Національний університет біоресурсів
і природокористування України

ЗБІРНИК

ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ
XV МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
«ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»

з нагоди 94-ї річниці від дня народження
доктора технічних наук, професора, академіка АН ВШ України,
Обухової Віолетти Сергіївни
(1926-2005)

10 березня 2020 року

м. Київ

УДК 514.7

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАДАХ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

М.А. Шульженко[1], Г.Я. Тулученко, І.А. Зоріна
Херсонський національний технічний університет[1]
Херсонська державна морська академія

Математичні змагання імені Уільяма Лоуелла Патнема для студентів бакалаврського рівня підготовки з навчальних закладів США та Канади щорічно проводяться, починаючи з 1938 року [1]. З 1985 року ведеться електронний архів завдань цього конкурсу та їх розв’язань [2].

Переважна більшість задач у всі роки проведення змагань належить до розділів математичного аналізу, алгебри та теорії чисел. Часто зустрічаються задачі з комбінаторики та теорії ймовірностей. Геометричні задачі суттєво поступаються усім переліченим типам задачам у частоті використання.

Корисним є також ознайомлення з методичними особливостями викладення розв’язків конкурсних завдань і особливостями вибору математичних методів в іноземній літературі, коли задачі припускають розв’язання різними способами [3]. Розглянемо кілька прикладів.

Задача 1 (1994 р). При яких дійсних значеннях коефіцієнта ***c*** пряма лінія може перетинати криву

$$P(x) = x^4 + 9x^3 + cx^2 + 9x + 4 \qquad (1.1)$$

в чотирьох різних точках?

Розв’язання. Звернемо увагу на те, що координати точок перетину знаходити не потрібно.

Нехай пряма, яка перетинає задану криву (1.1), має рівняння $y = px + q$. Тоді пряма і крива (1) перетинаються в чотирьох різних точках, якщо рівняння

$$x^4 + 9x^3 + cx^2 + 9x + 4 = px + q \qquad (1.2)$$

має чотири різні дійсні корені. Перетворимо рівняння (1.2) до такого:

$$x^4 + 9x^3 + cx^2 = (p-9)x + (q-4). \qquad (1.3)$$

За методом Декарта-Ейлера приведемо рівняння (1.3) до неповного вигляду, тобто виключимо доданок, що містить x^3. Для цього застосуємо підстановку $x = u - \frac{9}{4}$:

$$u^4 + \left(c - \frac{243}{8}\right)\cdot u^2 = \left(p + \frac{9}{2}c - \frac{801}{8}\right)\cdot u + \left(q - \frac{9}{4}p - \frac{81}{16}c + \frac{23843}{256}\right). \qquad (1.4)$$

Права частина рівняння (1.4) у подальших міркуваннях не відіграє значної ролі. Вона тільки визначає рівняння прямої, яка перетинає криву з рівнянням, що знаходиться у лівій частині рівняння (1.4).

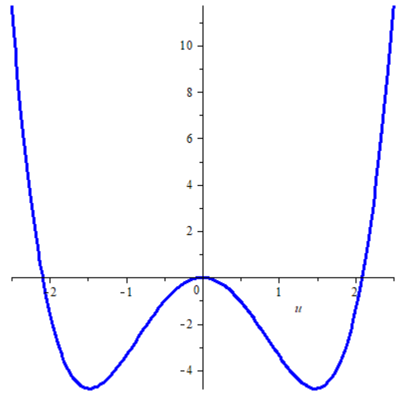

Рис. 1.

Якщо $\left(c \geq \frac{243}{8}\right)$, тоді графіком функції:

$$P(u) = u^4 + \left(c - \frac{243}{8}\right)u^2 \qquad (1.5)$$

є біквадратична парабола, яку пряма в 4 точках перетинати не може.

Якщо $\left(c < \frac{243}{8}\right)$, тоді графіком функції (1.5) є W-подібна крива (рис. 1.1). Очевидно, що її пряма може перетинати в чотирьох різних точках.

Задача 2 (1995). Еліпс з півосями, які дорівнюють ***a*** і ***b***, котиться без проковзування по кривій $y = c\sin\frac{x}{a}$. При якому співвідношенні параметрів ***a***, ***b***, ***c*** еліпс здійснює рівно один повний оберт, коли він рухається по одному періоду синусоїди?

Розв'язання. Як відомо, довжина еліпса не може бути виражена через елементарні функції у скінченному вигляді, тому залишається можливість тільки порівняти підінтегральні вирази у відповідних формулах для обчислення довжин дуг. Довжина еліпса, який задано параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t; \end{cases}$$

обчислюється за формулою:

$$L_{ellipse} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left(1-\cos^2 t\right) + (b\cos t)^2}\,dt =$$
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\cos^2 t}\,dt. \qquad (2.1)$$

Синусоїда $y = c\sin\frac{x}{a}$ має період $2\pi a$. Довжина дуги одного періоду вказаної синусоїди дорівнює:

$$L_{\sin} = \int_0^{2\pi a} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^{2\pi a} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} \frac{x}{a} = t \\ dx = a\,dt \end{matrix} \right\| = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt \qquad (2.2)$$

.

Таким чином, за формулами (2.1) і (2.2) мають дорівнювати вирази:

$$\frac{b^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2}{a^2}.$$

Звідки маємо $b^2 = c^2 + a^2$.

Задача 3 (2001 р). Чи може довжина дуги параболи, яка міститься всередині одиничного кола, перевищувати 4?

Розв'язання. На нашу думку, на відміну від опублікованих варіантів розв'язання цієї задачі, при обчисленні довжини дуги параболи найбільш раціональним щодо подальшого оцінювання значення інтеграла є застосування методу інтегрування частинами. У відомих розв'язках цієї задачі пропонується використовувати гіперболічну підстановку.

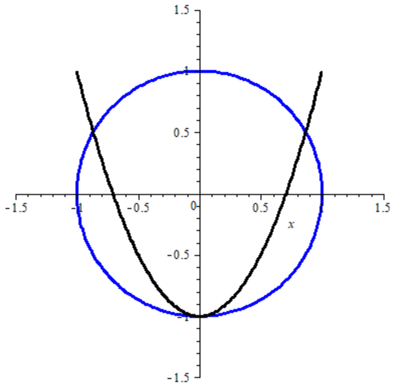

Рис. 2.

Наведемо стисле розв'язання задачі. Розглянемо параболу, яка задається рівнянням $y=\frac{1}{2}ax^2-1$ та коло одиничного радіуса $x^2+y^2=1$ (рис. 2). Абсциси точок їх перетину дорівнюють:

$$x_{1,2}=\pm\frac{2}{a}\cdot\sqrt{a-1};\quad x_3=0,\text{ де } a\ge 1.$$

Тоді довжина дуги параболи, яка міститься всередині кола дорівнює:

$$L=2\cdot\int_0^{\frac{2}{a}\cdot\sqrt{a-1}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\cdot\int_0^{\frac{2}{a}\cdot\sqrt{a-1}}\sqrt{1+a^2x^2}\,dx. \qquad (3.1)$$

Після застосування методу інтегрування частинами до інтеграла (3.1) маємо:

$$L=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{4a^2-7a+3}+\frac{1}{a}\ln\left|2\sqrt{a-1}+\sqrt{4a-3}\right|. \qquad (3.2)$$

Для оцінки величини першого доданка у формулі (3.2) застосуємо наслідок із нерівності Бернуллі:

$$\frac{2}{a}\cdot\sqrt{4a^2-7a+3}>4\cdot\sqrt{1-\frac{7}{4a}}>4\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4a}\right)=4-\frac{7}{2a}.$$

Покажемо, що $\frac{1}{a}\ln\left|2\sqrt{a-1}+\sqrt{4a-3}\right|-\frac{7}{2a}>0$. Для цього обчислимо границю:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\ln\left|2\sqrt{(a-1)}+\sqrt{1+4(a-1)}\right|:\frac{7}{2a}=\frac{2}{7}\lim_{a\to\infty}\ln\left|2\sqrt{(a-1)}+\sqrt{1+4(a-1)}\right|=+\infty>1.$$

Інші методи інтегрування приводять до необхідності залучати більш складні прийоми оцінювання довжини досліджуваної дуги параболи.

Література

1. Рыжков, А. Е., Фролов, В. М., Петтай, П. П. Зеркало студенческой математической олимпиады Уильяма Лоуэлла Патнема. Развитие современного образования: теория, методика и практика. 2015. № 2(4). С. 68–76.

2. The Putnam Archive. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/

3. Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary American Mathematical Soc. Washington: MAA Service Center, 2002. 337 p.