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \\
& \quad \quad \left. \left. \sqrt{2ar - a^2}) \tan(\alpha))^2 \right) + \sqrt{2ar - a^2} \right) \Big) \quad .(2.3.17)
\end{aligned}$$

Функції (2.3.17) є потенціальними та гармонічними, оскільки всі вони задовольняють рівнянню Лапласа:

$$\Delta(a_1) = 0; \quad \Delta(a_2) = 0; \quad \Delta(a_3) = 0; \quad \Delta(\Phi) = 0, \quad (2.3.18)$$

де $\Delta = \text{div}(\text{grad } \mathbf{a}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Компоненти швидкостей переміщень ґрунту перед дисковим робочим органом (2.3.12) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\dot{u} = & -\text{Log}\left[\sqrt{-a^2 + 2ar + x + \kappa} - \right. \\
& 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] + \\
& \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]\right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha]\right)^2}\right] + \\
& \left(x\left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]\right) / \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]\right)^2 + \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha]\right)^2}\right)\right) / \\
& \left(2(1 - \nu)\left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]\right)^2 + \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha]\right)^2}\right)\right) \right) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} = & \frac{1}{r(-1 + \delta)} \left(Um \text{ Log} \left[-a + z + \kappa + \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha] \right)^2 \right] \right) \\
& \text{Sec}[\alpha] \text{Sec}[\gamma] \left(-2a + r + \left(-\sqrt{(a-r)^2 + r} \right) \text{Cos}[\gamma] + \right. \\
& \left. (-R + \sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Cos}[\alpha] \text{Sin}[\gamma] - \right. \\
& \left. 2\sqrt{-a(a-2r)} \text{Sin}[\gamma]^2 \right) \text{Tan}[\alpha] + \\
& \left(y \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) / \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \text{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \text{Sin}[\alpha]) \text{Tan}[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) \right) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w} = & \frac{1}{r(-1 + \delta)} \left(Um \operatorname{Log} \left[y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \right] \right) \\
& \operatorname{Sec}[\alpha] \operatorname{Sec}[\gamma] \left(-\sqrt{-a(a - 2r)} + 2\sqrt{-a(a - 2r)} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \\
& \left. (-R + a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) + \\
& \left(z \left(1 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \right) / \right. \\
& \left. \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) \right) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) \right) \\
& \dots(2.3.19)
\end{aligned}$$

Компоненти швидкостей деформацій у ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом визначаються шляхом диференціювання відповідних компонент швидкостей переміщень за напрямками:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}; \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.3.20)$$

Диференціювання виразів (2.3.20) дає компоненти швидкостей деформацій такого вигляду:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \\ & - \left(x \left(1 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \sin[\alpha] \right) \right) / \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \sin[\alpha] \right)^2 + \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - (R - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \Bigg) / \\ & \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) \Bigg) + \\ & \left(x \left(- \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 \right) / \right. \\ & \quad \left. \left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2)^{3/2} + \\
& 1 / \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right) \Big) - \\
& \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \Big) / \\
& \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \Big) \Big) / \\
& \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \right. \\
& \quad \left. \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right) \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) / \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

;

$$\dot{\mathcal{E}}_y =$$

$$\begin{aligned}
& \left(Um \sec[\alpha] \sec[\gamma] \left(-2a + r + \left(-\sqrt{(a-r)^2 + r} \right) \cos[\gamma] + \left(-R + \sqrt{-r^2 + R^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] \sin[\gamma] - 2\sqrt{-a(a-2r)} \sin[\gamma]^2 \right) \tan[\alpha] \right. \\
& \quad \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right) \right) / \\
& \left(r(-1 + \delta) \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left((R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \Big)^2 \Big) \\
& \left(-a + z + \kappa + \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \Big) \Big) \Big) - \\
& \left(y \left(y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right) \\
& \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) / \\
& \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \Big) \Big) \Big) \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \Big) \\
& \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \operatorname{Cos}[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \operatorname{Tan}[\alpha] \right)^2 \Big) \Big) \Big) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(y(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \\
& \quad 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \\
& \quad (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])) / \\
& (2(1 - \nu) \left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \\
& \quad \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right)^{3/2} \\
& \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right) + \\
& (1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) / \\
& \quad \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right) / \\
& (2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{E}}_z =$$

$$\begin{aligned}
& -\left(z(-a+z+\kappa)\left(1+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\right) / \\
& \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right) / \\
& \left(2(1-\nu)\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right) \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]+\right. \\
& \left.\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right)^2 - \\
& \left(z(-a+z+\kappa)\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\right) / \\
& \left(2(1-\nu)\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2\right)^{3/2} \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]+\right. \\
& \left.\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]\right)+\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\left(R-a\sqrt{-r^2+R^2}\right)\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2) + \\
& (1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \\
& \quad 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) / \\
& \quad (\sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \\
& \quad (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2})) / \\
& (2(1 - \nu) (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \\
& \quad + \sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \\
& \quad 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \\
& \quad (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2})) + \\
& (Um(-a + z + \kappa) \sec[\alpha] \sec[\gamma] (-\sqrt{-a(a - 2r)} + \\
& \quad 2\sqrt{-a(a - 2r)} \cos[\alpha] + \\
& \quad (-R + a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])) / \\
& (r(-1 + \delta) \sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \\
& \quad 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \\
& \quad (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2}) \\
& (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \\
& \quad (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \\
& \quad \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2 + \\
& \quad \left.(y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha]\right)^2}\Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg) ;
\end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} =$$

$$\begin{aligned}
& \left(Um \sec[\alpha] \sec[\gamma] \left(-2a+r + \left(-\sqrt{(a-r)^2+r} \right) \cos[\gamma] + \left(-R + \sqrt{-r^2+R^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] \sin[\gamma] - 2\sqrt{-a(a-2r)} \sin[\gamma]^2 \right) \right. \\
& \quad \left. \tan[\alpha] \left(1 + (-a+z+\kappa) / \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha]\right)^2 \right) \right) \right) \Bigg) \Bigg) / \\
& \left(r(-1+\delta) \left(-a+z+\kappa + \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha]\right)^2 \right) \right) \Bigg) \Bigg) - \\
& \left(y(-a+z+\kappa) \left(1 + \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha]\right)^2 \right) \right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / \left(2(1-\nu) \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right)^2 \right) \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right)^2 \right) \right) - \\
& \left(z \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right) \right. \\
& \left. \left(1 + \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \right) / \right. \\
& \left. \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right)^2 \right) \right) \right) / \\
& \left(2(1-\nu) \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right)^2 \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \\
& \quad \quad \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right)^2} - \\
& \left. (y(-a + z + \kappa) (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])) / \right. \\
& \left(2(1 - \nu) \left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right)^{3/2} \right. \\
& \left. \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right) \right) \right) - \\
& \left(z (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha]) \right) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha])^2 \right)^{3/2} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) + \\
& \left(\text{Um Sec}[\alpha] \text{Sec}[\gamma] \left(-\sqrt{-a(a-2r)} + 2 \sqrt{-a(a-2r)} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-R + a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \right. \\
& \quad \left(1 + (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right) / \\
& \quad \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \Big) / \\
& \left(r(-1 + \delta) \left(y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \Big)
\end{aligned}$$

;

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{xz} = & - \left(x(-a + z + \kappa) \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) / \right. \\
& \quad \left. \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2 \sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \Big) \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \\
& \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \Big) \Big) - \\
& \left(z \left(1 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \right) / \\
& \quad \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \Big) \Big) \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y + \kappa - \left(-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \Big) \Big) \Big) - \\
& \quad \left. \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) \tan[\alpha] \right)^2 \Big) \Big) \Big) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(x(-a+z+\kappa)\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-\right.\right. \\
& \quad \left.\left.2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)\right) / \\
& \left(2(1-\nu)\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \quad \left.\left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2\right)^{3/2} \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\right. \\
& \quad \left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]+\right. \\
& \quad \left.\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \quad \left.\left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right)\right) - \\
& (-a+z+\kappa) / \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \quad \left.\left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right) \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\right. \\
& \quad \left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]+\right. \\
& \quad \left.\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2+\right. \\
& \quad \left.\left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)\tan[\alpha]\right)^2}\right)\right) + \\
& \left(z\left(-\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2\right) / \right. \\
& \quad \left.\left(\left(-a+z+\kappa\right)^2+\left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa-2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]+\right.\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]\right)^2+\right.\right. \\
& \quad \left.\left.\left.(y+\kappa-\left(-\sqrt{-a^2+2ar}+2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha]-\right.\right.\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1 / \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \Big) / \\
& \left(2(1-\nu) \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \Big) + \\
& (Um \sec[\alpha] \sec[\gamma] \left(\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \\
& \quad \left(-\sqrt{-a(a-2r)} + 2\sqrt{-a(a-2r)} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \left. (-R+a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right) \right) / \\
& \left(r(-1+\delta) \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \\
& \quad \left(y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2 \right) \right) \Big)
\end{aligned}$$

;

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) - \\
& \left(z(y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right) \\
& \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \Big) / \\
& \left(2(1 - \nu) \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \\
& \left(\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2ar} + x + \kappa - 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. (y + \kappa - (-\sqrt{-a^2 + 2ar} + 2\sqrt{-a^2 + 2ar} \cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R - a\sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha]) \tan[\alpha] \right)^2} \Big) \Big) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(y(-a+z+\kappa)(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \\
& \quad 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])) / \\
& \left(2(1-\nu) \left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha])^2 \right)^{3/2} \right. \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha])^2 \right) \right) \left. \right) - \\
& \left(z(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha]) \right. \\
& \quad \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha]) \right) / \\
& \left(2(1-\nu) \left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha])^2 \right)^{3/2} \right. \\
& \left(\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar}+x+\kappa - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar}\cos[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2})\sin[\alpha])\tan[\alpha])^2 \right) \right) \left. \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Um \operatorname{Sec}[\alpha] \operatorname{Sec}[\gamma] \left(-\sqrt{-a(a-2r)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2\sqrt{-a(a-2r)} \operatorname{Cos}[\alpha] + (-R+a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha] \right) \right. \\
& \quad \left(1 + (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \\
& \quad \quad \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha]) \operatorname{Tan}[\alpha]) \right) / \\
& \quad \left(\sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \operatorname{Cos}[\alpha] + (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha]) \operatorname{Tan}[\alpha])^2 \right) \right) \Big) \Big) / \\
& \quad \left(r(-1+\delta) \left(y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha]) \operatorname{Tan}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \sqrt{\left((-a+z+\kappa)^2 + (\sqrt{-a^2+2ar} + x+\kappa - 2\sqrt{-a^2+2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] + \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha])^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. (y+\kappa - (-\sqrt{-a^2+2ar} + 2\sqrt{-a^2+2ar} \operatorname{Cos}[\alpha] - \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \quad \left. \left. (R-a\sqrt{-r^2+R^2}) \operatorname{Sin}[\alpha]) \operatorname{Tan}[\alpha])^2 \right) \right) \Big) \Big) \Big) \Big) /
\end{aligned}$$

.(2.3.21)

Правильність визначених значень компонент швидкостей деформацій перевіряється виконанням рівнянь суцільності:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_z}{\partial y^2} ; \\
\frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial z^2} ;
\end{aligned}$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right);$$

$$2 \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right).$$

Для прикладу:

$$2 \partial_{y,z} \varepsilon_x = \partial_x (-\partial_x \gamma_{yz} + \partial_y \gamma_{xz} + \partial_z \gamma_{xy})$$

True

, тобто

праві і ліві частини рівнянь сумісності деформацій тотожні.

При аналізі розподілу деформацій у ґрунтовому середовищі на відстані від поверхні робочого органу зручно користуватися інваріантними величинами компонент тензора деформацій, а саме гідростатичною складовою $\dot{\varepsilon}_{cp}$ та інтенсивністю тангенціальних деформацій $\dot{\gamma}_i$:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z}{3};$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{1}{6} \left[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + 6(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2) \right]. \quad (2.3.22)$$

Значення інваріантних величин швидкостей деформацій ґрунту перед дисковим робочим органом у розгорнутому вигляді мають дуже громіздкий вид, тому для наочності доцільно задовольнитись графічним представленням зв'язків параметрів та режимів роботи дискового робочого органу з цими величинами (рис. 2.48., 2.49)

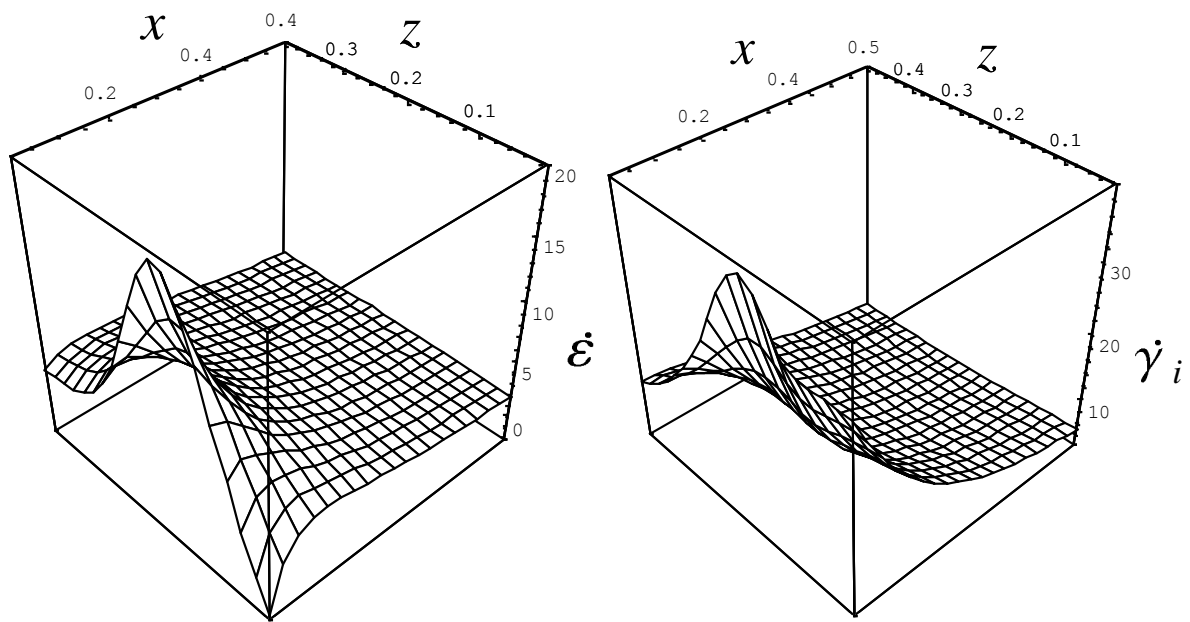


Рис. 2.48. Графіки змін швидкостей об'ємних $\dot{\epsilon}$ та зсувних $\dot{\gamma}_i$ деформацій ґрунту під дією дискового робочого органу в поздовжньо-вертикальній площині (глибина ходу диска 0,2 м)

Аналіз розподілу деформацій перед дисковим робочим органом свідчить про превалювання деформацій розтягнення та зсуву в більшій частині об'єму перед диском.

Превалювання розтягнення та зсуву в ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом може бути пояснене тим, що швидкість переміщення точок ґрунту на поверхні контакту в напрямку поступального руху робочого органу має від'ємне значення (рис. 2.44.)

Аналогічний вигляд має розподіл деформації в поперечно-горизонтальній площині (рис. 2.49).

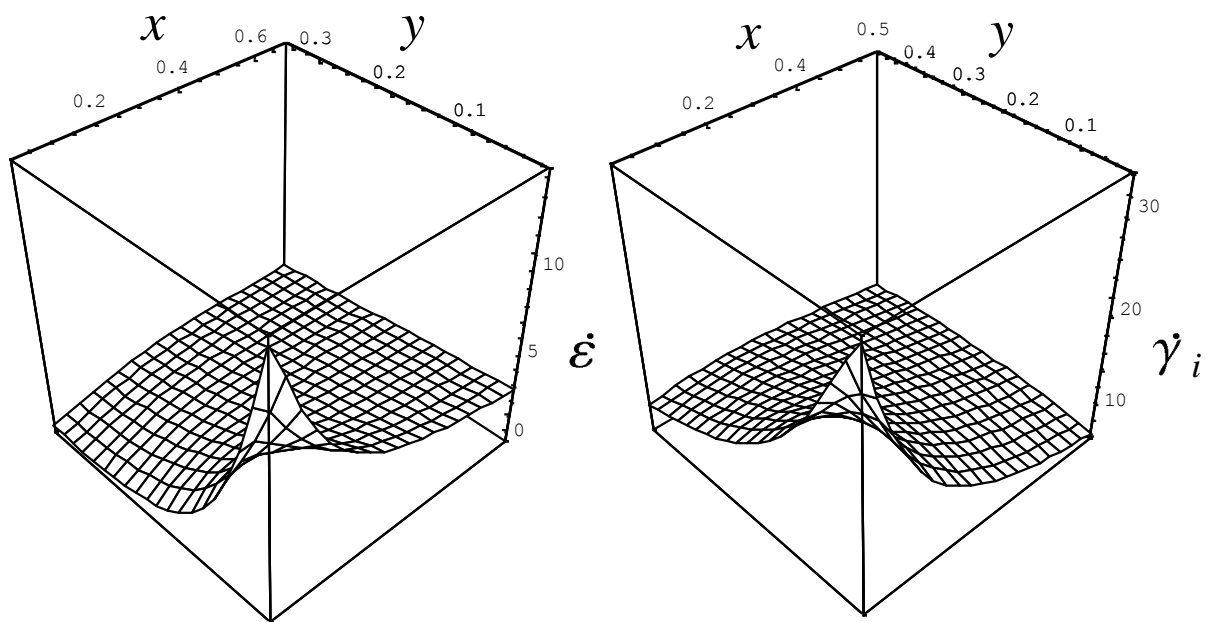


Рис. 2.49. Графіки змін швидкостей об'ємних $\dot{\epsilon}$ та зсувних $\dot{\gamma}_i$ деформацій ґрунту під дією дискового робочого органу в поперечно-горизонтальній площині на глибині 0,1 м (глибина ходу диска 0,2 м)

На обох рисунках представлені графіки розподілу деформацій при знаходженні нижньої точки диска на початку координат та при $\gamma = 0$

2.3.3. Визначення розподілу напружень у ґрунтовому середовищі перед дисковим робочим органом

При відомому розподілі компонент швидкостей деформацій у ґрунтовому середовищі під дією дискового робочого органу значення компонент напружень можуть бути визначені з використанням фізичних рівнянь зв'язку напружень з деформаціями для тіла KV (п. 2.1.2):

Використовуючи рівняння (2.3.21) та (2.1.20), можна визначити компоненти напружень у ґрунтовому напівпросторі. Рівняння компонент напружень у ґрунтовому напівпросторі мають досить громіздкий вигляд, тому можна обмежитись лише рівняннями інваріантних величин напружень (тому що вони характеризують складові функції показника вигляду напруженого стану ґрунту), а саме гідростатичною складовою σ_{cp} та інтенсивністю тангенціальних напружень τ_i :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \tau_i = \frac{1}{3} \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.3.23)$$

Компоненти напружень у ґрунтовому напівпросторі під дією дискового робочого органу мають вигляд:

$$\sigma_x = \frac{1}{1 + e^{\frac{2 G t (\nu+1)}{\mu(\nu-1)}}}$$

$$\left(\mu \left(- \left((x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2 a r - a^2} \right) / \right. \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{2 a r - a^2})^2 + (y + \kappa - (2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) - (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2 a r - a^2}) \tan(\alpha))^2} \right) + 1 \right) / \right.$$

$$\left. (x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + (R - a \sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) + \sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (x + \kappa - 2 \sqrt{2 a r - a^2} \cos(\alpha) + \dots \dots \dots) \right) ;$$

.....

$$\tau_{xz} = \frac{1}{1 + e^{\frac{G t}{\eta^1}}}$$

$$\left(e^{\frac{G t}{\eta^1}} \left(\eta^1 \left(- (x (-a + z + \kappa) \left(1 + (\sqrt{-a^2 + 2 a r} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2 a r} \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \cos[\alpha] + (R - a \sqrt{-r^2 + R^2}) \sin[\alpha] \right) / \right. \right. \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{((-a + z + \kappa)^2 + (\sqrt{-a^2 + 2 a r} + x + \kappa - 2 \sqrt{-a^2 + 2 a r} \cos[\alpha] + \dots \dots \dots) \right. \right.$$

Характер розподілу напружень у ґрунтовому середовищі перед робочим органом аналогічний до розподілу деформацій.

Вплив параметрів та режимів роботи дискового робочого органу, а також властивостей ґрунту на напружений стан характеризують графіки змін напружень на відстані 0,2 м у напрямку руху та 0,2 м у напрямку осі *Oy* від нижньої точки контакту диск-ґрунт (рис. 2.50-2.52).

Слід відзначити, що велика кількість графічного представлення функціональних зв'язків у монографії зв'язана із надзвичайною складністю та громіздкістю цих залежностей. Тому візуалізація функціональних залежностей – це єдина можливість показати характер цих функціональних зв'язків.

Аналіз графіків, представлених на рис. 2.50, свідчить про більш суттєвий вплив кута атаки α в порівнянні з кутом нахилу осі обертання γ на величини об'ємних та інтенсивності зсувних напружень. А вигляд залежностей на рис. 2.51 свідчить про незначний вплив кривизни диска R в порівнянні з кутом атаки α на величини напружень перед дисковим робочим органом.

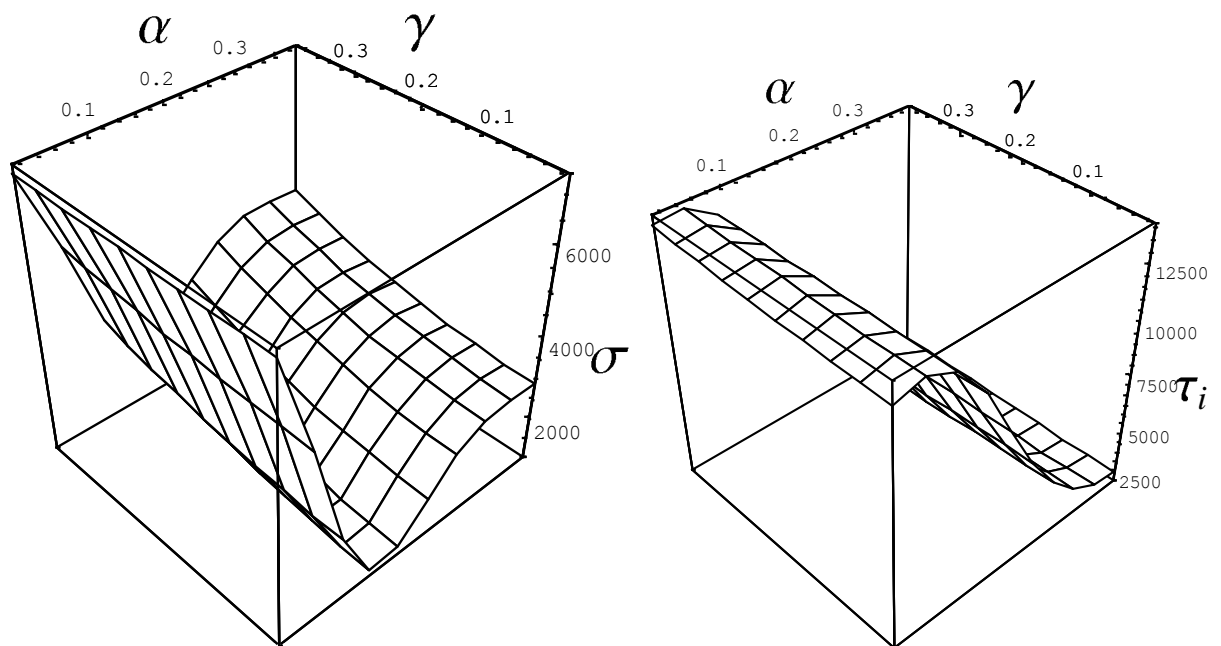


Рис. 2.50. Графіки залежності гідростатичних σ та інтенсивності зсувних τ_i напружень від кута атаки α та кута нахилу осі обертання γ

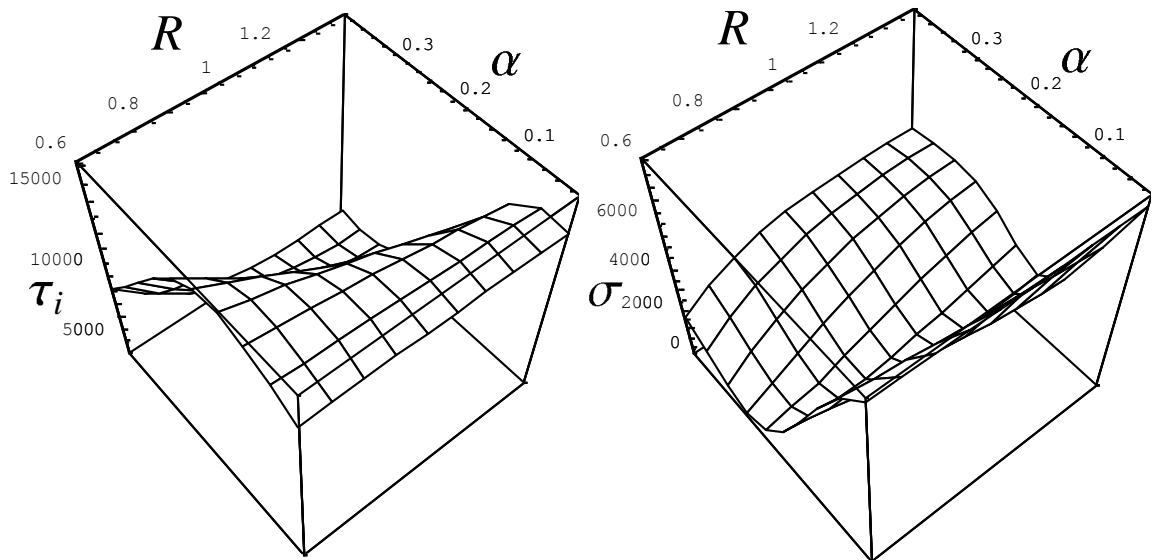


Рис. 2.51. Графіки залежності гідростатичних σ та інтенсивності зсувних τ_i напружень від кута атаки α та радіуса кривизни диска R

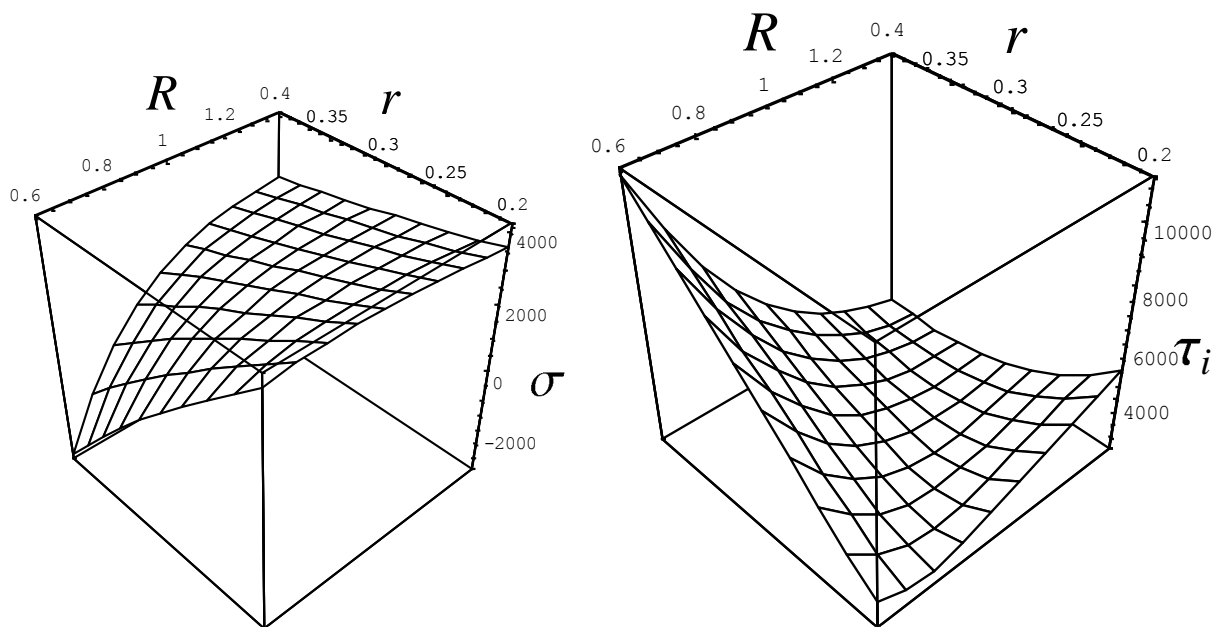


Рис. 2.52. Графіки залежності гідростатичних σ та інтенсивності зсувних τ_i напружень від діаметра $2r$ та радіуса R кривизни диска

На величини гідростатичних та зсувних напружень у ґрунті суттєво впливають співвідношення діаметра диска та радіуса його кривизни.

Причому, при певних співвідношеннях r/R значення гідростатичних напружень можуть змінювати знак. Це означає, що при певних величинах цих параметрів напруження можуть бути як стискаючими, так і розтягуючими.

Одержані функціональні залежності компонент напружень та їх інваріантів у ґрунті дозволяють лише отримати елементарні уявлення про розподіл напружень у напівпросторі перед робочим органом та вплив на нього параметрів і режимів роботи ротаційного дискового сферичного робочого органу. Ці залежності не можна використовувати як критерій оптимізації геометричної форми та розмірів робочих органів ґрунтообробних машин. Тому для визначення критерія оптимізації повинна бути отримана функція інтегрального показника вигляду напружено-деформованого стану ґрунту, яка кореляційно зв'язана зі зміною його технологічних властивостей.

2.3.4. Оцінка потужності деформацій ґрунту дисковим робочим органом

В процесі обробітку ґрунту дисковим робочим органом потужність, яка підводиться до робочого органу шляхом надання йому поступального руху, витрачається на деформування ґрунту й може розцінюватись як критерій оцінки енергомісткості процесу обробітку ґрунту. При цьому потужність деформування складається з потужності об'ємного деформування та зсувних деформацій. Величини цих складових потужності визначаються як інтеграл за об'ємом деформування середовища перед робочим органом, а саме:

$$N_{\varepsilon} = \iiint_{\Omega} (\dot{\varepsilon}_x \sigma_x + \dot{\varepsilon}_y \sigma_y + \dot{\varepsilon}_z \sigma_z) dx dy dz;$$

$$N_{\gamma} = \iiint_{\Omega} (\dot{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \dot{\gamma}_{xz} \tau_{xz} + \dot{\gamma}_{zy} \tau_{zy}) dx dy dz;$$

$$N = N_{\varepsilon} + N_{\gamma}.$$

(2.3.24)

де $N, N_{\varepsilon}, N_{\gamma}$ – потужність сумарна, об’ємних та зсувних деформацій, відповідно;

$\Omega = XYZ$ – об’єм деформованого ґрунту.

Співвідношення потужностей зсувних та об’ємних деформацій можуть використовуватись як наближений критерій оцінки якості виконання процесу обробітку ґрунту:

$$KN = \frac{N_{\gamma}}{N_{\varepsilon}}.$$

Значення компонент напружень та деформацій, які входять у залежності (2.3.24), визначені в п.п.2.3.2, 2.3.3.

Графічно залежність потужності об’ємних, зсувних та повних деформацій, а також їх відношення при об’ємі деформування $\Omega = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \text{ м}^3$ наведені на рис. 2.53-2.55.

Як видно з цих графіків, на величину потужності деформацій ґрунту має прямо пропорційний вплив граничне напруження руйнування ґрунту. При цьому в’язкість ґрунту не впливає на потужність, яка витрачається на процес обробітку ґрунту.

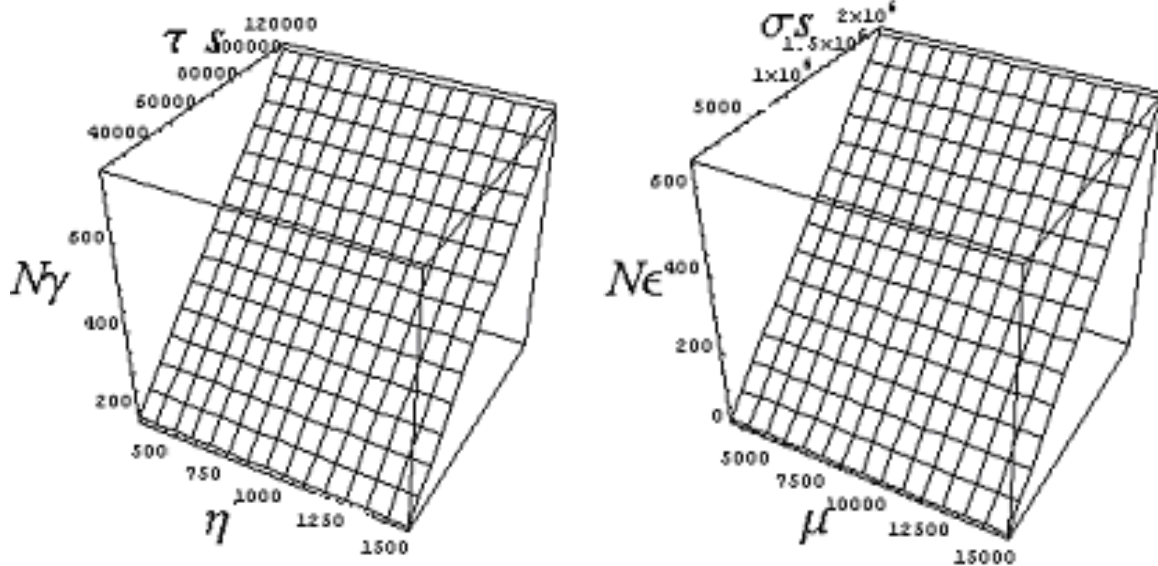


Рис. 2.53. Графіки залежності потужності об'ємних та зсувних деформацій ґрунту перед дисковим робочим органом від граничного напруження руйнування ґрунту

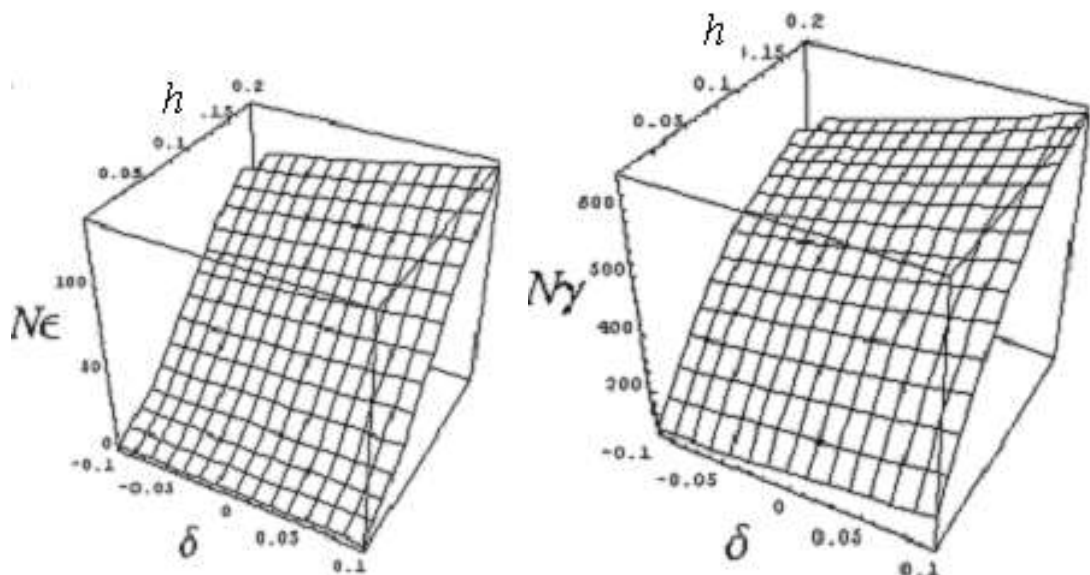


Рис. 2.54. Графіки залежності потужності об'ємних та зсувних деформацій ґрунту перед дисковим робочим органом від глибини обробітку α та режиму кочення диска δ

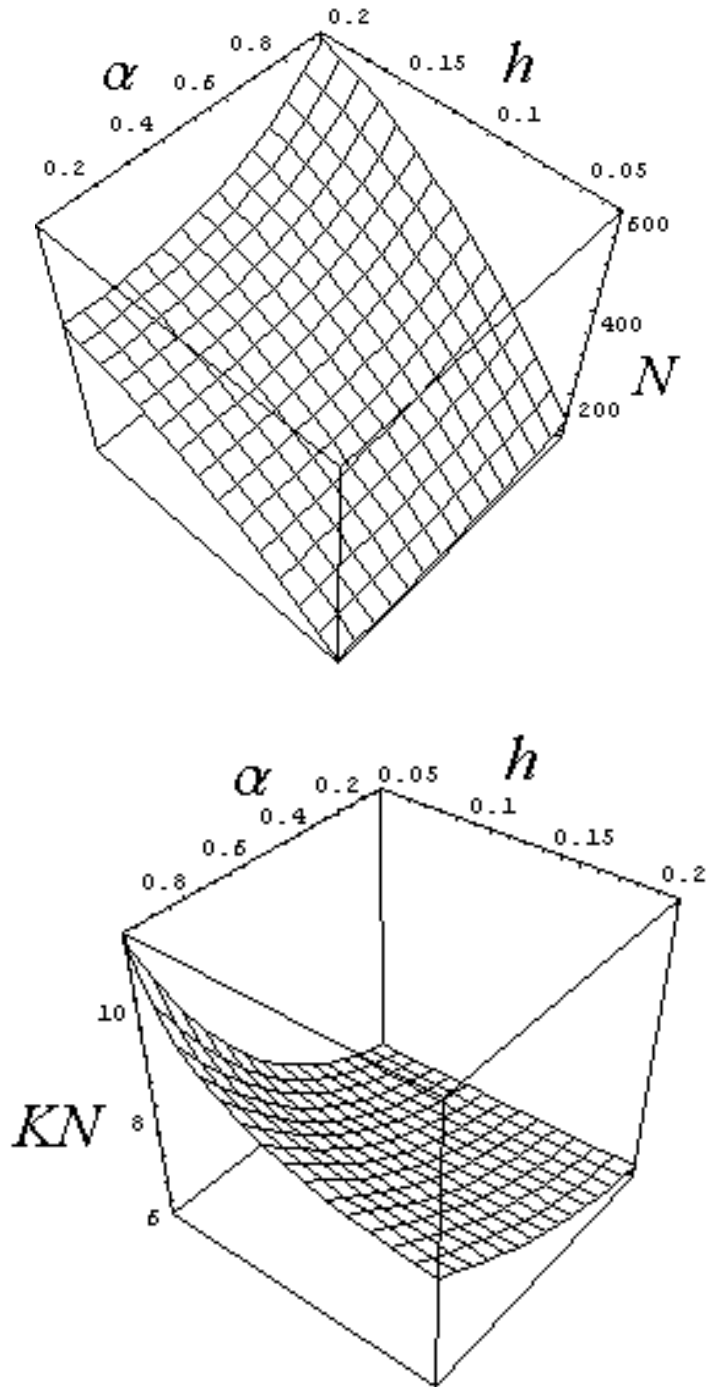


Рис. 2.55. Графіки залежності потужності об'ємних, зсувних та сумарних деформацій ґрунту перед дисковим робочим органом від кутів установки та глибини обробітку

Досить суттєвий вплив на питому потужність деформування має глибина обробітку ґрунту. Такий вплив пояснюється, з точки зору механіки суцільного середовища тим, що ґрунт має закріплення на нескінченості в напрямку збільшення глибини, тобто зі збільшенням глибини обробітку суттєво зростає об'єм деформованого середовища.

2.3.5. Визначення критерію напружено-деформованого стану ґрунту під дією дискового робочого органу

Параметри та режими роботи розпушуючих робочих органів повинні забезпечувати максимум інтенсивності зсувних деформацій, а значення об'ємних (гідростатичної складової тензора напружень) – превалювання розтягнення. Таким вимогам відповідає мінімальне значення критерію вигляду напружено-деформованого стану в усьому деформованому об'ємі ґрунту. Така функція має вигляд:

$$I_{\mu\sigma} = \iiint_V \mu \sigma dxdydz = \iiint_V - \frac{\sqrt{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{2\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}} dxdydz ;$$

$$I_{\mu d} = \iiint_V \mu d dxdydz = \iiint_V - \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{2\sqrt{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2}} dxdydz .$$

(2.3.25)

Як було показано вище, між деформаціями ґрунту та напруженням у ґрунті перед робочим органом існує пропорційний зв'язок, тому для оптимізації параметрів можуть використовуватись або критерій вигляду деформованого стану μd , або критерій вигляду напруженого стану – $\mu\sigma$.

Для отриманих значень компонентів деформацій від дії робочого органу довільної геометричної форми та розмірів при об'ємі деформування $x y z = 1 \cdot 1 \cdot 1$ інтегральна функція може бути отримана лише в числовому вигляді шляхом чисельного інтегрування підінтегральної функції. Вираз підінтегральної функції вигляду напружено-деформованого стану ґрунту перед дисковим робочим органом дуже громіздкий.

Графічно залежність інтегрального критерію вигляду деформованого стану ґрунту від геометричної форми, розмірів, режимів роботи дискового робочого органу та властивостей ґрунту представлена на рис. 2.56. - 2.59.

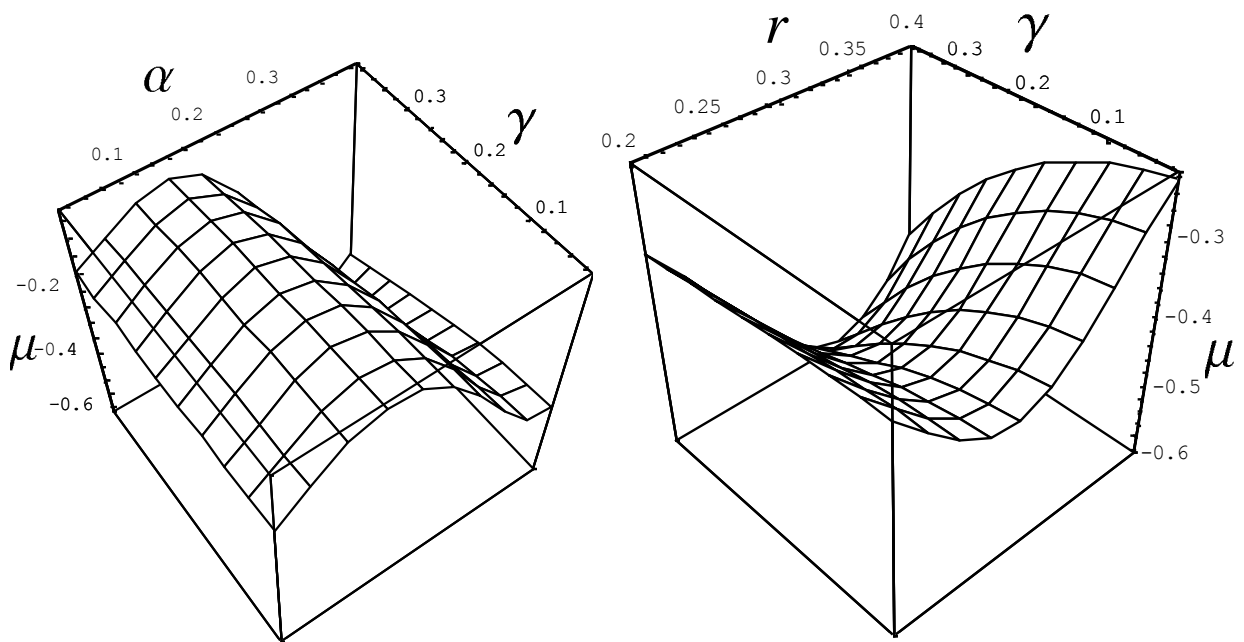


Рис. 2.56. Графіки залежності критерію вигляду деформованого стану ґрунту від кута атаки α , кута нахилу осі обертання γ та діаметра диска $2r$

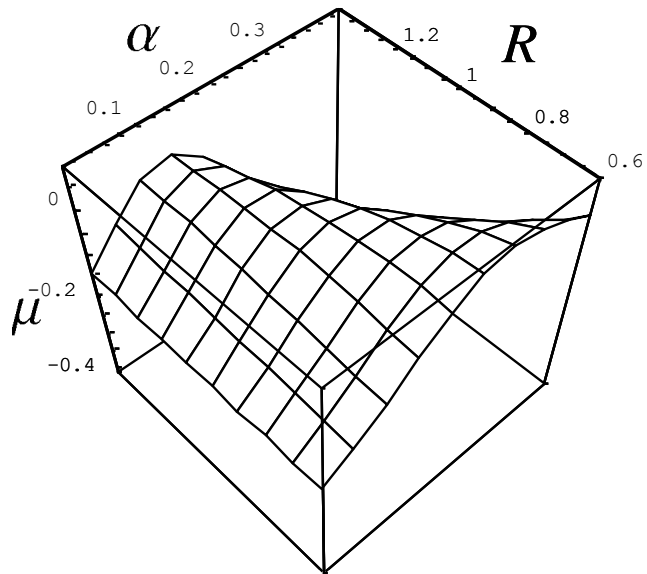
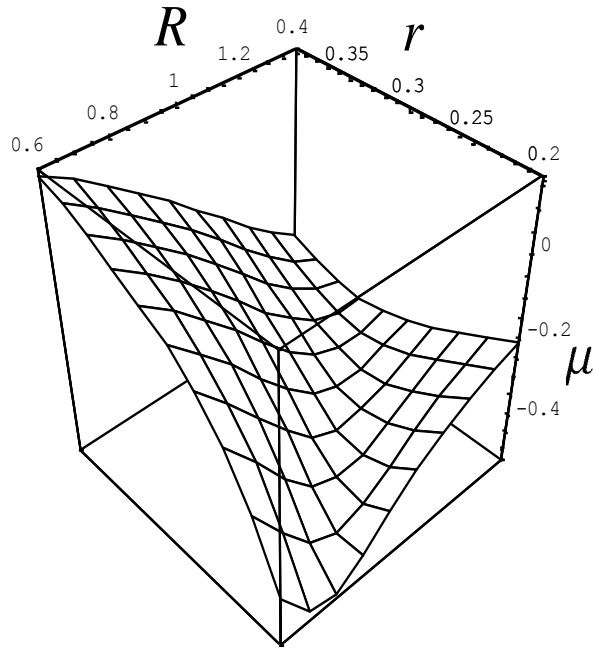


Рис. 2.57. Графіки залежності критерію вигляду деформованого стану ґрунту від кута атаки α , радіуса кривизни диска R та діаметра диска $2r$

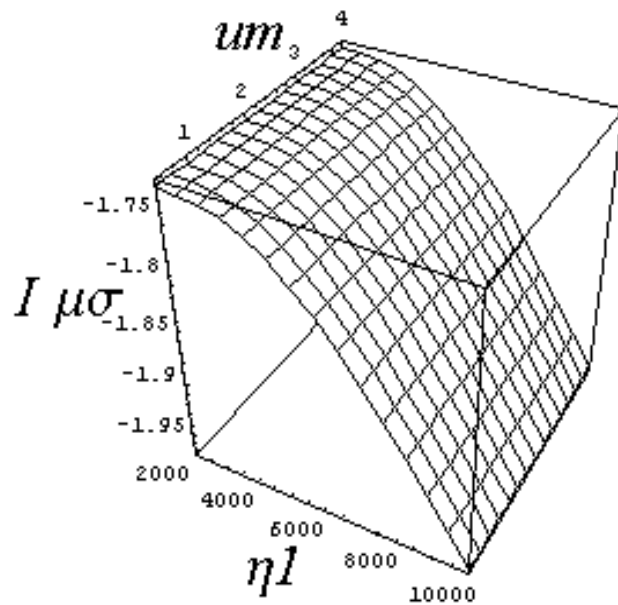
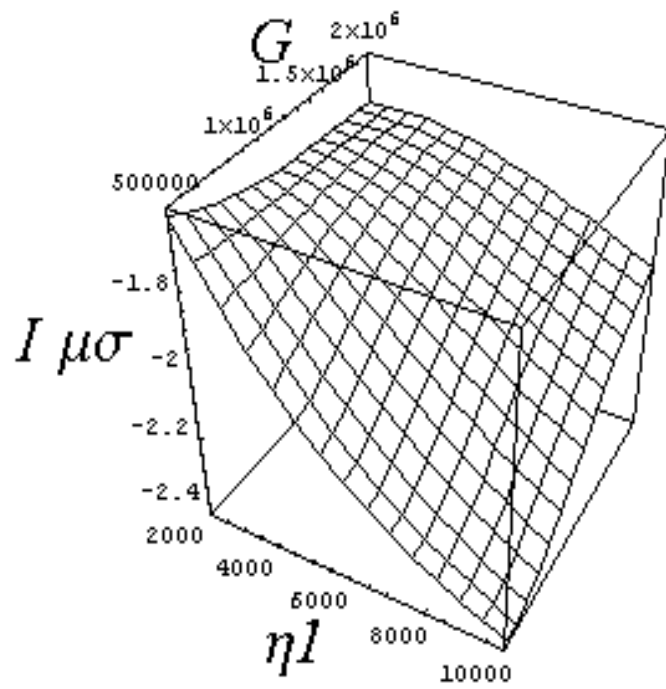


Рис. 2.58. Залежність інтегрального значення критерію вигляду напруженого стану ґрунту $I \mu\sigma$ від властивостей ґрунту

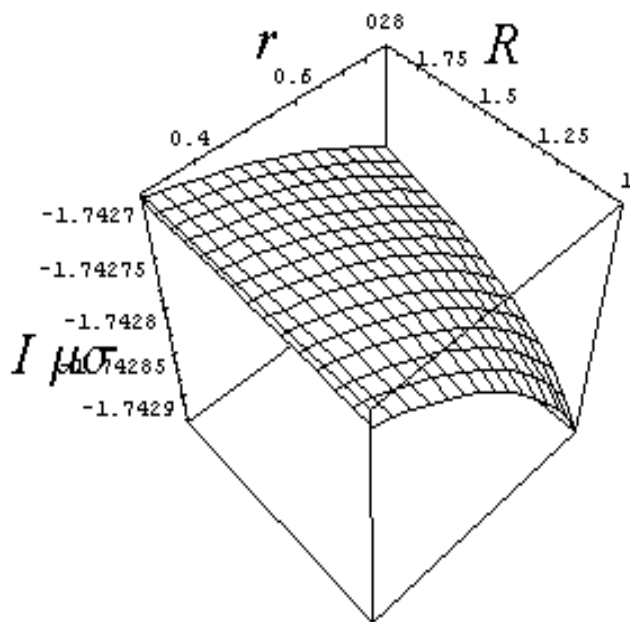
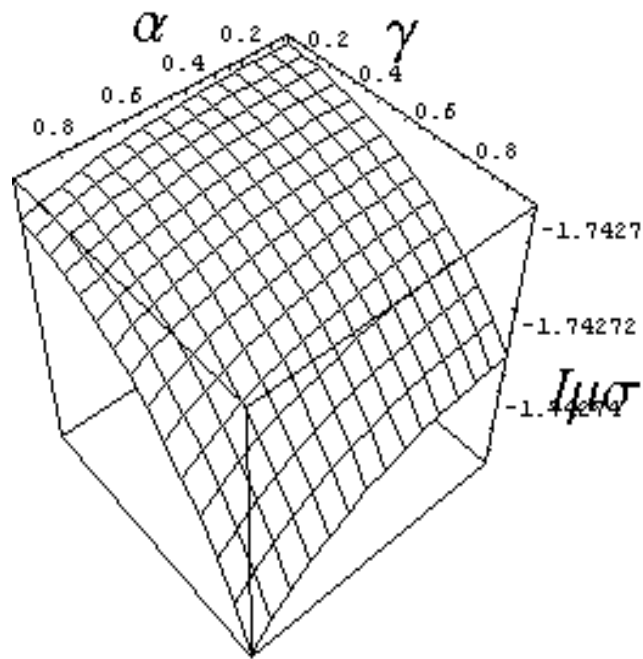


Рис. 2.59. Залежність інтегрального значення критерію вигляду напруженого стану ґрунту $I_{\mu\sigma}$ від параметрів і режимів роботи дискового робочого органу

Вигляд графіків критерію вигляду деформованого стану свідчить про наявність виражених мінімумів функції, тобто можливість знаходження оптимальних співвідношень параметрів та режимів роботи дискового робочого органу.

Залежність (2.3.25) може бути використана для оптимізації параметрів та режимів роботи сферичного дискового ґрунтообробного робочого органу.

Для зменшення густини ґрунту в результаті взаємодії з ним пасивного робочого органу необхідно визначити керовані фактори (коефіцієнти рівняння поверхні робочого органу та його геометричні розміри, а також швидкість його переміщення) за відомих властивостей (модуль пружності, коефіцієнти в'язкості, граничні напруження пластичності), які забезпечать виконання необхідної умови:

$$I_{\mu\sigma} \rightarrow \min, I_{\mu d} \rightarrow \min, \quad (2.3.26)$$

що відповідає превалюванню зсувних та розтягуючих деформацій.

Велика кількість незалежних змінних та нелінійність залежності (2.3.25) не дозволяє використати аналітичні методи пошуку її екстремуму.

Пошук мінімуму інтегрального показника вигляду напружено-деформованого стану ґрунту повинен проводитись для кожного конкретного типу ґрунту з відомими межами змін його властивостей числовими методами із застосуванням ПЕОМ (наприклад, методом градієнтного спуску). В системі комп'ютерної символної математики це функція:

$$\text{FindMinimum}[\text{expr } r, \{x, x0\}, \{y, y0\}, \dots].$$

В результаті проведених у підрозділі 2.3. теоретичних досліджень, отримані функціональні зв'язки параметрів та режимів роботи ротаційного сферичного дискового робочого органу з розподілом деформацій в оброблюваному ґрунтовому середовищі. Ці дослідження дозволили отримати в аналітичному вигляді функцію оптимізації параметрів та режимів роботи ротаційного дискового робочого органу для забезпечення необхідних змін технологічних властивостей ґрунту.

Отримана функція оптимізації $I_{\mu\sigma}$ дозволяє встановити оптимальні, для конкретних ґрунтових умов, параметри: радіус кривизни диска R , діаметр диска r та режими роботи дискового робочого органу: кут атаки α , кут нахилу осі обертання диска до горизонту γ , поступальну швидкість u_m .

РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1. Програма експериментальних досліджень

Програмою експериментальних досліджень передбачалося:

– визначення величин реологічних властивостей ґрунту (модуля пружності при об'ємних K та зсувних G деформаціях, коефіцієнтів в'язкості при об'ємних μ та зсувних η деформаціях, граничного напруження руйнування (зсуву) τ_s), які входять в залежності зв'язку напружень із деформаціями, та критерію оптимізації параметрів і режимів роботи робочих органів ґрунтообробних машин;

– встановлення кореляційних зв'язків модуля пружності при об'ємних E та зсувних G деформаціях, коефіцієнтів в'язкості при об'ємних μ та зсувних η деформаціях, граничного напруження руйнування (зсуву) τ_s та граничної швидкості деформації руйнування $\dot{\gamma}_s$ з фізичними властивостями основних типів ґрунтів;

– визначення адекватності результатів теоретичних досліджень.

Крім того, програмою експериментальних досліджень передбачалося експериментальне визначення розподілу тиску по поверхнях різної кривизни робочих органів ґрунтообробних машин.

3.2. Методика проведення експериментальних досліджень

3.2.1. Методика визначення реологічних властивостей ґрунту

Фізичні рівняння зв'язку напружень із деформаціями містять такі реологічні показники ґрунту, як модулі пружності об'ємних K , зсувних G деформацій, коефіцієнти в'язкості об'ємних μ та зсувних η деформацій, граничні напруження руйнування: відриву σ^+ , стискання σ^- та зсуву τ_s .

Дослідженнями, проведеними А. С. Кушнар'овим [108,109], встановлені співвідношення між показниками реологічних властивостей ґрунтів у широкому спектрі варіювання їхніх фізико-механічних

властивостей. Ці співвідношення дозволили йому розширити поняття механічного структора ґрунту:

$$S = \begin{pmatrix} \pi_1 & \sigma(\pi_1) & m(\pi_1) \\ \pi_2 & \sigma(\pi_2) & m(\pi_2) \\ \pi_3 & \sigma(\pi_3) & m(\pi_3) \\ \pi_4 & \sigma(\pi_4) & m(\pi_4) \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

$$\text{де } \pi_1 = \frac{\sigma}{K}; \pi_2 = \frac{G}{K}; \pi_3 = \frac{\eta l}{\mu}; \pi_4 = \varphi; \pi_2 = \frac{G}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$$

φ - коефіцієнт внутрішнього тертя;

Аналіз результатів експериментальних досліджень показує, що величина $\pi_2 = \frac{G}{K}$ для різних типів ґрунтів змінюється в межах 3-8 %, тобто в межах точності вимірювань, при цьому межі існування цього співвідношення становлять величину 0,36...0,41, що відповідає значенням коефіцієнта Пуассона 0,30...0,35, величина π_2 має область існування 9,98...10,81. Ґрунтуючись на (3.1.1), можна визначати всі чотири величини реологічних властивостей ґрунту за двома вимірами.

Враховуючи залежності (2.1.8), можна дійти висновку, що значенню величини π_2 відповідає значення коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.33$, що дорівнює середньому значенню для більшості станів та типів ґрунтів [19,25,43, 140, 194,219, 221, 225].

Співвідношення між граничними напруженнями руйнування розривом, стисканням та зсувом можуть бути встановлені на основі аналізу критерію міцності А. О. Лебедева (залежність (1.15)). З урахуванням того, що значення

відношення граничних напружень руйнування ґрунту розтягненням та зсувом [43, 107,194,200,221,225,229]:

$$\chi = \frac{\sigma^+}{\sigma^-} = (6 \div 8), \quad (3.2.2)$$

шляхом нескладних перетворень можна отримати умову міцності (1.15) для ґрунту у вигляді:

$$\frac{1}{6}\sigma_i = \sigma^+; \quad \frac{1}{2}\sigma_i = \tau_s, \quad \text{звідки: } 3\sigma^+ = \tau_s. \quad (3.2.3)$$

Модулі пружності об'ємних та зсувних деформацій можуть визначатися за методикою запропонованою А. С. Кушнар'євим, яка передбачає дослідження затухаючих коливань зразка ґрунту. При цьому модулі пружності та коефіцієнт в'язкості обчислюються за залежностями:

$$K = \frac{4P_0 l \left(\ln \frac{A_1}{A_2} + 4\pi^2 \right)}{\pi g d^2 T^2 \nu^2}; \quad G = \frac{4P_0 l \left(\ln \frac{A_1}{A_2} + 4\pi^2 \right)}{\pi g d^2 T^2 k^2};$$

$$\mu = \frac{8P_0 l \left(\ln \frac{A_1}{A_2} \right)}{\pi g d^2 T}; \quad \eta = \frac{3P_0 l \left(\ln \frac{A_1}{A_2} \right)}{\pi g d^2 T}; \quad (3.2.4)$$

де P_0 – вага зразка ґрунту, Н;

l, d – висота та діаметр зразка ґрунту, відповідно, м;

A_1, A_2 – послідовні амплітуди затухаючих коливань ґрунтового зразка;

T – період коливань, с;

k, ν – розв’язок відповідних трансцендентних рівнянь.

Схема приладу для визначення затухаючих коливань зразка представлена на рис. 3.1.

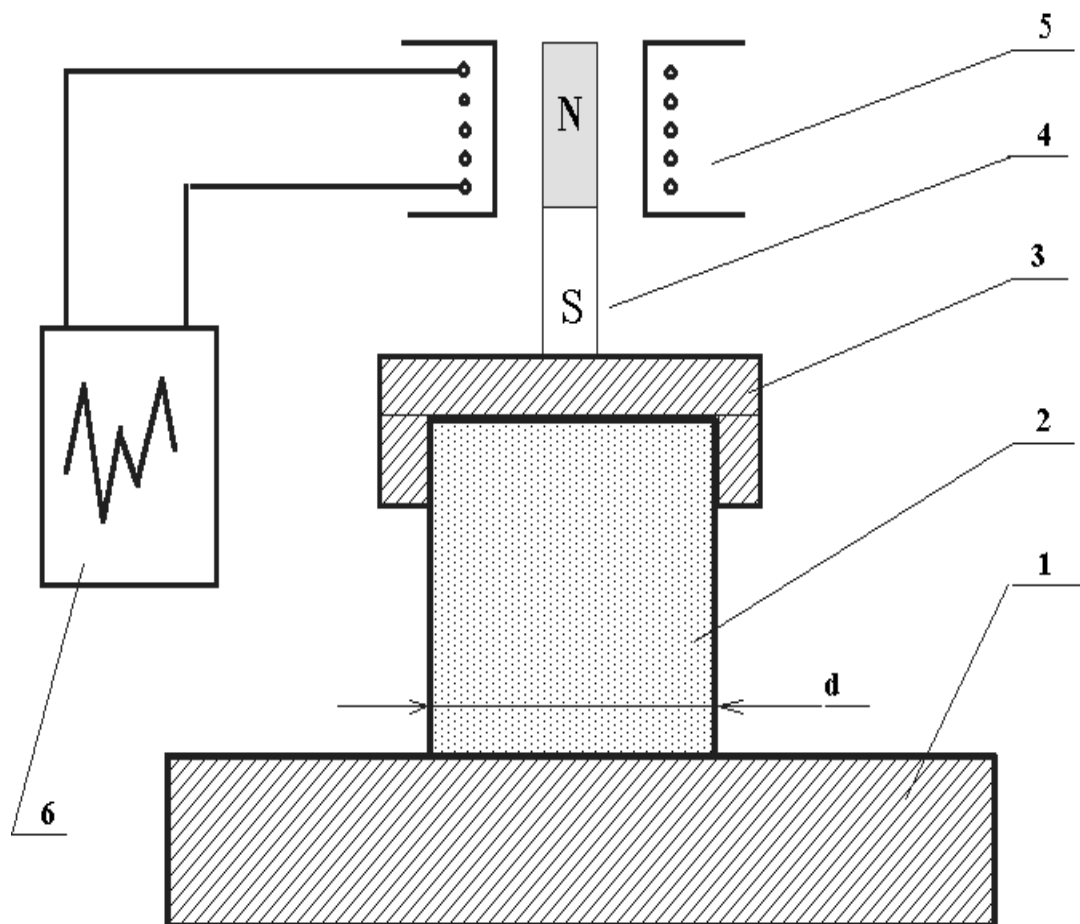


Рис. 3.1. Схема приладу для визначення модулів пружності та в'язкості ґрунту: 1 – станина, 2 – ґрунтовий зразок, 3 – стакан, 4 – постійний магніт, 5 – котушка (~ 40000 витків), 6 – комп'ютер з АЦП L-305

Характерна осцилограма затухаючих коливань зразка представлена на рис. 3.2.

Для визначення граничних напружень зсуву в зразку ґрунту необхідно створити такий напружений стан, за якого дотичні напруження перевищують опір ґрунту зсуву та утворюється фіксована поверхня ковзання.

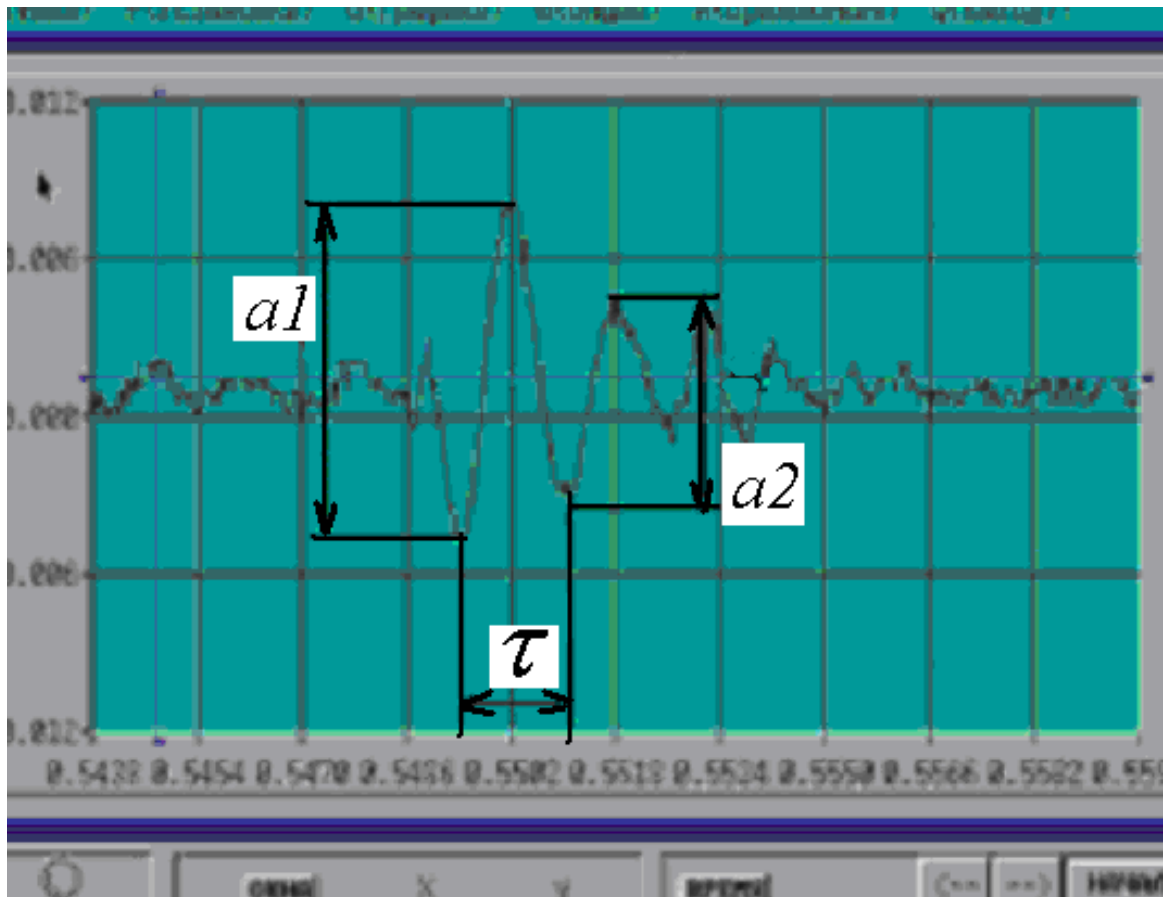


Рис. 3.2. Характерна осцилограма коливань ґрунтового зразка, записана з використанням програми ПОС-16 та АЦП L-305

Такий стан може бути досягнутий декількома способами (рис. 3.3):

- поступального або обертального зміщення частини зразка ґрунту відносно іншої частини зразка (а, б);
- руйнуванням зразка в умовах трьох- або одновісного стискання (в);
- зануренням у ґрунт штампів (є);
- провертанням у ґрунті зануреної крильчатки з тонкими лопатями (г, д).

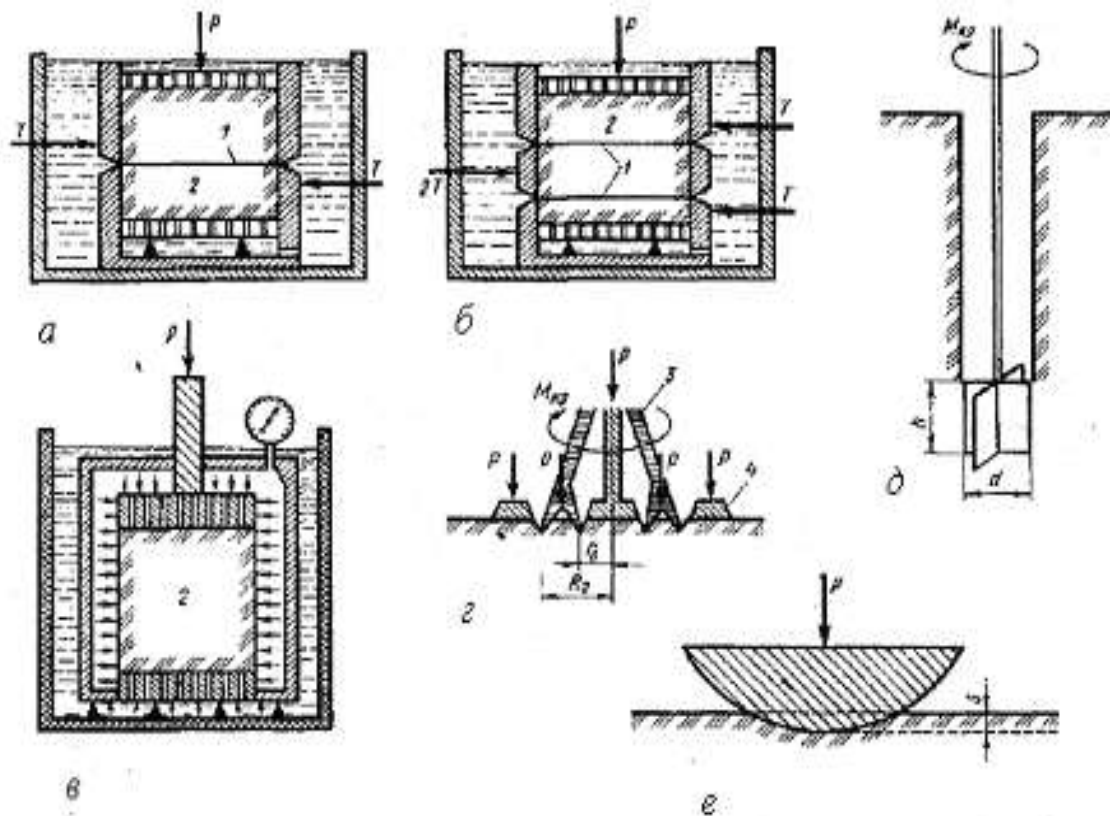


Рис. 3.3. Схеми визначення граничних напружень зсуву ґрунту

В усіх випадках кут внутрішнього тертя та зчеплення визначають шляхом вирішення рівнянь, які зв'язують зовнішню силу, що діє на зразок, та силу опору зсуву по поверхні ковзання (рівняння 3.2.5).

$$|\tau_s| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C \quad (3.2.5)$$

де:

τ_s - граничне дотичне напруження;

σ_n – нормальне напруження;

φ – кут внутрішнього тертя;

C – зчеплення середовища.

Найбільш простим методом визначення граничного напруження зсуву τ_s є застосування конусного метода Ребіндера П. У. (схема представлена на рис. 3.4.).

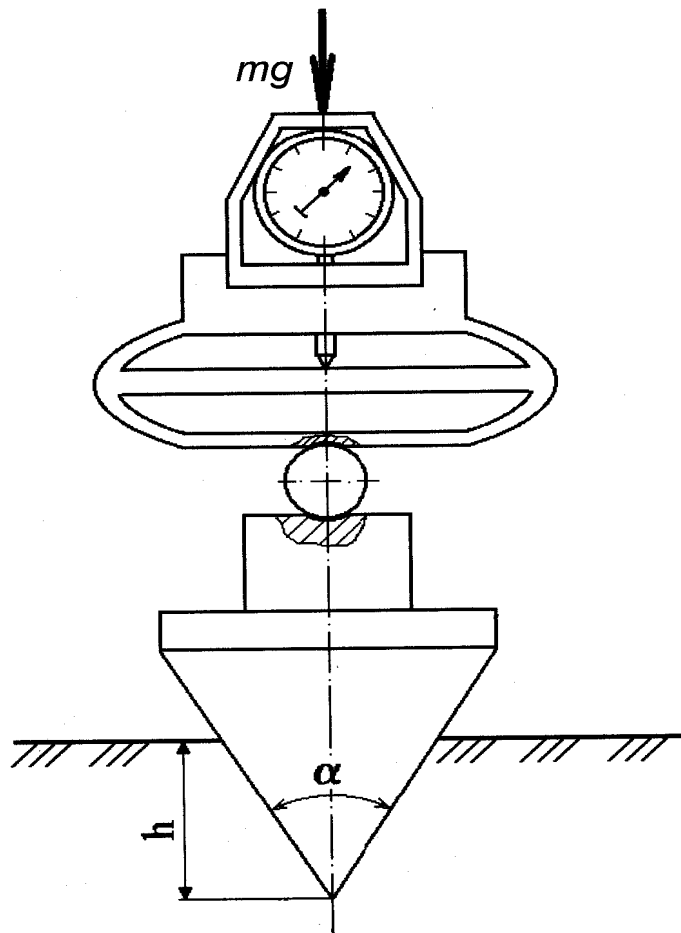


Рис. 3.4. Схема приладу для визначення граничних напружень зсуву ґрунту за методом Ребіндера П. У.

За цим методом межа пластичності визначається по зануренню конуса в ґрунт за формулою:

$$\tau_s = \left(m g \cos \frac{\alpha}{2} \right) / \left(\pi h^2 t q \frac{\alpha}{2} / \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad (3.2.6)$$

де:

m – маса конуса, кг;

g - прискорення вільного падіння, м/с²;

α - кут загострення конуса, град.;

h – глибина занурення конуса, м.

3.2.2. Нова методика визначення модулів пружності та коефіцієнтів в'язкості ґрунту

Методика визначення модулів пружності та коефіцієнтів в'язкості, яка запропонована А. С. Кушнар'овим, передбачає необхідність вирізання зразка ґрунту з масиву та визначення його вагових і розмірних характеристик. Крім того, необхідне визначення коефіцієнтів k , \mathcal{G} , які є рішеннями систем трансцендентних рівнянь, отриманих за результатами експериментів.

Із метою підвищення надійності та достовірності визначення модуля пружності та коефіцієнта в'язкості нами був розроблений метод, в основу якого покладено вивчення затухаючих коливань тягаря на поверхні ґрунту (рис. 3.5).

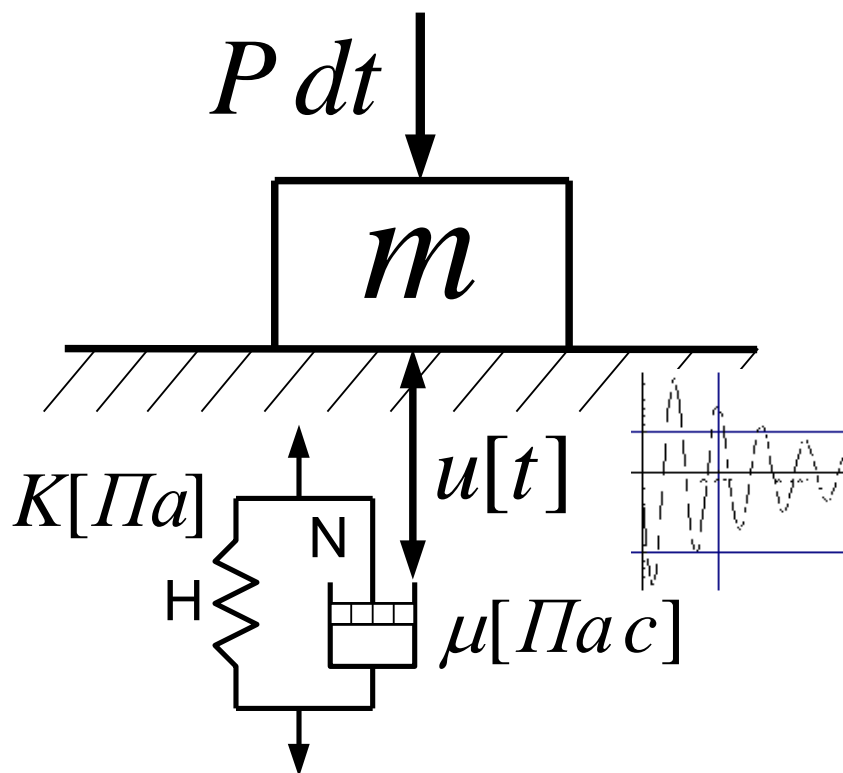


Рис. 3.5. Схема до визначення модуля пружності та коефіцієнта в'язкості ґрунту

При деформуванні ґрунту в межах в'язко-пружних деформацій до настання пластичності його механічна модель може бути представлена тілом Кельвіна-Фойгта. Ця модель характеризується модулем пружності та коефіцієнтом в'язкості.

Для випадку одновісного стискання можуть використовуватись найбільші головні напруження та деформації і співвідношення між ними [43]. Тоді рівняння коливань тягаря матиме вигляд:

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L \left(K u + \mu \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (3.2.7)$$

де u – узагальнене переміщення, [м];

L – розмірний коефіцієнт, [м];

K – модуль пружності об’ємних деформацій, [Па];

μ – коефіцієнт в’язкості об’ємних деформацій, [Па с].

Рішення рівняння (3.1.7) має вигляд:

$$u = \exp\left[\frac{t(-L\mu - \sqrt{4KLm + L^2\mu^2})}{2m}\right] C1 + \\ + \exp\left[\frac{t(-L\mu + \sqrt{4KLm + L^2\mu^2})}{2m}\right] C2 \quad . \quad (3.2.8)$$

Сталі інтегрування визначаються з умов:

при $t = 0$,

$$\exp\left[\frac{t(-L\mu - \sqrt{4KLm + L^2\mu^2})}{2m}\right] C1 + \\ + \exp\left[\frac{t(-L\mu + \sqrt{4KLm + L^2\mu^2})}{2m}\right] C2 = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\begin{array}{l} \exp \left[\frac{t \left(-L \mu - \sqrt{4 K L m + L^2 \mu^2} \right)}{2 m} \right] C1 + \\ + \exp \left[\frac{t \left(-L \mu + \sqrt{4 K L m + L^2 \mu^2} \right)}{2 m} \right] C2 \end{array} \right] = g ,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Вирішення цієї системи рівнянь при $t = 0$ дозволяє отримати значення сталих інтегрування:

$$C1 = \frac{g m^2}{L \mu \sqrt{-4 K L m + L^2 \mu^2}} ; \quad C2 = -\frac{g m^2}{L \mu \sqrt{-4 K L m + L^2 \mu^2}} .$$

Шляхом перетворення експоненціальної функції (3.1.8) (з урахуванням значень постійних інтегрування) в тригонометричну маємо після спрощення

$$u = \frac{2 g m^2 \left(-\text{Cosh} \left[\frac{L t \mu}{2 m} \right] + \text{Sinh} \left[\frac{L t \mu}{2 m} \right] \right) \text{Sinh} \left[\frac{t \sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}{2 m} \right]}{L m \sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}$$

Після перетворення суми двох тригонометричних функцій

$$-\text{Cosh} \left[\frac{L t \mu}{2 m} \right] + \text{Sinh} \left[\frac{L t \mu}{2 m} \right] = -\exp \left[-\frac{L t \mu}{2 m} \right] \quad \text{в експоненціальну}$$

останній вираз матиме вигляд:

$$u = \frac{2 g m^2 \left(-\exp \left[-\frac{L t \mu}{2 m} \right] \right) \operatorname{sh} \left[\frac{t \sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}{2 m} \right]}{L m \sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}} . \quad (3.2.9)$$

Останнє рівняння має два випадки рішень:

– при $L \mu^2 \geq 4 K m$ – рішення з дійсними значеннями, коливання відсутні (тобто відбувається незворотне заглиблення тягара в ґрунт);

– при $L \mu^2 \leq 4 K m$ – рішення з комплексними значеннями, тягар коливається за рахунок зворотних деформацій.

Складові рівняння (3.2.9) мають такі значення, що характеризують характер затухаючих коливань:

$-\exp \left[-\frac{L t \mu}{2 m} \right]$ – декремент затухання коливань, характеризує

інтенсивність затухання коливань і залежить від коефіцієнта в'язкості;

$\frac{2 g m^2}{L m \sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}$ – масштаб амплітуди коливань;

$\frac{\sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}{2 m}$ – частота коливань,

$\frac{2 m}{\sqrt{L(-4 K m + L \mu^2)}}$ – період коливань;

Графічно залежності переміщень від властивостей ґрунту мають вигляд, представлений на рис. 3.6.а - 3.6.б.

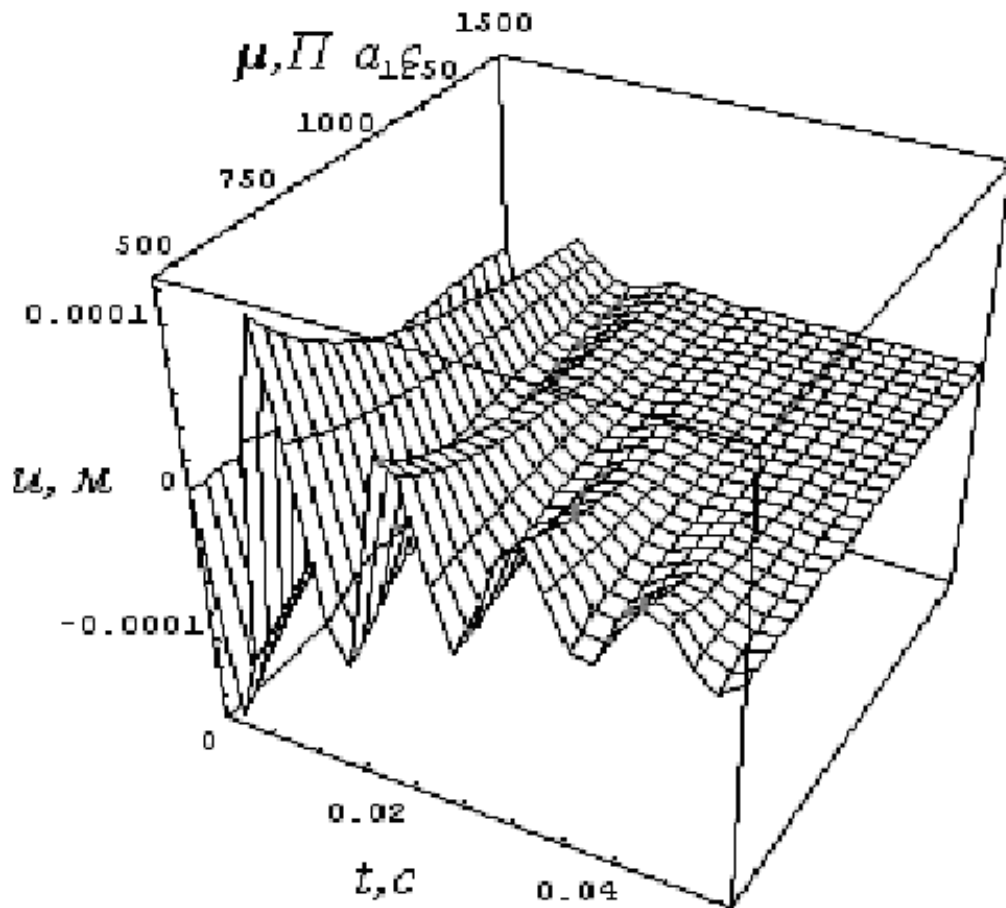


Рис. 3.6.а. Залежність характеру коливань від коефіцієнта в'язкості ґрунту μ

Відношення послідовних амплітуд пропорційне декременту затухання й залежить від величини коефіцієнта в'язкості ґрунту. Масштабний коефіцієнт амплітуди є величиною постійною для конкретного типу ґрунту і

змінюється лише при зміні початкових умов. Для послідовних амплітуд коливань масштабний коефіцієнт залишається постійним.

За результатами проведеного експерименту (осцилограма коливань) можуть бути визначені амплітуди $a_i = |u_i| + |u_{i+1}|$ коливань та період цих коливань.

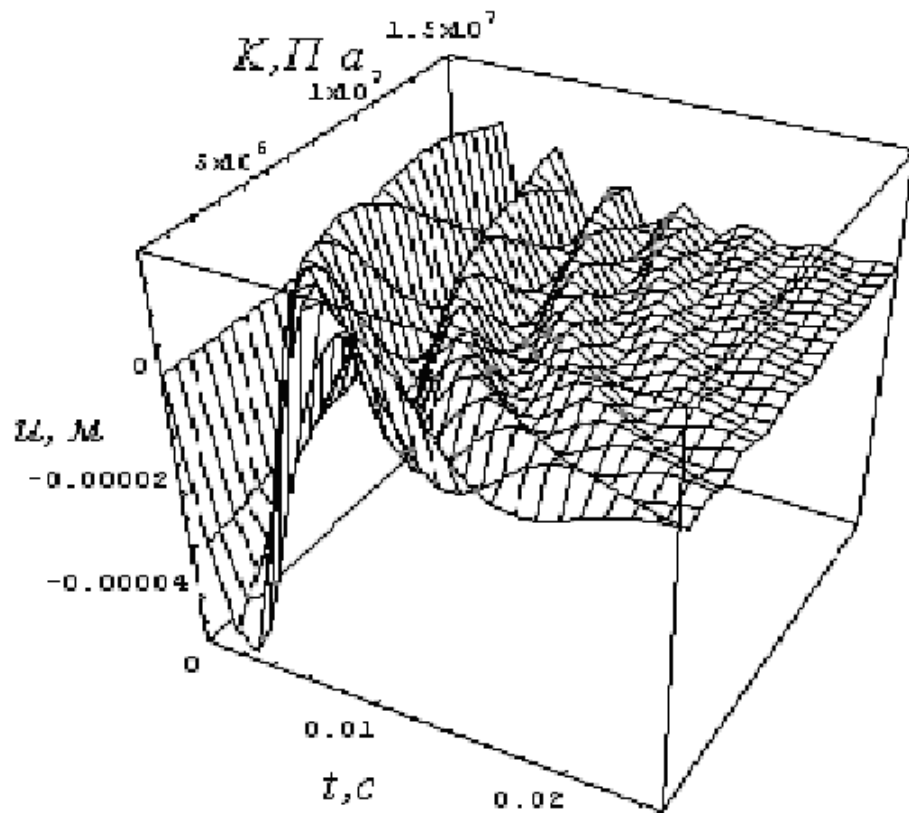


Рис. 3.6.б. Залежність характеру коливань від модуля пружності об'ємних деформацій K ґрунту

Ураховуючи те, що декремент затухання коливань дорівнює відношенню послідовних амплітуд, та враховуючи, що час у функції декременту затухання, який відповідає двом послідовним амплітудам,

дорівнює періоду коливань, можна записати систему рівнянь для визначення модуля пружності та коефіцієнта в'язкості ґрунту:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} = \exp \left[-\frac{2\pi L \mu}{\sqrt{L(-4Km + L\mu^2)}} \right] \\ \tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{L(-4Km + L\mu^2)}}{2m}} \end{array} \right. . \quad (3.2.10)$$

Рішення системи (3.2.10) відносно модуля пружності K та коефіцієнта в'язкості μ при об'ємних деформаціях має вигляд:

$$K = \frac{m \left(4\pi^2 - \ln \left[\frac{a_2}{a_1} \right]^2 \right)}{L\tau^2} ; \quad \mu = -\frac{2m \ln \left[\frac{a_2}{a_1} \right]}{L\tau} . \quad (3.2.11)$$

Значення послідовних амплітуд знаходяться з осцилограми коливань тягача на поверхні ґрунту (рис. 3.2).

Розроблений метод визначення модуля пружності та коефіцієнта в'язкості об'ємних деформацій є більш надійним та достовірним у порівнянні з відомим методом, оскільки він вільний від необхідності підготовки ґрунтових зразків та необхідності визначення коефіцієнта ϑ . Результати визначення властивостей ґрунту за обома методами свідчать про їх адекватність із рівнем значимості $\alpha = 0.1$.

3.2.3. Методика визначення розподілу тиску по поверхні робочого органу

Для визначення адекватності теоретичних досліджень передбачалось визначення розподілу тиску по поверхні робочих органів простих геометричних форм. Залежності розподілу тиску по поверхні робочого органу отримані в результаті аналізу, який передбачав: визначення початкових умов на поверхні робочого органу (розподіл швидкостей переміщень на поверхні контакту); визначення розподілу деформацій у ґрунтовому середовищі перед робочим органом; виведення залежностей розподілу напружень у ґрунтовому напівпросторі й на підставі цього рішення, – визначення функціональних залежностей розподілу тиску на поверхні контакту робочий орган-ґрунт. Таким чином, функція розподілу тиску по поверхні контакту робочий орган-ґрунт, яка включає в себе геометричні параметри деформатора та властивості ґрунту, є результуючою, і її адекватність може свідчити про адекватність проведених теоретичних досліджень в цілому.

Для визначення розподілу тиску по поверхні робочого органу були виготовлені прості деформатори трьох геометричних форм (рис. 3.7). Деформатори мали три вигляди функції поверхні:

– вертикальний – $\xi = 0.001 \zeta$;

– під кутом 45° – $\xi = 1 \zeta$;

– квадратичної форми – $\xi = 4 \zeta^2$.



Рис. 3.7. Деформатори для визначення розподілу тиску по поверхні робочого органу

Всі експериментальні дослідження розподілу тиску проводились при глибині ходу деформатора $h = 0.25$ м.

Оскільки датчики тиску були вмонтовані в поверхню робочого органу таким чином, що їх поверхня була перпендикулярна до нормалі поверхні робочого органу в місці встановлення датчика, то тиск, який реєструвався ними, був нормальним до поверхні контакту, а саме: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Для вимірювання тиску на поверхні деформаторів в кожному з них були вмонтовані датчики тиску з кроком по глибині 0,05 м. Загальний вигляд датчика представлений на рис. 3.8.

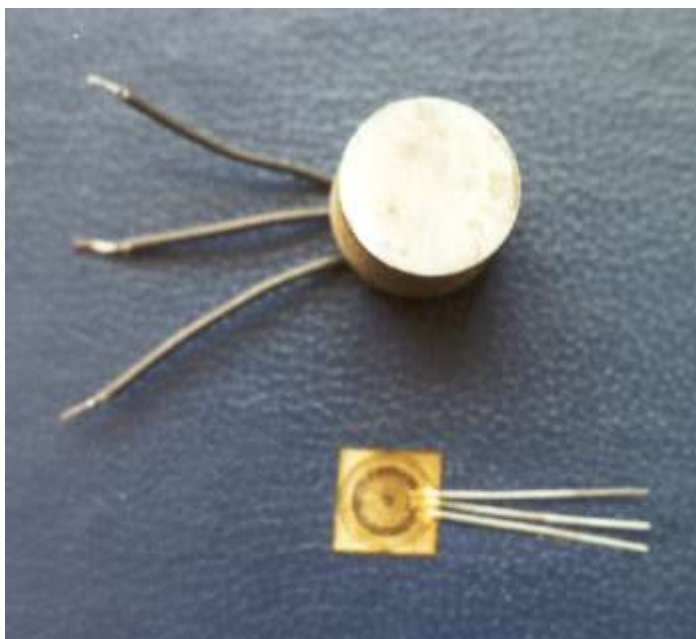


Рис. 3.8. Загальний вигляд тензодатчика та тензорезистора

Датчики являли собою циліндри з наклеєною на торцевій частині мембраною з тензорезистором. Тензорезистори, які наклеювались на мембрану, являли собою напівмостову схему. Тензодатчики включались у мостову схему. Сигнал підсилювався операційними підсилювачами й подавався на АЦП L-305 комп'ютера з програмним забезпеченням ПОС-16. Аналогово-цифровий перетворювач разом з ПОС-16 дозволяв реєструвати сигнал у вигляді осцилограм за шістнадцятьма гальванічно розв'язаними каналами та у вигляді цифрових масивів даних, які статистично оброблялися програмним забезпеченням, що входить до комплекту ПОС-16. Схема та загальний вигляд вимірювальної апаратури представлені на рис. 3.9. – 3.10.

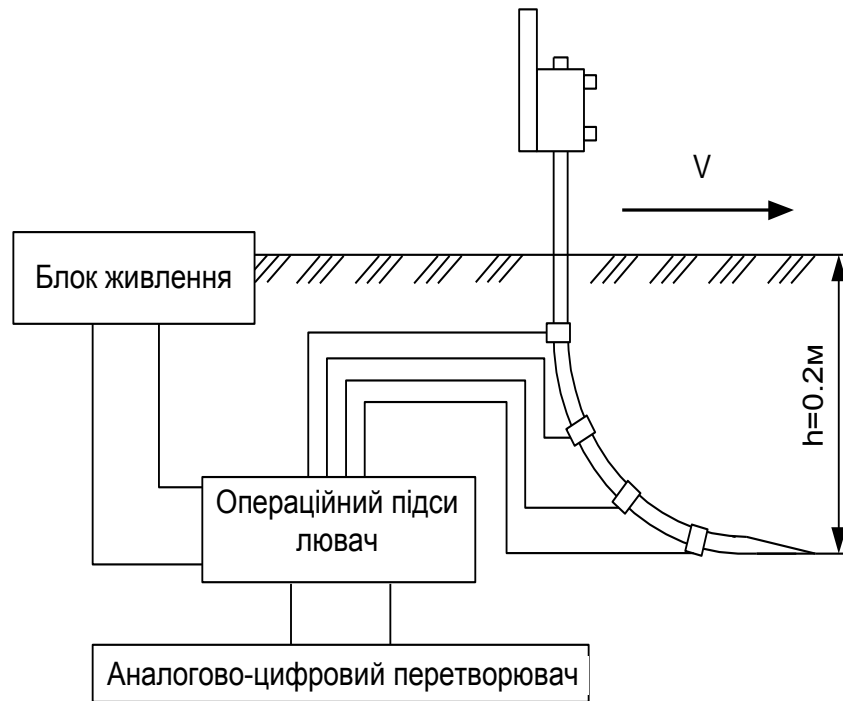


Рис. 3.9. Схема включення тензодатчиків деформатора



Рис. 3.10. Загальний вигляд вимірювальної апаратури

Тарування тензодатчиків проводилося за загальноприйнятою методикою перед кожним протягуванням деформатора у каналі.

Деформатори монтували на тензоланцюгову начіпну систему візка лабораторного ґрунтового каналу (рис. 3.11.а., 3.11.б., 3.13) Швидкість переміщення візка в ґрунтовому каналі становила 0.5, 1.0 та 1.5 м/с.

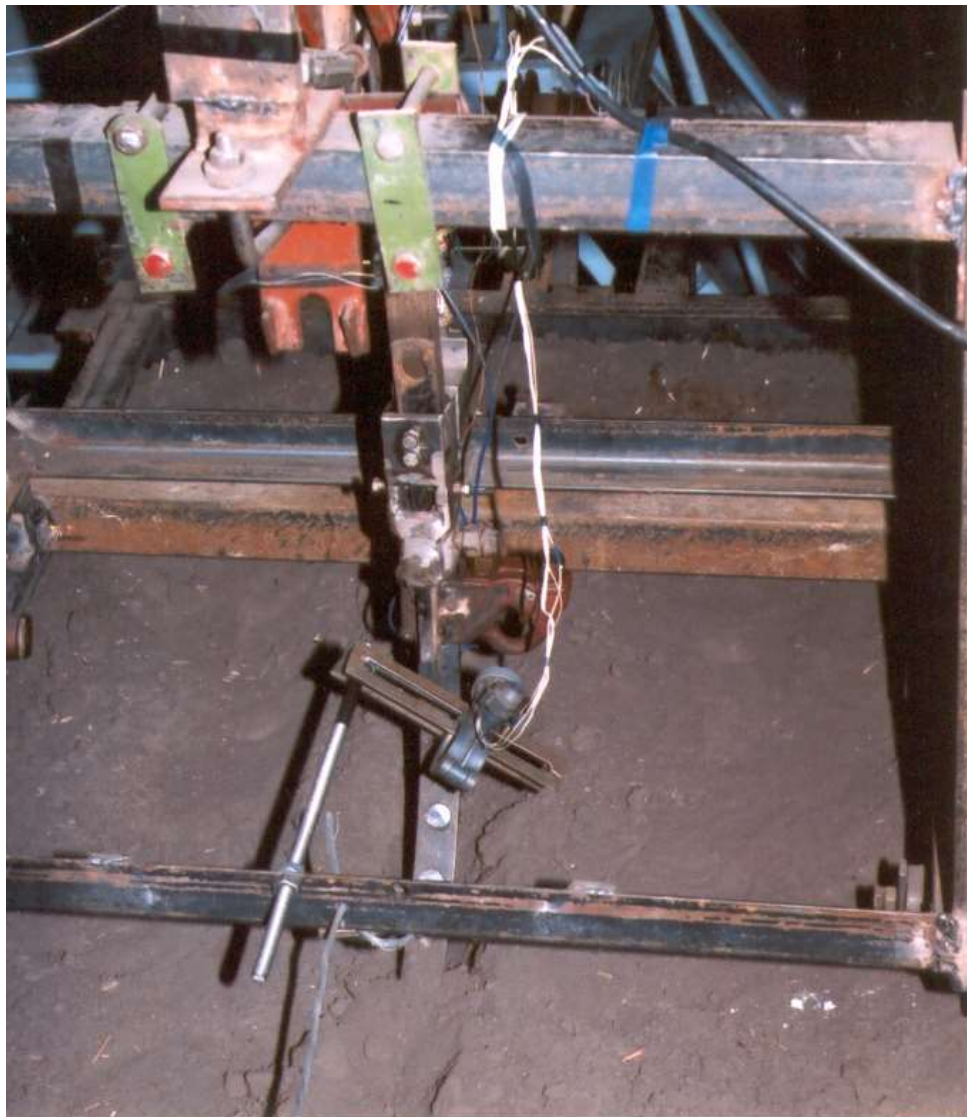


Рис. 3.11.а. Загальний вигляд тензоланцюгової начіпної системи візка

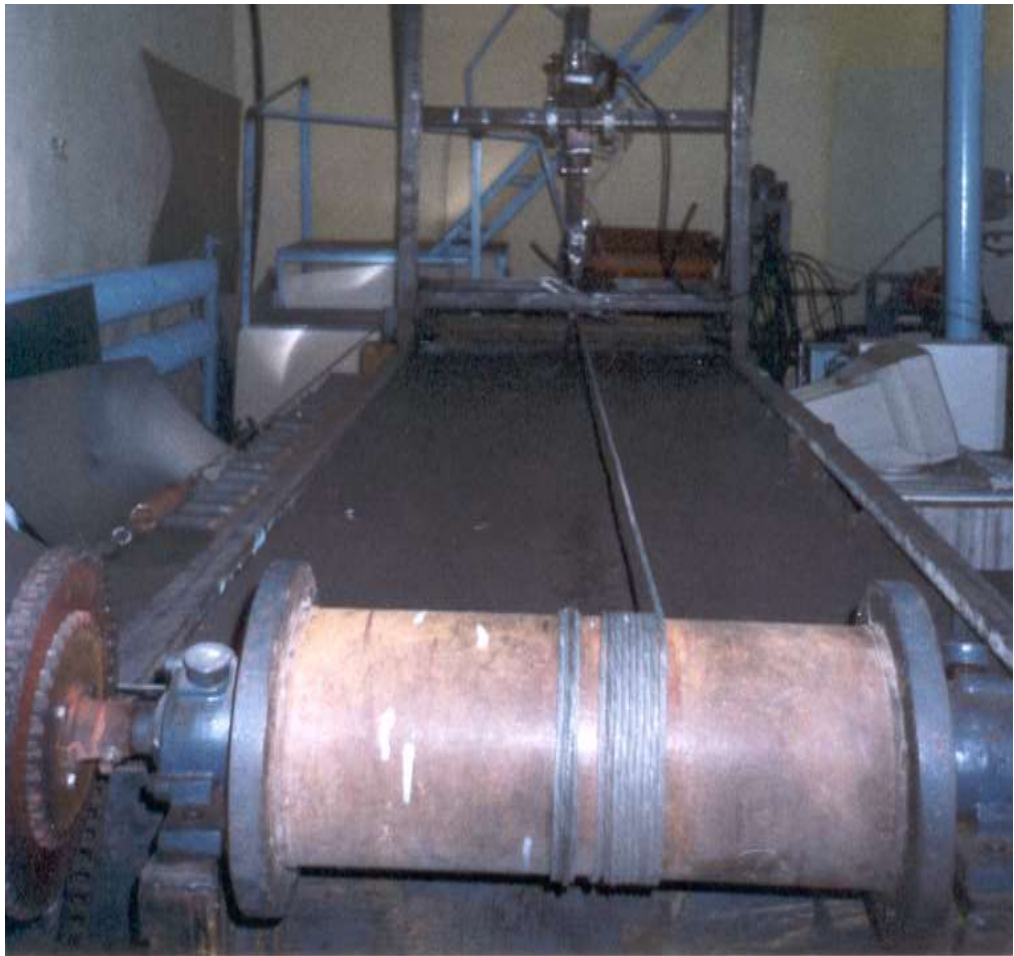


Рис. 3.11.б. Загальний вигляд приводу тензоланцюгової начіпної системи візка

Властивості ґрунту при проведенні експериментів визначалися за наведеною вище методикою. Швидкість переміщення візка в процесі експериментів реєструвалася дискретним відмітчиком шляху, змонтованим на візку, сигнали від якого подавалися до одного з каналів АЦП (рис. 3.12.).

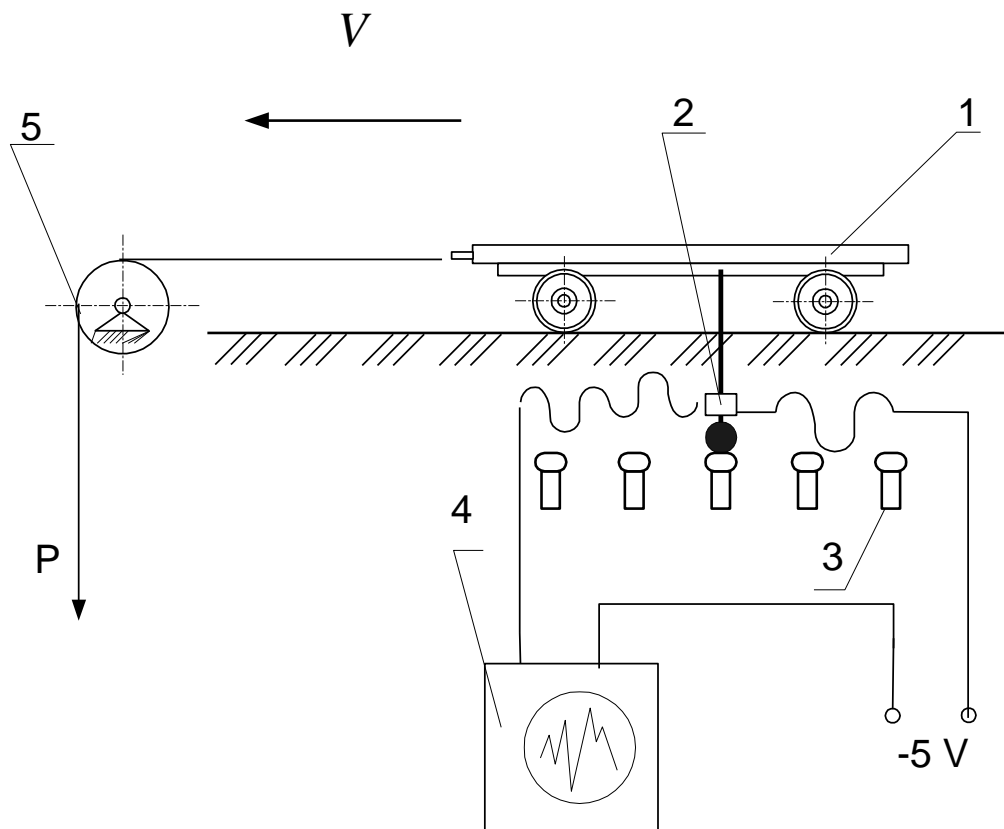


Рис. 3.12. Схема відмітчика шляху візка ґрунтового каналу
 1 – візок, 2 – кінцевий вимикач відмітчика шляху, 3 – виступи реєстратора
 шляху, 4 – АЦП, комп’ютер, 5 – тяговий барабан

При переміщенні візка 1 змонтований на ньому кінцевий вимикач 2 контактував з виступами 3, змонтованими на бічній стінці ґрунтового каналу з кроком 0.1 м. При цьому коло струму розривалося й сигнал реєструвався у вигляді сплеску на осцилографі АЦП комп’ютера 4.

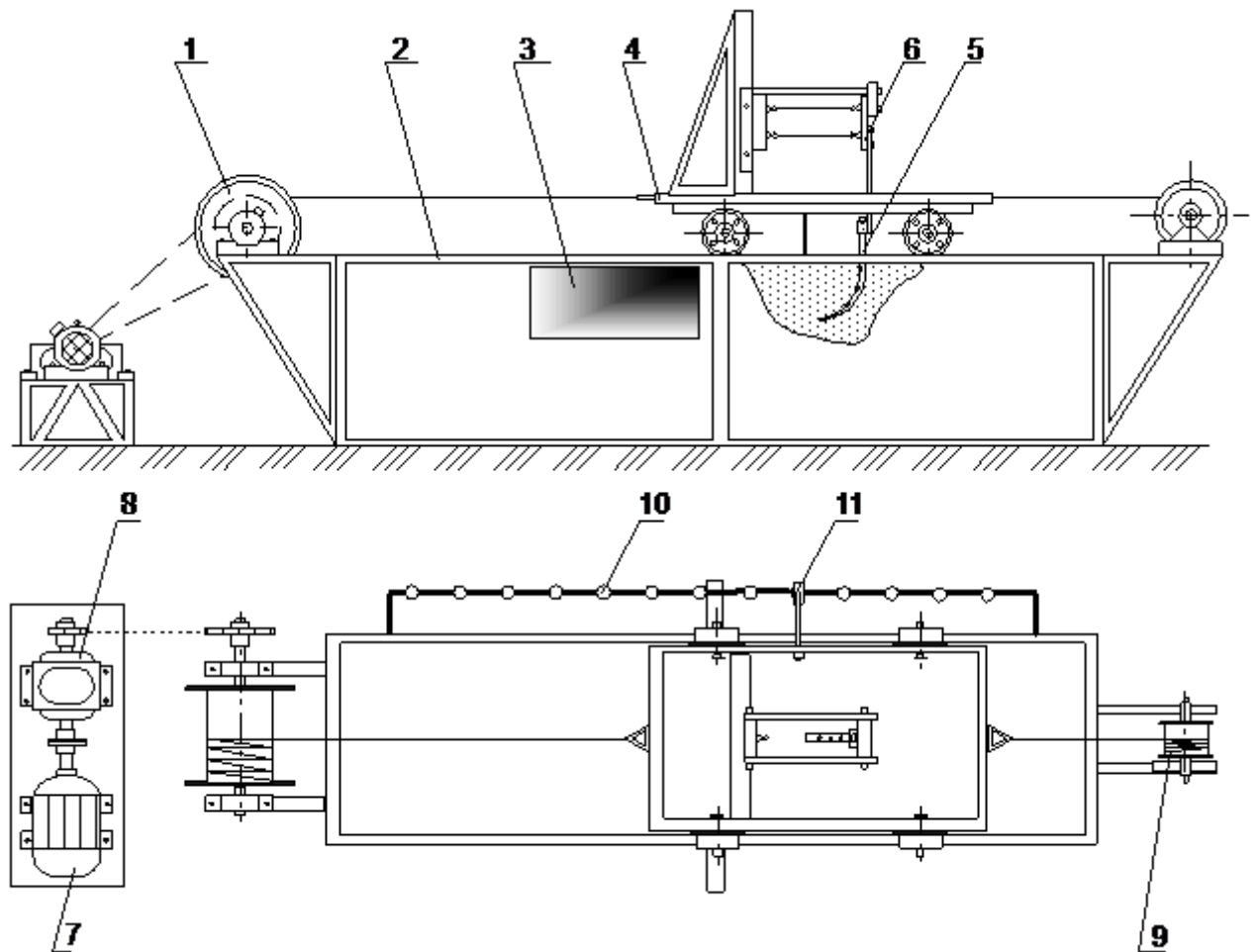


Рис. 3.13. Схема ґрунтового каналу:

1 – тяговий барабан, 2 – напрямні рейки, 3 – вікно реєстрації деформацій, 4 – візок, 5 – деформатор, 6 – тензометрична націпна система, 7, 8 –електродвигун із варіатором, 9 – барабан із фрикційним гальмом, 10 – виступи реєстратора шляху, 11 – кінцевий вимикач

Характерна осцилограма тиску на поверхні деформатора в усталеному режимі представлена на рис. 3.14.

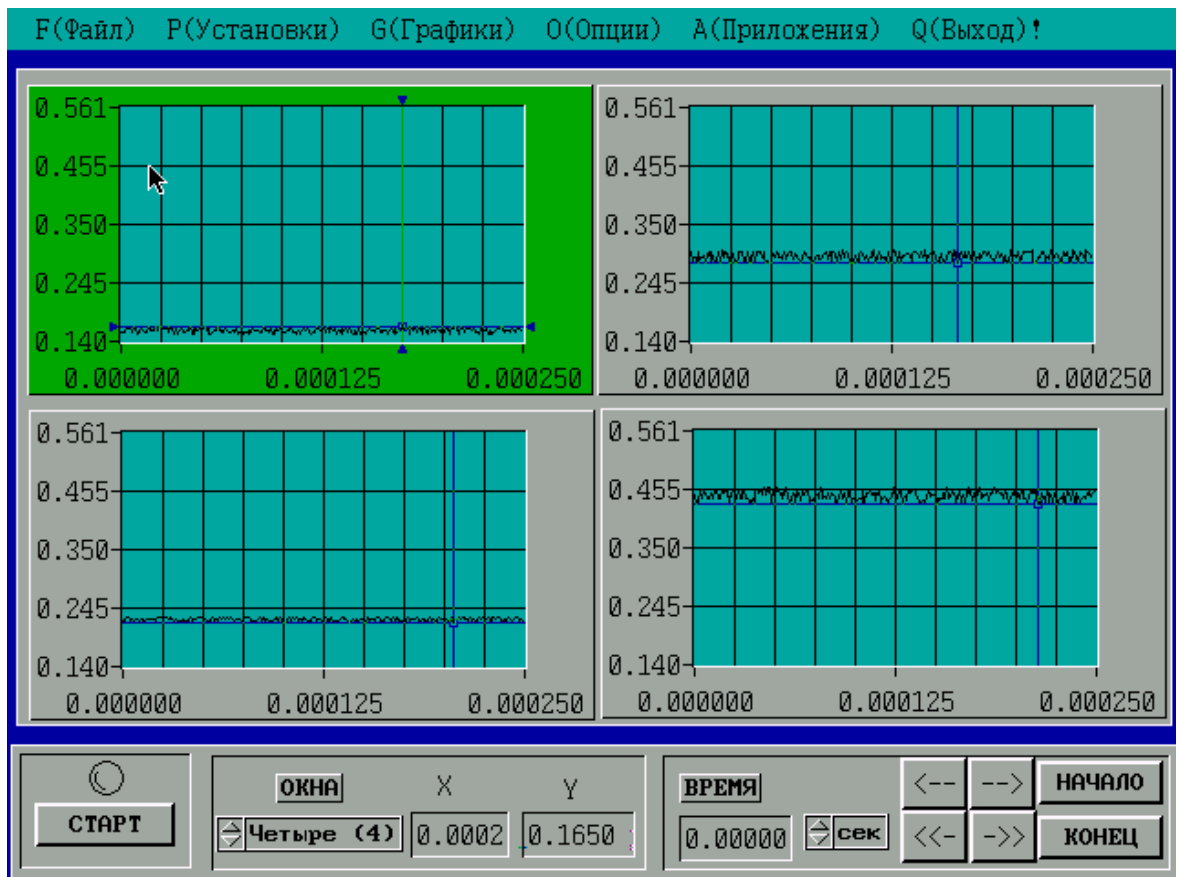


Рис. 3.14. Загальний вигляд осцилограм запису тиску на поверхні деформатора

3.3. Результати експериментальних досліджень

3.3.1. Модулі пружності ґрунту при об'ємних та зсувних деформаціях

Результати експериментальних досліджень оброблялися із застосуванням пакету статистичної обробки та аналізу даних “Statistica 6”.

В результаті аналізу результатів експериментальних досліджень зв'язку реологічних показників із їхніми фізико-механічними властивостями отримані регресійні рівняння зв'язку модулів пружності об'ємних K та

зсувних G деформацій з густиною ρ та масовою вологістю W для трьох типів ґрунтів.

Для легкосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

Модуль пружності об'ємних деформацій:

$$K1 = 1.63874 \times 10^7 + 255778. w^2 - 6049.47 w \rho + 29.0913 \rho^2 .$$

(0.0.1)

– Модуль пружності зсувних деформацій:

$$G1 = 7.04551 \times 10^6 + 84534. w^2 - 2448.83 w \rho + 14.4376 \rho^2 .$$

(0.0.2)

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.15.

Для середньосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

– Модуль пружності об'ємних деформацій:

$$K2 = 1.90434 \times 10^7 + 183156. w^2 - 5262.77 w \rho + 32.1254 \rho^2 .$$

(0.0.3)

– Модуль пружності зсувних деформацій:

$$G2 = 1.92966 \times 10^6 + 115457. w^2 - 3011.12 w \rho + 19.8995 \rho^2 .$$

(0.0.4)

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.16.

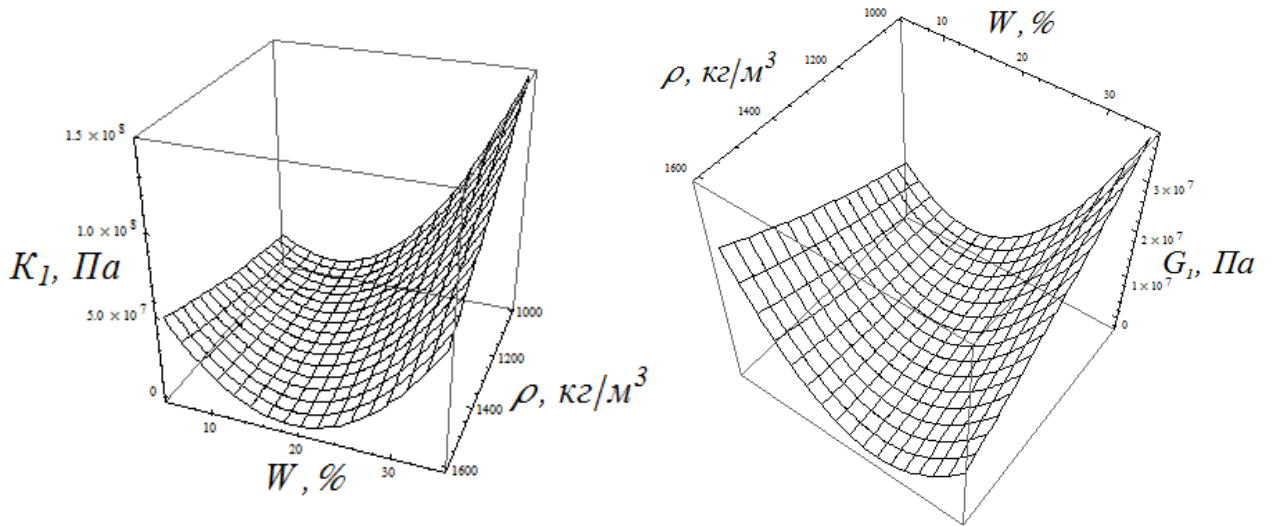


Рис. 3.15. Залежності модулів пружності при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості легкосуглинкового ґрунту

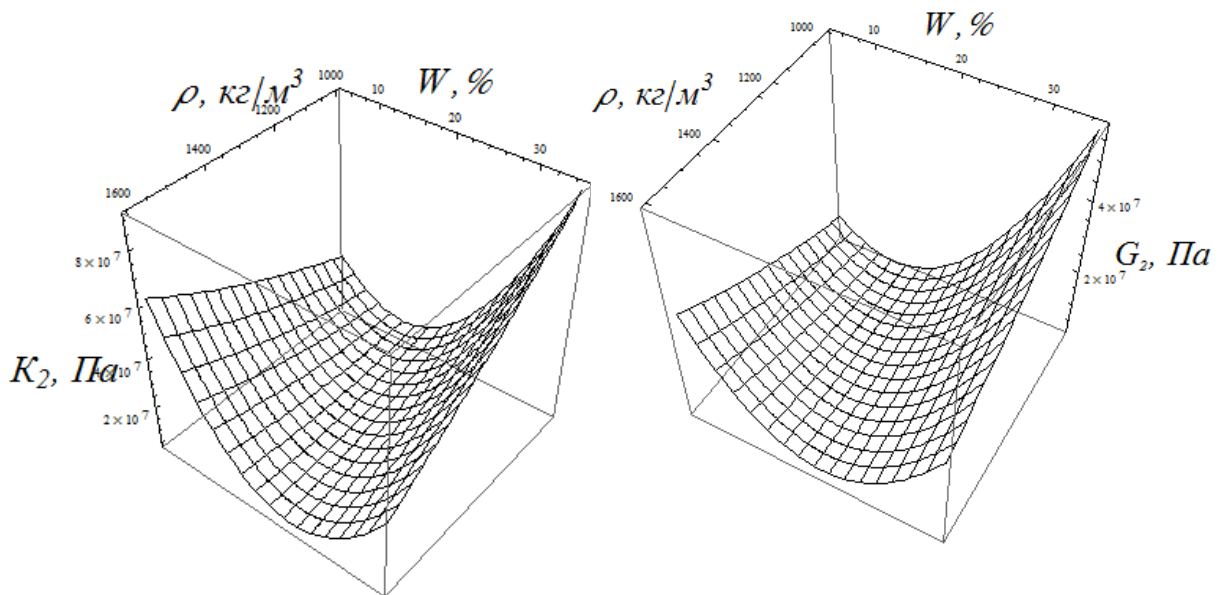


Рис. 3.16. Залежність модуля пружності при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості середньосуглинкового ґрунту

Для важкосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

– Модуль пружності об'ємних деформацій:

$$K_3 = 2.76275 \times 10^7 + 154104. w^2 - 5294.29 w \rho + 31.847 \rho^2 \quad (0.0.5)$$

– Модуль пружності зсувних деформацій:

$$G_3 = 9.08269 \times 10^6 + 31534.7 w^2 - 1796.41 w \rho + 14.5028 \rho^2 \quad (0.0.6)$$

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.17.

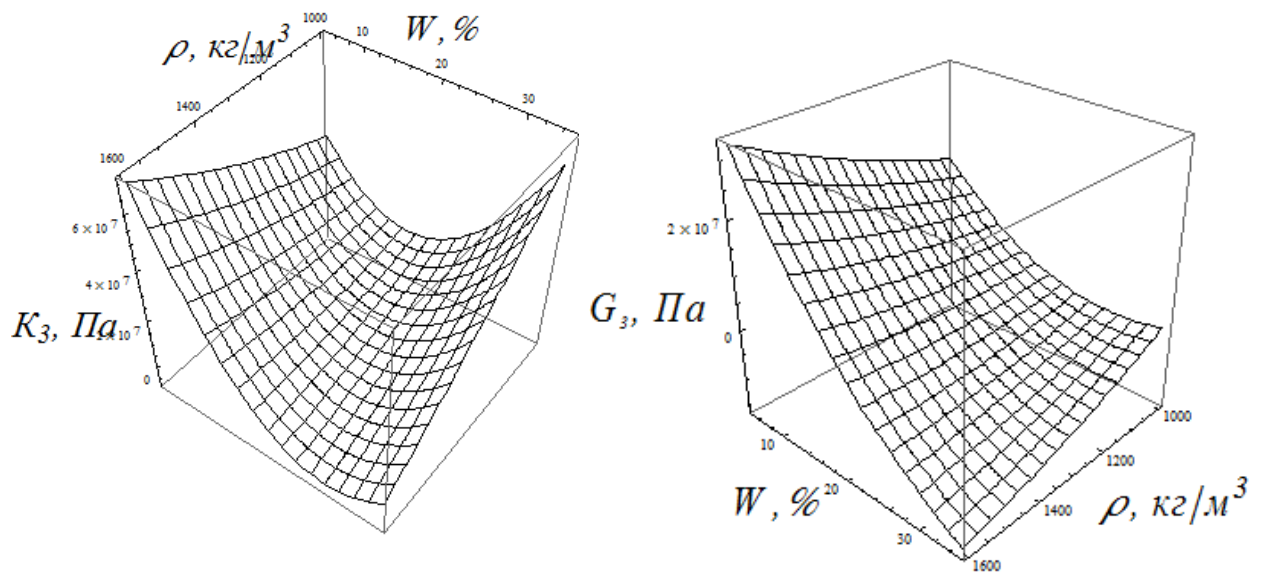
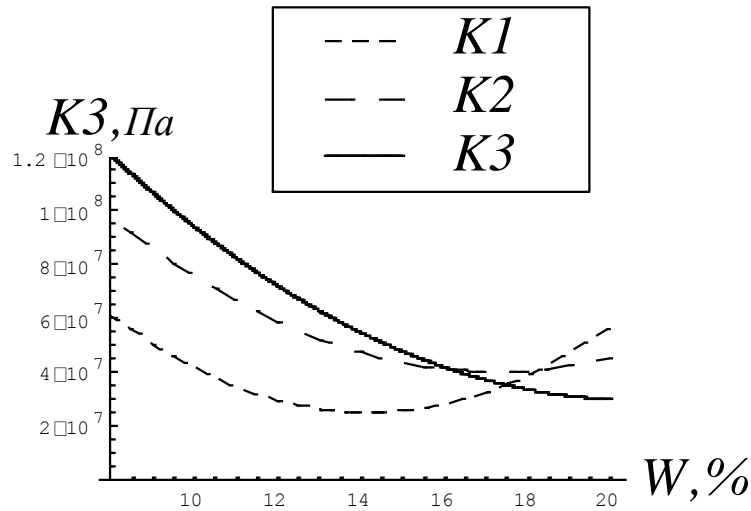
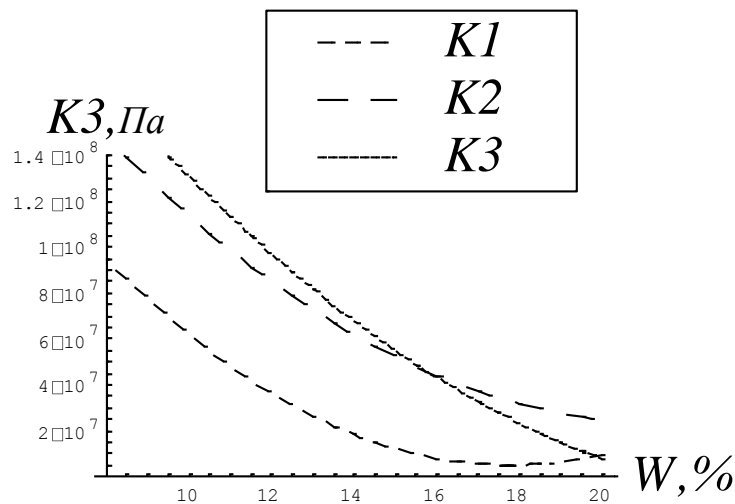


Рис. 3.17. Залежність модуля пружності при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості важкосуглинкового ґрунту

Аналіз залежностей зв'язку модулів пружності об'ємних K та зсувних G деформацій трьох типів ґрунтів (рис. 3.18. - 3.19.) дозволяє зробити висновки, що модулі пружності ґрунту зростають зі збільшенням густини ґрунту, при цьому при збільшенні вологості від 8 % до 15 % – зменшуються. Подальше зростання вологості ґрунту призводить до збільшення величини модулів пружності як об'ємних, так і зсувних деформацій.



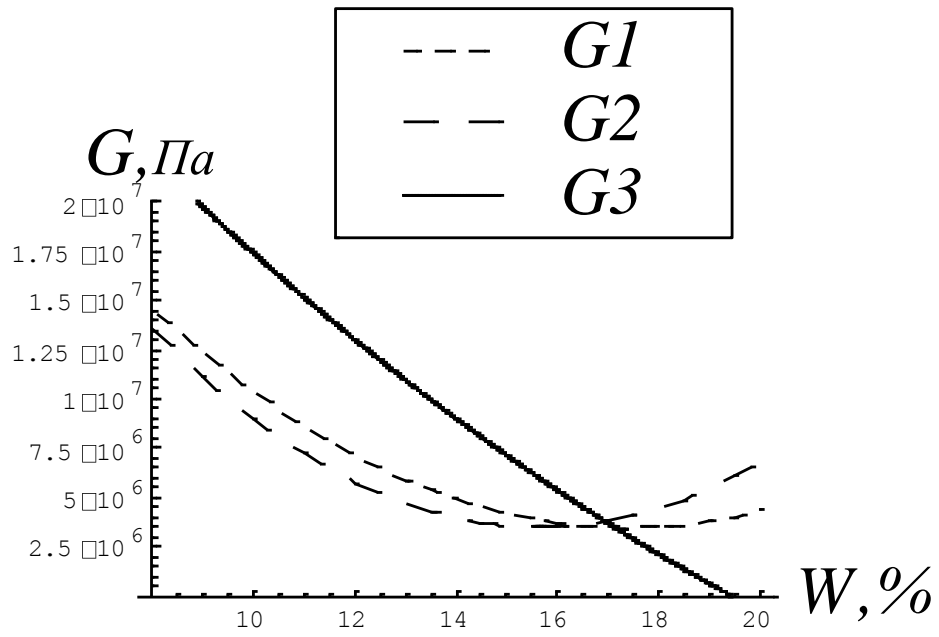
а



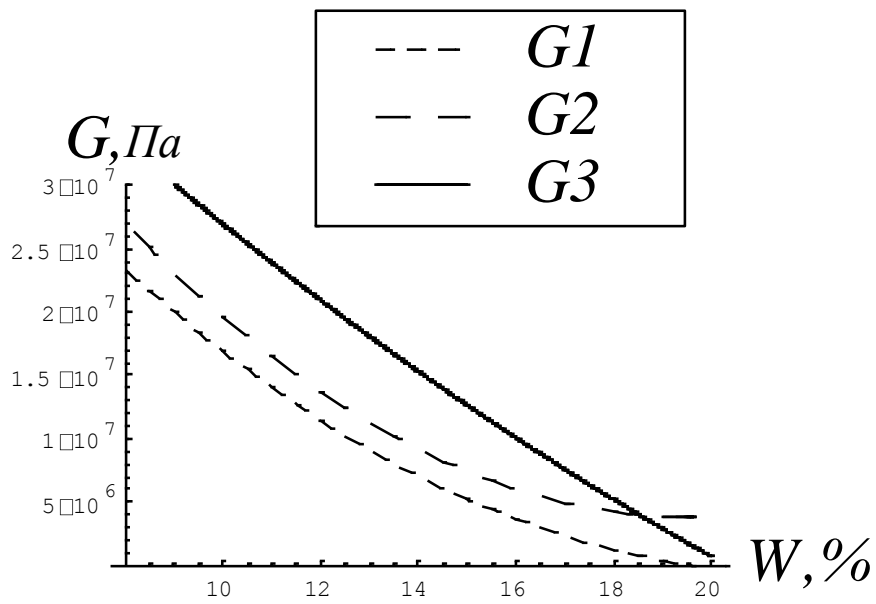
б

Рис. 3.18. Залежність модулів пружності при об'ємних деформаціях від вологості трьох типів ґрунтів, а – при $\rho = 1200 \text{ кг} / \text{м}^3$,

б – при $\rho = 1500 \text{ кг} / \text{м}^3$



а



б

Рис. 3.19. Залежність модулів пружності при зсувних деформаціях від вологості трьох типів ґрунтів, а – при $\rho = 1200 \text{ кг} / \text{м}^3$,
 б – при $\rho = 1500 \text{ кг} / \text{м}^3$

3.3.2. Модулі в'язкості при об'ємних та зсувних деформаціях

У результаті експериментальних досліджень зв'язку реологічних показників із їхніми фізико-механічними властивостями отримані регресійні рівняння зв'язку коефіцієнтів в'язкості при об'ємних μ та зсувних η деформаціях з густиною ρ та масовою вологістю w для трьох типів ґрунтів.

Для легкосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

– Модуль в'язкості об'ємних деформацій:

$$\mu_1 = 65.7\rho - 4.5\rho w - \frac{514862}{w} + 221382; \quad (0.0.7)$$

– Модуль в'язкості зсувних деформацій:

$$\eta_1 = 8.2\rho - 0.7\rho w - \frac{75225}{w} + 39115; \quad (0.0.8)$$

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.20.

Для середньосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

– Модуль в'язкості об'ємних деформацій:

$$\mu_2 = 49.3\rho - 42.64\rho w - \frac{445099}{w} + 178237; \quad (0.0.9)$$

– Модуль в'язкості зсувних деформацій:

$$\eta_2 = 17.3\rho - 1.4\rho w - \frac{226990}{w} + 105359; \quad (0.0.10)$$

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.21.

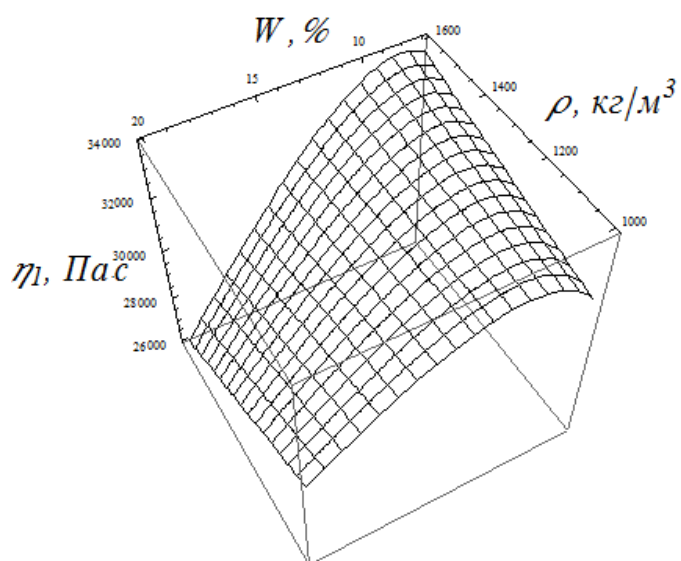
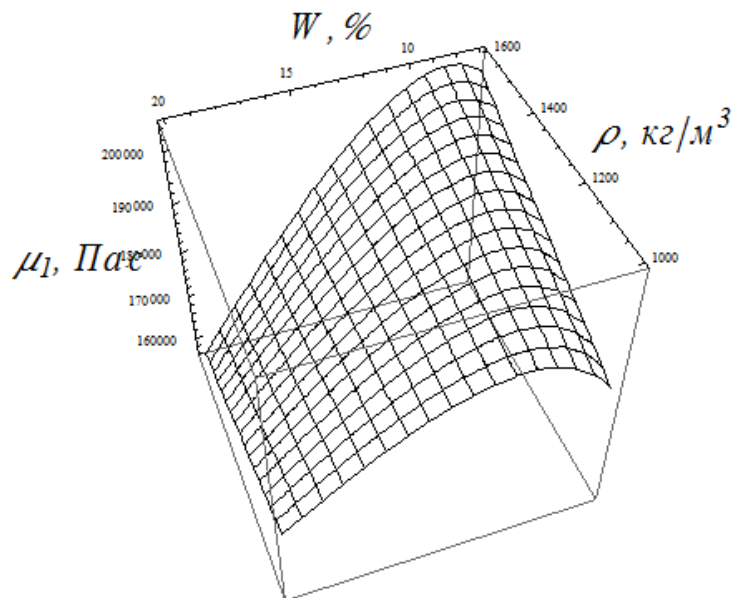


Рис. 3.20. Залежності модулів в'язкості при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості легкосуглинкового ґрунту

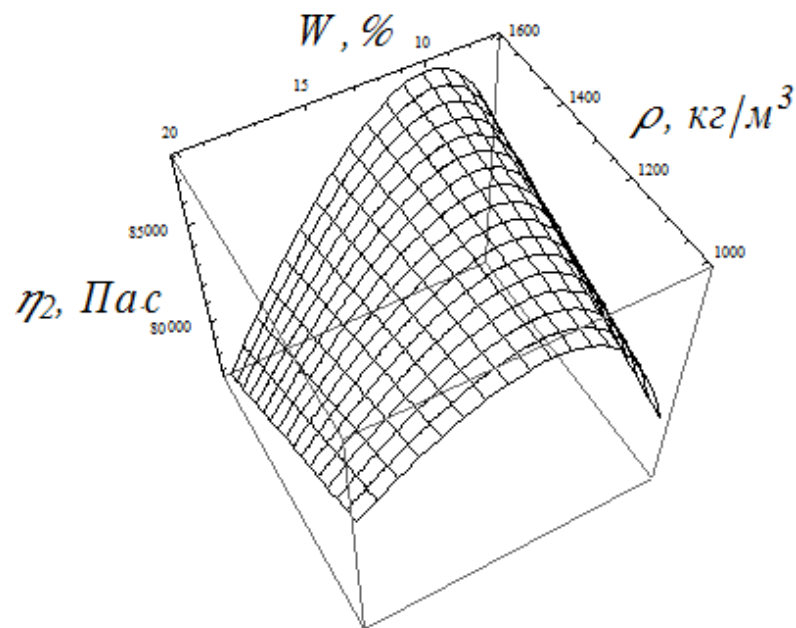
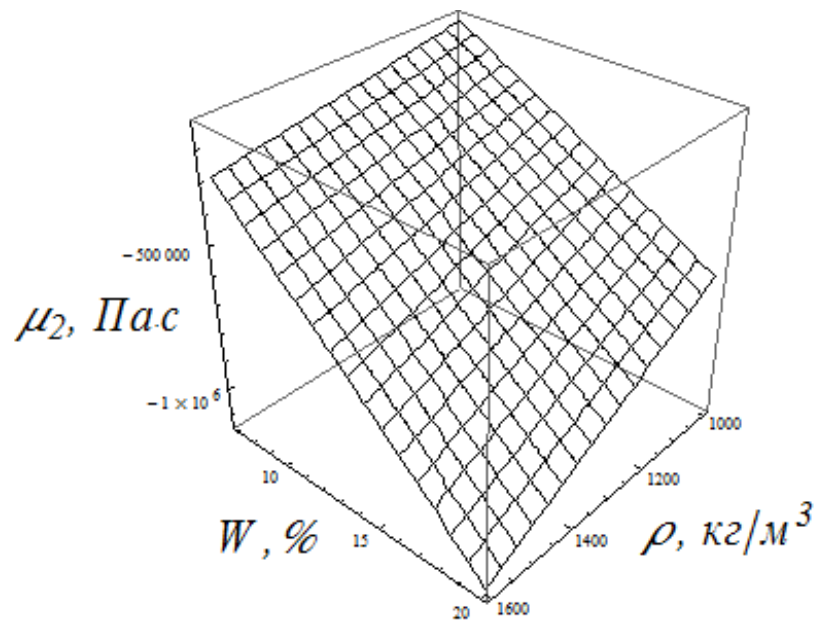


Рис. 3.21. Залежності модулів в'язкості при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості середньосуглинкового ґрунту

Для важкосуглинкового ґрунту рівняння регресії мають вигляд:

– Модуль в'язкості об'ємних деформацій:

$$\mu_3 = 28.2\rho - 1.95\rho w - \frac{34870}{w} + 154590; \quad .(0.0.11)$$

– Модуль в'язкості зсувних деформацій:

$$\eta_3 = 4.98\rho - 0.6\rho w - \frac{106820}{w} + 58472; \quad .(0.0.12)$$

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.22.

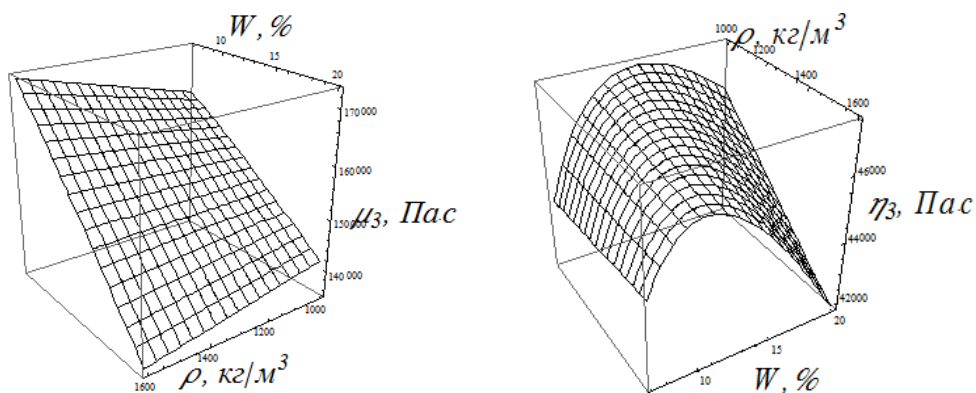


Рис. 3.22. Залежності модулів в'язкості при об'ємних та зсувних деформаціях від густини та вологості важкосуглинкового ґрунту

На основі отриманих залежностей зв'язку реологічних властивостей трьох типів ґрунтів із їхнім станом можна зробити висновок, що на величину модулів в'язкості найбільш суттєво впливає вологість ґрунту. Зростання густини ґрунту за менших значень вологості (10-12 %) веде до збільшення

модулів в'язкості на легких типах ґрунтів (легкосуглинковий та середньосуглинковий) і не впливає на їхню зміну для важких типів ґрунтів. За великих значень вологості зростання густини ґрунту призводить до зменшення модулів в'язкості.

3.3.3. Граничні напруження зсуву ґрунту

Аналіз результатів експериментальних досліджень дозволив встановити регресійні залежності зв'язку граничних напружень зсуву τ_s з густиною ρ та масовою вологістю w для трьох типів ґрунтів.

Для легкосуглинкового ґрунту:

$$\tau_s = 39567.4 - 2.6 w^2 - 2.4 \rho w - 0.00002 \rho^3 \quad (0.0.13)$$

Для середньосуглинкового ґрунту:

$$\tau_s = 132495.3 - 843.5 w^2 - 23.1 \rho w - 0.00006 \rho^3 \quad (0.0.14)$$

Для важкосуглинкового ґрунту:

$$\tau_s = 119118.1 - 1188.2 w^2 - 31.7 \rho w - 0.0001 \rho^3 \quad (0.0.15)$$

Графічно ці залежності представлені на рис. 3.23., 3.24.б.

Величини граничних напружень зсуву зменшуються зі збільшенням вологості ґрунту. Причому, це зменшення суттєвіше проявляється при більшій густині ґрунту.

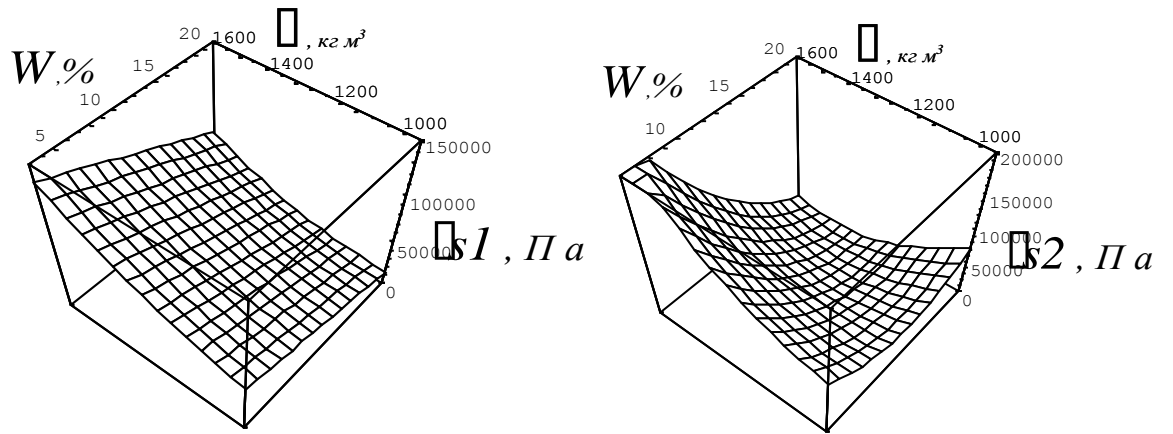


Рис. 3.23. Залежності граничних напружень зсуву від густини та вологості для легкосуглинкового та середньосуглинкового ґрунтів

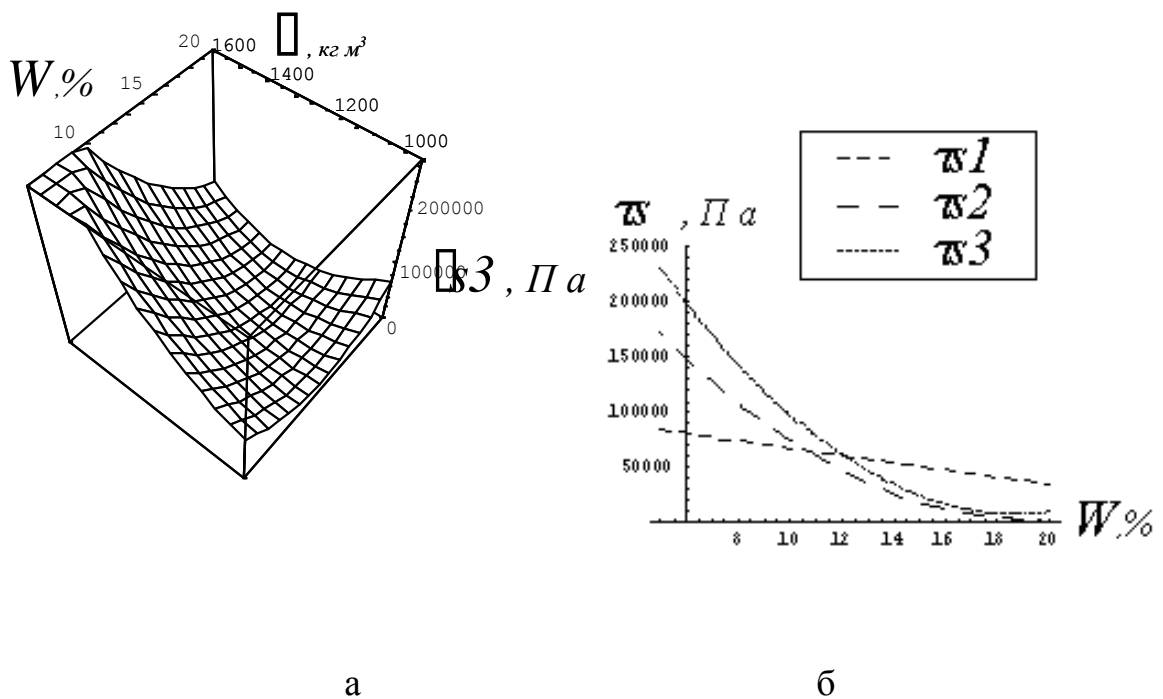


Рис. 3.24. Залежності: а – граничних напружень зсуву від густини та вологості важкосуглинкового ґрунту, б – граничних напружень зсуву від вологості для трьох типів ґрунтів

Отримані регресійні залежності механічних властивостей трьох типів ґрунтів із їхніми фізичними властивостями (рис. 3.26.б.) дозволяють суттєво розширити можливості застосування функціональних залежностей зв'язку параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів зі змінами технологічних властивостей ґрунту та визначення енергомісткості цих змін.

3.3.4. Результати досліджень розподілу тиску по поверхні деформатора

В результаті проведених експериментальних досліджень у ґрунтовому каналі був визначений розподіл тиску по поверхні трьох типів деформаторів. Результати експериментального визначення розподілу тиску порівнювались із обчисленими за теоретичними залежностями значеннями при тих самих властивостях ґрунту, які відповідали умовам проведення експериментів.

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}, \quad R_X = (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n),$$

$$R_Y = (\sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l), \quad R_Z = (\sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m)$$

де l, m, n – спрямовуючі косинуси для відповідної форми поверхні деформатора;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненти напружень у ґрунтовому середовищі при дії на нього деформатора відповідної форми.

Значення $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ обчислювались при $x - \xi = 0, y - \eta = 0, z - \zeta = 0$, що відповідало поверхні контакту деформатор-ґрунт.

Експериментальні дослідження проводилися при випадкових значеннях показників реологічних властивостей, оскільки ці показники не можна відтворити на одному рівні.

Неможливість зафіксувати та відтворити однакові значення показників властивостей ґрунту була причиною того, що при проведенні експериментальних досліджень не використовувались методи математичного планування експериментів. При такому плануванні до факторів ставляться певні вимоги, а саме: фіксованість, керованість та відтворюваність.

Отримані в результаті проведення експериментальних досліджень значення розподілу тиску по поверхнях деформаторів оброблялись із застосуванням пакету “Statistica -6”. Для деформатора $\xi = 4 \zeta^2$ Розподіл нормального тиску R по поверхні деформатора представлений на рис. 3.25.

При цьому теоретичні залежності компонентів тисків на поверхні деформатора $\xi = 4 \zeta^2$ представлені на рис. 3.26 - 3.27.

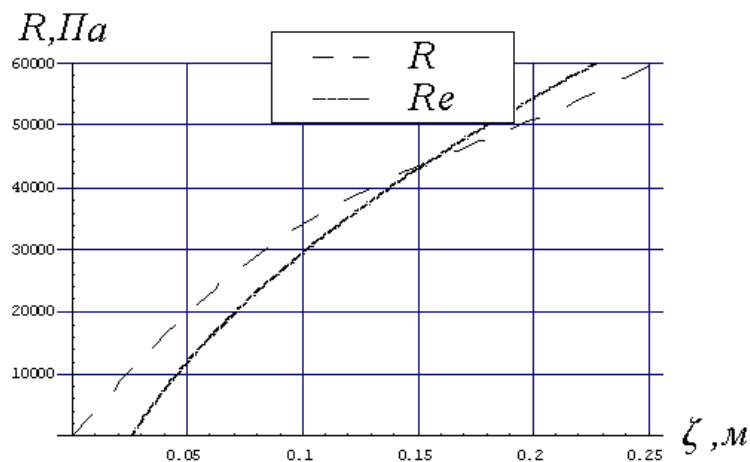


Рис. 3.25. Залежності розподілу нормального тиску (R – теоретичного Re – за результатами експерименту) по поверхні деформатора $\xi = 4 \zeta^2$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

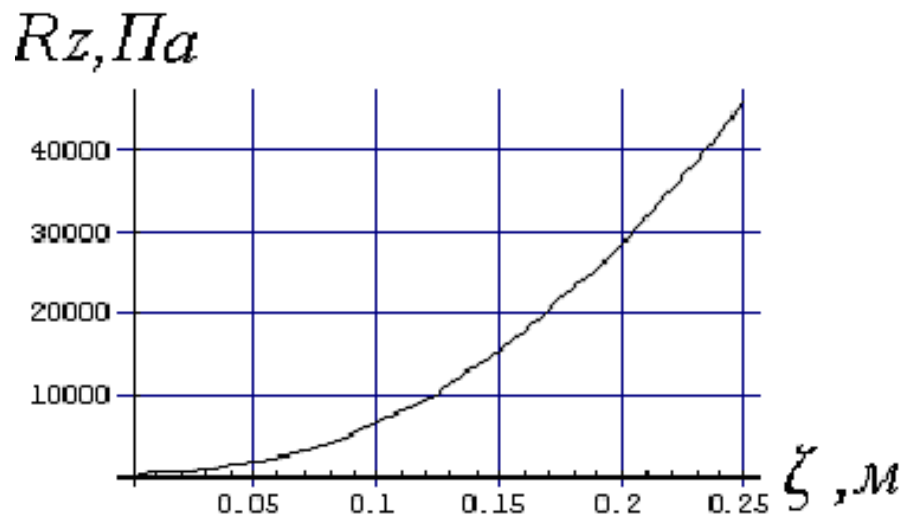


Рис. 3.26. Залежність розподілу вертикальної R_z складової тиску (теоретична) по поверхні деформатора $\xi = 4 \zeta^2$ від глибини при $U_m = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

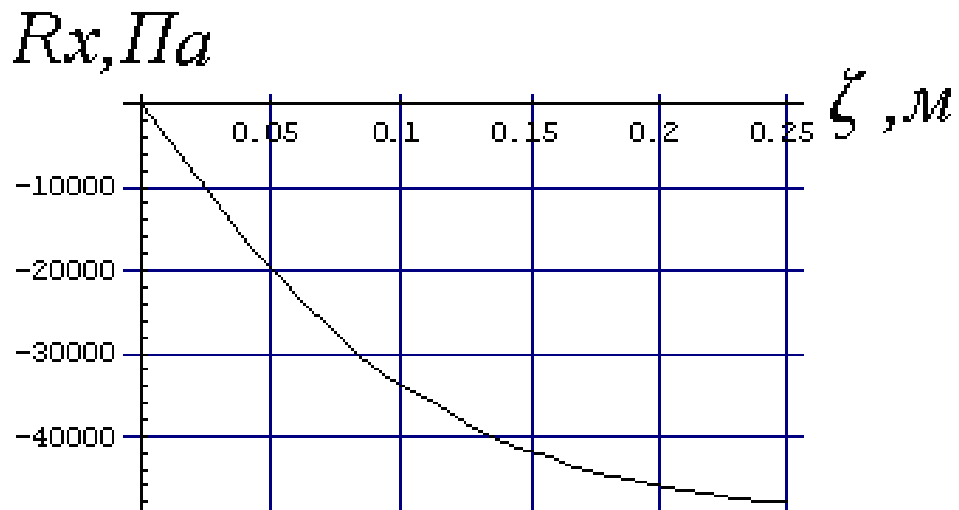


Рис. 3.27. Залежність розподілу горизонтальної R_x складової тиску (теоретична) по поверхні деформатора $\xi = 4 \zeta^2$ від глибини при $U_m = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$,

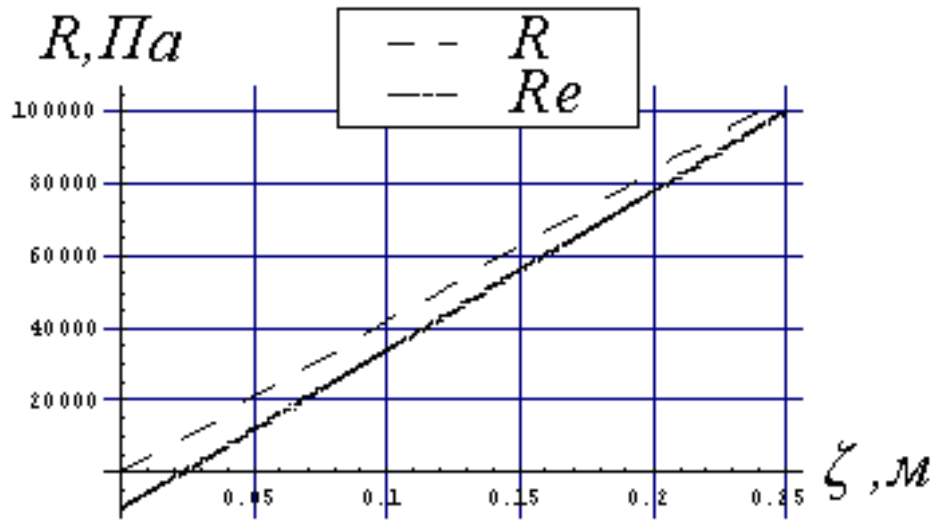


Рис. 3.28. Залежності розподілу нормального тиску (R – теоретичного Re – за результатами експерименту) по поверхні вертикального деформатора $\xi = 0.001 \zeta$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

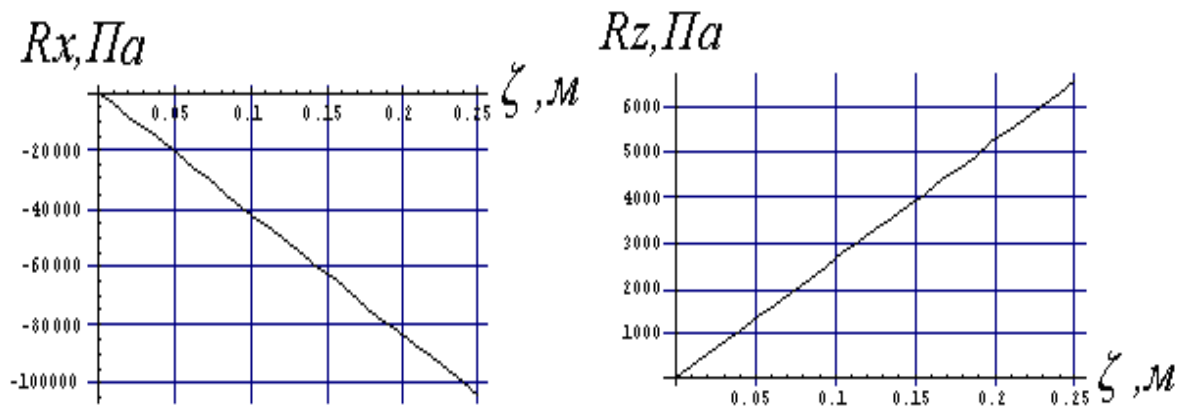


Рис. 3.29. Залежності розподілу вертикальної R_z та горизонтальної R_x складової тиску (теоретичні) по поверхні вертикального деформатора $\xi = 0.001 \zeta$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

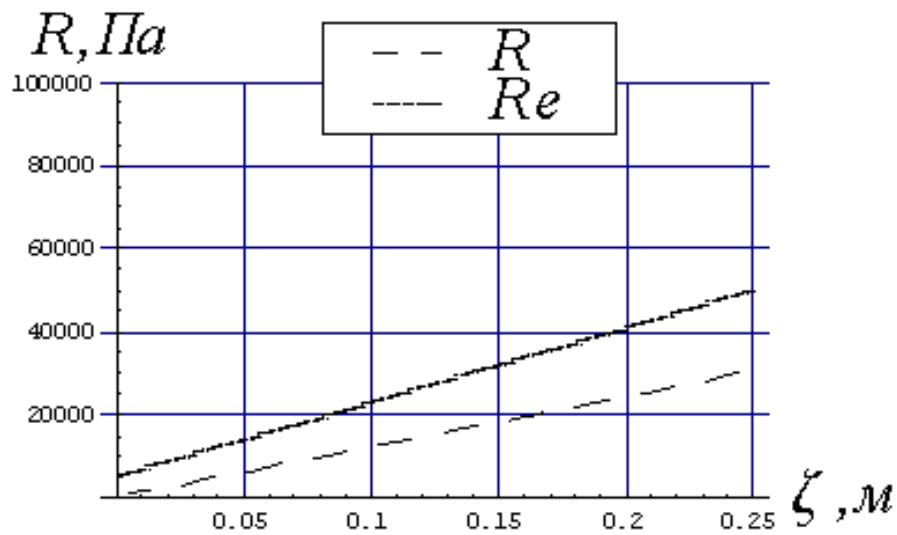


Рис. 3.30. Залежності розподілу нормального тиску (R – теоретичного Re – за результатами експерименту) по поверхні прямолінійного деформатора $\xi = 1 \zeta$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

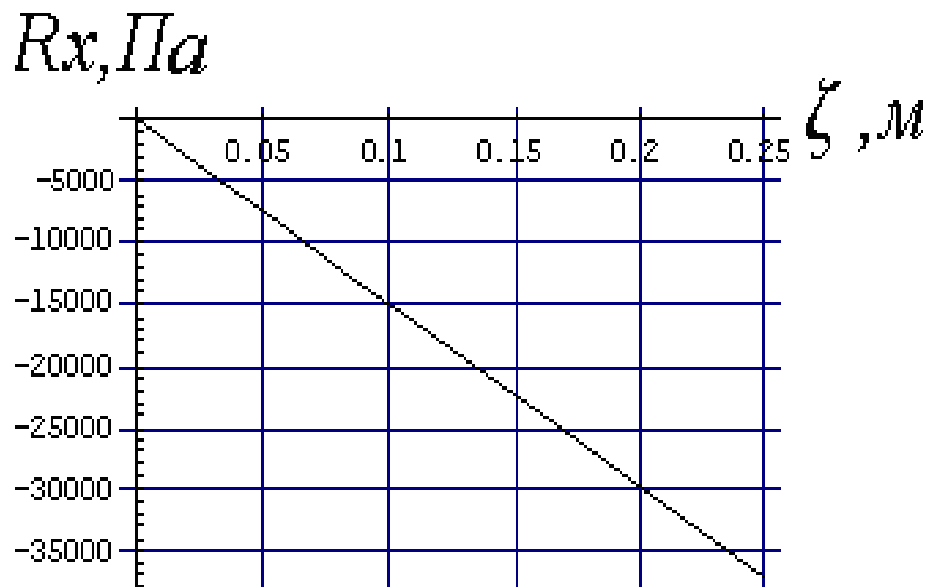


Рис. 3.31. Залежність розподілу горизонтальної R_x складової тиску (теоретична) по поверхні прямолінійного деформатора $\xi = 1 \zeta$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па·с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

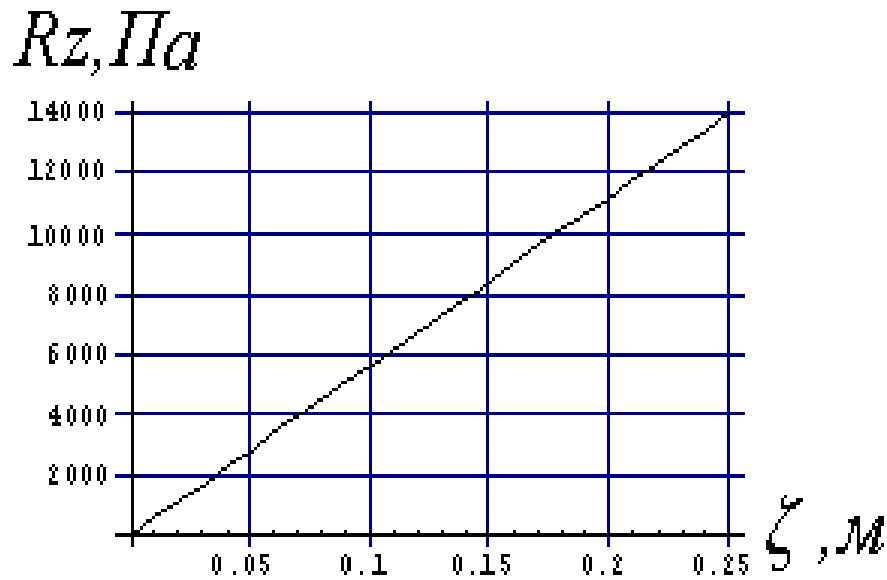


Рис. 3.32. Залежність розподілу вертикальної R_z складової тиску (теоретична) по поверхні прямолінійного деформатора $\xi = 1 \zeta$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

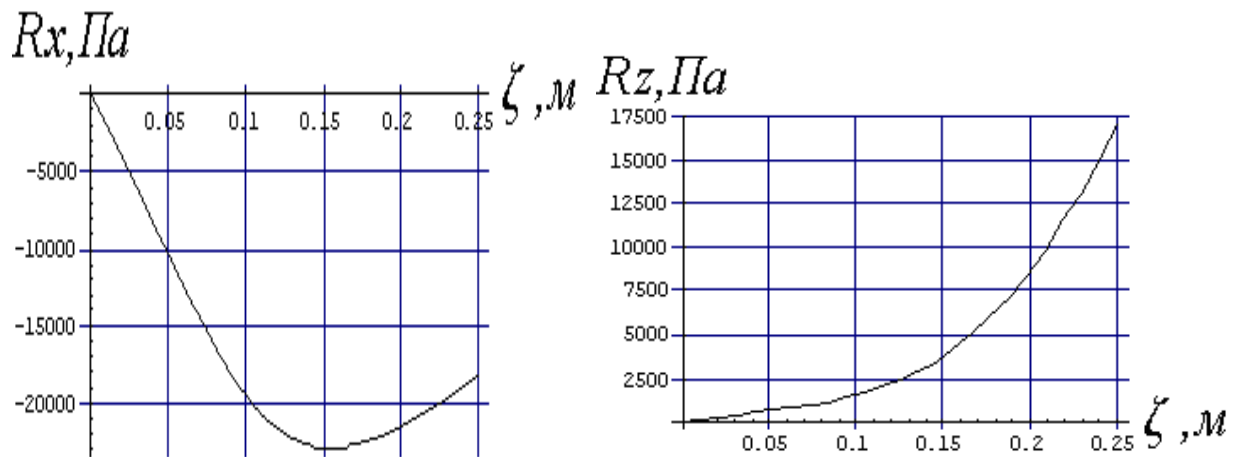


Рис. 3.33. Залежності розподілу вертикальної R_z та горизонтальної R_x складових тиску (теоретичні) по поверхні криволінійного деформатора $\xi = 15 \zeta^3$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

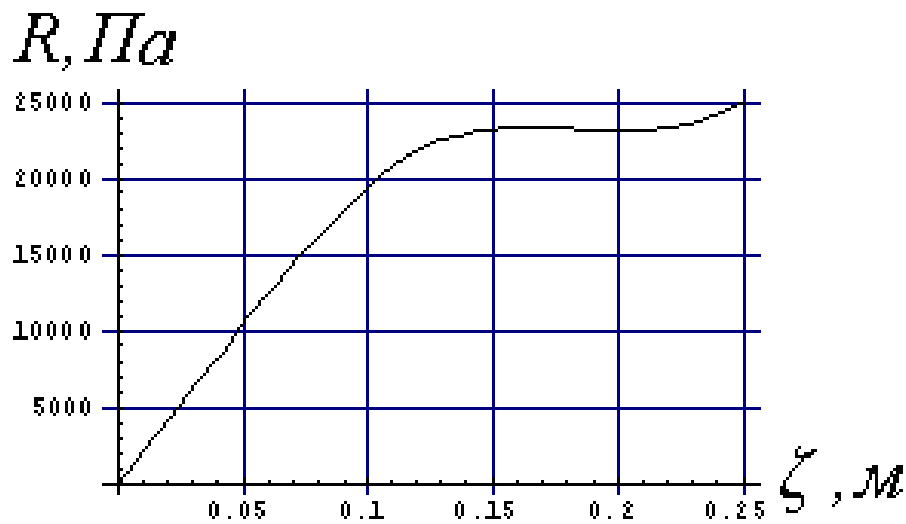


Рис. 3.34. Залежність розподілу нормальної R складової тиску (теоретична) по поверхні криволінійного деформатора $\xi = 15 \zeta^3$ від глибини при $Um = 1 \text{ м/с}$, $\mu = 8700 \text{ Па с}$, $\tau_s = 78000 \text{ Па}$, $G = 20000000 \text{ Па}$

Результати експериментальних досліджень розподілу тиску по поверхні деформаторів простих геометричних форм (рис. 3.28-3.34) дозволяє зробити висновок про адекватність проведених теоретичних досліджень. При цьому рівень значимості експериментальних досліджень становив $\alpha = 0.25$. Досить низький рівень значимості може бути пояснений великою статистичною неоднорідністю ґрунтового середовища.

3.3.5. Розподіл деформацій у ґрунті під дією простих деформаторів

Для аналізу адекватності вигляду розподілу деформацій можна представити характер деформацій для випадків, експериментальні дослідження для яких були проведені Wang J. і Gee-Clough D. [215,216]. Експериментальні дослідження проводились для важкосуглинкового ґрунту за швидкості переміщення деформатора 0.5 м/с. При проведенні експериментальних досліджень використовувались прямолінійні деформатори з кутами входження в ґрунт: 0° , 25° , 50° , 120° . Для визначення адекватності характеру розподілу деформацій, отриманих теоретичним

шляхом за залежностями (розд. 2.2), були виконані обчислення для деформаторів, форма та розміри яких відповідали умовам проведення експериментальних досліджень.

Характер розподілу деформацій за результатами експериментів та отриманих теоретично, представлений на рис. 3.35 – 3.38.

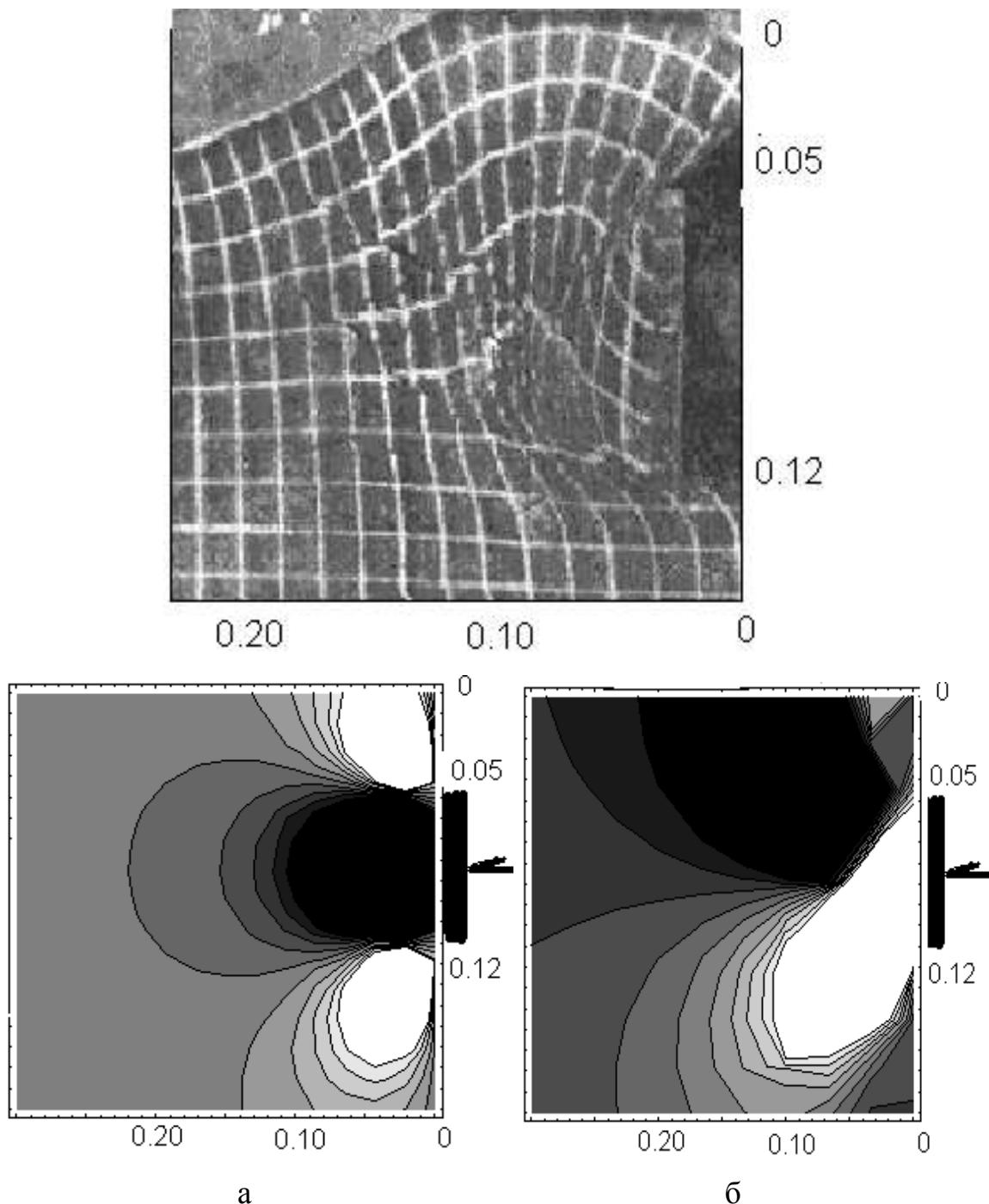


Рис. 3.35. Ізолінії розподілу деформацій (а – об’ємних, б – зсувних) ґрунту при куті входження деформатора 0° , що відповідає $\xi = 0$

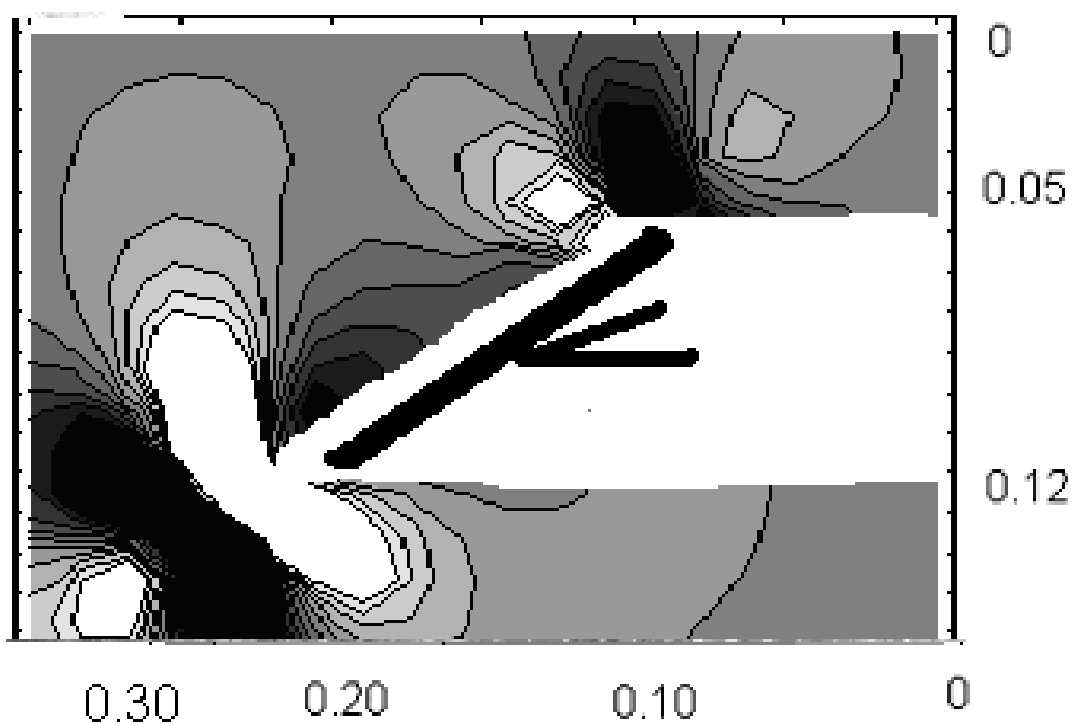
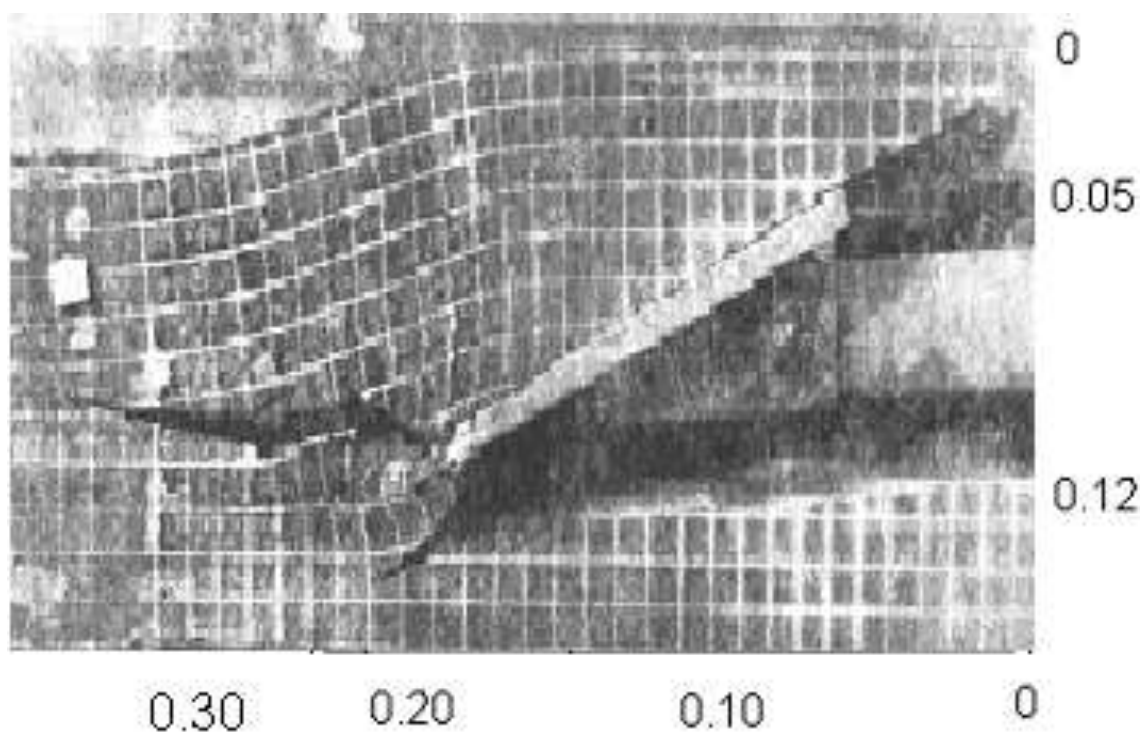


Рис. 3.36. Ізолінії розподілу об'ємних деформацій ґрунту при куті входження деформатора 25° , що відповідає $\xi = 2.3 \zeta$

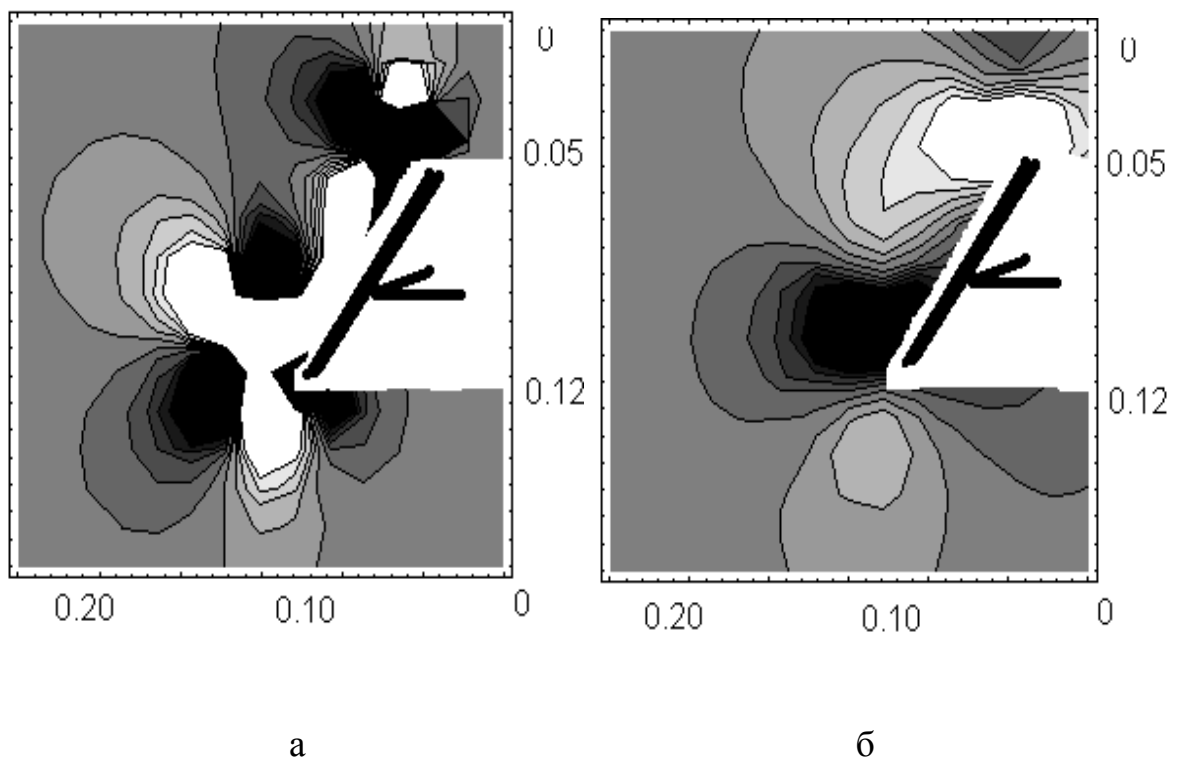
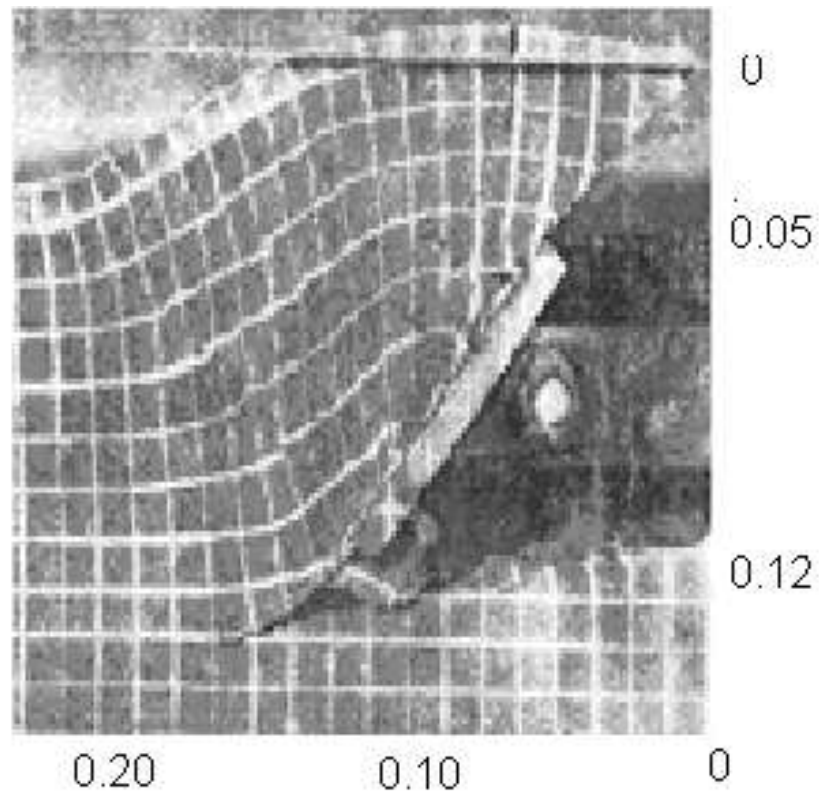


Рис. 3.37. Ізолінії розподілу деформацій (а – об'ємних, б – зсувних) ґрунту при куті входження деформатора 50° , що відповідає $\xi = 1.2 \zeta$

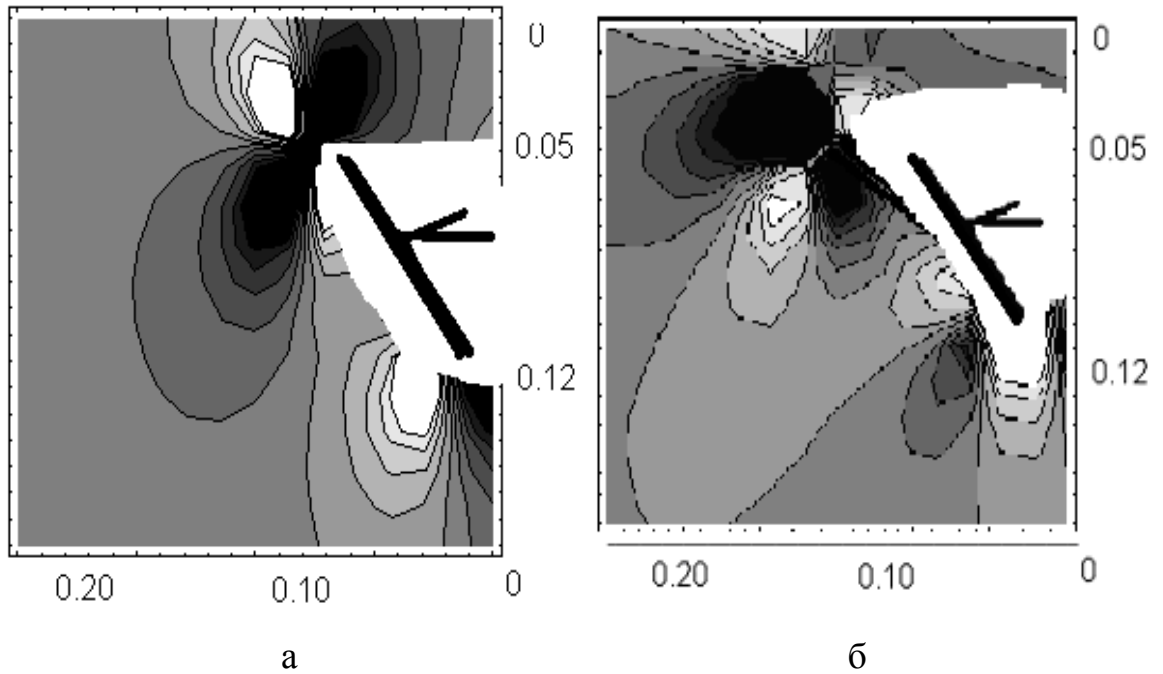
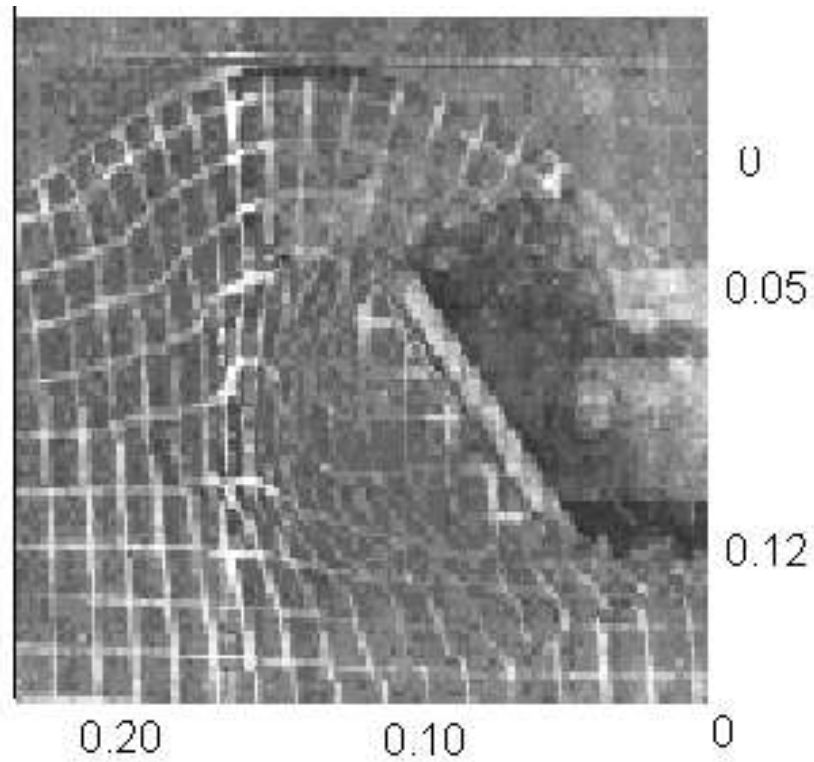


Рис. 3.38. Ізолінії розподілу деформацій (а – об'ємних, б – зсувних) ґрунту при куті входження деформатора 120° , що відповідає $\xi = 0.25 - 1.8 \zeta$

Аналіз отриманих теоретичних розподілів ізоліній об'ємних та зсувних деформацій свідчить про подібність зон порушення суцільності ґрунту, ущільнення та зон зсувних деформацій. На графіках теоретичних розподілів ізоліній об'ємних деформацій темному кольору відповідають зони стискання, а світлому –розтягнення.

Побудовані аналітичні залежності розподілу тиску адекватно відображають характер розподілу зсувних та об'ємних деформацій ґрунту під дією деформаторів. При цьому існують характерні зони максимумів зсувних деформацій на границях контакту деформатора з ґрунтом. Максимум об'ємних деформацій для вертикального деформатора знаходиться в центрі, а для деформаторів, нахилених під кутом, зосереджений ближче до гострого кута.

На підставі проведених експериментальних досліджень можна стверджувати, що теоретичні залежності для визначення напружено-деформованого стану ґрунту від дії робочих органів ґрунтообробних машин адекватні для досить складного та статистично неоднорідного середовища, яким є ґрунт.

РОЗДІЛ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ І РЕЖИМІВ РОБОТИ ГРУНТООБРОБНИХ РОБОЧИХ ОРГАНІВ

4.1. Функція та загальна методика оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів

Результатом взаємодії робочих органів із ґрунтом за механічного його обробітку у відповідності з агротехнічними вимогами до процесу повинна бути зміна густини ґрунту або питомої маси його сухої фази. Зміна цих величин відбувається в результаті створення напружено-деформованого стану в певному об'ємі ґрунту (рис. 1.3). Зміни напружено-деформованого стану ґрунту, як було показано вище, функціонально зв'язані з режимами роботи ґрунтообробних робочих органів та їх геометричними параметрами.

Для кожного конкретного типу робочих органів, у відповідності з проведеними теоретичними дослідженнями, повинні бути визначені параметри та режими його роботи, які забезпечують:

- для розпушуючих робочих органів мінімальне значення інтегральної функції вигляду деформованого (напруженого) стану в об'ємі перед робочим органом;

- для ущільнюючого робочого органу максимальне значення інтегральної функції вигляду деформованого (напруженого) стану в об'ємі перед (під) робочим органом.

При визначенні меж інтегрування функції $I\mu = \iiint_V \mu \, dx \, dy \, dz$ слід урахувати глибину ходу робочого органу та його ширину. Підінтегральна функція μ у виразі для оптимізації є щільність розподілу вигляду напружено-деформованого стану ґрунту у напівпросторі.

Так, для *пасивного робочого органу*, поверхня якого задана функцією $f = \xi - sl + b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma$, межі інтегрування визначаються наступним чином:

– у напрямку осі Ox нижня границя інтегрування знаходиться на поверхні деформатора q відповідає $x = sl - b(\eta - bs)^\beta - c(\zeta - H)^\gamma$, верхня границя обмежена можливою областю деформування ґрунту в напрямку руху деформатора;

– у напрямку осі Oz нижня межа інтегрування – 0; що відповідає поверхні поля; а верхня повинна перевищувати висоту шару ґрунту перед робочим органом на деяку величину, тобто повинна становити $z \equiv h2 + h0$;

– у напрямку осі Oy нижня межа інтегрування $y \equiv b1$, верхня межа інтегрування повинна перевищувати ширину (напівширину для симетричного) робочого органу $y \equiv b2 + b0$.

Для *дискового робочого органу* межі інтегрування функції вигляду напружено-деформованого стану такі:

– у напрямку осі Ox нижня границя інтегрування лежить на поверхні дискового робочого органу в зоні його контакту з ґрунтом і відповідає $x \equiv 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2ar - a^2}$, верхня границя обмежена можливою областю деформування ґрунту в напрямку руху дискового робочого органу;

– у напрямку осі Oy нижня межа інтегрування $y \equiv 0$, верхня межа інтегрування повинна перевищувати розмір проекції кромки диска на поперечно-вертикальну площину, тобто $y \equiv b0 + (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + 2\sqrt{2ar - a^2} \sin(\alpha) \cos(\gamma) - (r - \sqrt{a^2 - 2ar + r^2}) \sin(\gamma) - \sqrt{R^2 - r^2}$;

– у напрямку осі Oz нижня межа інтегрування – 0; що відповідає поверхні поля, а верхня повинна перевищувати висоту шару ґрунту перед робочим органом на деяку величину, тобто повинна становити $z \equiv a + h0$.

У зв'язку з надзвичайною громіздкістю виразу підінтегральної функції інтегральне значення параметру оптимізації може бути визначене лише

шляхом числового інтегрування. В цьому випадку інтегрування може бути здійснене лише тоді, коли межі інтегрування є постійними величинами. Тому оптимізація функції вигляду напружено-деформованого стану може проводитись при сталих значеннях меж інтегрування в напрямках осей Ox та $Oy\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Тобто, при значеннях, обчислених для точок, які відповідають носку пасивного деформатора, або нижній точці контакту диск-грунт.

4.2. Обґрунтування вибору метода оптимізації параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів

Методи пошуку екстремуму функції багатьох змінних діляться на аналітичні та числові. Аналітичні методи передбачають пошук екстремуму функції шляхом аналізу часткових похідних функції оптимізації й мають дуже обмежене застосування. Для функцій багатьох змінних, особливо складного вигляду, застосовуються числові методи пошуку екстремуму.

Методи пошуку екстремуму функції багатьох змінних діляться на методи прямого пошуку та градієнтні методи. Для визначення правомірності застосування того чи іншого методу для оптимізації параметрів ґрунтообробних робочих органів необхідно виконати аналіз основних із них.

Методи прямого пошуку – це методи, в яких реалізуються тільки значення функції. До цих методів належать методи Хука-Дживса та Нелдера-Міда [12, 72].

Метод Хука-Дживса, розроблений у 1961 році, передбачає пошук мінімуму в напрямках, паралельних осям простору змінних функції оптимізації. Причому, пошук проводиться за однією зі змінних до моменту, коли функція оптимізації перестає зменшуватись (збільшуватись). Тобто, метод полягає в послідовності дослідницького пошуку в околах базисної точки, за яким, в разі успіху, проводиться пошук по зразку. Цей метод досить ефективний і оригінальний, але дуже повільний.

Другий поширений метод – метод Нелдера-Міда (метод пошуку за деформованим багатогранником). Суть методу полягає в тому, що значення функції оптимізації у вершинах симплексу ($n + 1$), рівновіддалених у n - мірному просторі, порівнюються шляхом ітераційної процедури, й симплекс переміщується в напрямку оптимальної точки. Цей метод досить ефективний, екстремум знаходиться швидше, ніж методом Хука-Дживса, але не дозволяє при знаходженні екстремума застосування обмежень.

Гradientні методи передбачають при пошуку екстремуму використання як самих значень функції оптимізації, так і її gradientів.

До цих методів належить метод найшвидшого спуску, в якому досліджується gradient функції оптимізації:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n, \quad \text{де } \delta x_i = h di, \quad di -$$

косинуси напрямків \bar{d} , причому $\sum_1^n di^2 = 1$. Метод є досить ефективним, але передбачає диференціювання функції оптимізації за напрямками в загальному вигляді, що не може бути здійснене, оскільки функція оптимізації в нашому випадку обчислюється шляхом числового інтегрування для кожного значення параметрів оптимізації. Крім того, метод передбачає часті зміни напрямків пошуку, що призводить до його неефективного використання.

Інші gradientні методи, такі як метод квадратичних функцій, метод Давідона-Флетчера-Пауела, Флетчера-Рівса, хоча й мають переваги перед методом найшвидшого спуску, але передбачають ще й визначення більш складних функцій від функції оптимізації, таких, як Гамільтон та інш., що також не дозволяє використати їх для задачі пошуку екстремуму інтегральної функції вигляду напружено-деформованого стану.

Виходячи з вище означеного, найбільш логічним є застосування модифікованого методу Хука Дживса з обмеженнями. Тому при розробці методики оптимізації параметрів та режимів роботи ґрунтообробних робочих органів був використаний саме цей метод.

4.3. Методика оптимізації параметрів і режимів роботи робочих органів

4.3.1. Розміщення пасивного робочого органу в ґрунті

У загальному вигляді поверхня робочого органу, при розміщенні її у ґрунтовому напівпросторі xuz (рис. 4.1), задається в системі координат $\xi\eta\zeta$ рівнянням неявного вигляду:

$$f = \xi - sl + b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma,$$

де sl , bs , $H + h_2 - h_1$ – зміщення носка робочого органу в напрямку переміщення, в поперечному напрямку та по глибині ходу, відповідно;

b, c, β, γ – коефіцієнти та показники ступеня рівняння поверхні робочого органу, відповідно.

Так, для пасивного робочого органу, поверхня якого задана функцією $f = \xi - sl + b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma$, межі інтегрування визначаються таким чином:

- у напрямку осі Ox нижня межа інтегрування знаходиться на поверхні деформатора і відповідає $x = sl - b(\eta - bs)^\beta - c(\zeta - H)^\gamma$; верхня межа обмежена можливою областю деформування ґрунту в напрямку руху деформатора;

- у напрямку осі Oz нижня межа інтегрування – 0; що відповідає поверхні поля; а верхня повинна перевищувати висоту шару ґрунту перед робочим органом на деяку величину, тобто повинна становити $z \equiv h2 + dh$;
- у напрямку осі Oy нижня межа інтегрування – $y \equiv bs$, верхня межа повинна перевищувати ширину (напівширину для симетричного робочого органу), тобто повинна становити $y \equiv b2 - b1 + db$.

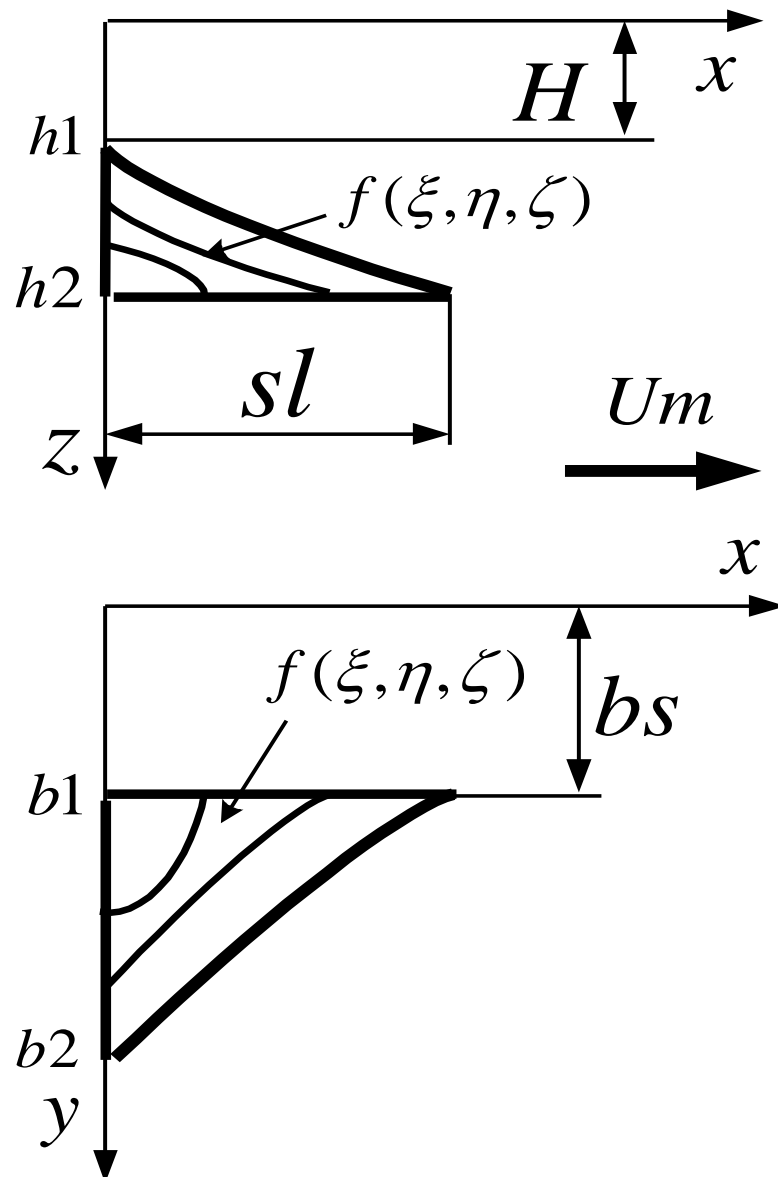


Рис. 4.1. Схема розміщення поверхні робочого органу $f(\xi, \eta, \zeta)$ у ґрунтовому напівпросторі xuz

4.3.2. Розміщення дискового сферичного робочого органу в ґрунті

У загальному випадку дисковий робочий орган (рис. 4.2) має радіус кривизни R , діаметр – $2r$, кут атаки – α та кут нахилу осі обертання у вертикально-поперечній площині γ .

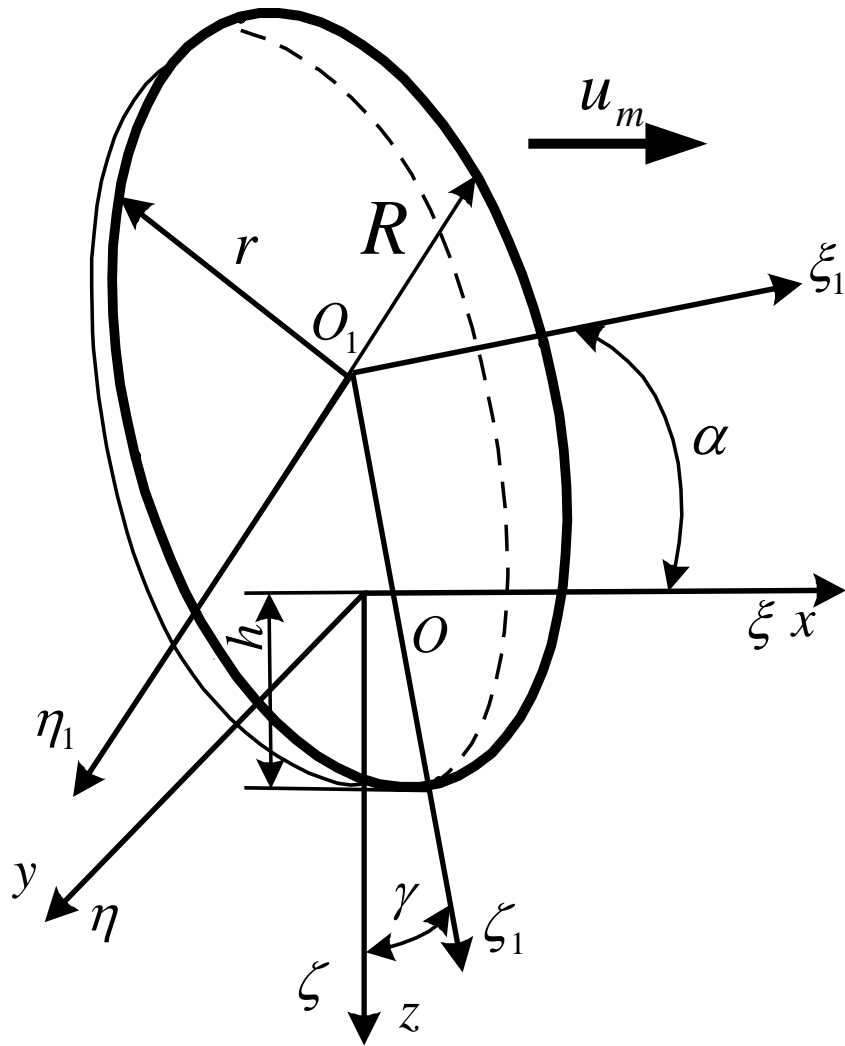


Рис. 4.2. Схема розміщення сферичного дискового робочого органу в ґрунтовому напівпросторі $x\eta z$

Для дискового робочого органу межі інтегрування функції вигляду напружено-деформованого стану матимуть наступний вигляд:

- у напрямку осі Ox нижня межа інтегрування лежить на поверхні дискового робочого органу в зоні його контакту із ґрунтом і відповідає

$$x \equiv 2\sqrt{2ar - a^2} \cos(\alpha) - (R - a\sqrt{R^2 - r^2}) \sin(\alpha) - \sqrt{2ar - a^2},$$

верхня межа обмежена можливою областю деформування ґрунту в напрямку руху дискового робочого органу;

- у напрямку осі Oy нижня межа інтегрування $y \equiv 0$, верхня межа інтегрування повинна перевищувати розмір проекції кромки диска на поперечно-вертикальну площину

$$y \equiv b_0 + (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + 2\sqrt{2ar - a^2} \sin(\alpha) \cos(\gamma) - (r - \sqrt{a^2 - 2ar + r^2}) \sin(\gamma) - \sqrt{R^2 - r^2};$$

- у напрямку осі Oz нижня межа інтегрування $z \equiv 0$; що відповідає поверхні поля; а верхня повинна перевищувати висоту шару ґрунту перед робочим органом на деяку величину, тобто повинна становити $z \equiv a + h_0$.

Оптимізація функції вигляду напружено-деформованого стану проводиться при сталих значеннях меж інтегрування в напрямках осей Ox та Oy , тобто при значеннях, обчислених для точок, які відповідають носку пасивного деформатора, або нижній точці контакту диск-ґрунт.

Параметрами оптимізації для конкретних розмірів пасивних робочих органів та властивостей ґрунту: висоти $h_2 - h_1$, ширини $b_2 - b_1$ й відомих значень модуля пружності G , модулів в'язкості μ, η_1 , граничного напруження зсуву τ_s , або для конкретного типу ґрунту, за вологості W й густини ρ – є коефіцієнти та показники ступеня рівняння поверхні робочого органу.

Параметрами оптимізації для дискових робочих органів, при відомих глибині обробітку та властивостях ґрунту: глибини h , значеннях модуля пружності G , модулів в'язкості μ, η_1 , граничного напруження зсуву τ_s , або для конкретного типу ґрунту, за вологості W й густини ρ – є діаметр диска $2r$ та кути його установки α та γ .

У загальному випадку оптимізація параметрів пасивних робочих органів ґрунтообробних машин за модифікованим методом Хука-Дживса передбачає знаходження початкових значень параметрів оптимізації (змінних), після чого проводиться пошук оптимуму в різних напрямках від початкових значень.

Параметрами оптимізації для пасивних робочих органів, згідно отриманої вище функції, для конкретних розмірів робочого органу: висоти $h_2 - h_1$, ширини $b_2 - b_1$, при відомих значеннях властивостей ґрунту: модуля пружності G , модулів в'язкості μ, η_1 , граничного напруження зсуву τ_s , або їх значеннях, обчислених за регресійними рівняннями (гл. 3), за відомого типу ґрунту, його вологості W та густини ρ – є коефіцієнти та показники ступеня рівняння поверхні робочого органу $f = \xi - sl + b(\eta - bs)^\beta + c(\zeta - H)^\gamma$. При цьому для спрощення оптимізації форми одного робочого органу можна прийняти $sl = 0, bs = 0, H = 0$.

Процедура оптимізації полягає в наступному.

- для конкретного типу робочих органів визначаються межі інтегрування у відповідності з його геометричними розмірами;
- визначаються умови його роботи (властивості ґрунту);
- обчислюється (початкова) *Basis* функція напружено-

деформованого стану ґрунту $I\mu_{Basis} = \iiint_V \mu \, dx \, dy \, dz$ для визначених меж

інтегрування й початкових значень параметрів оптимізації; для пасивного робочого органу: швидкість та параметри рівняння поверхні – $Um = Um_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, $c = c_0$, $b = b_0$, для дискового робочого органу: швидкість, геометричні параметри диска та кути установки осі обертання диска в горизонтально-поздовжній та поперечно-вертикальній площині $Um = Um_0$, $R = R_0$, $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\gamma = \gamma_0$. Тут і далі функція обчислюється шляхом числового інтегрування;

- задається крок по кожному параметру оптимізації;
- вводиться обмежуюча функція. Для пасивного робочого органу обмежуючою функцією є величина співвідношення глибини ходу (висоти в напрямку осі $O\xi$) робочого органу до вильоту його носка в напрямку осі $O\xi$, тобто $\xi \leq k(sl - c(h2 - H)^r)$;
- виконується цикл змін i -го параметра (за прийнятого обмеження) до виконання умови $Basis=Minimal$;
- виконується цикл змін $i+1$ -го параметра, (за прийнятого обмеження) до виконання умови $Basis=Minimal$. І так далі за всіма параметрами оптимізації до досягнення мінімального значення функції оптимізації. Після чого виводяться значення параметрів, які відповідають екстремуму.

Ефективність (витрати часу на знаходження оптимальних значень) процедури пошуку оптимальних значень параметрів оптимізації робочих органів ґрунтообробних машин в деякій мірі залежить від суб'єктивних факторів – інтуїції дослідника та правильності вибору значень $Um = Um_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, $c = c_0$, $b = b_0$, або $Um = Um_0$, $R = R_0$, $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\gamma = \gamma_0$.

У кожному разі на підставі отриманих значень параметрів оптимізації необхідно обчислити енергомiсткiсть роботи ґрунтообробного робочого

органу. Ця енергомiсткiсть для пасивного робочого органу може бути визначена як:

$$A = PUm, \text{ де } P = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2},$$

$$R_X = \int_{h1}^{h2} \int_{bs}^B (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) d\eta d\zeta;$$

$$R_Y = \int_{h1}^{h2} \int_0^{\xi\zeta} (\sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l) d\xi d\zeta;$$

$$R_Z = \int_{bs}^B \int_0^{\xi\eta} (\sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m) d\xi d\eta$$

де $\xi\eta = sl - b(\eta - bs)^\beta - c(H)^\gamma$, $\xi\zeta = sl - b(bs)^\beta - c(\zeta - H)^\gamma$.

У загальному випадку схема оптимiзацiї параметрiв ґрунтообробних робочих органiв має вигляд, представлений на рис.4.3.

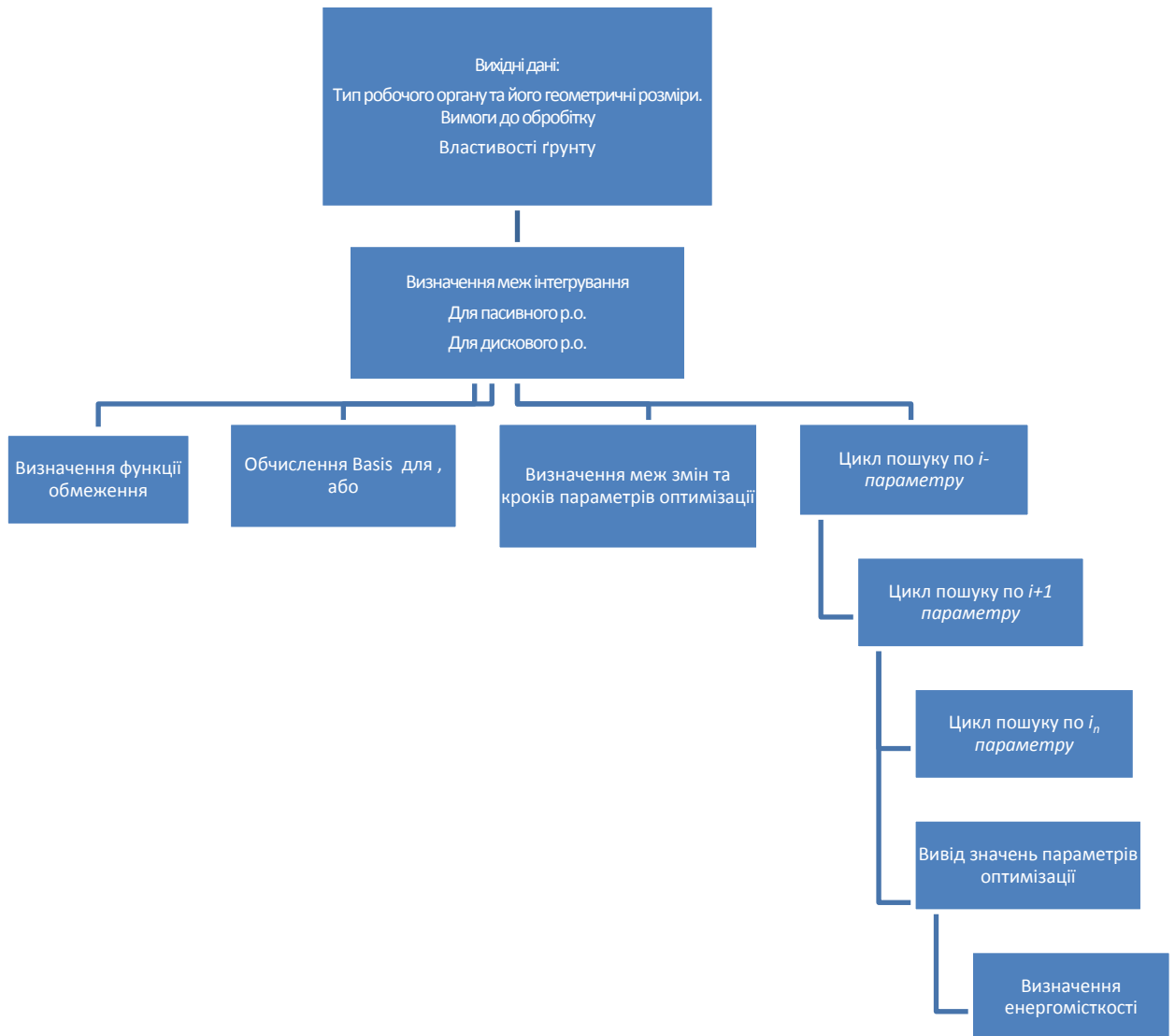


Рис. 4.3. Схема оптимізації параметрів ґрунтообробних робочих органів

4.4. Впровадження методики оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів

4.4.1. Програма та методика експериментальної перевірки оптимізації параметрів робочих органів

Програмою експериментальної перевірки методики оптимізації параметрів робочих органів передбачалося:

- визначення оптимальних параметрів розпушуючих робочих органів ґрунтообробних машин для конкретних ґрунтово-кліматичних умов;

– виготовлення партії розпушуючих робочих органів із оптимальними параметрами;

– порівняльні випробування ґрунтообробних машин із серійними та оптимізованими робочими органами в польових умовах із визначенням енергомісткості та якості виконання процесу.

Оптимізація параметрів робочих органів проводилась за розробленою методикою (п. 4.3) для ґрунтових умов із такими показниками властивостей:

- тип ґрунту – середньосуглинковий;
- модуль пружності об’ємних деформацій – 25-350 МПа;
- модуль в’язкості об’ємних деформацій – 1,5-1,87 кПа с;
- граничне напруження зсуву ґрунту – 75-85 кПа.

Оптимізація параметрів робочих органів проводилась для розпушувальних лап ґрунтообробного комбінованого агрегату АГ-6. Виготовлення оптимізованих робочих органів здійснювалось на ВАТ «БОРЕКС».

Порівняльна оцінка енергомісткості та якості виконання процесу обробітку ґрунту здійснювалась на експериментальній базі та із застосуванням апаратури ВАТ „БОРЕКС” у відповідності до державних та галузевих стандартів [53, 54, 55, 143]. Технологічні властивості ґрунту, а саме питомий об’єм сухої фази BWV до та після обробітку, визначались за відомою методикою [25, 107].

4.4.2. Умови та обсяг проведення експериментальної перевірки методики оптимізації параметрів робочих органів

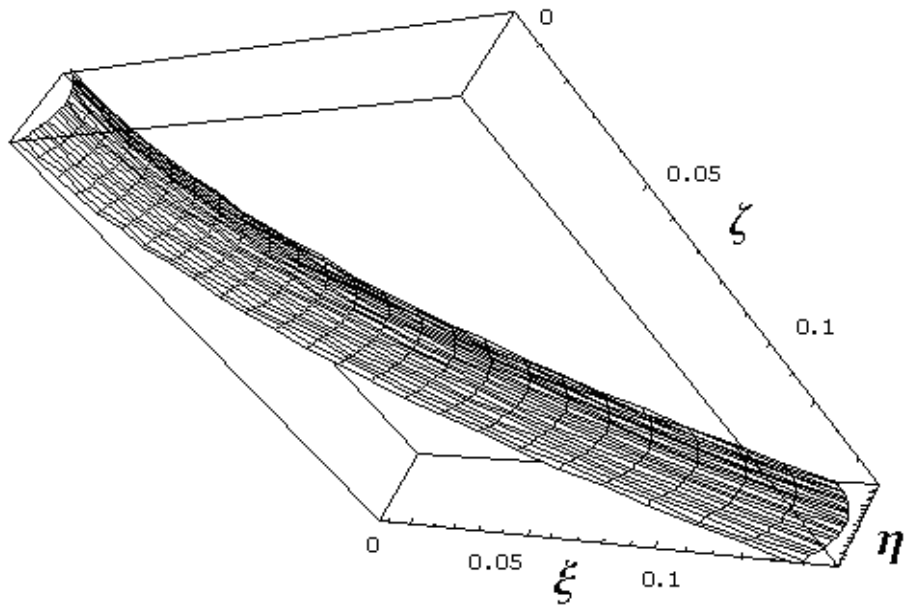
За результатами проведеної оптимізації параметрів розпушуючих робочих органів комбінованої ґрунтообробної машини АГ-6 були виготовлені робочі органи з оптимальними для конкретних ґрунтових умов параметрами.

Для порівняльної оцінки енергомісткості та якості обробітку ґрунту машинами з серійними робочими органами та оптимізованими для

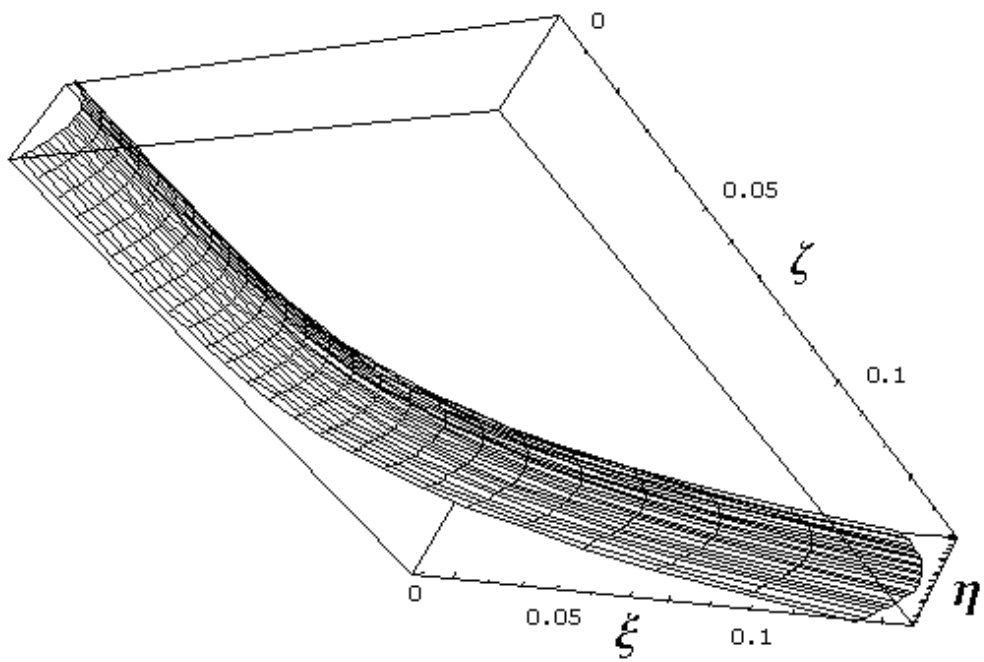
конкретних ґрунтових умов ґрунтообробна машина АГ-6 була обладнана виготовленими на ВАТ „БОРЕКС” робочими органами з параметрами, які отримані в результаті оптимізації за методикою, розробленою в даній роботі. Вигляд поверхні серійного $\xi = sl - 24(\eta)^2 + 5(\zeta)^2$ розпушуючого та оптимізованого, у відповідності з розробленою методикою для конкретних ґрунтових умов полігона ВАТ „БОРЕКС”, $\xi = sl - 24(\eta)^2 + 1500(\zeta)^5$ робочих органів і їхній загальний вигляд представлені на рис. 4.4.,4.5.

Порівняльна оцінка енергомісткості та якості обробітку ґрунту виконувалась для двох ґрунтообробних машин із серійними та оптимізованими робочими органами. Загальний вигляд машин представлений на рис. 4.6.

Тензометрування обох машин виконувалось за взаємодії з ґрунтом лише розпушуючих робочих органів. Реєстрація тягового зусилля здійснювалась за допомогою тензометричної апаратури з подачею сигналу на АЦП і подальшою його обробкою із застосуванням стандартного пакету обробки сигналів. Фрагменти осцилограм, побудованих за числовими масивами даних реєстрації тягових зусиль АЦП з використанням програми ПОС-16, представлені на рис. 4.7.



а



б

Рис. 4.4. Поверхні розпушуючих робочих органів: а – серійного $\xi = sl - 24(\eta)^2 + 5(\zeta)^2$, б – оптимізованого $\xi = sl - 24(\eta)^2 + 1500(\zeta)^5$



а



б

Рис. 4.5. Загальний вигляд розпушуючих робочих органів:
а – серійного, б – оптимізованого

Механічні властивості ґрунту на полі при виконанні енергооцінки визначались за спрощеною методикою із застосуванням регресійних рівнянь (3.3.2, 3.3.4, 3.3.6, 3.3.8, 3.3.10, 3.3.12, 3.3.13, 3.3.14, 3.3.5) та загальноприйнятою методикою визначення фізичних властивостей ґрунту [25].



Рис. 4.6. Загальний вигляд ґрунтообробного агрегату

4.4.3. Результати та обсяг впровадження методики оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів

Результати проведених порівняльних випробувань оптимізованих розпушуючих робочих органів ґрунтообробної машини АГ-6, представлені на рис. 4.7 - 4.8 та таблиці 4.1 (рівень надійної ймовірності результатів становив $P = 0.90$), свідчать про ефективність застосування обґрунтованого критерія оптимізації параметрів і режимів роботи ґрунтообробних робочих органів.

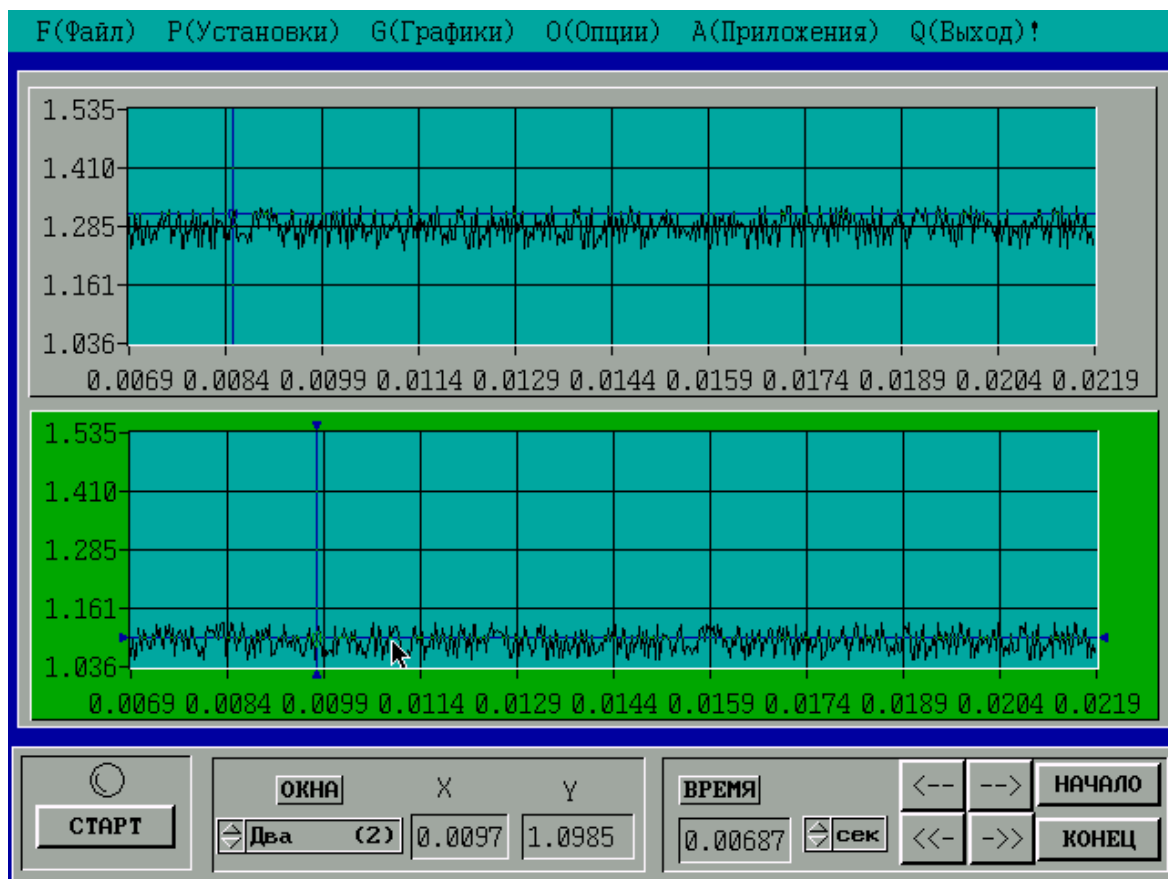


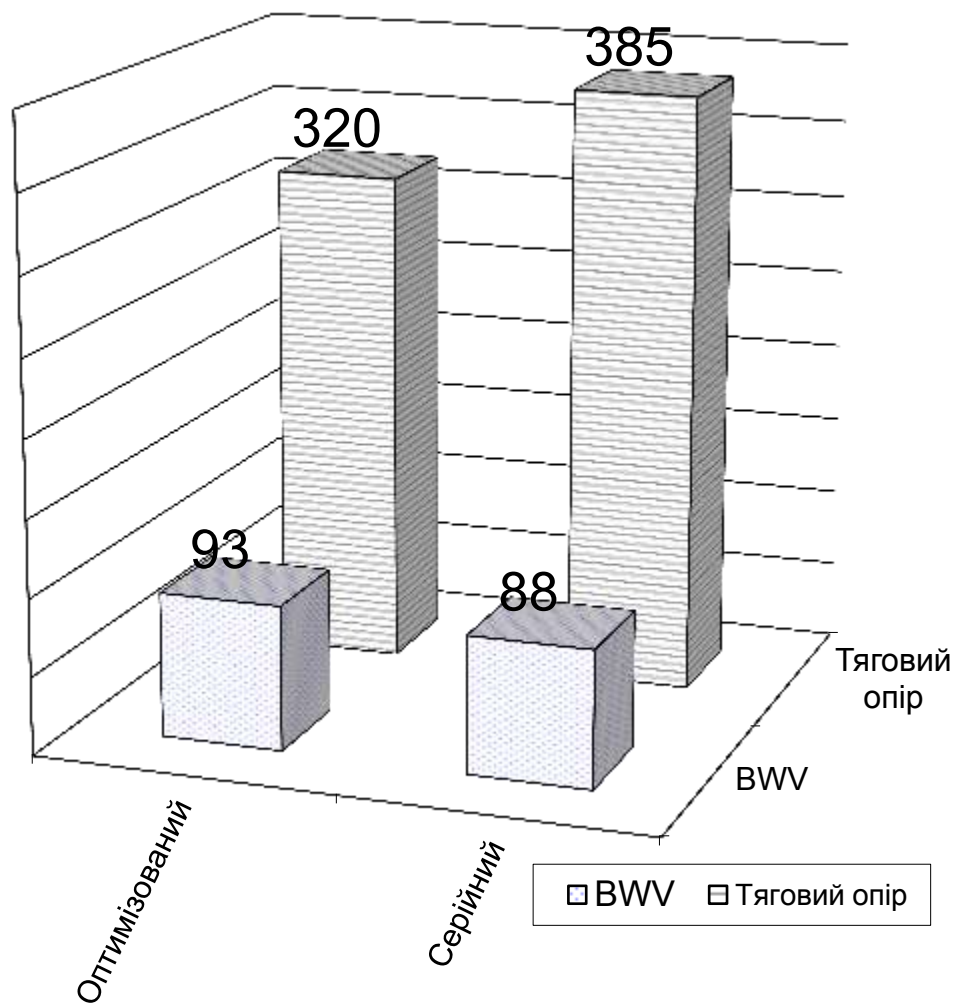
Рис. 4.7. Фрагмент осцилограми запису тягового зусилля агрегату з серійними (верхня осцилограма) та оптимізованими (нижня осцилограма) робочими органами (масштабний коефіцієнт осцилограми $k = 290 \left[\frac{H}{mB} \right]$)

Результати порівняння енергомісткості та якості виконання обробітку
грунту

Показник		Базовий робочий орган	Оптимізований робочий орган
1	Агрегат	Трактор ХТЗ-120+АГ-6	Трактор ХТЗ-120+АГ-6
2	Ширина захвату, м	6	6
3	Робоча швидкість, м/с	4.5	4.5
4	Агрофон	Закриття вологи	Закриття вологи
5	Глибина обробітку, м	0.15	0.15
6	Властивості ґрунту: тип ґрунту Модуль пружності об'ємних деформацій, МПа Коефіцієнт в'язкості об'ємних деформацій, кПа с Граничне напруження зсуву ґрунту, кПа	Середньосуглинковий 28-30 1,6-1,7 78-84	Середньосуглинковий 28-30 1,6-1,7 78-84
7	Питомий об'єм сухої фази ґрунту BWV (до обробітку), $10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$	6.5-7.2	6.5-7.2
8	Тяговий опір на один робочий орган, кН	0.385	0.320
9	Питомий об'єм сухої фази ґрунту BWV (після обробітку), $10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$	8.5-9.2	8.9-9.7

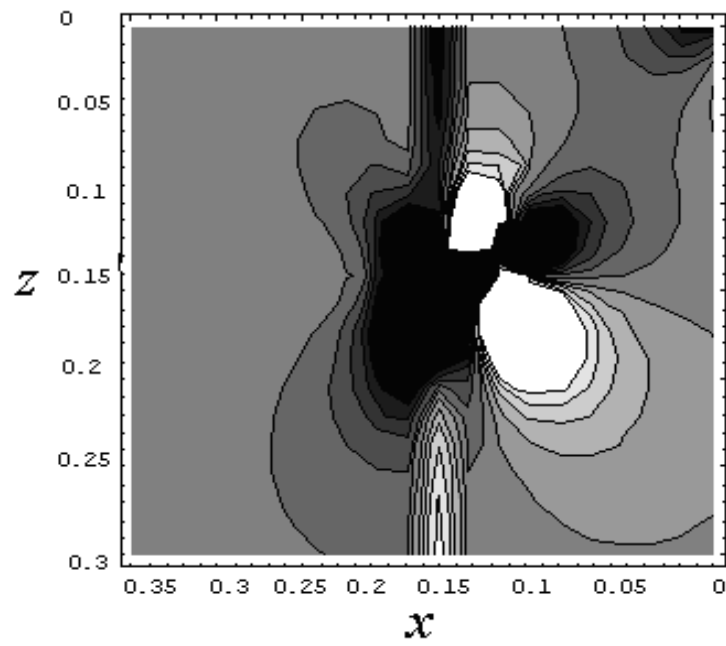
Зниження тягового опору на 15 % при використанні робочого органу з оптимальними для певних ґрунтових умов властивостями (рис. 4.8.) свідчить про ефективність застосування результатів проведених досліджень, та ще раз підтверджує адекватність розробленої концепції оптимізації робочих органів. Із механістичного погляду, забезпечення зниження тягового опору та незначного підвищення BWV пояснюється змінами розподілу об'ємних деформацій (рис. 4.9.) та показника вигляду напруженого стану (рис. 4.10.) у

грунтовому середовищі під дією розпушуючих робочих органів – серійного та оптимізованого.

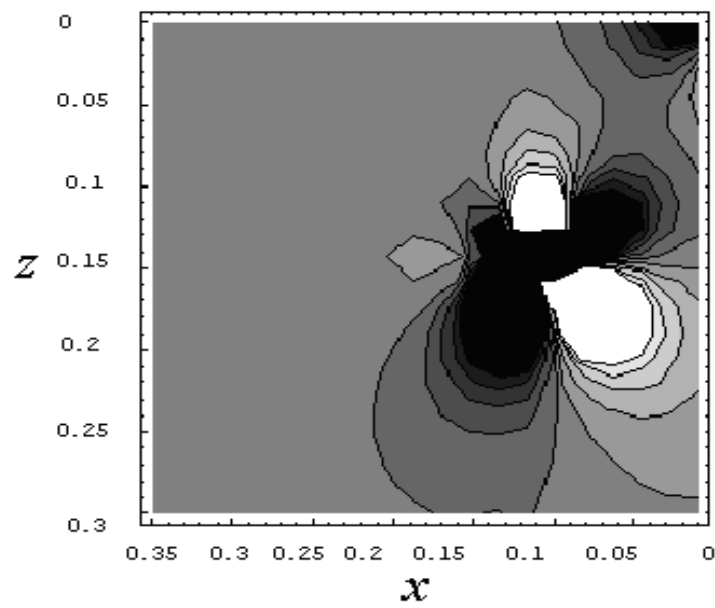


$$BWV \cdot 10^{-5} \left[\frac{m^3}{kg} \right]; \text{ тяговий опір, } [H]$$

Рис. 4.8. Тяговий опір та BWV за використання серійного та оптимізованого розпушуючих робочих органів



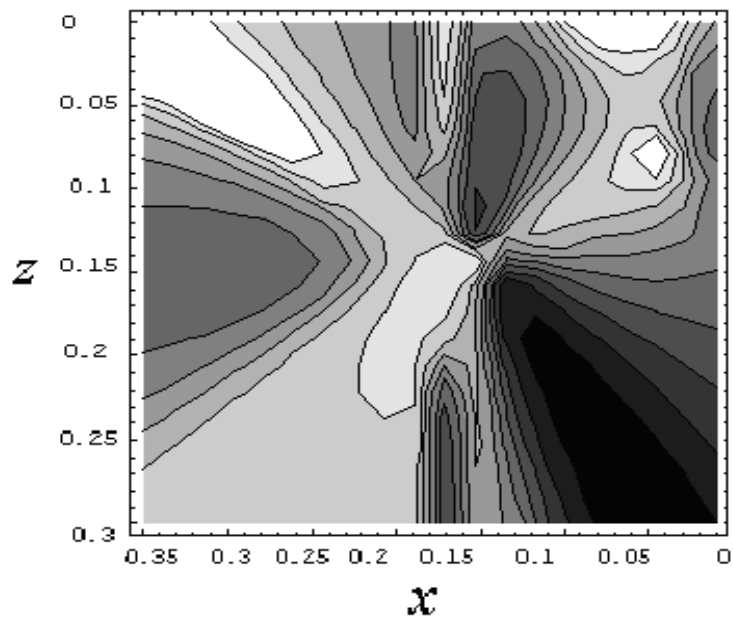
а



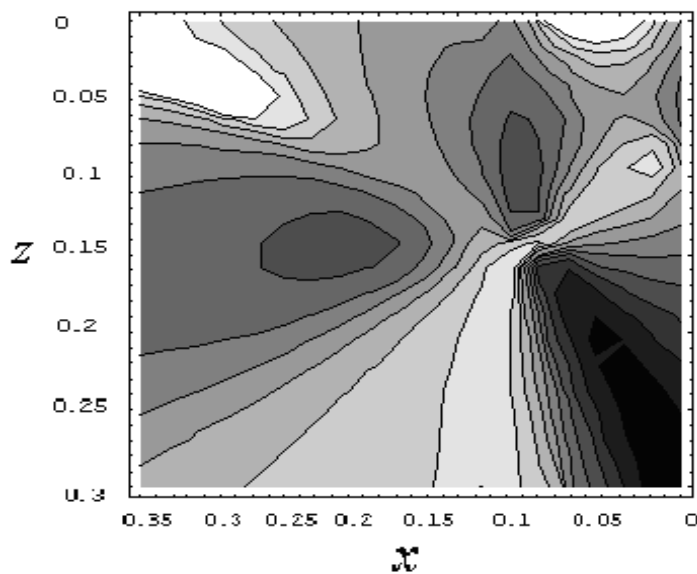
б

□ – зони розтягнення ■ – зони стискання

Рис. 4.9. Характер розподілу об'ємних деформацій ґрунту під дією розпушуючих робочих органів: а – серійного, б – оптимізованого



а



б

□ – зони розтягнення ■ – зони стискання

Рис. 4.10. Характер розподілу величини параметру вигляду напружено-деформованого стану ґрунту під дією розпушуючих робочих органів: а – серійного, б – оптимізованого

При цьому тиск на поверхню робочого органу з оптимальними параметрами боку ґрунту нижчий, ніж для серійного робочого органу.

Зниження тиску та горизонтальної складової опору ґрунту для оптимізованого робочого органу зростає пропорційно збільшенню глибини обробітку (рис. 4.11.), що дозволяє очікувати більш суттєвого зниження тягового опору для робочих органів при більш глибокому обробітку ґрунту.

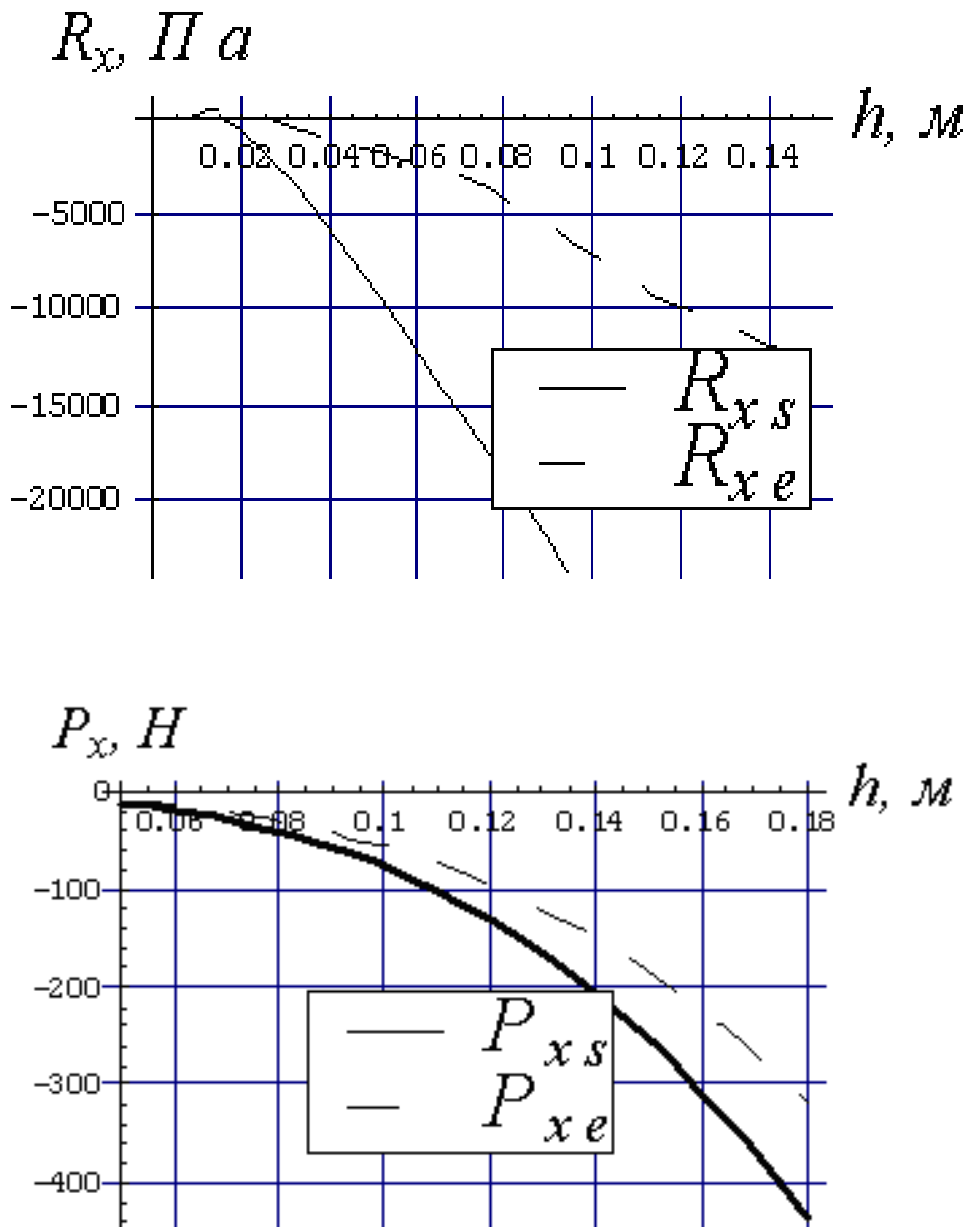


Рис. 4.11. Характер змін: горизонтальної складової тиску ґрунту на поверхню робочих органів: серійного R_{xs} , оптимізованого R_{xe} та горизонтальної складової тягового опору робочих органів: серійного P_{xs} , оптимізованого P_{xe}

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Основним чинником змін технологічних властивостей ґрунту є характер його напружено-деформованого стану, що зумовлений результатом впливу на нього робочих органів ґрунтообробних машин. Для здійснення достовірного аналізу взаємодії робочих органів із ґрунтом формалізація його у вигляді суцільного пружно-в'язко-пластичного середовища є необхідною, але недостатньою умовою. Додатково повинна бути вирішена задача про визначення характеру розподілу переміщень та розподілу тиску по поверхні робочого органу, а також переміщень, напружень і деформацій у оброблюваному цим робочим органом ґрунтовому середовищі.

2. Запропонований новий інтегральний параметр оцінювання напружено-деформованого стану ґрунту представляє собою величину, яка маючи інтервал варіювання від $-\infty$ до $+\infty$ й будучи пропорційною до відношення першого та другого інваріантів тензора напружень, дозволяє відслідковувати характер зміни питомого об'єму сухої фази ґрунтового середовища, що, в свою чергу, дає можливість забезпечити мінімальну енергомісткість його обробітку.

3. Нова механічна модель ґрунту відрізняється тим, що в ній для адекватного відображення зв'язків напружень із деформаціями між послідовно з'єднаними тілами Кельвіна-Фойгта та Бінгама додатково введено двосторонній обмежувач деформацій (стопор), який у пружно-в'язкій фазі деформування ґрунтового середовища дозволяє деформування лише тіла Кельвіна-Фойгта, а у в'язко-пластичній – деформування тіла Бінгама.

4. Аналіз результатів розв'язку просторових задач взаємодії пасивних робочих органів із ґрунтом дозволив встановити, що суттєве збільшення (в 1,3...3,0 рази) гідростатичних напружень та інтенсивності зсувних напружень у деформованому середовищі зумовлюються зростанням модуля пружності ґрунту, збільшенням швидкості переміщення та фронтальних розмірів деформатора. При виборі геометричної форми поверхні робочого органу слід враховувати, що вплив коефіцієнтів рівняння цієї поверхні на величину гідростатичних напружень, інтенсивність зсувних напружень, а також на потужність об'ємних та зсувних деформацій ґрунту менш суттєвий, ніж вплив

показників ступеню.

5. При глибині ходу деформатора до 0,1 м його вплив на зміну потужностей об'ємних та зсувних деформацій ґрунту незначний. За подальшого збільшення глибини обробітку інтенсивність цього впливу зростає, але вона залишається значно меншою за інтенсивність зростання величин вказаних потужностей від впливу на них збільшення швидкості переміщення ґрунтообробного робочого органу.

6. Кут атаки дискового робочого органу, на відміну від кута нахилу осі обертання та радіуса кривизни диску, більш суттєво впливає на величини об'ємних та зсувних напружень у ґрунті. При певних співвідношеннях діаметра диска й радіуса його кривизни величини гідростатичних напружень у ґрунті взагалі можуть змінювати знак, тобто бути або стискаючими, або розтягуючими.

Що стосується критерію вигляду напружено-деформованого стану ґрунту, то графічні залежності його від кута атаки, кута нахилу осі обертання, діаметра й радіуса кривизни диску характеризуються наявністю явно виражених максимумів чи мінімумів, що свідчить про можливість визначення оптимальних величин цих параметрів.

7. Встановлено, що при збільшенні вологості легко-, середньо- та важкосуглинкових ґрунтів від 8 до 15 % величини їхніх модулів пружності об'ємних і зсувних деформацій зменшуються. При подальшому зростанні вологості ґрунтового середовища величини вказаних модулів збільшуються.

Характер зміни модулів в'язкості при об'ємних та зсувних деформаціях ґрунту від його вологості – протилежний. Причому, при малій (10...12 %) вологості легко- та середньосуглинкових ґрунтів зростання їхньої густини призводить до збільшення модулів в'язкості й навпаки. Зміна вологості важкосуглинкових ґрунтів мало впливає на зміну цих коефіцієнтів.

8. Результати теоретичних та експериментальних досліджень на статистичному рівні значимості $\alpha = 0.25$ дозволяють стверджувати, що при збільшенні глибини ходу деформатора в ґрунтовому середовищі нормальний тиск

на його поверхні збільшується з інтенсивністю, яка визначається геометричною формою деформатора. В умовах дослідження найменша інтенсивність зростання нормального тиску виявлена у деформатора, прямолінійна поверхня якого нахилена під кутом 45° до горизонту (перший варіант).

Проміжне значення займав деформатор із параболічною формою поверхні (другий варіант). У вертикально встановленого прямолінійного деформатора (третій варіант) нормальний тиск на його поверхні найбільший. На глибинах ходу 0,10...0,20 м величина цього показника для третього варіанту деформатора була майже в 1,5 рази більша, ніж для другого і майже в 3 рази – ніж для першого.

9. З імовірністю $P = 0.90$ можна стверджувати, що практичне впровадження робочих органів, конструктивні параметри яких оптимізовані згідно запропонованої нової методики, дозволить досягти підвищення питомого об'єму сухої фази ґрунту на 4...5 % та зменшення тягового опору ґрунтообробних робочих органів в середньому на 16 %.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алба, В.Д. Разработка методики выбора прикатывающих рабочих органов, их параметров, режимов работы с учетом почвенно-климатических условий: дис....канд. техн. наук: 05.20.01. / В. Д. Алба. – Мелитополь, 1993.– 193 с.
2. Александров, А.Д. Геометрия / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев – М.: Наука, 1990. – 672 с.
3. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Гос. Изд. Физ.-мат. Литературы, 1959. – 915 с.
4. Аржаных, А. И. Исследование и обоснование параметров рабочих органов дисковых культиваторов для повышенных скоростей: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.410/ А. И. Аржаных. – Челябинск, 1968.– 24 с.
5. Афонин, В. Д. Исследование работоспособности плужных лемехов в условиях юго-востока ССР: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.410 / В. Д. Афонин. – Саратов, 1972.– 36 с.
6. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука. – 559 с.
7. Бабицкий, Л. Ф. Біонічні напрямки розробки ґрунтообробних машин /Л. Ф. Бабицкий – К.: Урожай, 1998. – 164 с.
8. Бабицкий, Л. Ф. Деформація ґрунту залежно від форми робочого органу // Вісник с.г. науки. – 1978. – № 6. – С. 84-87..
9. Бабицкий, Л. Ф. Обоснование параметров зубчатых рабочих органов / Л. Ф. Бабицкий, А. В. Бауков, А. С. Кушнарев, П. Н. Рожков // Труды ЧИМЭСХ. Вып. 98. – Челябинск, 1976. – С. 62-67.
10. Бабков, В. Ф. Основы грунтоведения и механики грунтов / В. Ф. Бабков, В. М. Безрук. – М.: В.Ш., 1986. – 239 с.

11. Багиров, И. З. Исследование деформации и сопротивлений грунта с клином при различных скоростях / И. З. Багиров. Автореф. дис... канд.техн.наук./ Минск. ВНИИ земледелия, 1963.- 24 с.
12. Банди, Б. Методы оптимизации / Б Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
13. Бартнев, М. Н. Вспашка сухих и твердых почв / М. Н. Бартнев // Механизация и электрификация с.х.. – 1987.– №2. – С. 7-9.
14. Бауков, А. В. Распределение давления на участке контакта катка с почвой / А. В. Бауков, А. С. Кушнарев, П. Н Рожков // Труды ЧИМЭСХ. Вып. 57. – Челябинск. – 1972.– С. 43-47.
15. Бахтин, П. У. Исследование физико-механических и технологических свойств основных типов почв СССР / П. У. Бахтин – М.: Колос, 1969. – 329 с.
16. Безухов, И. Н. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / И. Н. Безухов. – М.: В.Ш., 1968. – 512 с.
17. Безухов, Н. И. Теория упругости и пластичности / И. Н. Безухов.– М.: Гостехтеориздат, 1953.– 420 с.
18. Бестер, И. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики / И. Бестер, Г. Сеге – Ч. 2. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 320 с.
19. Бишоп, А. У. Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта / А. У. Бишоп // Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир,1975. – С. 7-75.

20. Бледных, В. В. Математическая модель лемешно–отвальной поверхности корпуса плуга / В. В. Бледных // Техника в сельском хозяйстве. – 1993. – № 2. – С. 8–10.
21. Бледных, В. В. Математическая модель рабочей поверхности корпуса плуга / В. В. Бледных, С. Я. Худяков // Техника в сельском хозяйстве.- 1989.- № 2.- С. 10–12.
22. Булгаков, В. М. Самоорганізація ґрунтових структур / В. М. Булгаков, Б. А. Шелудченко – К.: НАУ, 1998. – 58 с.
23. Буромский, В. М. Новый метод построения крошащих поверхностей плужных корпусов на технологических основаниях / В. М. Буромский // Сб. трудов по земледельческой механике. – М.: Сельгиз., 1954. – т. 2. – С. 122-136.
24. Бурченко, П. Н. Механико-технологическое обоснование параметров почвообрабатывающих машин нового поколения для работы в оптимальном диапазоне скоростей: дис.... докт. техн. наук: 05.06.01 / П. Н. Бурченко. – ВИСХОМ. – М., 1987. – 409 с.
25. Вадюнина, А. Ф. Методы исследования физических свойств почв / А. Ф. Вадюнина, З. А. Корчагина. – М.: Агропромиздат, 1986. – 416 с.
26. Василенко, П. М. Введение в земледельческую механику / П. М. Василенко. — К.: Сільгоспосвіта, 1996. – 240 с.
27. Василенко, П. М. К методике составления дифференциальных уравнений движения частиц по фрикционным рабочим поверхностям сельскохозяйственных машин / П. М. Василенко // Конструирование и технология производства с.х. машин.- К.: Техника, 1973. Вып.3. – С. 34-51.

28. Васильковский, С. М. Сопротивление почвы движению культиваторной лапы / С. М. Васильковский // Техника в сельском хозяйстве.—1996.- №3.- С. 17-20.

29. Васильковский, С. М. Исследование сопротивления почвы движению культиваторной лапы / С. М. Васильковский, В. В. Ключев //Механизация и электрификация с.х., 1987. – № 4. – С. 37-39.

30. Веников, А. Г. Обоснование формы бокового профиля и величины выноса рабочей части стойки плоскорежущей лапы / А. Г. Веников // Труды ЧИМЭСХ. Вып. 158. –Челябинск. – 1980. – С.39-42.

31. Ветохин, В. И. Малоэнергоемкие рыхлители почвы: форма продольного профиля рабочей поверхности / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1993. – №6. – С.12–15.

32. Ветохин, В. И. Метод проектирования безотвальных рабочих органов / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1993. – №9. – С.17–18.

33. Ветохин, В. И. Модель крошения почвы под действием клина / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1994. – № 10. – С. 25–27.

34. Ветохин, В. И. Применение системы поверхностей с переменной кривизной при создании серии рабочих органов / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1994. – № 4. – С. 23–25.

35. Ветохин, В. И. Проектирование поперечного профиля стойки и ножа плуга–рыхлителя / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1993. – №11. – С.18–20.

36. Ветохин, В. И. Проектирование рыхлителей почвы на основе метода отображения рациональных деформаций пласта / В. И. Ветохин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1994. – № 1. – С. 21–24.
37. Ветров, Ю. А. Резание грунтов землеройными машинами / Ю. А. Ветров. – М.: Машиностроение, 1971. – 357 с.
38. Виноградов, В. И. Сопротивление почвы смятию в зависимости от скорости деформации / В. И. Виноградов // Механизация с. х. производства: Сб. научн. тр. ЧИМЭСХ. – Челябинск. – 1985. – Вып. 43. – С. 11-17.
39. Водяник, И. И. Воздействие ходовых систем на почву / И. И. Водяник. – М.: Агропромиздат, 1990. – 172 с.
40. Войтюк, Д. Г. До визначення траєкторії руху частинок ґрунту по циліндричних поверхнях робочих органів ґрунтообробних знарядь / Д. Г. Войтюк, С. Ф. Пилипака // Механізація с. г. виробництва: зб. наук. праць НАУ. – т. V. – 1999. – С. 242-250.
41. Волков, Е. Т. Факторы, определяющие процесс крошения пласта при вибрации лемеха корпуса плуга / Е. Т. Волков // Труды Волгоградского СХИ. – Волгоград. – 1972. – т. VI. – С. 63-68.
42. Воронин, А. Д. Основы физики почв / А. Д. Воронин. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1986. – 244 с.
43. Вялов, С. С. Реологические основы механики грунтов / С. С. Вялов. – М.: Высш. школа, 1978 – 447 с.
44. Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

45. Галин, Л. А. Упруго-пластические задачи / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
46. Гаузнер, С. И. Измерение массы, объема и плотности / С. И. Гаузнер, С. С. Кивилис, А. П. Осокина, А. Н. Павловский. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 254 с.
47. Гениев, Г. А. Динамика пластической и сыпучей сред / Г. А. Гениев, М. И. Эстрин. – М.: Изд-во лит. по строительству, 1972. – 216 с.
48. Гольденблат, И. И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Конов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
49. Гольдштейн, М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. – М.: Издательство литературы по строительству, 1971. – 368 с.
50. Гольдштейн, М. Н. Механика грунтов, основания и фундаменты / М. Н. Гольдштейн, А. А. Царьков, И. И. Черкасов. – М.: Транспорт, 1981. – 320 с.
51. ГОСТ 20915-75. Сельскохозяйственная техника. Методы определения условий испытаний. – М.: Госкомсельхозтехника СССР, 1975. – 34 с..
52. ГОСТ 23728-88. Техника сельскохозяйственная. Методы экономической оценки. – М.: Изд-во стандартов, 1979. – 24 с.
53. ГОСТ 24055-88 – ГОСТ 24059-88. Техника сельскохозяйственная. Методы эксплуатационно-технологической оценки. – М.: Изд-во стандартов, 1980. – 45 с.
54. Горячкин, В. П. Собрание сочинений / В. П. Горячкин. – М.: Колос, 1968. – Т.1. – 720 с.

55. Горячкин, В. П. Собрание сочинений / В. П. Горячкин. – М.: Колос, 1968. – Т. 2. – 455 с.
56. Грибановский, П. А. Исследование и выбор параметров рыхлительного рабочего органа и конструктивных схем культиватора-плоскореза для обработки почв / П. А. Грибановский. – Автореф. дис... канд.техн.наук: 05.06.01/КИСХМ. – Алма-Ата, 1968. – 25 с.
57. Гуков, Я. С. Механіко-технологічне обґрунтування енергозберігаючих засобів для механізації обробітку ґрунту в умовах України: автореф. дис... докт. техн. наук: 05.20.01./ Я. С. Гуков. – ІМЕСГ УААН. – Глеваха, 1998. – 33 с.
58. Гуков, Я. С. Обробіток ґрунту. Технологія і техніка. Механіко-технологічне обґрунтування енергетичних засобів для механізації обробітку ґрунту в умовах України / Я. С. Гуков. – К.: Нора-прінт, 1999. – 280 с.
59. Гуревич, А. М. Математические модели деформирования почвы / А. М. Гуревич, Ф. Ф. Мухамедьяров, В. С. Халтурин // С. х. науки Север.-Вост. Европ. части России. – Киров, НИИ с. х. Север.-Вост. – 1995. – т. 4. – С. 12-17..
60. Деграф, Г. А. Влияние скорости резания на изменение напряжений в почве / Г. А. Деграф // Труды Казанского СХИ. – 1969. – т. 12. – С. 19-22.
61. Егер, Дж. К. Упругость, прочность и текучесть / Дж. К. Егер. – М.: Гос. Научн.-тех. изд-во машиностроительной литературы, 1961. – 172 с.
62. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Пер. с англ.– М.: Мир, 1989. – 510 с.
63. Джонсон, У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979.– 568 с.

64. Дубровін, В. О. Фізичні рівняння формалізації ґрунту / В. О. Дубровін, В. П. Ковбаса // Наук. вісник НАУ. – Київ – 2003. – Вип. 60. – С. 172-176.
65. Дубровін, В. О. Механіко-технологічне обґрунтування диференціації засобів механізації оранки: дис... докт. техн. наук: 05.20.01 / В. О. Дубровін. – Глеваха, 1997. – 420 с.
66. Желиговский, В. А. Элементы теории почвообрабатывающих машин и механической технологии сельскохозяйственных материалов / В. А. Желиговский. – Тбилиси: Грузинский СХИ, 1960. – 120 с.
67. Жилкин, В. А. Применение метода голографической интерферометрии при решении плоских задач механики грунтов / В. А. Жилкин, Г. В. Тупикова // Вестник Челябинского агроинженерного университета. – Челябинск. – 1994. – № 1. – С. 33–37.
68. Забродський, П. М. Обґрунтування процесу роботи і параметрів дискових робочих органів ґрунтообробних знарядь: дис... канд.техн.наук: 05.20.01. / П. М. Забродський. – Житомир, 1997. – 199 с.
69. Заика, П. М. Избранные задачи земледельческой механики: Практ. Пособие / П. М. Заика. – К.: Изд-во УСХА, 1992. – 512 с.
70. Заїка, П. М. Теорія сільськогосподарських машин. т.1. Машини та знаряддя для обробітку ґрунту / П. М. Заїка. – Харків: Око, 2001. – 441 с.
71. Зеленин, А. Н. Основы разрушения грунтов механическими способами / А. Н. Зеленин. – М.: Машиностроение, 1968. – 357 с.
72. Зеленский, К. Х. Компьютерные методы прикладной математики / К. Х. Зеленский, В. Н. Игнатенко, А. П. Коц. – К.: Дизайн – В., 1999. – 352 с.

73. Золотаревская, Д. И. Взаимосвязь различных математических моделей деформирования почвы / Д. И. Золотаревская // Механизация и электрификация с. х. – 1983. – № 5. – С. 10-16.

74. Игнатенко, И. В. Обобщение динамической модели взаимодействия рабочего органа с почвой / И. В. Игнатенко // Комплексная механизация и автоматизация сельскохозяйственного производства. – Ростов на Дону, 1985. – С. 57–66.

75. Игнатенко, И. В. Теоретические основы динамики упругих смещений рабочего органа почвообрабатывающих машин / И. В. Игнатенко // Реф. сборник ЦНИИТЭИ автосельхозмашины. – 1990. – № 1307. – С. 90.

76. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 289 с.

77. Имамов, И. С. Некоторые физико-механические характеристики почвы как среды воздействия при ее деформировании дисковыми рабочими органами / И. С. Имамов // Сб. научн. тр. НПО ВИСХОМ. – 1990. – № 2. – С. 102-118.

78. Ионов, В. Н. Динамика разрушения деформируемого тела / В. Н. Ионов, В. В. Селиванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.

79. Ионов, В. Н. Динамика разрушения деформируемого тела / В. Н. Ионов, В. В. Селиванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.

80. Ишлинский, А. Ю. Прикладные задачи механики. Книга 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – 360 с.

81. Казаков, В. С. Гидромеханические аналоги и испытание объемных рыхлителей / В. С. Казаков // С. х. машины. Сб. тр. Московского агроинженерного университета. – М. – 1995. – С. 28-35.

82. Канарев, Ф. М. Ротационные почвообрабатывающие машины и орудия / – Ф. М. Канарев. – М.: Машиностроение, 1983. – 142 с.
83. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
84. Качинский, Н. А. Структура почвы (итоги и перспективы изучения вопроса) / Н. А. Качинский. – М.: Из-во МГУ, 1963,– 100 с.
85. Кленин, Н. И. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины / Н. И. Кленин, В. А. Сакур. – М.: Колос, 1980.– 671 с.
86. Кобозев, И. В. Разработка новых ресурсосберегающих технологий обработки почвы / И. В. Кобозев, Г. С. Моршин, Э. А. Цвирко // Изв. Тимирязевской с. х. академии. – 1995. – № 2. – С. 22-40.
87. Ковбаса, В. П. Розробка моделі напруженого стану ґрунту методами числового моделювання / В. П. Ковбаса., П. С. Короткевич., В. М. Мартишко., Ю. О. Погорілець // Збірник наукових праць НАУ, "Механізація с.г. виробництва". – Київ. – 1997. – т.3. – С. 21-23.
88. Ковбаса, В. П. Моделювання процесу взаємодії робочих органів сільськогосподарських машин з ґрунтом / В. П. Ковбаса, Д. Г. Войтюк, П. С. Короткевич, В. М. Мартишко // Науковий вісник НАУ. – Київ. – 1997. – Вип.2. – С. 117-123.
89. Ковбаса, В. П. Дослідження процесу взаємодії робочих органів з ґрунтом / В. П. Ковбаса, П. С. Короткевич // Збірник наукових праць НАУ «Механізація с. г. виробництва». – Київ. – 1998. – т. 4. – С. 81-25.
90. Ковбаса, В. П. Методи дослідження напружено-деформованого стану ґрунту / В. П. Ковбаса, П. С. Короткевич // Науковий вісник НАУ. – К. – 1998. – Вип.9. – С. 45-48.

91. Короткевич, П. С. Про вплив геометрії робочих органів на розподіл напружень в ґрунті / П. С. Короткевич, В. П. Ковбаса // Науковий вісник НАУ. – К. – 1998. – Вип. 9. – С. 49-55.

92. Ковбаса, В. П. Моделирование распределения напряжений в почве под действием деформаторов / В. П. Ковбаса // Праці Таврійської держ. агротехн. Академії. – Мелітополь. – 2001. – Вип. 2. – т. 16. – С. 123-127.

93. Ковбаса, В. П. До визначення геометричної форми поверхні робочих органів / В. П. Ковбаса, О. М. Дімчев, Ю. О. Гуменюк // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Кіровоград. – 2001. – Вип. 31. – С. 11-13.

94. Ковбаса, В. П. Про визначення критерію вигляду напружено-деформованого стану суцільного середовища / В. П. Ковбаса // Вісник ХДТУСГ «Підвищення надійності відновлюваних деталей машин». – Харків. – 2001. – Вип. 8, т. 2. – С. 79-82.

95. Ковбаса, В. П. Вплив геометричної форми деформатора на вигляд деформованого стану середовища / В. П. Ковбаса // Наук. вісник НАУ – К. – 2002. – Вип. 49. – С. 133-139.

96. Ковбаса, В. П. Переміщення та деформації середовища перед робочим органом у просторі / В. П. Ковбаса // Наук. вісник НАУ. – К. – 2003. – Вип. 60. – С. 198-203.

97. Ковбаса, В. П. Напруження та вигляд напруженого стану у ґрунтовому напівпросторі перед дисковим робочим органом / В. П. Ковбаса, В. О. Дубровін // Вісник ХДТУСГ, «Механізація сільськогосподарського виробництва». – Харків. – 2003. – Вип.20. – С. 150-157.

98. Ковбаса, В. П. Деформації та критерій вигляду деформованого стану перед дисковим робочим органом / В. П. Ковбаса // Вісник ХДТУСГ

«Механізація сільськогосподарського виробництва». – Харків. – 2003. – Вип.21. – С. 132-140.

99. Колесников, Ю. В. Механика контактного разрушения / Ю. В. Колесников, Е. М. Морозов. – М.: Наука 1989. – 224 с.

100. Корабельский, В. И. Методические указания по конструированию поверхностей рабочих органов почвообрабатывающих машин с заданными свойствами / В. И. Корабельский. – К.: Изд-во Мин. Вуза УССР, 1987. – 105с.

101. Короткевич, П. С. О влиянии формы лезвия на сопротивление почвы резанию / П. С. Короткевич //Материалы научн.-техн. семинара. – М.: ВИСХОМ. – 1965. – Вып 19. – С. 210-218.

102. Короткевич П. С. О влиянии формы лезвия ножа на сопротивление подрезанию пласта при обработке почвы / П. С. Короткевич // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – Вып. 8. – С.13-17.

103. Кострицын, А. К. Основные закономерности сопротивления почвы деформации и разрушению и их исследование для обоснования типа и параметров почвообрабатывающих противоэрозионных рабочих органов / А. К. Кострицын. – дис... докт. техн. наук: 05.20.01. – М., 1986. – 356 с.

104. Кравчук, В. І. Енерговитрати при розпушенні ґрунту механічним способом / В. І. Кравчук, Я. С. Гуков // Вісник аграрної науки. – № 5. – 2001. – С. 56-59.

105. Крутков, Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости / Ю. А. Крутков. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 200 с.

106. Кузьмин, В. И. Исследование реологических свойств глинистых почв применительно к вопросам механизации процессов почвообработки / В.

И. Кузьмин. – автореф. дис... канд. техн. наук: 05.20.01. – АрмСХИ. – Ереван, 1971. – 30 с.

107. Кулен, А. Современная земледельческая механика / А. Кулен, Х. Куиперс. – М.: Агропромиздат, 1986. – 349 с.

108. Кушнарев, А. С. Механико-технологические основы процесса воздействия рабочих органов почвообрабатывающих машин и орудий на почву / А. С. Кушнарев. – дис. ... докт. техн. наук: 05.20.01. – Мелитополь, 1980. – 329 с.

109. Кушнарев, А. С. Механико–технологические основы обработки почвы / А. С. Кушнарев, В. И. Кочев. – К.: Урожай, 1989 – 144 с.

110. Левчук, Н. С. Оценка эффективности противоэрозионных мероприятий / Н. С. Левчук, Н. Н. Нагорній, М. И. Грицишин, И. М. Годунов // Земледелие. – 1984. – №1. – С. 23-27.

111. Лебедев, А. А. О возможности совмещения условия пластичности и хрупкого разрушения / А. А. Лебедев // Прикладная механика. – 1968. – Вып.4. – С. 85-93.

112. Ловейкін, А. В. Розв'язок крайових задач потенціалу та теорії пружності для тіл з кутовими точками / А. В. Ловейкін: автореф. дис... канд. фіз-мат. наук: 01.02.04. – Київський національний університет ім. Т. Шевченко. – К. – 2000. – 20 с.

113. Лозовский, В. Г. Обоснование диаметра дисков луцильников / В. Г. Лозовский, Ю. М. Лукарчев // Тракторы и с. х. машины, №8. – 1984. – С. 105-106.

114. Луканин, Ю. В. Теория подобия при деформации почв / Ю. В. Луканин // «Ученые записки факультета механизации сельского хозяйства». – Пенза, СХИ. – 1964. – Вып. 8. – С.146-158.

115. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
116. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с..
117. Лучинский, Н. Д. О расчете воздействия почвы на плоский и сферический диски / Н. Д. Лучинский // Доклады ВАСХНИЛ. – 1983. – №5. – С.47-48.
118. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1935. – 674 с.
119. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер – М.: Наука, 1965. – 224 с.
120. Малинин, И. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / И. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1985. – 399 с.
121. Малышев, М. В. Об использовании для сыпучих грунтов условия прочности Губера-Мизеса-Боткина / М. В. Малышев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. – № 5. – С. 3-5.
122. Мацепуро, В. М. Содержание и методы исследований механики сельскохозяйственных сред и материалов / В. М. Мацепуро // Труды ВИМ. – М. – 1975. – т. 69. – С. 3-10.
123. Мацепуро, В. М. Рациональная формула В. П. Горячкина и характер зависимости ее коэффициентов от основных факторов, влияющих на сопротивление почв / В. М. Мацепуро // Труды ВИМ. – М. – 1975. – т. 69. – С. 11-5.
124. Медведев, В. В. Оптимизация агротехнических свойств черноземов / В. В. Медведев. – М.: Агропромиздат, 1988. – 157 с.

125. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир. – 1974. – 318 с.
126. Меленко, В. И. Методы экспериментального определения силовых характеристик почвообрабатывающих орудий / В. И. Меленко. – Новосибирск: Изд-во университета, 1991. – 107 с.
127. Методика определения экономической эффективности новых и модернизированных с. х. машин, изобретений и рационализаторских предложений // НПО ВИСХОМ. – М. 1985. – 159 с.
128. Методические рекомендации по энергетической оценке систем и приемов обработки почвы. – М.: ВАСХНИЛ, – 1989. – 29 с.
129. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В. В. Троценко, А. А. Лебедев, В. А. Стрижало и др. – К.: Логос, 2000. – 571 с.
130. Митков, А. Л. Статистические методы в сельхозмашиностроении / А. Л. Митков, С. В. Кардашевский. – М.: Машиностроение, 1978. – 360 с.
131. Мороз, Л. С. Механика и физика деформаций и разрушения материалов / Л. С. Мороз. – М.: Машиностроение, 1984. – 224 с.
132. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М.: Мир, 1968. – 863 с.
133. Нартов, П. С. Дисковые почвообрабатывающие орудия / П. С. Нартов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972. – 184 с.
134. Нерпин, С. В. Физика почвы / С. В. Нерпин, А. Ф. Чудновский. – М.: Наука, 1967. – 583 с.

135. Новиков, В. Ф. Исследование кинематики и механики движения пласта по лемешно–отвальной поверхности / В. Ф. Новиков, М. П. Быстров / Труды ВИМ – 1969. – Вып. 12. – С. 109-119.
136. Новиков, В. Ф. Основы теории и механико-технологические исследования процесса вспашки / В. Ф. Новиков: автореф. дис.... докт. техн наук: 05.20.01. – Р-ДИСХМ. – Ростов на Дону, 1970. – 40 с.
137. Новожилов, В. В. Вопросы механики сплошной среды / В. В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
138. Овчинников, П. Ф. Реология тиксотропных систем / П. Ф. Овчинников, Н. Н. Круглицкий, Н. В. Михайлов. – К.: Наукова думка, 1972. – 120 с.
139. Огрызков, Е. П. Агроэнергетическая интерпретация рациональной формулы В.П.Горячкина / Е. П. Огрызков, В. Е. Огрызков // Тракторы и с.х. маштны. – 2000. – №8. – С. 32-34
140. Орнатский, Н. В. Механика грунтов / Н. В. Орнатский. – М.: Изд-во МГУ, 1950. – 419 с.
141. Осадчий, А. П. Об оптимальных величинах при смятии и крошении пласта почвы / А. П. Осадчий // Земледельческая механика: Сб. научн. тр. МИИСП. – М. – 1966. – с. 37-38..
142. Осадчий, А. П. Исследование процессов крошения почвы без оборота пласта / А. П. Осадчий: автореф. дис... докт. техн. наук: 05.20.01/ВСХИ. – Волгоград, 1972. – 36 с.
143. ОСТ 70.4.2-80. Испытания сельскохозяйственной техники. Машины и орудия для поверхностной обработки почвы. Программа и методы испытаний. – М.: Госкомсельхозтехника СССР, 1981. – 153 с.

144. Пальмов, В. А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел / В. А. Пальмов // Успехи механики. – Варшава, 1980. Т.3. – Вып.3. – С. 76-115.

145. Панов, И. М. Механико-технологические основы расчета и проектирования почвообрабатывающих машин с ротационными рабочими органами / И. М. Панов: дис... докт. техн. наук: 05.20.01. – М., 1983. – 425 с.

146. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностроительной литературы, 1957. – 336 с.

147. Панченко, А. Н. Теория измельчения почв почвообрабатывающими орудиями / Панченко, А. Н. – Днепропетровск: ДДАУ, 1999. – 140 с.

148. Партон, В. З. Механика упруго-пластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

149. Пащенко, В. Ф. Механико-технологические и технические основы снижения энергоемкости механизированных процессов обработки почвы к посеву / В. Ф. Пащенко: автореф. дис... канд. техн. наук:05.06.01/УСХА. – К., 1982. – 22 с.

150. Плющев, Г. В. Исследование процесса глубокого рыхления почвы и выбор оптимальных параметров пропашного культиватора-глубокорыхлителя для южной орошаемой зоны земледелия / Г. В. Плющев: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.20.01/ВИМ. – М., 1974. – 34 с.

151. Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1968. – 176 с.

152. Погорелый, Л. В. Инженерные методы испытаний сельскохозяйственной техники / Л. В. Погорелый. – К.: Техніка, 1991. – 157 с.

153. Погорелый, Л. В. Сельскохозяйственная техника и техника будущего / Л. В. Погорелый. – К.: Урожай, 1988. – 176 с.
154. Прокопенко, Д. Д. Интенсификация механизированных процессов поверхностного улучшения естественных кормовых угодий / Д. Д. Прокопенко: дис... докт. техн. наук: 05.20.01. – Львов, 1985. – 421 с.
155. Прокопенко Д. Д. Прочностные свойства задернелых почв / Д. Д. Прокопенко // Научн. тр. Львовского СХИ. – Дубляны. – 1977. – т. 72. – С. 3-11.
156. Прокопенко, Д. Д. Экспресс-метод определения деформационных характеристик задернелых почв / Д. Д. Прокопенко // Механизация и электрификация с. х. – 1983. – №5. – С. 22-26.
157. Работнов, Ю. А. Введение в механику разрушения / Ю. А. Работнов. – М.: Наука, 1987. – 80 с.
158. Рахматуллин Х. А. Вопросы динамики грунтов / Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомоян, Н. А. Алексеев. – М.: Изд-во МГУ. 1964. – 239 с.
159. Ревут, И. Б. Физика почв / И. Б. Ревут. – М.: Колос, 1972. – 368 с.
160. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
161. Реология / Под ред. Ф. Эйриха – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 824 с.
162. Рогач, Ю. П. Обоснование оптимальных параметров и разработка зональных рабочих органов культиватора-плоскореза для зоны Юга Украины / Ю. П. Рогач: дис... канд. техн. наук: 05.20.01. – Мелитополь, 1992. – 204 с.

163. Русанов, В. А. Методы определения деформаций почвогрунтов и показателей эффективности воздействия движителей на почву / В. А. Русанов // Тракторы и с. х. машины. – 1996. – № 3. – С. 25-28.
164. Саати, Т. Математические методы исследования операций / Т. Саати. – М.: Воениздат, МО СССР, 1963. – 420 с.
165. Сабликов, М. В. Механические свойства почв / М. В. Сабликов // Механизация и электрификация с. х. – 1982. – № 4. – С. 41-42.
166. Сагальчик, Б. М. Исследование процесса вспашки торфяного грунта при прокладке оросительной сети / Б. М. Сагальчик: автореф. дис... канд. техн. наук: /МИМСХ. – Минск, 1963. – 18 с.
167. Сагомоян, А. Я. Проникание / А. Я. Сагомоян. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 300 с.
168. Сакун, В. А. Механико-технологическое обоснование технических средств для основной обработки связных задернелых почв / В. А. Сакун: дис... докт. техн. наук: 05.20.01.– М., 1989. – 502 с.
169. Сало, В. М. Експериментальне визначення залежності твердості різних за механічним складом ґрунтів від їх фізико-механічних властивостей / В. М. Сало // Праці Таврійської держ. агротехн. Академії. – Мелітополь. – 2001. – Вип. 1, т. 22. – С. 57-61.
170. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М.: ВШ., 1970. – 288 с.
171. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1987. – 430 с.
172. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1976, т. 1, – 535 с.

173. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1976, т. 2, – 573 с.
174. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины / Под общ. ред. Г. Е. Листопада. – М.: Агропромиздат, 1986. – 688 с.
175. Синеоков Г. Н. Дисковые рабочие органы почвообрабатывающих машин / Г. Н. Синеоков. – М.-Л.: Машгиз., 1949. – 86 с.
176. Синеоков Г. Н. Теория и расчет почвообрабатывающих машин / Г. Н. Синеоков, И. М. Панов. – М.: Машиностроение, 1977. – 320 с.
177. Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М.: Изд-во физ.- мат. литературы, 1960. – 240 с.
178. Соловьев С. П. Исследование элементов механики процесса резания почвы плоскими и цилиндрическими клиньями / С. П. Соловьев: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.410/ВИМ. – М., 1968. – 37 с.
179. Справочник конструктора сельскохозяйственных машин. Т. 2 – М.: Машиностроение, 1967. – 830 с.
180. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
181. Стрельбицкий, В. Ф. Дисковые почвообрабатывающие машины / В. Ф. Стрельбицкий. – М.: Машиностроение, 1978. – 135 с.
182. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – т. 1. – М.: Мир, 1985. – 479 с.
183. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха – т. 2. – М.: Мир, 1985. – 496 с.

184. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М.: Машиностроение, 1979. – 568 с.
185. Тимофеев, А. И. Механическая технология обработки почвы / А. И. Тимофеев, В. А. Сакун. – М.: МИИСП. – 1978. – 65 с.
186. Тимошенко, С. П., Гудьер, Дж. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
187. Теплинский, И. З. Модель деформирования процесса крошения почвы различными рабочими органами чизельного плуга / И. З. Теплинский, А. Б. Калинин // Совершенствование технологических процессов и рабочих органов машин в растениеводстве и животноводстве. – С-П, 1993. – С. 50–56.
188. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.-Л.: Гостехтеориздат. – 1951, – 659 с.
189. Токушев, Ж. Е. Исследование зоны контакта рабочей части почворезающего инструмента с обрабатываемой почвой с применением метода голографической интерферометрии / Ж. Е. Токушев, Е. Ю. Покровская. – НПО ВИСХОМ. – М.: 1993. – 7. ДЕП ЦНИИТЭИ Траторосельхозмашина – № 1544. – т. 93.
190. Треффц, Е. Математическая теория упругости / Е. Треффц – М. – Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 172 с.
191. Трощенко, В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении / В. Т. Трощенко. – К.: Наукова думка, 1981. – 344 с.
192. Филенко-Бородич, М. М. Механические теории пластичности / М. М. Филенко-Бородич. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – 91 с.

193. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Т.1. – М.: Наука, 1970. – 608 с.
194. Хархута, Н. Я. Реологические свойства грунтов / Н. Я. Хархута, В. М. Иевлев. – М.: НТИ Минавтотранса и шос. дорог РСФСР, 1961. – 64 с.
195. Хил, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хил. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 408 с.
196. Цимерман, М. З. Рабочие органы почвообрабатывающих машин / М. З. Цимерман. – М.: Машиностроение, 1978. – 295 с.
197. Цлаф, Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. Я. Цлаф. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
198. Цытович, Н. А. Механика грунтов / Н. А. Цытович. – М.: В.Ш., 1983. – 288 с.
199. Чеботарев, Г. П. Механика грунтов, основания и земляные сооружения / Г. П. Чеботарев. – М.: Изд-во лит. по строительству, 1968, – 616с.
200. Шевченко, И. А. Обоснование геометрических параметров ступенчатых рабочих органов глубоких рыхлителей для Юга Украины / И. А. Шевченко. – дис... канд. техн. наук: 05.20.01. – М. – 1987. – 182 с.
201. Шевченко, И. А. Математическая модель взаимодействия дискового рабочего органа с почвой / И. А. Шевченко, В. Д. Алба // Праці ТДАТА. – Мелітополь. – 1999. – Вип. 1, т.10. – С. 124-130.
202. Шевченко, И. А. Теоретическое определение плотности почвы под прикапывающими рабочими органами / И. А. Шевченко, С. Н. Ландарь // Праці ТДАТА. – Мелітополь. – 1999. – Вип. 1, т. 10. – С. 131-138.

203. Шевченко, И. А. Математическая модель взаимодействия дискового рабочего органа с почвой / И. А. Шевченко // Праці ТДАТА. – Мелітополь. – 1999. – Вип. 1, т. 10. – С. 124-130.

204. Шевченко, И. А. Математическая модель движения элементов почвы по криволинейной поверхности / И. А. Шевченко, Ю. П. Рогач // Труды международной конф. «Моделирование процессов и технологического оборудования в с.х.». – Мелітополь: ТДАТА, 1994. – С. 31-34.

205. Шевченко, И. А. Математическая модель оптимизации геометрических параметров и режимов работы прикатывающих рабочих органов / И. А. Шевченко, Ю. П. Рогач // Вопросы механизации в с.х.: Сб. научн. Тр. – Запорожье: ИМЖ УААН, 1994. – С.76-80.

206. Шевченко, І. А. Обґрунтування геометричних параметрів дискових робочих органів / І. А. Шевченко // Праці ТДАТА. – Мелітополь – 2001. – Вип. 2 – т. 16. – С. 13-20.

207. Шевченко, І. А. Теоретичне обґрунтування поверхні ґрунтообробного робочого органу / І. А. Шевченко, Ю. П. Рогач // Зб. наук. праць НАУ, "Механізація с.г. виробництва". – К., НАУ. – 2001. – т. 12. – С. 187-194.

208. Шевченко, І. А. Обґрунтування технологій та технічних засобів для обробітку ґрунту на базі їх агрофізичних показників / І. А. Шевченко. – автореф. дис... докт. техн. наук: 05.05.11/НАУ.- К., 2002. - 36 с.

209. Шевченко, І. А. Методика експериментального визначення вектора рівнодіючої сил дії ґрунту на робочі органи ґрунтообробних знарядь / І. А. Шевченко, О. Г. Настич // Праці ТДАТА. – Вип. 1. – т. 22. – Мелітополь: ТДАТА, 2001. – С. 62-67.

210. Шелудченко, Б. А. Агромеханіка ґрунтів / Б. А. Шелудченко. – Житомир, Полісся, 1992. – 249 с.
211. Шелудченко, Б. А. Обоснование рабочего процесса и параметров глубокорыхлящих рабочих органов объемного типа / Б. А. Шелудченко. – дис. к. т. н.: 05.20.01. – Глеваха, 1990. – 207 с.
212. Штаерман, М. Я. Контактные задачи теории упругости / М. Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 244 с.
213. Шубенко, В. О. Обґрунтування процесу роботи та параметрів кільцевого робочого органу дискової борони / В. О. Шубенко. – дис... канд. техн. наук: 05.05.11. – Житомир, 2001. – 217 с.
214. Шукле, Л. Реологические проблемы механики грунтов / Л. Шукле. – М.: Стройиздат, 1976. – 486 с.
215. Юдкин В. В., Егоров А. Г., Гуляев А. П. Анализ напряженного состояния почвы вблизи плоскореза с учетом срезаемого слоя / В. В. Юдкин, А. Г. Егоров, А. П. Гуляев // Улучшение использования машинно-тракторного парка. – Саратов, 1993. – С. 45-58.
216. Abdalla, A. M. The mechanics of root growth in granular medium / A. M. Abdalla, D. R. Hittaratchi, A. R. Reece // Journal Agr. Eng.Res. 14. – 1969. – P. 236-248.
217. Bakker, D. M. The Measurement of Critikal State Parameters for a Blark Earth / D. M. Bakker, H. Harris. – Nat. Conf. Publ., Inst. Eng., Austral, 1992. – N 92/11. – P. 189–193.
218. Barnes, H. K. Similitude in studies of tillage implement forces / H. K. Barnes, H. E. Mc Leod, C. W. Bockhop // Agr. Eng. – 1960. – N 1 – P. 32-37.

219. Daniel, Hillel. Fundamentals of Soil Physics / Hillel Daniel. – New York, 1980. – 440 p.
220. Dexter, A. R. Soil Deformation included by a moving cutting Blade on expanding Tube and a Penetrating sphere / A. R. Dexter, D. W. Tanner. // J. Agr. Eng. Res. – 17. 371-5. – 1972. – P. 21-32.
221. Graig, R. F. Soil Mechanics / R. F. Graig. – New York, 1978. – 318 p.
222. Itennicen, I. M. Dynamic soil strength parameters from unconfined compression tests / I. M. Itennicen, R. E. Nefner, I. A. Weber // Trans of the ASAE. – 1977. – vol. 20. – N1. – P. 25-29.
223. Osman, M. S. The mechanics of soil cutting / M. S. Osman. – Agr. Eng. – N 4. – vol. 9. – 1964. – P. 23-28.
224. Randall, K. The effect of wheel pull on soil Stress / K. Randall, Wood and Larry G. Wells // Paper ASAE N 84-1046. – 1984. – 14 p.
225. Science engineering and soil measurement, 1991. – 28. – № 2-3. – P. 89-92.
226. Souker R. Untersuchngen zum Energieanfandbei der Bodenzerrkleinerung / R. Souker, S. Anich, // «Agrartechnik». – 1988. – 38, N 5. – P. 16-19.
227. Vonderberg, G. E. Pressure distribution between a smooth hire on the soil turns / G. E. Vonderberg, W. R. Gill // Amer. Soc. Agr.Eng. – 1962. – N 5. – P. 105-107.
228. Palmov, W. A. Rheological models in nonlinear mechanics of deformable body / W. A. Palmov // Advances in Mechanics. – vol. 3. – num. 3. – 1980. – P. 76-115.

229. Young, S. C. Quantifying Soil physical condition for tillage control applications / S. C. Young, C. E. Jonson, R. L. Schafer. – Treans ASAE. – 1988. – 31 N 3. – 12 p.

230. Kolodziej, Waclaw. Substantial characterization of soil While Ballasted / Waclaw Kolodziej, Jan Pirog // Soil mechanics in agriculture. – Warshawa. – 1976. – P. 43-66.

231. Wang, J. Deformation and Failure in Clay Soil: Part 2, Soil Bin Experiments / J, Wang, D. Gee-Clough // J. agric. Engng. Res. N 54. – 1993. – P. 57-66.

232. Wang, J. Deformation and Failure in Clay Soil: Part 1, Stress-Strain Relationships / J, Wang, D. Gee-Clough // J. agric. Engng Res. – N 54. – 1993. – P. 37-55.

233. Istvan, Huszar. Soil mechanics in agriculture / Huszar Istvan // Soil mechanics in agriculture. – Warshawa, 1976. – P. 11-22.