

**Клименко Н.А., Лавров Є.А., Негрей М.В.
Перхун Л.П., Вороненко І.В., Костенко І.С., Сірик О.Є**

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ПІДРУЧНИК

КИЇВ
2026

УДК 681.3.07

МЗЗ

Рекомендовано до видання Вченою радою Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол №14 від 24 червня 2026 року)

Рецензенти:

Антощук С.Г., доктор технічних наук, професор, директор Інституту комп'ютерних систем Національного університету «Одеська політехніка»;

Камінський А.Б., доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка;

Довбиш А. С., доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету.

М. Математичні методи дослідження операцій: підручник / За ред. Н.А. Клименко . – Київ : Аграр Медіа Прінт, ФОП Білецький Р.Г.», 2026 – 440 с.

При підготовці навчального видання було використано інструменти штучного інтелекту для мовного та технічного опрацювання матеріалів (ChatGPT, Grammarly для редагування тексту, удосконалення стилістики викладу, перевірки граматики та формулювання і узагальнення окремих фрагментів. Усі результати, отримані із застосуванням інструментів штучного інтелекту, були перевірені, відредаговані та доопрацьовані авторами.

ISBN 978-617-8530-59-4

Зміст підручника відповідає навчальній програмі дисципліни «Математичні методи дослідження операцій». У підручнику систематизовано основи математичних методів дослідження операцій, принципи побудови математичних моделей та сучасні методи їх розв'язання, зокрема із застосуванням спеціалізованих програмних інструментів. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв'язування практичних задач. Кожна тема містить завдання для самостійної роботи та тестові запитання для контролю й оцінювання рівня засвоєння матеріалу. Підручник призначений для здобувачів вищої освіти спеціальностей «Комп'ютерні науки» та «Інформаційні системи і технології» денної і заочної форм навчання. Видання також може бути корисним студентам інших спеціальностей, які вивчають основи математичного моделювання технологічних, виробничих, економічних та інших процесів і операцій.

ISBN 978-617-8530-59-4

УДК 681.3.07

©Клименко Н.А., Лавров С.А., Негрей М.В.,
Перхун Л.П., Вороненко І.В.,
Костенко І.С., Сірик О.Є., 2026

© НУБіП України

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ



Клименко Наталія Анатоліївна

Кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування. Викладає дисципліни «Моделювання економіки», «Прогнозування соціально-економічних процесів», «Математичні методи дослідження операцій». Наукові інтереси пов'язані з еколого-економічним моделюванням, оцінкою ризиків, математичними методами і моделями поведінкової економіки, продовольчою безпекою та спільною аграрною політикою. Автор понад 200 наукових праць, з яких 2 монографії, 3 підручники, 7 навчальних посібників.

Електронна адреса: nklimenko@nubip.edu.ua



Лавров Євгеній Анатолійович

Професор, доктор технічних наук, професор кафедри інформаційних технологій Сумського державного університету, професор Міжнародного університету інформаційних технологій (Казахстан). Академік академії наук вищої освіти України, академік міжнародної академії наук екології та безпеки життєдіяльності, академік міжнародної академії проблем людини в авіації та космонавтиці. Викладає дисципліни «Теорія прийняття рішень», «Штучний інтелект», «Методологія наукових досліджень», тощо. Наукові інтереси – математичне і комп'ютерне моделювання складних систем, системи гібридного інтелекту, ергономіка, людино-комп'ютерна взаємодія.

Електронна адреса: e.lavrov@cs.sumdu.edu.ua

Негрей Марина Володимирівна



Кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування. Викладає дисципліни «Ризик-менеджмент», «Моделювання з R», «Математичні моделі та планування експерименту». Наукові інтереси: Аграрна економіка, стійкість та трансформація продовольчих систем, цифровізація агросектору, вплив війни на сільське господарство, економічне моделювання, аграрна політика, а також інвестиційні стратегії з урахуванням сталого розвитку та ESG-критеріїв. Автор понад 400 наукових праць, з яких 3 монографії, 3 підручники, 11 навчальних посібників.

Електронна адреса: marina.nehrey@nubip.edu.ua



Перхун Лариса Петрівна

Кандидат педагогічних наук, доцент, голова громадської організації UA Verein e.V., Дортмунд, Німеччина. Учасниця програми з кваліфікації іноземних педагогічних працівників, Рурський університет Бохума (RUB), Німеччина. Наукові інтереси пов'язані з економіко-математичним моделюванням, оцінкою економічних ризиків, застосуванням статистичних методів в економічних дослідженнях, а також дослідженням фінансової безпеки та систем фінансового моніторингу.

Авторка понад 120 наукових праць, з яких 2 монографії, 2 підручники, 3 навчальні посібники.

Електронна адреса: larysa.perkhun@edu.ruhr-uni-bochum.de

Вороненко Ірина Вікторівна



Доктор економічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри інформаційних систем і технологій Національного університету біоресурсів і природокористування. Викладає дисципліни «Економіка та бізнес», «Економіка програмного забезпечення», «Інформаційні системи і технології». Наукові інтереси: цифрова трансформація соціально-економічних систем; бізнес-аналітика та інформаційно-аналітичні системи; сучасні цифрові технології в освіті та управлінні, державне регулювання інформаційного простору та цифрової економіки. Автор понад 150 наукових праць, з яких 6 монографій, 1 підручник, 5 навчально-методичних праць.

Електронна адреса: irynav@nubip.edu.ua



Костенко Інна Сергіївна

Доктор філософії за спеціальністю «Економіка», доцент кафедри економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування. Викладає дисципліни, пов'язані з економіко-математичними методами та цифровими інструментами аналізу даних, зокрема: «Цифрова економіка», «Вебаналітика», «Інтернет-аналітика», «Інструментальні засоби бізнес-аналітики». Наукові інтереси пов'язані з економіко-математичним моделюванням соціально-економічних систем, оптимізаційними моделями розвитку ринку освітніх послуг, економетричним аналізом попиту і пропозиції, дослідженням цифрової трансформації економіки, аналітикою публічних даних та застосуванням інструментів бізнес-інтелекту в управлінні економічними процесами. Автор понад 80 наукових праць, з яких 3 монографії у співавторстві, 2 навчальних посібників.

Електронна адреса: kostenkois@nubip.edu.ua



Сірик Ольга Євгенівна

Кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Викладає дисципліни «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», «Актуарна та фінансова математика» «Дискретна математика», «Теорія ймовірностей і математична статистика», тощо. Наукові інтереси – математичне і комп'ютерне моделювання складних систем, оптимальне керування, ергономіка, людино- комп'ютерна взаємодія. Автор понад 80 наукових праць, з яких 2 навчальних посібники, 3 навчально-методичні праці.

Електронна адреса: siryk_olga@knu.ua

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	10
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ	12
1.1. Історична довідка	12
1.2. Предмет математичного програмування	15
1.3. Постановка задачі дослідження операцій.....	17
1.4. Класифікація задач математичного програмування	18
1.5. Класифікація задач оптимізації	23
1.6. Векторна оптимізація	24
1.7. Класифікація методів оптимізації та їх характеристика	28
1.8. Основні класи задач дослідження операцій	31
1.9. Поняття критерію оптимальності: глобальний і локальний	33
РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	35
2.1. Математична модель та загальна постановка оптимізаційної задачі.....	35
2.2. Етапи дослідження операцій за допомогою математичного моделювання	50
2.3. Прийоми формалізації умов досліджуваної системи.....	63
2.4. Приклади формалізації економічних задач	64
Запитання та завдання для самостійної роботи	68
РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	78
3.1. Форми запису задачі лінійного програмування	78
3.2. Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування	82
3.3. Симплексний метод розв'язку задач лінійного програмування	91
3.4. Параметричне програмування	106
3.5. Цілочислове програмування.....	113
3.6. Розв'язання задач лінійного програмування з використанням MS EXCEL.....	117
Запитання та завдання для самостійної роботи	131
РОЗДІЛ 4. ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ	147
4.1. Проблема двоїстості в лінійному програмуванні	147
4.2. Економічна інтерпретація задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів	153
4.3. Двоїстий симплексний метод	159
Запитання та завдання для самостійної роботи	161
РОЗДІЛ 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	167
5.1. Економічна постановка транспортної задачі	167
5.2. Типи транспортних задач	170
5.3. Побудова опорного плану транспортної задачі	172

5.4. Розв’язання транспортної задачі методом потенціалів	177
5.5. Транспортна задача відкритого типу	189
5.6. Транспортна задача перевезення неоднорідної продукції	203
5.7. Приклади розподільчих задач	210
5.8. Розв’язання транспортної задачі з використанням MICROSOFT EXCEL	213
Запитання та завдання для самостійної роботи	225
РОЗДІЛ 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	247
6.1. Особливості методів нелінійного програмування	247
6.2. Постановка задачі нелінійного програмування	250
6.3. Класифікація задач нелінійного програмування	251
6.4. Графічний метод розв’язання задач нелінійного програмування	253
6.5. Нелінійне програмування: множники Лагранжа	257
6.6. Стохастичне програмування : задача стохастичного керування	263
6.7.Формальна постановка задачі оптимального стохастичного керування	267
Запитання та завдання для самостійної роботи	270
РОЗДІЛ 7. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ТЕОРІЯ ІГОР.....	276
7.1. Прийняття рішень в умовах визначеності	276
7.2. Прийняття рішень в умовах ризику	276
7.3. Прийняття рішень в умовах невизначеності	279
7.4. Основні поняття теорії ігор	282
7.5. Оптимальні стратегії. Ціна гри	284
7.6. Нестійкість мінімаксних стратегій	285
7.7. Рішення гри в змішаних стратегіях	287
7.8. Елементарні методи рішення ігор	290
7.9. Графічний метод вирішення ігор	292
7.10. Оптимізація ігор (mxn) методами лінійного програмування	294
7.11. Розв’язок задач методом ітерацій	295
Запитання та завдання для самостійної роботи	301
РОЗДІЛ 8. ПРИКЛАДНІ АГРАРНІ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.....	306
8.1. Природоохоронні аспекти природокористування	306
8.2.Екологічні наслідки природокористування	310
8.3. Формалізація витрат на екологію	312
8.4. Моделювання еколого-економічних аспектів землекористування в рільництві	315
8.5. Доцільність використання економіко-математичних моделей в сільському господарстві	326
РОЗДІЛ 9. ПРИКЛАДНІ СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ ПОБУДОВИ ТА РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.....	330

9.1.Основні інструменти для побудови та розв'язку задач ЗЛП.....	330
9.2.Застосування Power BI для вирішення задач дослідження операцій.....	331
9.3.Прикладні аспекти застосування R Script Power BI в транспортних задачах.....	351
9.4. Технологія розв'язку транспортної задачі в середовищі MS EXCEL	359
РОЗДІЛ 10. АНАЛІЗ ПРИКЛАДНИХ МОДЕЛЕЙ	365
10.1. Постоптимізаційний аналіз у середовищі MS EXCEL	365
10.2. Методика післяоптимізаційного аналізу плану виробничої системи	368
10.3. Розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.....	378
ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ	
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»	389
Задачі для самостійного розв'язання	409
Запитання для самоконтролю	414
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ	417
ТЕМАТИКА ДИСКУСІЙ НАУКОВОГО ГУРТКА	433
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	437

ПЕРЕДМОВА

Ніякої достовірності немає у науках там, де неможна застосувати жодної з математичних наук, і у тому, що не має зв'язку з математикою

Леонардо да Вінчі

Математика - найнадійніша форма пророцтва

В. Швебель

Математика схожа на чарівний млин, який перемелює все, що завгодно, і до будь-якої дрібності. Однак те, що ви дістаєте, залежить від того, що ви засиплете, і як найчудовіший у світі млин не видасть вам пшеничної крупчатки з лободи, так і сторінки формул не видадуть вам певного результату за сумнівними даними».

Т. Гекслі

Для якісного управління сучасною системою вже давно замало тільки особистого досвіду керівника, його інтуїції, організаторських здібностей у їх традиційному розумінні. Прийняття як стратегічних, так тактичних рішень потребує врахування багатьох, часто суперечних, міркувань. Пошук оптимального за тим чи іншим критерієм управлінського рішення передбачає побудову математичної моделі і використання для її аналізу специфічного, добре підібраного математичного апарату.

Сучасний світ щодня ставить перед людиною складні завдання: як ефективно використати ресурси, обрати найкраще рішення серед багатьох альтернатив, оптимізувати процеси, передбачити результати та мінімізувати ризики. У таких умовах математичні методи дослідження операцій стають не лише інструментом наукового аналізу, а й важливим засобом формування логічного, аналітичного та системного мислення.

Дослідження операцій – це наука про пошук найкращих рішень. Вона поєднує математичне моделювання, оптимізаційні методи, інформаційні технології інструменти та практичний аналіз реальних процесів. Саме тому її методи сьогодні широко застосовуються у сфері ІТ, економіці, логістиці, управлінні, виробництві, транспорті, бізнес-аналітиці та багатьох інших галузях.

Метою цього підручника є не лише ознайомлення здобувачів освіти з теоретичними основами математичних методів дослідження операцій, а й формування розуміння того, як математичні моделі працюють у реальному житті та допомагають ухвалювати обґрунтовані рішення. Видання орієнтоване на поєднання фундаментальних знань із практичним застосуванням сучасних методів оптимізації.

Навчальне видання розроблено з урахуванням вимог стандартів вищої освіти та освітньо-професійних програм підготовки фахівців, забезпечуючи формування визначених компетентностей і досягнення програмних результатів навчання відповідних спеціальностей. Автори прагнули подати матеріал у доступній, логічній і водночас сучасній формі, щоб читач міг не

лише засвоїти математичний апарат, а й побачити його практичну цінність. Важливою складовою підручника є використання цифрових інструментів і програмних засобів, які дозволяють реалізовувати математичні моделі та аналізувати результати досліджень у професійній діяльності.

Підручник адресований здобувачам вищої освіти спеціальностей «Комп'ютерні науки» та «Інформаційні системи і технології», а також може бути корисним студентам інших спеціальностей, викладачам, аспірантам і всім, хто цікавиться питаннями математичного моделювання, оптимізації та підтримки прийняття рішень.

Сподіваємося, що це видання стане для читачів не лише навчальним джерелом, а й своєрідним провідником у світ математичних методів, які допомагають досліджувати складні системи, знаходити оптимальні рішення та бачити логіку там, де на перший погляд панує невизначеність.

Це видання об'єднало професійний досвід і наукові напрацювання авторського колективу. Кожен із співавторів працював над окремими розділами підручника, формуючи цілісне бачення сучасних методів дослідження операцій: Н. Клименко, Є.Лавров (розділ 1-10), М.Негрей (розділ 2, 7) Л. Перхун (розділ 3,6), І.Костенко, О.Сірик (розділ 9,10).

Водночас концепція підручника, добір практичних прикладів та методичне опрацювання матеріалу стали результатом спільної командної роботи авторів.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Історична довідка

Історія предмета включає в себе, з одного боку, історію математичних джерел та методів, а з другого – історію застосування цих методів у прикладних галузях. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях. Математичне моделювання як кількісний інструментарій дослідника по суті своїй належить не тільки математиці - воно має самостійне значення і свою історію. Примітно, що один і той же математичний апарат зустрічається в описі різних об'єктів в різних наукових дисциплінах. Тим самим математичне моделювання є міждисциплінарною категорією. Математичні методи, що зарекомендували себе в першу чергу у фізиці і інших природничо-наукових дисциплінах, згодом, з розвитком самої математики знайшли успішне використання і в гуманітарних науках. Економіко-математичне моделювання і моделювання аграрної сфери виявляють собою наочний приклад плідного втілення математичної ідеї в наукових дослідженнях.

З відомих нам математичних робіт основному методу лінійного програмування – симплексному – передували праці Ш. Фур'є (1823 р.), який розглядав задачу визначення найменшого максимального відхилення в розв'язках систем рівнянь. Ним ця задача була зведена до знаходження найнижчої точки многогранника n -вимірного простору, яку визначали послідовним перебором усіх вершин многогранника. Ідея Фур'є і лягла в основу симплексного методу.

Дальші математичні праці К. Гаусса, К. Жордана та інших лягли в основу методів лінійного програмування.

Як найпершу економічну модель, що містила деякі найпростіші ідеї лінійного програмування, слід назвати «Економічну таблицю» Ф.Кене, складену ним близько 1758 р., в якій досліджено взаємозв'язки між землевласниками, селянами і ремісниками.

Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним вперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні,

яке уможливило підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

В 1947 р. Г. Купманс звернув увагу на широкі можливості моделей лінійного програмування в економічних задачах. 1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування - симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Одночасно зростає інтерес і до інших типів задач математичного програмування. Важливе значення для розвитку математичного програмування мали праці Дж. Неймана. Американський математик Р. Белман заклав основи динамічного програмування (1954).

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року – праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року – Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року – ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування – динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

Розвиток методології економіко-математичного моделювання має довгу історію. Становлення двох по суті різних наукових дисциплін - економіки і математики - протягом багатьох століть проходило за власними законами, що відображали природу цих дисциплін і одночасно перепліталися одна з одною.

Зародження економіко-математичної ідеї сходить коренями до глибокої давнини.

Очевидно апофеозом арифметичного підходу в економічних ідеях були ідеї Уільяма Петі (1623-1687), основоположника так званої класичної школи політичної економії в Англії. В своїй «Політичній арифметиці» У. Петі показав, що його увагу привертають перш за все статистичні зіставлення, розрахунки, цифри. У ній У.Петі обґрунтував початкові положення статистики, відзначивши, що «точна обізнаність государів про майно їх підданих не несе останнім ніякої шкоди». Очевидно, що історично перша модель національної економіки була створена французьким економістом Франсуа Кене (1694-1774), яка одержала назву „Економічна таблиця Кене”. Яка мала ознаки перших моделей економічної динаміки.

Успіхи вживання математичних методів в економіці яскраво виявилися за часів розвитку самої математики, і основоположних досягнень пов'язаних з розвитком математичного аналізу.

Математизація науки є закономірним і природним процесом. Якщо

диференціація наукового знання призводить до появи нових гілок науки, то інтеграційні процеси в пізнанні миру приводять до своєрідної дифузії наукових ідей з однієї області в іншу.

В XVIII столітті Еммануїл Кант не тільки проголошує гасло «всяка наука настільки наука, наскільки вона математика», але і кладе ідеї аксіоматичної побудови геометрії Евкліда в основу концепції апіоризму. Тоді як в природознавстві математика швидко і міцно зайняла ведучі позиції, в області соціальних наук, її успіхи виявилися скромнішими. Вживання математичних методів виявилось виправданим там де поняття носять стабільний характер і стає змістовною задачею встановлення зв'язку між цими поняттями. Моделювання є дієвим інструментарієм, що дозволяє пояснювати і прогнозувати досліджуваний спостережуваний об'єкт. Математизація економічної науки не в останню чергу обумовлена прагненням «вдягнути» свої положення і ідеї в точні абстрактні математичні форми. В той же час, математика в економіці дозволяє точно розрахувати і прогнозувати окремі процеси, що складає очевидну перевагу перед методом «на око».

Математичне моделювання економіки - цей опис математичних моделей економіки, їх створення, аналіз. Такими є, наприклад, моделювання виробничих процесів, моделі співпраці і конкуренції, моделі ринків, глобальні моделі міжгалузевого балансу, моделі Солоу, Неймана і т.п. Нарешті, економіко-математичні методи постають, як сукупність математичних методів, що використовуються для створення математичних моделей економіки. До таких, наприклад відносяться лінійне та нелінійне програмування, динамічне програмування, методи дослідження операцій, теорія ігор і т.п.

На сучасному етапі розвитку економіки вірогідність визнання практично будь-якої нової економічної теорії або концепції, навряд чи не у вирішальному ступені, залежить від того, якою мірою ця концепція допускає математичну формалізацію, наскільки цікавий апарат, що використовується при цьому, і наскільки вражають одержані при дослідженні моделі математичні результати. Спід визнати, що вітчизняні моделі з часів Л. В. Канторовича традиційно є більш прикладними, направленними на оптимізацію конкретних рішень, на протигагу західним моделям, які носять більш теоретичний характер. Відомо також, що приблизно половина Нобелівських премій по економіці присуджена за роботи на стику економіки і математики.

Не дивлячись на великий історичний період розвитку математичного моделювання аграрної сфери, проблема побудови економіко-математичних моделей далека від остаточного рішення: існують різні моделі одного і того ж об'єкту, відсутня єдина методологічна база, не завжди надійна перевірка на адекватність.

На сучасному етапі ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних та технічних систем.

1.2. Предмет математичного програмування

Щоб зрозуміти суть певної науки, слід з'ясувати об'єкт її дослідження, мету дослідження та методи, якими вона користується. Метою науки є пізнання об'єктивних законів, які визначають досліджувані явища, та розробка методів і засобів зміни цих явищ в корисному для людини напрямі.

Математичне програмування є одним з основних інструментів дослідження операцій – науки, що займається оптимізацією структури і функціонування великих систем, незалежно від їх суспільно корисного призначення. Прикладом систем можуть бути економіка в цілому, окремі її галузі, окремі великі підприємства, системи охорони здоров'я, освіти тощо.

Дослідження операцій включає всі етапи вивчення таких систем, починаючи від виявлення мети роботи системи і мети дослідження та кінчаючи встановленням робочих процедур приведення системи до стану оптимального функціонування; роль математичного програмування полягає в знаходженні надійних і якомога простіших методів розв'язування відповідних математичних задач (моделей). Оскільки цей етап посідає одне з центральних місць у всьому дослідженні, розвитку математичного програмування приділяється постійна увага і тепер воно є найбільш досконалим і дійовим засобом дослідження операцій.

Розглянемо задачі, які є об'єктом математичного програмування, та визначимо, чим вони характеризуються. Вже із зазначеного можна зробити висновок, що це задачі на знаходження екстремальних значень деяких функціональних залежностей. Справді, кожна велика система функціонує заради досягнення певної мети.



Рис. 1.1 Характеристики економічної системи

В ідеальному випадку ступінь її досягнення і вся сукупність операцій, що відбуваються в системі, і від яких залежить ступінь досягнення мети системи, мають кількісну міру, тобто можуть бути описані математично. Деякі з таких кількісних характеристик, позначимо їх c_k ($k = 1, 2, \dots, l$), бувають

незмінними, постійними для певної системи чи певних умов. Це так звані параметри задачі. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні поділяють на дві групи:

1. x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – керовані змінні, значення яких можна змінювати у деякому інтервалі;

2. y_j ($j = 1, 2, \dots, s$) – некеровані змінні, значення яких не залежить від волі людей і визначається комплексом зовнішніх умов або ж параметрами системи; їх можна вважати змінними параметрами задачі.

При цих умовах, як правило, вдається встановити функціональну залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети системи, і незалежними змінними та параметрами системи.

$$F = f(x_j, y_i, c_k) \quad (1.2.1)$$

Ця функція називається *цільовою функцією*, або ж функцією ефективності, оскільки її значення є мірою ефективності роботи системи по досягненню певної мети.

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j , які б надавали функції ефективності максимуму, тобто слід знайти

$$F^* = \max f(x_j, y_i, c_k)$$

Однак можливості вибору значень керованих змінних практично завжди обмежені. Обмеження ці залежать насамперед від зовнішніх щодо системи умов, а також і від параметрів самої системи. Усі ці обмеження в ідеальному випадку також можна описати системою математичних рівностей та нерівностей

$$g_r(x_j, y_i, c_k) \leq \geq 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2.2)$$

Система (1.2.2) називається *системою обмежень*, або *системою умов* задачі. Вирази (1.2.1) та (1.2.2) і становлять математичну модель системи.

При складанні математичної моделі необхідно дотримуватись загального правила: врахувати все істотне, суттєве в даному явищі чи процесі і нехтувати всім другорядним, не істотним. Лише в цьому випадку модель буде *адекватною* і *раціональною*, тобто відображатиме суть явища, а деталізація окремих його сторін задовольнятиме вимогам дослідження, але буде надмірною, оскільки це ускладнює задачу.

Всякий набір змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє систему обмежень (1.2.2), називається *планом задачі математичного програмування*. Очевидно, кожний такий план зумовлює певний спосіб, стратегію, програму дій його реалізації, певне рішення стосовно роботи системи. Саме з словом «програма» (дій) і пов'язана назва предмета «математичне програмування». Сукупність усіх розв'язків системи (1.2.2), тобто *множина планів*, утворює область *допустимих значень*, або *область означення* задачі математичного програмування.

Задача оптимізації цільової функції (1.2.1) при умовах (1.2.2), накладених на незалежні змінні, і є *загальною задачею* математичного програмування. Саме ця задача – *об'єкт* математичного програмування, а знаходження оптимуму цільової функції – його *мета*. Отже, загальна задача математичного програмування – це *задача відшукування умовного екстремуму цільової функції* (1.2.1) при умовах (1.2.2).

План, що надає цільовій функції оптимального значення, називається оптимальним. Оптимальний план і є розв'язком задачі математичного програмування (1.2.1) – (1.2.2).

В прикладному розумінні об'єктом математичного програмування є реальні системи, що описуються загальною задачею (1.2.1) – (1.2.2), а його метою – їх оптимізація.

Система обмежень (1.2.2) задачі може бути сумісною або несумісною. Сумісна система обмежень визначає в n -вимірному точковому (векторному) просторі область означення задачі, інакше, область існування планів задачі. Кожна точка області означення є планом задачі, а сама область є *множиною планів* задачі. В більшості задач область існування планів задачі обмежена, але трапляються випадки необмеженості множини планів. Це часто зумовлює необмеженість зверху чи знизу цільової функції задачі, що звичайно, не відповідає дійсності і є результатом некоректної (неточної чи неправильної) постановки задачі, означаючи найчастіше відсутність якогось істотного обмеження. Формулювання задачі буде також некоректним, якщо система обмежень задачі несумісна, суперечлива; тоді множина планів задачі, очевидно, не містить жодного плану і буде порожньою. Таке положення найчастіше виникає через введення в задачу зайвих, насправді неістотних обмежень. Зауважимо також, що коректність постановки задачі потребує її стійкості в малому, тобто такої її структури, при якій всякій малій зміні параметрів задачі відповідає мала зміна або незмінність її розв'язку. Ця вимога пов'язана з тим, що параметри всякої конкретно практичної задачі визначаються наближено, з певною точністю; при цьому задана точність визначення параметрів не повинна впливати на результати розв'язку.

1.3. Постановка задачі дослідження операцій

Методи оптимізації широко застосовуються для розв'язання задач дослідження операцій, зокрема, теорії оптимальних процесів, оптимального регулювання, вироблення керувальних збурень на об'єкти. Без розробки та застосування методів оптимізації неможливе керування ректифікаційними колонами в спиртовій промисловості, установками крекінгу нафти, конверторами при виробництві сталі та ін. До транспортних задач та задач комівояжера зводяться багато задач економічної кібернетики (мережне планування, управління запасами, перевезеннями та ін.), керування організацією виробництва (розподіл завдань, обробка деталей, конвеєрне виробництво) та задачі оптимального програмування. Окрема група задач

теорії оптимізації - це задачі оптимального проектування. Наприклад, задачі проектування радіоелектронних засобів з заданими обмеженнями на рівень шуму та смугу пропускання чи показниками надійності в умовах старіння.

Звичайна постановка задачі оптимізації така: в деякому просторі S тим чи іншим засобом виділяється деяка непуста множина M точок цього простору, яку називають припустимою множиною. Далі фіксується деяка дійсна функція $f(x)$, що задана в усіх точках x допустимої множини. Вона називається цільовою функцією. Задача оптимізації полягає в тому, щоб знайти точку x_0 в множині M , для якої функція $f(x)$ приймає екстремальне (максимальне чи мінімальне) значення. В першому випадку для всіх точок x множини M задовольняється нерівність $f(x_0) \geq f(x)$, в другому випадку – нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

В практичних задачах можливі дві основні постановки оптимізаційних задач. В першому випадку задача розглядається в звичайному (евклідовому) просторі кінцевої розмірності. Точками x допустимої множини будуть кортежі $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ дійсних чисел, цільовою ж функцією $f(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ буде звичайна дійсна функція від n дійсних аргументів (n – розмірність простору). Таку задачу ми будемо називати в подальшому задачею оптимізації функцій. В другому випадку постановки оптимізаційної задачі в якості припустимої множини виступає деяка множина M функцій дійсних змінних $y(x_1, \dots, x_m)$, а цільовою функцією є деякий функціонал F , який ставить у відповідність кожній функції $y(x_1, \dots, x_m)$ деяке дійсне число $F(y)$. Цю задачу ми будемо називати задачею оптимізації функціоналів або варіаційною задачею дослідження операцій.

1.4. Класифікація задач математичного програмування

Класифікація задач математичного програмування залежить від критерію, згідно з яким вона проводиться. Маючи на увазі класифікацію задач математичного програмування, зауважимо, вона залежить від застосування математичних в прикладних напрямках. Математичне програмування передусім строго математична дисципліна і тому критеріями класифікації мають тут бути в основному математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування. У цьому пункті і дається певна математична класифікація розглядуваних далі задач. Зауважимо, що та сама задача з погляду різних математичних критеріїв може належати до кількох класів, оскільки кожен критерій підкреслює лише одну якість задачі на противагу деякій іншій, тобто поділяє всі задачі на два класи (чи підкласи в середині певного класу).

Два великих і основних класи становлять лінійні і нелінійні задачі. Критерієм лінійності задачі є лінійність функції мети (1.2.1) та всіх обмежень (1.2.2), тобто вони не повинні містити інших, ніж одиниця і нуль, степенів змінних x_i та будь-яких добутоків цих змінних. В усіх інших випадках задача

буде нелінійною. Величезною перевагою лінійних задач є те, що вони завжди розв'язуються; створено універсальні відносно прості методи знаходження їх розв'язку (симплексний метод). Однак часто лінійна модель буває неадекватною і доводиться будувати нелінійні моделі, розв'язати які набагато складніше. Загального, універсального методу знаходження розв'язку таких задач немає. Для окремих типів нелінійних задач розроблено значну кількість спеціальних методів розв'язування. Тому і математичне програмування поділяють на два основних розділи; *лінійне програмування* і *нелінійне програмування*.

Далі розрізняють дискретні та неперервні задачі. Дискретною називають задачу з усіма або деякими змінними, які набувають лише певних дискретних, зокрема цілочислових, значень. Методи розв'язування таких задач увійшли до розділу *дискретного, зокрема цілочисельного, програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати всіх значень у деяких інтервалах числової осі, то задача буде *неперервною*.

Важливим є критерій, за яким задачі поділяють на детерміновані і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, що підлягають статистичним розподілам. Очевидно, і у відповідних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі. Якщо ж ці явища становлять суть процесу чи помітно впливають на його перебіг, то адекватна математична модель буде стохастичною, тобто такою, що містить випадкові функції і величини. Відповідний розділ математичного програмування, що займається вивченням структури і розв'язуванням цих задач, називається *стохастичним програмуванням*.

Тепер розглянемо відмінність між однокроковими і багатокроковими, або динамічними та статистичними задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування, пов'язана насамперед з багатовимірністю задачі, коли, послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних.

Необхідність приймати рішення поетапно пов'язана також і з тим, що істотну роль в задачі відіграє фактор часу чи деяка визначена послідовність операцій. Методи розв'язування багатокрокових задач об'єднано в розділ, що називається *динамічним програмуванням*. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти вектора оптимального плану задачі визначають одночасно за один останній крок алгоритму. Багато задач математичного програмування можна розглядати і як однокрокові, і як багатокрокові, залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язати як однокрокову, методи динамічного програмування недоцільні. Проте, цілий ряд задач можна розв'язати лише при умові послідовного прийняття певних рішень.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що не точно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні,

динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. Задача належить до опуклого програмування у тому разі, коли цільова функція вгнута, якщо вона мінімізується, та опукла, якщо вона максимізується, а всі обмеження – однотипні нерівності типу ($<$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини – сталими величинами. У разі обмежень типу ($>$) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. Квадратичне програмування – якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають дробово-лінійне програмування, коли обмеження є лінійними, а цільова функція – дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі теорії ігор, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи.

Наведена вище класифікація задач використана для структурування уявлень про класи задач математичного програмування.



Рис. 1.2 Класифікація задач математичного програмування

Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в дослідженні операцій сформовано певний набір класичних постановок задач, математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях різних прикладних проблем.

Складність економічних та технічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак, лише прийняття певних допущень уможливорює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

У процесі застосування математичного моделювання в дослідженні операцій чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану продукування продукції чи послуги: для деякої виробничої системи (фірми, цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план продукування (виробництва) кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировинні, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність).

Критерії оптимальності – максимум прибутку, максимум виручки максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону.

Логістична (транспортна задача): розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності – мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу, мінімізація витрат на здійснення певного розподілу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності – мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності – максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої – вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності – мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на

початку кожного півперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

1.5. Класифікація задач оптимізації

Перш за все треба розділяти задачі параметричної та структурної оптимізації. Параметрична оптимізація є предметом, що розглядається в цьому розділі, де наведені постановка такої задачі та методи її розв'язання. Структурна оптимізація – це задача синтезу оптимальної структури системи, причому зміна структур та перетворення однієї структури в іншу здійснюється за спеціальним алгоритмом синтезу. Параметрична оптимізація об'єднує багато різних задач, що мають свої власні особливості та методи розв'язання.

Класифікацію цих задач наведено на рисунку 1.3.

До цього треба додати деякий коментар:

1. Якщо існує декілька цільових функцій, то має місце задача векторної оптимізації.
2. Якщо кількість параметрів X , що керуються, більше ніж один, то розв'язується задача багатопараметричної оптимізації.
3. Якщо існують обмеження та умови, що зв'язують параметри X , то виникає задача оптимізації з умовами, яка в кібернетиці дістала назву математичного програмування.
4. Математичне програмування об'єднує задачі нелінійного програмування (цільова функція в загальному випадку нелінійна), стохастичного програмування (параметри X – випадкова величина, а цільова функція – випадкова функція), динамічного програмування (оптимізація багатокрокових процесів пошуку рішення).
5. Якщо параметри, що керуються, приймають тільки дискретні значення, то виникає задача дискретної оптимізації, а якщо X – цілі числа, то – задача цілочислового програмування.
6. У випадку, коли цільова функція опукла, та область, де задані X , теж опукла, то має місце задача опуклого програмування. Якщо цільова функція та умови лінійні-лінійного (кусково-лінійного) програмування; цільова функція квадратична, а умови лінійні-квадратичного програмування; цільова функція та умови – лінійні комбінації функцій однієї змінної – сепарабельного програмування; цільова функція та умови подані у вигляді поліномів – геометричного програмування.



Рис. 1.3. Класифікація задач оптимізації

1.6. Векторна оптимізація

Математичне формулювання задачі векторної оптимізації таке: нехай $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$, де $J = [1, N]$ - вектор змінних, зазвичай передбачається невід'ємність вектора змінних ($X \geq 0$); функціональний взаємозв'язок змінних встановлюється певними співвідношеннями, на які накладаються обмеження:

$$g_i(X) \leq b_i, i = \overline{1, M}, (1.1).$$

Функціонування системи оцінюється певними критеріями, які представлені у цільовій функції

$$f_k(X), k = \overline{1, K}.$$

Множину критеріїв можна представити у вигляді векторної цільової функції

$$F(X) = \{f_1(X), \dots, f_k(X)\}, k = \overline{1, K}, (1.2).$$

Щоб мінімізувати конкретний критерій $f_k(X)$, достатньо максимізувати $-f_k(X)$, так як $\min f_k(X) = -\max(-f_k(X))$. Тому, припускаємо, що кожна компонента векторного критерію максимізується. Задача багатоцільової оптимізації записується як векторна задача математичного програмування (ВЗМП)

$$F(X) = \{f_1(X), \dots, f_k(X)\} \max, k = \overline{1, K}, (1.3),$$

$$g_i(X) \leq b_i, i = \overline{1, M}, (1.4),$$

$$X \geq 0, (2.4.5).$$

Будемо розглядати ВЗМП (1.3) - (1.5) для випадку, коли точки оптимуму $X_k^*, k = \overline{1, K}$, отримані при розв'язку задачі по кожному критерію $f_k(X), k = \overline{1, K}$ не збігаються (випадок їх збігу зустрічається вкрай рідко і таке завдання не є цікавим). Тому з математичної точки зору задача (1.3) - (1.5) є некоректною, оскільки якщо один з критеріїв досягає свого оптимуму, то поліпшення за іншими компонентами векторного критерію є неможливим. Звідси випливає, що розв'язком ВЗМП може бути тільки якийсь компромісне рішення.

Особливістю задач векторної оптимізації є наявність в області допустимих значень області компромісів, в якій неможливо одночасне покращання всіх критеріїв. Плани, що належать області компромісів називають ефективними, або оптимальними за Парето (ім'я італійського економіста, який вперше сформулював проблему векторної оптимізації та принцип оптимальності розв'язку).

Введемо спочатку поняття переваги плану над іншими.

План X^0 не гірший плану X' , якщо $f_k(X^0) \geq f_k(X'), k = \overline{1, K}$. Якщо серед цих нерівностей хоча б одне строге, то план X^0 кращий X' , тобто при переході від X^0 до X' значення жодного критерію не погіршилося і хоча б одного критерію покращилося. План X^0 оптимальний за Парето (ефективний), якщо він допустимий і не існує іншого плану X' , для якого $f_k(X^0) \geq f_k(X'), k = \overline{1, K}$, і хоча б для одного критерію виконується строга нерівність.

До загального формулювання багатокритеріальної задачі можуть зводитись завдання різного змісту, які можна поділити на чотири типи.

1. Задачі оптимізації на множині цілей, кожна з яких повинна бути врахована при виборі оптимального рішення. Прикладом може служити завдання складання плану діяльності підприємства, в якому критеріями служить ряд економічних показників.

2. Задачі оптимізації на множині об'єктів, якість функціонування кожного з яких оцінюється самостійним критерієм. Якщо якість функціонування

кожного об'єкта оцінюється декількома критеріями (векторним критерієм), то таке задача називається багатовекторною. Прикладом може служити задача розподілу дефіцитного ресурсу між декількома підприємствами. Для кожного підприємства критерієм оптимальності є ступінь задоволення його потреби в ресурсі або інший показник, наприклад, величина прибутку. Для плануючого органу критерієм виступає вектор локальних критеріїв підприємств.

3. Задачі оптимізації на множині умов функціонування. Заданий спектр умов, в яких доведеться працювати об'єкту, і стосовно до кожної умови якості функціонування оцінюється деяким критерієм.

4. Задачі оптимізації на множині етапів функціонування. Розглядається функціонування об'єктів на деякому інтервалі часу, розбитому на кілька етапів. Якість управління на кожному етапі оцінюється певним (частинним) критерієм, а на безлічі етапів – загальним векторним критерієм. Прикладом може служити розподіл плану підприємства по декадах. У кожній декаді необхідно забезпечити максимальне завантаження. В результаті вийде критерій максимізації завантаження в кожній декаді кварталу.

Багатокритеріальні задачі можна також класифікувати за іншими ознаками: за варіантами оптимізації, по кількості критеріїв, за типами критеріїв, за співвідношенням між критеріями, за рівнем структуризації, наявності фактора невизначеності.

При розробці методів вирішення векторних задач доводиться вирішувати ряд специфічних проблем.

Проблема нормалізації виникає у зв'язку з тим, що локальні критерії мають, як правило, різні одиниці і масштаби виміру, і це робить неможливим їх безпосереднього порівняння. Процес приведення критеріїв до єдиного масштабу і безрозмірного вигляду називається нормуванням. Найбільш поширеними способами нормування є заміна абсолютних значень критеріїв їх безрозмірними відносними величинами

$$\overline{f_k}(X) = \frac{f_k(X)}{f_k^*}, k = \overline{1, K},$$

або відносними значеннями відхилень від оптимальних значень критеріїв f_k^*

$$\overline{f_k}(X) = \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*}, k = \overline{1, K}.$$

Проблема вибору принципу оптимальності пов'язана з визначенням властивостей оптимального розв'язку і вирішенням питання - в якому сенсі оптимальне рішення є кращим від усіх інших.

Проблема визначення пріоритету критеріїв постає, якщо локальні критерії мають різну значимість. Необхідно знайти математичне визначення пріоритету і ступінь його впливу на розв'язок задачі.

Проблема обчислення оптимуму виникає, якщо традиційні обчислювальні схеми та алгоритми непридатні для вирішення завдання векторної оптимізації.

Вирішення перелічених проблем йде в декількох напрямках. Основні напрямки:

- методи, засновані на згортанні критеріїв у єдиний;
- методи, що використовують обмеження на критерії;
- методи цільового програмування;
- методи, засновані на відшуванні компромісного рішення;
- методи, в основі яких лежать людино-машинні процедури прийняття рішень (інтерактивне програмування).

У методах, заснованих на згортанні критеріїв, з локальних критеріїв формується один. Найбільш поширеним є метод лінійної комбінації критеріїв.

Нехай заданий вектор вагових коефіцієнтів критеріїв

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, що характеризують важливість відповідного критерію,

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k = \overline{1, M}.$$

Лінійна скаляризована функція є сумою критеріїв, помножених на вагові коефіцієнти. Задача математичного програмування стає однокритеріальною і має вигляд:

$$\begin{aligned} F^0 &= \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(X), (\max), \\ q_i(X) &\leq b_i, i = \overline{1, M}, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Критерії можуть бути нормованими. Розв'язок, отриманий в результаті оптимізації скаляризованого критерію, ефективний.

До недоліків методу можна віднести те, що малим приростам коефіцієнтів відповідають великі прирости функції, тобто рішення задачі нестійке, а також необхідність визначення вагових коефіцієнтів.

Напрямок методів, що використовують обмеження на критерії включає два підходи:

- метод провідного критерію;
- методи послідовного застосування критеріїв (метод послідовних поступок, метод обмежень).

У методі ведучого критерію всі цільові функції крім однієї переводяться в обмеження. Нехай $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{K-1})$ вектор, компоненти якого є нижніми межами відповідних критеріїв. Задача матиме вигляд:

$$\begin{aligned} F &= f_1, (\max), \\ f_k &\geq \gamma_k, k = \overline{2, K}, \\ q_i(X) &\leq b_i, i = \overline{1, M}, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Отриманий цим методом розв'язок може не бути ефективним, тому необхідно перевірити його належність до області компромісів.

Метод ведучого критерію застосовується в таких задачах, як мінімізація повних витрат за умови виконання плану по виробництву різних видів продукції, максимізація випуску продукції при обмеженні на ресурси.

Алгоритм методу послідовних поступок:

1. Критерії нумеруються в міру спадання важливості (значення).
2. Визначається значення f_1^* . Особою, що приймає рішення, встановлюється величина поступки Δ_1 , за цим критерієм.
3. Вирішується задача за критерієм f_2 з додатковим обмеженням

$$f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1$$

Далі пункти 2 і 3 повторюються для критерію $f_2, \dots, f_k$. Отриманий розв'язок не завжди належить області компромісів.

1.7. Класифікація методів оптимізації та їх характеристика

У тих випадках, коли функції f та φ_i в задачі хоча б двічі диференційовані, можна застосувати **класичні методи оптимізації**, засновані на визначенні похідної. Однак застосування цих методів має обмеження. Наприклад, методами диференціального числення можна знайти максимальне або мінімальне значення функції, тобто екстремум, який має місце тільки в області визначення самої функції (у внутрішніх точках). Якщо функція задана з обмеженнями на змінні x , які мають свої функції і область визначення, то поняття максимуму і мінімуму функції може не співпасти з поняттям найбільшого і найменшого значення функції, що досягається на межі області, заданої обмеженнями, і де можуть порушуватися умови диференційованості (кутові точки). Тому більш вдалим терміном є не *екстремальне*, а *оптимальне значення функції*, яке знаходиться серед екстремальних точок або на межі областей визначення функції та обмежень. Крім того, класичні методи дають можливість визначити локальний екстремум, але, через багатомірність функції, пошук її глобального екстремуму шляхом перебору всіх точок, де може досягатися оптимум, є нереальною задачею навіть для швидкодіючих комп'ютерів. Класичні методи зовсім не спрацьовують, коли множина допустимих значень параметрів управління дискретна або функція Z задана таблицею. В цих випадках для розв'язання задачі застосовуються **методи математичного програмування**.

В залежності від особливостей функцій f та φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, модель набуває певних властивостей і відноситься до того чи іншого класу задач математичного програмування.

Якщо критерій ефективності $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляє лінійну

функцію, а функції $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в системі обмежень також лінійні, то така задача є задачею **лінійного програмування**. Якщо розв'язки задачі, виходячи із змістовного їх тлумачення, повинні бути цілими числами, то це задача **цілочислового лінійного програмування**.

Задача відноситься до розділу **нелінійного програмування**, якщо цільова функція та (або) система обмежень задаються нелінійними функціями. Серед задач нелінійного програмування найбільш вивчені задачі **опуклого програмування**, в яких визначається максимум вгнутості (або мінімум опуклості) функції, що задана на опуклій множині.

Якщо в задачі математичного програмування є змінні часу і критерій ефективності виражається не в явному вигляді, як функція змінних управління, а через рівняння, що описують прийняття рішення у часі, то така задача відноситься до задач **динамічного програмування**.

Якщо критерій ефективності та система обмежень задаються функціями $\alpha_0 x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ виду , то маємо задачу **геометричного програмування**. Якщо

функції f та (або) φ_i у виразах залежать від параметрів, то одержуємо задачу **параметричного програмування**, якщо ці функції носять випадковий характер - задачу **стохастичного програмування**. Якщо точний оптимум знайти алгоритмічним шляхом неможливо через значну кількість варіантів розв'язків, то звертаються до **евристичного програмування**, що дозволяє суттєво скоротити кількість варіантів, які аналізуються, та відшукати якщо не оптимальний, то досить задовільний з практичного погляду розв'язок.

На практиці у більшості випадків ефективність рішення оцінюється не за одним, а відразу за кількома критеріями, один з яких треба максимізувати, інші - мінімізувати. Математичний апарат може принести користь і в випадку **багатокритеріальних задач оптимізації**, або хоча б допомогти відкинути заздалегідь невдалі варіанти розв'язків.

Для того щоб із множини критеріїв, в тому числі і несумісних (наприклад, прибуток і витрати), вибрати цільову функцію, необхідно

встановити **пріоритет** критеріїв. Позначимо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ (тут x - умовний аргумент) окремі критерії задачі. Нехай вони розташовані в порядку спадання пріоритетів. В залежності від певних умов можливі в основному два варіанти:

- за цільову функцію обирається критерій $f_j(x)$, який має найбільш високий пріоритет;
- розглядається комбінація

$$f(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_n f_n(x)$$

де $w_1, w_2, \dots, w_n$ - певні коефіцієнти (важелі).

Величина $f(x)$, враховує всі критерії і може бути обрана цільовою функцією.

В детермінованих умовах w_j - числа, $f_j(x)$ - функції. В умовах невизначеності $f_j(x)$ можуть виявитися випадковими і замість $f(x)$ за цільову функцію треба обирати математичне сподівання суми.

Спроба звести багатокритеріальну задачу до задачі з одним критерієм ефективності в більшості випадків не дає задовільних результатів. Інший підхід полягає в тому, що з множини допустимих розв'язків відкидаються заздалегідь невдалі розв'язки, що поступаються іншим за всіма критеріями. В результаті такої процедури залишаються так звані *ефективні* розв'язки, множина яких значно менша. Остаточний вибір "компромісного" розв'язку (не оптимального за всіма критеріями, якого, як правило, не існує, а прийнятного за цими критеріями) залишається за людиною - особою, що приймає рішення.

Отже, **математичне програмування – прикладний напрямок математики, який займається вивченням задач оптимізації та розробкою теорії і методів їх розв'язання. В основу класифікації цих задач покладено вид математичних залежностей моделі.**

Особливістю дослідження операцій вважається їх міждисциплінарний, комплексний характер, який передбачає **системний підхід** до прийняття рішення [6]. Наприклад, розширення випуску продукції на фірмі потребує одночасного взаємопов'язаного розв'язання багатьох окремих проблем: реконструкції підприємства, закупівлі обладнання, сировини та матеріалів, підготування ринку збуту, удосконалення технології, підготовки спеціалістів, тощо. В аналізі можливих наслідків прийняття рішень приходится враховувати такі фактори, як невизначеність, випадковість та ризик. До розв'язання таких складних задач запрошують економістів, математиків, статистиків, інженерів, соціологів, психологів та ін.

В навчальному посібнику розглянуті основні серед наведених методів оптимізації. Але вони, як і будь-які інші математичні методи, завжди так чи інакше спрощують задачу. Це пов'язано з тим, що для побудованої математичної моделі не завжди існує метод розв'язання або метод відомий, але потребує великих витрат часу і коштів на його реалізацію. Звичайно, що життя набагато складніше будь-якої моделі і тому саме *прийняття рішення* виходить за рамки методів оптимізації і є компетенцією відповідальної особи

(групи осіб), яка повинна враховувати не тільки математично обґрунтовані, але і інші неформальні міркування. У зв'язку з цим доречно жартівливо-парадоксальне визначення дослідження операцій, зроблене одним з його творців Т.Сааті, як “мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які даються ще гірші відповіді іншими методами.

1.8. Основні класи задач дослідження операцій

Практична методика кількісного обґрунтування прийняття оптимальних рішень за змістовною ознакою економічних задач розглядається прикладним направленням математики, що одержало назву “**Дослідження операцій**”. З великої різноманітності практичних задач різних сфер економічної діяльності можна виділити наступні основні класи задач дослідження операцій.

Задачі мережевого планування та управління розглядають співвідношення між термінами закінчення великого комплексу робіт та початком кожної роботи комплексу. Зміст цих задач полягає в мінімізації тривалості виконання комплексу робіт, оптимального співвідношення величин вартості та термінів виконання робіт.

Задачі масового обслуговування досліджують та аналізують системи обслуговування з чергами викликів (або вимог) і визначають показники ефективності роботи систем, їх оптимальні характеристики, такі, як встановлення кількості каналів обслуговування, тривалість обслуговування, тощо.

Задачі управління запасами відшуковують оптимальні рівні запасів (точки замовлень) та обсяг замовлення. Особливість таких задач полягає в тому, що зі збільшенням рівня запасу, з одного боку, зростають витрати на їх зберігання, але з іншого боку, зменшуються збитки через можливість виникнення дефіциту продукту, що зберігається.

Задачі розподілу ресурсів виникають, коли обмежені ресурси треба направити лише на ті роботи з заданої множини робіт, які забезпечують найбільший сумарний ефект.

Задачі ремонту та заміни обладнання актуальні у зв'язку з його старінням та необхідністю заміни з часом. Суть задачі полягає у визначенні оптимальних термінів, кількості профілактичних ремонтів та перевірок, а також часу заміни старого обладнання новим.

Задачі складання розкладів (календарного планування) визначають оптимальну черговість виконання робіт (наприклад, обробки деталей) на різних видах обладнання.

Задачі планування та розміщення визначають оптимальну кількість та місця розташування нових об'єктів з урахуванням їх взаємодії з існуючими об'єктами та між собою.

Задачі вибору маршруту, або задачі мереж, частіше за все зустрічаються в дослідженні різноманітних задач на транспорті та в системі зв'язку. Вони визначають найбільш раціональні маршрути.

Задачі теорії ігор займаються пошуком розв'язків в конфліктних ситуаціях. До конфліктних ситуацій, в яких зіштовхуються інтереси двох або більше сторін з різними цільовими напрямленнями, можна віднести ряд ситуацій в галузі економіки, права, воєнної справи та ін. В задачах теорії ігор необхідно розробити рекомендації до розумної поведінки конфліктуючих сторін, визначити їх оптимальні стратегії.

До задач оптимізації належать тільки такі задачі людської діяльності, де виникає проблема вибору, підпорядкована досягненню певної мети. Багатоваріантні оптимізаційні задачі належать до найбільш складних задач економіки. Їх важче сформулювати і розв'язати, ніж задачі прямого розрахунку (облікові). Наприклад:

- ✓ вибір банком портфеля цінних паперів для одержання найбільших прибутків;
- ✓ визначення комерційним банком оптимального рівня запасу валюти для операцій обміну з метою мінімізації втрат, внаслідок можливого дефіциту валюти або вилучення валюти з обороту в разі створення її надмірного запасу;
- ✓ розробка такого плану постачання, який би забезпечив мінімальні витрати на закупівлю та доставку сировини;
- ✓ визначення плану багатонаменклатурного виробництва, що принесе фірмі максимальний дохід;
- ✓ складення фермером денного раціону відгодівлі худоби, який відповідатиме необхідній поживності і буде найдешевшим;
- ✓ визначення рівня витрат на рекламу для забезпечення більшого прибутку від продажу товарів;
- ✓ вибір параметрів мережі торговельних точок (їх кількість, розміщення, кількість персоналу) для створення максимальної економічної ефективності розпродажу.

Наведені задачі відносяться до різних напрямів практичної діяльності, але їм властиві загальні риси: в кожному випадку мова йде про заходи, що спрямовуються до виконання певної *мети*; в кожній задачі формуються певні *умови* проведення заходу, в межах яких треба відшукати *розв'язок*, - такий, щоб одержати найбільшу вигоду. Отже можна виділити наступні основні поняття та визначення методів оптимізації.

Оптимізаційна задача - економіко-математична задача, мета якої полягає в знаходженні найкращого (з точки зору певного *критерію*) виконання сформульованих *обмежуючих умов*.

Критерій оптимальності - показник якості допустимого плану (розв'язку), за яким можна впорядкувати розв'язки і вибрати найкращий з них.

Оптимальний розв'язок - розв'язок, який по відношенню до критерію оптимальності є найкращим з усіх можливих варіантів.

1.9. Поняття критерію оптимальності: глобальний і локальний

Формулювання критеріїв оптимальності економічних систем є необхідною передумовою оптимізації планових рішень. У загальному випадку під критерієм оптимальності розуміється ознака, на підставі якого проводиться оцінка, порівняння альтернатив, класифікація об'єктів і явищ [14]. Критерій оптимальності функціонування економічної системи – це один з можливих критеріїв (ознак) її якості, а саме тієї ознаки, за якою функціонування системи визнається найкращим з можливих альтернативних варіантів її функціонування. У сфері прийняття економічних рішень критерій оптимальності – це показник, що виражає граничну міру економічного ефекту прийнятого господарського рішення для порівняльної оцінки можливих рішень вибору найкращого з них. Найбільш часто використовується максимум прибутку або мінімум витрат, знаходження найкращого економічного ефекту.

Критерій оптимальності зазвичай має кількісний характер і показує, наскільки один варіант краще або гірше іншого. Порядковий номер критерію визначає лише те, що один варіант краще або гірше іншого. Математичною формою критерію оптимальності в економіко-математичних моделях є цільова функція, екстремальне значення якої характеризує гранично допустиму ефективність діяльності модельованого об'єкту.

Якщо за класифікуючу ознаку прийнятий фактор, що пов'язаний із глобалізаційними ознаками, то для системи існують глобальні критерії оптимального розвитку в масштабах Земної кулі, природно – кліматичні, екологічні аспекти, соціально-економічний критерій, а також «глобальний» (узагальнений) і локальний критерій оптимальності в конкретних системах моделей.

Якщо за класифікуючу ознаку взяти математичне формулювання, то критерії поділяються на скалярні і векторні, адитивні і мультиплікативні, інтегральні критерії в тимчасовому аспекті і інтегральні в просторовому аспекті та ін. Можлива класифікація моделей з тимчасового аспекту, за способами формування критеріїв, за способами використання критеріїв.

Найчастіше термін «глобальний» застосовується або по відношенню до критерію однорівневої моделі, або по відношенню до критерію «верхньої» моделі багаторівневої системи моделей. В останньому випадку, разом з

глобальним, фігурують локальні критерії моделей нижніх рівнів, що відображають інтереси окремих господарських ланок, соціальних груп.

Поділ критеріїв на глобальний і локальний може бути застосований до будь-якої ієрархічно побудованої системи моделей, наприклад моделі галузі або підприємства.

Глобальному критерію може бути надане словесне формулювання, а для вирішення практичних завдань планування та управління таке формулювання деталізується і представляється у вигляді сукупності більш конкретних локальних критеріїв. Математично глобальний критерій прийнято формулювати у вигляді скалярної цільової функції, яка узагальнено виражає все різноманіття цілей або у вигляді векторної функції, що представляє собою набір цільових функцій.

Більшість багаторівневих систем мають два рівня: верхній і нижній. Система моделей виробничої програми підприємства включає в себе моделі розрахунку загальногосподарських показників і показників окремих підрозділів.

Складність системи цілей пояснюється різноманіттям завдань суспільного розвитку і розвитку конкретної системи, а також тим, наскільки складні, численні і інтенсивні зовнішні зв'язки даної системи.

Підприємство є елементом більш загальних систем: галузі промисловості, економічного регіону. Тому діяльність підприємства оцінюється в рамках будь-якої з цих загальних систем за відповідними показниками. З цієї точки зору підприємство повинно найкращим чином відповідати цілям зовнішньої системи. З іншого боку, саме підприємство – складна система, елементами якої є колективи його працівників (бригади, відділи, служби, дільниці тощо) і окремі індивідууми. Отже, діяльність підприємства має бути спрямована на найкраще забезпечення інтересів колективу і його працівників. Система критеріїв оптимальності діяльності підприємства включає обсяги випуску основних видів продукції, величину прибутку, питома вага продукції вищої категорії якості, продуктивність праці, собівартість продукції, фонд заробітної плати.

Система критеріїв галузевої системи включає задоволення суспільних потреб у виробленій продукції, економію ресурсів, впровадження досягнень науково-технічного прогресу, забезпечення надійності виконання планових завдань. Зовнішні зв'язки галузевих систем, а значить, і комплекси їх цілей, ускладнюються фактором часу, просторовою організацією, поєднанням різних підходів і аспектів планування.

Множинність цілей розвитку систем істотно ускладнює планування, особливо, якщо цілі різноспрямовані, і наближення до одних цілей віддаляє систему від досягнення інших. Таким чином виникає задача їх узгодження. Відшукування найкращих рішень за кількома критеріями називається багатокритеріальною або векторною оптимізацією.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Математична модель та загальна постановка оптимізаційної задачі

Економіко-математичне моделювання є важливою складовою інформаційного суспільства. Бурхливий процес збільшення засобів аналізу, опрацювання, передачі, зберігання інформації відповідає сучасним тенденціям розвитку науково-технічного прогресу. Проте, для прийняття ефективних рішень у будь-якій галузі та, відповідно, контролю за їх виконанням необхідні надійні методи і моделі опрацювання цієї інформації. Математичні методи і моделі є тим інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства, тобто є універсальним методом наукового пізнання та визначення факторів економічного зростання на перспективу.

Термін «модель» широко використовується в різних сферах людської діяльності і має безліч семантичних значень. Походить цей термін від латинського слова «*modelus*», що означає міра, зразок. Проте, ми будемо розглядати лише ті моделі, що мають значення для отримання нових знань та прогнозування зростання економічної системи.

Моделювання будь-якого процесу передбачає застосування *тріади моделювання*: **модель - алгоритм – програма**, або іншими словами: **маю – бажаю – яким чином досягти чи перейти від маю до бажаю** та включає три системотвірних елементи: **суб'єкта (дослідника), об'єкта дослідження, моделі, як інструменту пізнання, що опосереднює відношення суб'єкта, що пізнає, і об'єкта, який пізнають. Модель – це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває найважливіші риси і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.**

Неможливо уявити собі сучасну науку, зокрема економіку, без широкого застосування математичного моделювання.

Сутність цієї методології полягає в заміні вихідного об'єкта його «образом» – математичною моделлю – і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп'ютерних програм. Робота не із самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких ймовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп'ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють, спираючись на потужність сучасних математичних та обчислювальних методів і технічного інструментарію інформатики, ретельно та досить глибоко вивчати об'єкт у достатньо детальному вигляді, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи аналіз надзвичайно складних економічних і соціальних процесів.

Нині математичне моделювання входить у третій принципово важливий етап свого розвитку, «вбудовуючись» у структури так званого *інформаційного суспільства*. Бурхливий прогрес засобів аналізу, опрацювання, передачі та зберігання інформації відповідає сучасним тенденціям соціального буття. Необхідні надійні способи опрацювання інформаційної «сировини» в готовий «продукт», тобто в точні знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й повинна бути *інтелектуальним ядром* інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

На *першому етапі* обирається (чи будується) «еквівалент» об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші (ключові) його властивості – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що притаманні складовим його частинам тощо. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дозволяє отримати важливі (концептуального характеру) нові знання про об'єкт.

Другий етап – вибір (чи розроблення) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, зручній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю. Обчислювальні алгоритми не повинні спотворювати основні властивості моделі, а отже, вихідного об'єкта (оригіналу), бути економними та адаптивними щодо особливостей розв'язання задач і використання комп'ютерів.

На *третьому етапі* створюються програми, що «переносять» модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову. До них також ставляться вимоги економічності та адаптивності. Їх можна назвати «електронним» еквівалентом досліджуваного об'єкта, що є придатним для безпосереднього експериментування на комп'ютері.

Створивши *тріаду*: «модель—алгоритм—програма», дослідник (системний аналітик) отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як *адекватність* (достатній рівень відповідності, зважаючи на цілі та взятую систему гіпотез) тріади щодо вихідного об'єкта засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта. Процес моделювання супроводжується поліпшенням та уточненням, за необхідності, всіх складових (ланок) тріади.

Мистецтво побудови економіко-математичної моделі полягає в тому, щоб узгоджувати якомога більшу лаконічність у її математичному записі з достатньою адекватністю та точністю модельного відтворення тих сторін аналізованої економічної реальності, які, власне, і цікавлять дослідника згідно з цілями та взятими гіпотезами.

Якщо йдеться про математичну модель, що описує механізм функціонування певної гіпотетичної економічної чи соціально економічної

системи, то таку модель називають економіко-математичною чи просто економічною.

Математичне моделювання як науковий напрям сформувався у 60-ті роки XX століття, хоча має давню й багату передісторію. У його основу, окрім економічних, покладено низку фундаментальних дисциплін (математику, теорію ймовірностей, теорію систем, інформатику, статистику, теорію автоматичного управління тощо).

Під економіко-математичною моделлю розуміють концентрований вираз найважливіших та найсуттєвіших для дослідника економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів), поданий у знаковій формі (у вигляді математичних функцій, нерівностей, рівнянь, алгоритмів, креслень, схем, спеціальних мов).

Наголосимо, що математична модель – це об'єкт, котрий створюється системним аналітиком для отримання нових знань про об'єкт-оригінал і відбиває лише суттєві (з погляду системного аналітика) властивості об'єкта-оригіналу. Аналізуючи сутність зазначеного вище, можна зробити, зокрема, такі висновки:

а) будь-яка модель є суб'єктивною, вона несе в собі характерні риси індивідуальності системного аналітика;

б) будь-яка модель є гомоморфною, тобто в ній відбиваються (віддзеркалюються) не всі, а лише суттєві властивості об'єкта-оригіналу виходячи з цілей дослідження, узяті системи гіпотез тощо;

в) можливе існування множини моделей одного й того самого об'єкта-оригіналу, які відрізняються цілями дослідження, ступенем адекватності тощо.

Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення, на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

Проникнення математики в економічну науку пов'язане з подоланням значних труднощів. У цьому частково була «винна» математика, яка розвивалась упродовж декількох століть здебільшого з огляду на потреби фізики і техніки. Але головні причини криються все ж у природі економічних процесів, у специфіці економічної науки. Більшість об'єктів, що їх вивчає економічна наука, можуть бути охарактеризовані поняттям «складна система».

Отже, процес моделювання включає:

- суб'єкт дослідження (системний аналітик);
- об'єкт дослідження;
- модель, яка опосередковує відносини між об'єктом, який вивчається, та суб'єктом, який пізнає (системним аналітиком).

Математичні моделі економічних процесів і явищ коротко можна назвати економіко-математичними моделями.

Головною особливістю моделювання є те, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єкта – замітника (моделі). Модель постає як своєрідний інструмент пізнання, аналог реально існуючої системи, за допомогою якої і проводиться вивчення, дослідження і прогнозування реально існуючого об'єкта. Ця особливість моделювання і передбачає застосування при дослідженні систем таких термінів як аналогія, гіпотези, абстракція та інших категорій і методів пізнання.

Аналогією називають судження про будь – яку подібність у деякому сенсі двох об'єктів. Визначення ступеня відповідності, подібності чи відмінності моделі є умовним і відносним та залежить від знань, умінь, професіоналізму, світогляду спостерігача і відповідною поставленою задачею. Наукова гіпотеза створюється на підставі аналогії з виконаними на практиці науковими дослідженнями. Тому аналогія пов'язує гіпотезу з експериментом.

Розрізняють такі типи моделей [24]:

- натурні – оригінал і об'єкт тотожні. Такі моделі широко використовуються в техніці з метою випробування окремих видів продукції чи агрегатів: на стадії складення певної частини виробів (двигун, мікросхема тощо);

- фізичне моделювання передбачає, що об'єкт і модель мають однакову фізичну природу. Саме таким є літак і його аналог, конструкторська модель;

- аналогове моделювання ґрунтується на аналогії явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються однаковими математичними рівняннями;

- знакове моделювання це таке, в якому моделями є знакові утворення будь-якого виду. Розглядають вербальні моделі, схеми, графи, графіки, креслення, математичні вирази, формули, тощо, причому знакові утворення та їхні елементи завжди задаються разом із тими законами (правилами), відповідно до яких ними можна оперувати;

- математичні.

Зазначимо, що все частіше (і це логічно) в економіці використовується комбіноване моделювання, системотвірним елементом якого є *аналітичні моделі*. У побудові та використанні комбінованих моделей попередньо проводять декомпозицію процесу функціонування моделі на складові елементи.

З розвитком економіко-математичних досліджень ускладнюється й проблема класифікації моделей, що використовуються. Разом із виникненням нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їх класифікації здійснюється процес інтеграції моделей різних типів у більш складні модельні конструкції.

Отже, **математична модель** – це абстракція реальної дійсності (світу), в якій співвідношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені співвідношеннями між математичними категоріями. Ці співвідношення, зазвичай, подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється. [25]

Тобто при вивченні економічних процесів або явищ за допомогою математичного моделювання, закономірності та їх взаємозв'язки описуються математичними рівняннями, які характерні для реальних об'єктів. В цьому випадку конструюють економіко-математичну модель.

За академіком Немчиновим, під економіко-математичною моделлю розуміють концентрований вираз найсуттєвіших взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичному виразі [26].

Для перевірки моделі на адекватність оригіналу і його властивостей, поставлених задач використовують поняття верифікації і валідації моделі.

Верифікація моделі - перевірка правильності структури (логіки) моделі.

Валідація моделі – перевірка відповідності здобутих результатів моделювання даних реальному процесу в економіці.

Отже, отриманий внаслідок розв'язування задачі за скорегованою моделлю результат повинен бути ретельно проаналізований методами економічного та економіко-математичного аналізу. Не зупиняючись на традиційних методах економічного аналізу, відмітимо, що невід'ємною частиною роботи щодо моделювання економічних задач є **економіко-математичний аналіз** результатів їх розв'язку.

Суть економіко-математичного аналізу полягає в перевірці обґрунтованості як сформульованої моделі, так і отриманого на її основі оптимального розв'язку.

Економіко-математичний аналіз розв'язку здійснюється у вигляді **варіантних розрахунків** за моделями із зіставленням різних варіантів плану та у вигляді аналізу внутрішньої структури кожного з отриманих розв'язків за допомогою **двоїстих оцінок** (оптимальних, об'єктивно-обумовлених оцінок) і **коефіцієнтів заміщення** (структурних зрушень) останньої симплексної таблиці.

Варіантні розрахунки можуть здійснюватися при незмінній структурі самої моделі, але зі зміною чисельної величини конкретних її показників, або при зміні елементів моделі: критерію оптимізації, системи обмежень, способів та видів виробничої діяльності тощо.

Для прийняття вибору проекту розвитку економічного процесу або управлінського рішення на основі варіантних розрахунків необхідний подальший економічний аналіз з використанням традиційних методів.

Економіко-математичний аналіз внутрішньої структури розв'язків за допомогою **двоїстих (подвійних) оцінок і коефіцієнтів заміщення (структурних зрушень)** дозволяє:

- вивчити стійкість оптимального плану при зміні коефіцієнтів цільової функції, коефіцієнтів «витрати-випуск», перевірки можливості включення в план видів діяльності і технологічних способів, що не увійшли в базис;
- визначити можливі зміни оптимального плану при зміні обсягів ресурсів і складу умов-обмежень.

Такий аналіз є досить ефективним засобом оцінки оптимального плану, що дозволяє не тільки вибрати проект розвитку економічного процесу, але і передбачати можливі зміни стану системи при відповідних змінах умов її функціонування.

Слід відмітити, що процес моделювання є циклічним: після останнього етапу необхідно переходити до першого і уточнювати постановку задачі згідно з отриманими результатами, потім – до другого й уточнювати математичну модель і т.д.

Для класифікації економіко-математичних моделей використовують різні класифікаційні ознаки.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на теоретико-аналітичні, що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних систем, і прикладні, що застосовуються у розв'язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, управління, прогнозування тощо).

Економіко-математичні моделі поділяють на статистичні, балансові та оптимізаційні.

Статистичні моделі – це моделі, в яких описуються кореляційно-регресійні залежності результату виробництва від одного або декількох незалежних факторів. Ці моделі широко використовуються для побудови виробничих функцій, а також при аналізі економічних систем.

Балансові моделі представляють систему балансів виробництва і розподілу продукції і записуються у формі шахових квадратних матриць. Балансові моделі служать для встановлення пропорцій і взаємозв'язків при плануванні різних галузей народного господарства.

Оптимізаційні моделі представляють систему математичних рівнянь, лінійних і нелінійних, підпорядкованих певної цільової функції і службовців для відшукування найкращих (оптимальних) рішень конкретної економічних завдання. Ці моделі, на відміну від статистичних та балансових, відносяться до класу екстремальних задач і описують умови функціонування економічної системи.

За співвідношенням екзогенних і ендогенних змінних, які включаються в модель, поділяються на відкриті і закриті. Повністю відкритих моделей не існує. Модель повинна містити хоча б одну ендогенну (та, що визначається за допомогою моделі) змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не містять екзогенних змінних, функціонують вкрай рідко, бо побудова їх вимагає повного абстрагування від зовнішнього середовища. Більшість економіко – математичних моделей посідає проміжну позицію і розрізняється за ступенем відкритості (закритості).

Так, за функціональною ознакою моделі поділяють на моделі планування, бухгалтерського обліку, моделі інформаційних процесів тощо.

Для моделей макро- рівня важливим є поділ на агреговані та деталізовані.

У залежності від того чи містять ці моделі просторові чинники й умови чи не містять, розрізняють моделі просторові і точкові.

За ознакою розмірності моделі класифікуються на макромоделі, локальні моделі та мікромоделі. Макроекономічні моделі будуються для вивчення народного господарства в цілому на базі укрупнених показників. Мета таких моделей полягає в розробці більш обґрунтованих перспективних планів народногосподарського розвитку на основі пізнання найважливіших економічних пропорцій і співвідношень, темпів зростання виробництва і рівнів споживання, раціональної галузевої структури.

Макромоделі в залежності від прийнятих рівнів деталізації поділяються на односекторні, двосекторні і багатосекторні. У двосекторній моделі виділяється група виробництва засобів виробництва і група виробництва предметів споживання. Однак, у двосекторній моделі в силу агрегованості показників неможливо безпосередньо вирішувати завдання, які виникають в процесі планування.

Більш повну інформацію про механізми взаємозв'язків в економіці можливо відобразити за допомогою багатосекторних моделей, в яких сфера матеріального виробництва складається з десятків, а часом і сотень самостійних систем.

В основі всіх економічних макромоделей лежить рівняння балансу

$$X - F(X) - W = Z,$$

де X - сукупний суспільний продукт;

$F(X)$ - виробнича функція (прямі витрати), що показує частку сукупного суспільного продукту, необхідну для його виробництва;

W - частка сукупного суспільного продукту, що йде на споживання;

Z - частка сукупного суспільного продукту, що йде на накопичення.

Макромоделі можуть розроблятися і для окремих галузей народного господарства, наприклад, рослинництво, машинобудування та інші на найближчу перспективу.

До локальних економічних моделей належать моделі, за допомогою яких аналізуються і прогнозуються деякі показники розвитку галузі. Наприклад, модель прогнозу розвитку науково-технічного прогресу, продуктивності праці тощо.

Мікромоделі на підприємствах розробляються для поглибленого аналізу структури виробництва. Вони дозволяють виявити резерви зростання обсягів виробництва продукції. При побудові мікромоделі широко використовуються методи математичної статистики – кореляційний та регресійний, індексний і вибірковий методи.

Оптимізаційні моделі можуть носити детермінований і стохастичний характер. У детермінованих моделях результат рішення однозначно залежить від вхідних даних. В стохастичних імовірнісних моделях – певний набір вхідних даних може дати лише з певною ймовірністю відповідний результат. Стохастичні моделі описують випадкові процеси, в яких результат завжди залишається невизначеним на відміну від детермінованих моделей, вхідна інформація яких заздалегідь визначає результат рішення.

Найбільш розроблені і практично застосовуються детерміновані моделі, що використовують апарат математичного програмування.

Оскільки економіко-математична модель відображає об'єктивні закономірності відтворення певного об'єкта або окремі сторони цього процесу за допомогою різних математичних засобів, то будь-яка модель характеризується рядом ознак, частина яких належить до відображення властивостей модельованого об'єкту (процесу), а інша частина пов'язана із самим апаратом моделювання.

В основу класифікації виділені чотири ознаки об'єкту і три ознаки за засобами побудови моделей.

Об'єкти, що моделюються розглядаються з позицій:

- 1) суті процесів відтворення;
- 2) тимчасових характеристик процесів;
- 3) рівнів управління процесами (об'єктами);
- 4) призначення моделей в управлінні.

В основу класифікації по засобах їх побудови покладені:

- 1) засоби моделювання і методи реалізації моделей;
- 2) структура моделей і характер залежності її компонентів;
- 3) використана інформація.

Існують різні форми зображення математичних моделей.

Різновид їх обмежується чотирма найтипівішими групами – інваріантною, алгоритмічною, аналітичною, схематичною.

Інваріантна форма – зображення математичної моделі безвідносно до методів, за допомогою яких може розв'язуватися поставлена задача.

Алгоритмічна форма – зображення математичної моделі у вигляді послідовності дій, які необхідно виконати, щоб при розв'язанні поставленої задачі моделювання перейти від відомих даних до шуканого результату.

Аналітична форма – зображення математичної моделі у вигляді формул та співвідношень між математичними виразами, за допомогою яких шукані в задачі моделювання результати визначаються через відомі дані.

Схематична форма – зображення математичної моделі у вигляді таблиць даних, діаграм, схем, графіків, графів.

Заслугує на увагу моделювання методом «чорної скриньки». Незважаючи на те, що як засіб пізнання невідомого людство здавна використовувало цей метод, його усе ж пов'язують із електротехнікою.

Моделювання методом «чорної скриньки» передбачає вхідні впливи $X=\{X_1, X_2, X_3 \dots X_n\}$ та вихідні $Y=\{Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n\}$ і потрібно встановити вид функціональної залежності $Y=F(X)$, тобто коли відомі тільки *входи і виходи* системи, а принцип перетворення входів на виходи не відомий.

Окремо виокремлюють напрямок, відомий як **синергетика** (грец. «synergeia», «synergetikos» – такий, що діє спільно, спільний, сприяння, співробітництво). Цю назву запропонував професор Штутгартського університету Герман Хакен, якого вважають засновником синергетики.

Зазначений термін акцентує увагу на узгодженості, взаємодії частин системи у процесі утворення її структури як єдиного цілого.

Поряд із терміном *синергетика* часто використовують терміни *теорія складності* (complexity theory), *теорія динамічних (складних) систем* (dynamic (complex) system theory), *теорія хаосу* (chaos theory), *нелінійна динаміка* (nonlinear dynamic) або більш загальний – *нелінійна наука* (nonlinear science), увиразнюючи при цьому принципову нелінійність, нерівноважність, складність досліджуваних явищ.

Синергетика вивчає складні системи, які містять багато підсистем різної природи, маючи на меті виявити, в який спосіб взаємодія таких підсистем призводить до виникнення нових стійких просторових, часових чи просторово-часових структур або режимів функціонування, а також досліджує характерні масштаби й швидкості перехідних процесів.

Синергетика акцентує увагу на явищах, що виникають завдяки спільній дії кількох (багатьох) факторів, кожний з яких окремо до цього явища не приводить. Синергетику часто визначають як науку про самоорганізацію.

Під **самоорганізацією** розуміють мимовільне, спонтанне самоускладнення форми (у загальнішому випадку – структури системи та законів її функціонування) унаслідок повільної та плавної зміни її параметрів. Іншими словами, самоорганізація – це утворення впорядкованих структур із хаосу. Отже, синергетика є новою узагальнювальною наукою, що вивчає основні закони самоорганізації складних систем [25].

Кожна з цих сукупностей класифікаційних ознак відображає математичну та інформаційну сторону моделей.

Класифікація моделей, їх аналіз є передумовою для побудови інтегрованої системи моделей.

Сутність інтегрованої системи полягає у вивченні об'єкта як складної динамічної системи, що складається з безлічі функціонуючих у взаємодії елементів. При цьому зміни, що відбуваються хоча б з одним елементом, відображаються на ефективності в цілому всієї системи.

Інтегрована система економіко-математичних моделей є сукупність логічно, інформаційно та алгоритмічно пов'язаних моделей, що відображають економічні, організаційні та технологічні процеси відтворення в їх об'єктивно існуючому єдності. Тільки у взаємозв'язку всіх моделей системи забезпечується комплексне вирішення завдань управління виробництвом. У систему включаються різні моделі, що відображають відтворення економічного об'єкта. Це моделі по функціонуючих показниках ефективності виробництва, таких, як продуктивність праці, собівартість одиниці продукції, валова продукція, прибуток, рентабельність, обсяг капітальних вкладень та інші показники. До інтегрованої системи належать моделі ціноутворення, моделі фінансування та кредитування, оподаткування.

Використання інтегрованої системи моделей в управлінні виробництвом можливо тільки на основі широкого застосування економіко-математичних методів і інформаційних технологій.

Інтегрована система моделей будується з урахуванням загальних методологічних принципів. Це принципи розвитку, єдності, відносної автономності, відповідності та адаптації.

Принцип розвитку вимагає постійного вдосконалення системи моделей, включення в її склад нових моделей, використання яких стає необхідним і можливим у міру загального удосконалення методології планування та управління. Розвиток системи моделей вимагає відповідного розвитку інформаційного і математичного забезпечення планових і прогнозних розрахунків.

Принцип єдності означає представлення всього комплексу економіко-математичних моделей в єдиній структурі взаємопов'язаних блоків. Суттєвою вимогою є спільність методологічного підходу до побудови однотипних моделей, що використовуються на різних рівнях управління виробництвом. Найважливішою умовою виступає єдність математичного забезпечення системи.

Принцип відносної автономності передбачає можливість виділення із загальної системи моделей відносно самостійних частин, які можна розробляти і впроваджувати, не чекаючи повного завершення робіт по всій системі моделей. Цей принцип дозволяє розробляти локальні системи планових розрахунків за конкретними показниками.

Принципи відповідності та адаптації в системі економіко-математичних моделей означають відповідність системи моделей сформованим рівням управління. Моделі для кожного рівня відрізняються ступенем деталізації процесів, що відображаються. Залежно від рівня управління виділяють наступні комплекси моделей:

- регіонального (національного, обласного, районного);
- підприємств та їх підрозділів.

Враховуючи вдосконалення організаційної структури управління й методології планування, зміни структури нормативних документів, необхідно, щоб система моделей адаптувалася до умов, що змінюються, що означає реалізацію принципу відповідності.

Крім розглянутих загально методологічні принципів, виділяють ряд специфічних принципів, що мають важливе значення для побудови інтегрованої системи моделей. Це такі принципи, як принцип орієнтації на вихідні показники, принцип необхідної різноманітності, принцип взаємного доповнення груп моделей, принцип ув'язки моделей.

Принцип орієнтації на вихідні показники означає, що система моделей і рішення з її допомогою повинна забезпечити вихід на планові показники. Ця умова впливає на ступінь деталізації моделей, алгоритми і програми розрахунків і значною мірою на склад вхідної інформації.

Принцип необхідної різноманітності полягає в тому, що для адекватного відображення об'єктивних процесів в склад системи моделей слід включати різноманітні моделі, в тому числі і ті, що реалізують методи математичної статистики і математичного програмування, міжгалузевого балансу, мереживі

та імітаційні моделі. Вибір математичного апарату для побудови і реалізації моделей повинен визначатися особливістю модельованого процесу і можливостями програмного і технічного забезпечення розрахунків.

Принцип взаємного доповнення груп моделей полягає в тому, що для кожного з основних блоків системи моделей доцільно виділяти три взаємодоповнюючі групи моделей, що мають специфічний напрям. Моделі першої групи призначені для прогнозування стану ресурсів і ряду відправних показників планування. Моделі цієї підготовчої групи призначені для забезпечення вхідною інформацією розрахунку основних показників плану. Друга основна група моделей включає моделі для проведення основних оптимізаційних та балансових розрахунків, для ув'язки планових показників виробництва, матеріально-технічного забезпечення, фінансування. І, нарешті, моделі третьої, заключної, групи призначені для додаткових розрахунків, наприклад, для більш детального представлення ряду натуральних і вартісних балансів, планів розподілу ресурсів на об'єкті та інших допоміжних розрахунків.

Принцип ув'язки моделей означає, що між моделями і блоками системи в цілому повинні встановлюватися три види зв'язків: логічна, інформаційна та алгоритмічна.

Логічний зв'язок визначає загальну послідовність реалізації моделей в системі, логіку взаємного погодження різноманітних моделей.

Інформаційний зв'язок будується на базі того, що результативна інформація цих моделей служить вхідною інформацією для інших. Інформаційний зв'язок між моделями характеризується горизонтальною і вертикальною зв'язками. Горизонтальна – пов'язує моделі для планування в одному об'єкті. При цьому потік інформації від моделей довгострокового планування до моделей середньо- та короткострокового планування називають орієнтуючим потоком. Вертикальні зв'язки між моделями служать відображенням реальних зв'язків у плануванні виробництва між різними рівнями управління.

Алгоритмічний зв'язок – сукупність алгоритмів і програм для перетворення вхідної та вихідної інформації по всій системі моделей.

Між загальними і специфічними принципами побудови системи економіко-математичних моделей існує нерозривний зв'язок. З урахуванням цих принципів будуються основні типи економіко-математичних моделей.

Відомі напрями економіко-математичного моделювання:

- оптимізаційний (однокроковий);
- динамічний (багатокроковий або багатоперіодний);
- системний;
- імітаційний;
- стохастичний.

Постійне вдосконалення тріади математичного моделювання та її впровадження у сучасні інформаційно-моделюючі системи – це методологічний імператив. Лише його виконання дає можливість отримати

таку необхідну високотехнологічну, конкурентоспроможну та різноманітну матеріальну й інтелектуальну продукцію.

Проблема пошуку оптимального розв'язку зводиться до того, щоб побудувати адекватну модель задачі та підібрати ефективний метод її розв'язування.

Базова економіко – математична модель має вигляд:

1) Цільова функція (функція мети задачі):

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr}$$

2) Умови – обмеження задачі:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i=1, \dots, k);$$

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq R_i, \quad (i=k+1, \dots, r);$$

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j = B_i, \quad (i=r+1, \dots, m),$$

3) умови невід'ємності або природні умови:

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Прийняті позначення:

N – загальна кількість змінних величин;

J – порядковий номер змінної;

I – порядковий номер обмеження;

M – загальна кількість обмежень;

$I=1, \dots, k$ – обмеження щодо використання ресурсів;

$i=k+1, \dots, r$ – обмеження щодо гарантованого обсягу виробництва;

$i=r+1, \dots, m$ – обмеження щодо фіксованого обсягу виробництва;

a_{ij} – норма витрат i -го виду ресурсу на одиницю виробництва по j -му виду діяльності;

v_{ij} – обсяг виробництва продукту i -го виду у розрахунку на одиницю j -го виду діяльності;

b_i – обсяг i -го виду виробничих ресурсів;

R_i – запланований обсяг виробництва продукту i -го виду;

B_i – фіксований обсяг виробництва продукту i -го виду;

c_j – оцінка змінної в цільовій функції у розрахунку на одиницю виробництва по j -му виду діяльності;

x_j – невідома (змінна) величина, що означає розмір j -го виду діяльності.

Представлена форма запису умов і цільової функції задачі, так звана, **структурна** модель. У **розгорнутому** вигляді кожна умова задачі представлена окремим математичним співвідношенням, а цільова установка – лінійною або нелінійною функцією (див. розділ 3).

Розглядаючи структурну економіко-математичну модель слід відмітити значення техніко-економічних показників. Техніко-економічні показники поділяються на :

- фактичні;
- нормативні;
- прогнозно-розрахункові.

За економічним змістом їх поділяють на:

- коефіцієнти витрат (a_{ij}) вказують на те, яка кількість ресурсів i -го виду витрачається на одиницю j -го виду виробничої діяльності.
- коефіцієнти випуску (v_{ij}) вказують на те, яка кількість продукції i -го виду вироблена в розрахунку на одиницю j -го способу виробництва.
- коефіцієнти пропорційності (k), що виражають певні співвідношення між змінними або їх групами щодо відношення один до одного або до величини обсягу обмеження.

Задача оптимізації має місце в тому випадку, якщо:

- існує не менше двох варіантів дій (процес вибору);
- економічна система функціонує раціонально і внаслідок цього може бути сформульована цільова установка для вибору плану дій;
- варіанти різняться між собою за ступенем реалізації мети та (або) за матеріально – грошовими витратами;
- заздалегідь невідомо, які варіанти краще відповідають сформульованим цілям.

Класифікація задач оптимізації за їх змістом впливає з істотних взаємозв'язків між елементами об'єкту дослідження, якими, в даному випадку, є аграрні і природоохоронні процеси відтворення.

Найбільш важливими є взаємозв'язки між:

- виробничими процесами однієї стадії виробництва, в ході яких виробляються різні споживчі вартості (наприклад, виробництво молока, яєць або зерна);
- виробничими процесами послідовних стадій виробництва одного виду продукції (наприклад, зерна і хлібобулочних виробів);
- різними факторами виробництва при випуску заданої кількості продукції (відносини взаємозамінності між виробничими факторами);
- витратами і обсягами виробленої продукції (ступінь інтенсифікації);
- ступенем використання наявних трудових, земельних, фондів і обсягом виробленої продукції;
- визначається попитом продукції даного виробництва і необхідним у зв'язку з цим відтворенням трудових ресурсів, а також земельних, водних і виробничих фондів;
- спеціалізацією, концентрацією виробництва і кооперацією, з одного

боку, і обсягом виробленої продукції, а також необхідними у зв'язку з цим витратами праці, з іншого;

- територіальним розподілом або концентрацією і регіональною спеціалізацією виробництва, а також міжрегіональною кооперацією, з одного боку, і обсягом виробленої продукції, а також необхідними витратами праці, з іншого.

Ці залежності обумовлюють наступні задачі оптимізації:

- оптимальної спеціалізації і комбінування галузей виробництва з однієї стадії виробництва при даній структурі фондів в умовах послідовного використання можливих горизонтальних ієрархічних зв'язків;

- оптимальної координації або узгодження одна за одною стадій виробництва одного виду продукції;

- оптимальної структури витрат всередині однієї галузі виробництва при виробництві заданої кількості споживчих вартостей;

- оптимального обсягу витрат на одиницю основних засобів виробництва;

- оптимального використання наявних трудових ресурсів, земельних і виробничих фондів;

- оптимального відтворення необхідних фондів;

- оптимальних способів виробництва, а також їх комбінацій;

- оптимального терміну використання основних засобів;

- оптимальної політики з питань капітальних вкладень, що направляються на заміну зношених основних фондів, а також на проведення реконструкції і технічного переозброєння основних фондів, комбінування і послідовності інвестиційних заходів;

- оптимального територіального розміщення сільськогосподарського виробництва і розміщення продуктивних сил, яке включає визначення оптимальної територіальної концентрації та регіональної спеціалізації виробництва, а також міжрегіонального розподілу праці.

Результатом розв'язку однієї з цих задач називається частковим оптимумом. Ці часткові оптимуми, як правило, залежать один від одного та взаємно впливають один на одного. Тому необхідно знаходити часткові оптимуми по можливості одночасно, з урахуванням їх взаємної залежності. Якщо така умова не виконується, то говорять про їх ізольоване значення.

Для побудови математичної моделі оптимізаційної задачі необхідно визначити параметри управління (компоненти плану), які треба обрати, критерій якості плану та обмеження, яким повинен задовольняти план. В модель входять величини двох типів:

- ✓ постійні параметри - це характеристики зовнішнього середовища, що визначають вхідні умови задачі. До них відносяться, наприклад, обсяги ресурсів, на які можна розраховувати, технологічні коефіцієнти використання ресурсів, можливий попит на продукцію, що випускається, тощо;

- ✓ параметри управління - невідомі задачі ($x_1, x_2, \dots$), величини яких визначають доцільну поведінку в заданих умовах. В моделях планування до

параметрів управління відносять обсяги випуску продукції, кошти, що виділяються окремим підрозділам, тривалість виробничих циклів, тощо.

Оптимізаційна модель містить два типи залежностей між характеристиками середовища і невідомими параметрами управління: *цільову функцію та обмеження на допустимі розв'язки*.

Цільова функція - відтворює критерій ефективності розв'язків так, що певному набору характеристик середовища і параметрів управління відповідає своє число, і порівняння цих чисел дає можливість аналізувати якість різних планів в різних умовах. Критерієм ефективності плану можуть вибиратися сумарні доходи, сумарні витрати, прибуток, тривалість виконання всього обсягу робіт та ін.

Обмеження на допустимі розв'язки - будуються у вигляді рівнянь та нерівностей. Обмеження, що пов'язані з допустимими рівнями використання тих чи інших ресурсів (сировини, обладнання, робочої сили), з необхідністю забезпечення заданого попиту на певні види продукції записуються у вигляді нерівностей. Балансові співвідношення представляють собою обмеження-рівняння. Сюди відносять і умови невід'ємності, цілочисельності змінних, якщо за економічним змістом параметри управління повинні мати такі характеристики.

Загальне формулювання оптимізаційної задачі: знайти змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$, які б забезпечили досягнення екстремуму (максимуму чи мінімуму) цільової функції

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

та задовольняли системі обмежень

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор змінних управління. Один з варіантів n значень цих змінних є оптимальним, позначимо його $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$;

b_i - параметри середовища або сталі параметри задачі.

2.2. Етапи дослідження операцій за допомогою математичного моделювання

Зауважимо, що в різних галузях знань, зокрема в економіці, основні етапи процесу моделювання набувають специфічних.

Проаналізуємо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

Не варто ототожнювати економіко-математичне моделювання і дослідження операцій за допомогою методів моделювання. Саме по собі моделювання може розглядатися як процес створення або конструювання економіко-математичної моделі, адекватної об'єкту вивчення. Моделювання ще не передбачає проведення розрахунків по даній моделі, воно може носити чисто теоретичний характер. У той же час проведення дослідження за допомогою методів моделювання передбачає не тільки конструювання моделі, але і використання її для проведення "модельних" розрахунків. Цей процес досить складний і передбачає послідовне виконання ряду взаємопов'язаних робіт, які можна об'єднати в певні етапи.

Проте для кожної досліджуваної проблеми ці етапи можуть мати своє конкретне втілення. Використання правильної методики суттєво підвищує ймовірність уникнення невірної сформульованої задачі дослідження, а також можливості невірного розв'язання правильно поставленої задачі. Це в свою чергу забезпечує адекватність моделі меті дослідження, а при впровадженні результатів – очікувану ефективність.

● вивчення суті проблеми та її якісний аналіз

Перед моделюванням економічного процесу його детально вивчають, використовуючи для цього різні джерела, а за можливості і в натурі. З'ясовують зовнішні і внутрішні зв'язки економічного процесу, умови функціонування економічних систем, з'ясовують, яке місце в ієрархічній структурі займає процес, що вивчається, на який період він повинен бути змодельований. Необхідно підкреслити, що знання про цей процес не повинні обмежуватися загальними положеннями.

Кількісні зв'язки і відносини є відображенням якісної природи економічних систем і процесів, тому математичне моделювання передбачає попередній глибокий якісний аналіз умов функціонування економічної системи, виявлення всієї множини чинників, що її визначають; дослідження взаємозв'язків і взаємного впливу цих чинників і умов.

Лише уважне вивчення економічної системи, включаючи і історичний аспект, технологічних процесів виробництва, природно-економічних умов функціонування виробничих систем та існуючих проблем дасть змогу досліднику правильно побудувати концепцію моделювання та здійснити коректну постановку економіко-математичної задачі. Цей етап включає виокремлення найважливіших рис і властивостей об'єкта, що моделюється, і абстрагування від другорядних; вивчення структури об'єкта і головних

залежностей, що поєднують його елементи; формулювання гіпотез (хоча б попередніх), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

- **постановка задачі**

Якщо правомірно визначати значимість кожного з етапів, то цей етап потрібно поставити на перше місце. Вирішальне значення для математичного моделювання економічних задач має коректна їх постановка. Найдосконаліші математичні методи та електронно-обчислювальні машини не забезпечать бажаного результату, якщо задача не буде чітко сформульована і коректно поставлена.

Головне на цьому етапі – правильно сформулювати суть проблеми, цілі дослідження, припущення, які приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповідь, тобто визначити:

- а) що нам відомо;
- б) що є невідомим;
- в) за яких умов відшукуються невідомі величини;
- г) яка ставиться мета.

Саме на цьому етапі ми визначаємо що відомо в задачі, які змінні виступають невідомими, що треба дізнатися, в яких умовах, та за допомогою яких ресурсів.

На цьому етапі враховують найважливіші риси і властивості об'єкта, що моделюється та абстрагуються від другорядних; вивчають структуру об'єкта та головні залежності, що поєднують його елементи; формують гіпотези (попередні), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

Ясність і чіткість формулювання задачі є тією умовою, за якою розв'язання її приведе до коректних результатів.

- **вибір базової економіко-математичної моделі, формалізація умов та цільової функції задачі**

Для великого кола задач в аграрній сфері виробництва вже побудовані типові математичні моделі. Досліднику часто залишається лише зрозуміти, яка з відомих моделей найбільш придатна для аналізу проблем, що його цікавлять, і адаптувати її до задачі, що розв'язується.

Якщо такої моделі немає, то необхідно її побудувати, тобто здійснити математичну інтерпретацію економіко-виробничої системи, виразити економічну проблему у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Спочатку визначається основна конструкція математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (перелік змінних і параметрів, форма залежності). У зв'язку з великою кількістю і розмаїтістю задач, що розв'язуються методами оптимізації, важко уявити всю сукупність прийомів та правил, що забезпечують формалізацію економічних процесів і явищ. Тому у практиці

економіко-математичного моделювання всю сукупність засобів математичної формалізації зводять до основних прийомів, при застосуванні яких повинні забезпечуватися певні умови. Щоб приступити безпосередньо до розгляду прийомів формалізації економічних умов, розглянемо алгоритм математичної формалізації:

1. Визначення змінних задачі, встановлення одиниць виміру, введення умовних позначень;
2. Розрахунок техніко-економічних коефіцієнтів;
3. Побудова математичних залежностей;
4. Впорядкування елементів рівнянь та залежностей;
5. Подача математичних залежностей у формі, придатній для введення в економіко-математичну матрицю задачі або на ПК.

У процесі побудови моделі необхідно прагнути до того, щоб вона належала до добре вивченого класу математичних задач (методів). Процес переходу від реального об'єкта з притаманними йому властивостями, зв'язками, як всередині самого об'єкта, так і поза ним, до моделей, у значній мірі визначається досвідом та інтуїцією фахівця в даній конкретній області і є складним етапом застосування математичного апарату в економічних дослідженнях. У той же час можна зазначити ряд загальних вимог до економіко-математичних моделей: достатня *точність*, гранична *простота* і *наочність*, *типовість* і *специфічність*.

Достатня *точність* моделі означає, що при ідеалізації реального об'єкта враховані всі істотні властивості та зв'язки, а неістотні, тобто другорядні, виключені з моделі. У той же час, як свідчить практика економіко-математичного моделювання, залежно від характеру об'єкта і поставленої задачі доцільно будувати в ряді випадків декілька різноаспектних моделей. При цьому кожна модель виділяє певні сторони об'єкта, інші ж можуть враховуватися приблизно або агреговано. Таке застосування різноаспектних моделей дозволяє вирішити різні задачі дослідження.

Важливою вимогою є *наочність* і *простота* моделі. Модель повинна бути досить простою, оскільки подальша робота з переобтяженою неістотними чинниками і характеристиками моделлю не тільки складна, але іноді і практично неможлива.

При моделюванні доцільно починати дослідження на основі найпростіших моделей, поступитися точністю в інтересах простоти, щоб проаналізувати хоча б деякі з проблем. Потім перейти до складніших моделей, що дозволить проаналізувати та уточнити результати, отримані на простих моделях. Однак завжди необхідно пам'ятати, що спрощення моделі допустиме лише в тих межах, в яких вона ще відображає істотні властивості реального об'єкта. Звичайно, все це не означає, що завжди і скрізь необхідно використовувати тільки найпростіші моделі. Якщо з їх допомогою не отримані бажані результати, моделі потрібно поступово ускладнювати.

Представляючи реальний об'єкт з достатньою точністю і, за можливістю, просто, необхідно в той же час домагатися **типовості** і **специфічності** моделі.

Типовість моделі – це можливість її застосування для вивчення аналогічних об'єктів або процесів. Але оскільки жоден процес у чистому вигляді не повторюється, як і немає абсолютно однакових об'єктів, то модель повинна враховувати специфіку процесу (об'єкта). Це і визначає **специфічність** моделі.

- **вибір математичного методу розв'язання задачі**

Після того, як математична модель побудована, подальша робота полягає в застосуванні відповідних математичних методів з метою отримання необхідних характеристик даної моделі, а отже, і реального об'єкта дослідження.

Вибір чисельних методів вимагає високого фаху виконавців та адекватності обраних методів побудованій математичній моделі. При виборі числового методу часто виникає питання: чи є можливість знайти точний розв'язок спрощеної математичної моделі або наближений для сформульованої досить повно моделі?

Практика свідчить, що розрахунки за моделлю, в якій враховані в більшому обсязі основні взаємозв'язки, характеристики і фактори більш ефективні.

Велику різноманітність математичних методів можна звести до трьох основних видів: **аналітичних, графічних і чисельних**.

За допомогою **аналітичних** методів з'являється можливість перш за все провести дослідження в загальному вигляді, незалежно від чисельних параметрів системи. Отримані характеристики моделі в аналітичній формі і виявлені аналітичні залежності дозволяють використовувати інші методи, наприклад методи оптимізації, та отримати співвідношення, що характеризують поведінку системи при зміні її параметрів. Проте через громіздкість аналітичних виразів або неможливість їх отримання, складність розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків, аналітичні методи математики застосовуються лише для найпростіших моделей.

Графічні методи наочні, зручні, якщо не вимагається висока точність, або коли інтерес становить якісна картина процесів. В економіці графічні методи найчастіше використовуються при статистичній обробці результатів спостережень. Проте вони обмежені можливостями побудов на площині або в тривимірному просторі – і тому можуть бути застосовані лише для простих моделей.

Особливістю **чисельних** методів є те, що схема обчислень задається формулою або точним розпорядженням про послідовність дій (алгоритмом), виконання яких призводить до бажаного результату.

- a_{ij}, d_{ij}, c_{ijk} – позначення коефіцієнтів витрат ресурсів або виходу продукції;
 R_i, B_i, b_i – ресурси (обсяги обмежень задачі);
 Max – позначення максимуму;
 Min – позначення мінімуму;
 $\rightarrow min(max)$ – прямує до мінімуму (максимуму).

У всіх випадках, коли вводяться додаткові позначення, символи, знаки, використовують відповідні пояснення.

Математична модель задачі, що розв'язується симплексним методом лінійного програмування, в загальній формі включає:

3) лінійну форму змінних або цільову функцію, що виражає цільову установку задачі:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr}$$

4) обмеження змінних, що являють собою систему лінійних нерівностей і рівнянь, що формують умови задачі:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i=1, \dots, k);$$

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq R_i, \quad (i=k+1, \dots, r);$$

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j = B_i, \quad (i=r+1, \dots, m),$$

3) умови невід'ємності всіх змінних величин, включених у задачу:

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Прийняті позначення:

- N – загальна кількість змінних величин;
 j – порядковий номер змінної;
 i – порядковий номер обмеження;
 M – загальна кількість обмежень;
 $i=1, \dots, k$ – обмеження щодо використання ресурсів;
 $i=k+1, \dots, r$ – обмеження щодо гарантованого обсягу виробництва;
 $i=r+1, \dots, m$ – обмеження щодо фіксованого обсягу виробництва;

- a_{ij} – норма витрат i -го виду ресурсу на одиницю виробництва по j -му виду діяльності;
- v_{ij} – обсяг виробництва продукту i -го виду у розрахунку на одиницю j -го виду діяльності;
- b_i – обсяг i -го виду виробничих ресурсів;
- R_i – запланований обсяг виробництва продукту i -го виду;
- B_i – фіксований обсяг виробництва продукту i -го виду;
- c_j – оцінка змінної в цільовій функції у розрахунку на одиницю виробництва по j -му виду діяльності;
- x_j – невідома (змінна) величина, що означає розмір j -го виду діяльності.

Застосування методів лінійного програмування передбачає, що на кожну одиницю витрат ресурсів, які є в розпорядженні виробництва, отримують рівну кількість продукції та між функцією та аргументом існує лінійна залежність.

Насправді, в економічних процесах майже немає лінійних залежностей. Проте в практиці планування та економічного аналізу традиційними методами в більшості випадків така залежність допускається. Це ж знаходить своє відображення і при складанні балансів.

Переваги оптимізаційних методів дослідження сприяють практичному застосуванню методів лінійного програмування, яке виправдане також тим, що більшість нелінійних залежностей можна звести до лінійних. Широке впровадження саме лінійно-оптимізаційних моделей у той же час пояснюється існуванням універсального методу розв'язку таких задач – симплексного та доступного і простого аналізу отриманих розв'язків.

• інформаційна характеристика моделі

Математичне моделювання економічних процесів пов'язане з проблемою забезпечення економічною інформацією. Формування даних задачі включає визначення обсягу і структури інформації, її збирання, оцінку і попередню обробку (переробку). Обсяг і структура інформації визначаються змістом задачі та математичним методом, за допомогою якого вона буде розв'язуватись. Головним гальмом для практичного застосування математичного моделювання в економіці є проблема наповнення розроблених моделей конкретною та якісною інформацією. Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору й опрацювання справляють визначальний вплив на вибір типів прикладних моделей.

Моделювання висуває жорсткі вимоги до системи інформації. Водночас реальні можливості одержання інформації обмежують вибір моделей, які пропонуються до практичного використання. Разом з тим, береться до уваги не лише принципова можливість підготовки інформації (за певний період),

але й витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використання додаткової інформації.

Отримана інформація повинна відповідати ряду важливих вимог: **достовірність, достатність, доступність, однозначність.**

Достовірність інформації означає точність характеристики процесу або явища (об'єкта дослідження). Досягається вона своєчасністю, безперервністю та однократністю її реєстрації.

Достатність інформації – це такий її обсяг, який з потрібною мірою повноти характеризує об'єкт. На практиці прагнуть до того, щоб повнота характеристики об'єкта досягалася при невеликих обсягах інформації.

Доступність інформації досягається тим, що вона нагромаджується у такому вигляді, в якому її легко відтворити, прийняти та обробити.

Однозначність інформації означає в кожному випадку єдине тлумачення і не допускає різночитання.

Загальною і важливою якістю інформації є також її **оперативність**, тобто своєчасність отримання.

Інформація, що використовується при розв'язанні лінійно-оптимізаційних задач, подається у вигляді матриці техніко-економічних коефіцієнтів (ТЕК) типу витрати-випуск, векторів обмежень і коефіцієнтів цільової функції. Ці дані називають інформаційною характеристикою задачі. Вони необхідні для складання числової економіко-математичної моделі, розробка якої здійснюється на наступному етапі.

Детальніше про матричне представлення задачі і розробку її елементів буде сказано нижче.

● побудова числової економіко-математичної моделі задачі

Побудова числової економіко-математичної моделі є підсумком всієї підготовчої роботи дослідження за допомогою математичного моделювання. Це процес наповнення математичної моделі реальним змістом – тобто введення конкретної інформації, що відображає специфічні риси моделі. Що ж потрібно розуміти під числовою економіко-математичною моделлю?

Числова економіко-математична модель – це таке представлення задачі, в якому мета задачі виражена у вигляді цільової функції, а умови – у вигляді алгебричних рівнянь і нерівностей з числовими коефіцієнтами при невідомих.

Таким чином, числова економіко-математична модель відрізняється від розгорнутої математичної моделі конкретністю кількісного представлення об'єкта-оригіналу. Чітко встановлена послідовність виконання робіт на цьому етапі сприяє уникненню помилок і тим самим скороченню часу і зусиль на розв'язання задачі. Ця послідовність може бути різною, однак, практика свідчить про доцільність таких кроків:

- 1) визначити перелік змінних, які характеризують основні невідомі задачі відповідно до видів виробничої діяльності;

- 2) встановити склад і обсяги обмежень;
 - 3) розробити техніко-економічні коефіцієнти (ТЕК) типу витрати-випуск за всіма видами і способами виробничої діяльності;
 - 4) з урахуванням мети задачі сформулювати (обґрунтувати) критерій оптимізації і побудувати цільову функцію.
- Деталізуємо названі кроки.

Склад видів і способів виробничої діяльності, що виражаються змінними, залежить від суті сформульованої задачі та міри деталізації процесу, що моделюється. Види діяльності представляють неподільні операції в моделі економічного процесу, які відрізняються один від одного за ресурсами, що використовуються і коефіцієнтами їх витрат, виходом продукції та коефіцієнтами її випуску, способами і часом використання кінцевої продукції.

Відмінність видів діяльності (за призначенням; ресурсами, що використовуються; кількістю та якістю продукції, яку отримують за технологічною схемою і т.п.) є передумовою багатоваріантності стану системи.

При визначенні переліку змінних у моделі необхідно враховувати їх відмінність за економічним значенням. Залежно від того, що означають змінні та яка їх роль при формалізації задачі, розрізняють *основні*, *додаткові* і *допоміжні* змінні.

Основні змінні відображають основні види діяльності, об'єкти, продукцію тощо. Так, залежно від мети планування або економічного аналізу, основними змінними позначаються сільськогосподарські галузі (перелік яких встановлюється, виходячи з постановки задачі), види продукції, розміри основних засобів виробництва, оборотні засоби виробництва тощо.

Додаткові змінні вводяться в задачу, як правило, для полегшення формалізації її умов. Залежно від постановки задачі вони можуть виражати приріст врожайності сільськогосподарських культур, зміну продуктивності худоби тощо. Додаткові змінні вводять також для перетворення нерівностей у рівняння. Так, якщо нерівність типу $(\geq)$, то додаткові змінні означають перевищення лівої частини над правою частиною нерівності (наприклад, перевищення запланованого обсягу виробництва).

Допоміжні змінні вводяться в задачу з метою математичних перетворень при її записі або розв'язку. Наприклад, допоміжні змінні включають у задачу для визначення розрахункових величин (виробничих ресурсів, які можна придбати, показників економічної ефективності виробництва тощо).

Змінні можуть бути одно-, дво- і багатокomпонентними залежно від того, в якій кількості умов задачі вони представлені. Одночасно з визначенням змінних задачі встановлюються одиниці їх вимірювання. При цьому потрібно керуватися такими правилами:

- за одиницю вимірювання змінної потрібно приймати таку, що застосовується у звітності та плануванні;

- прийнята розмірність змінних не повинна передбачати додаткових розрахунків після розв'язування задачі;
- для змінних, що виражають однотипні види виробничої діяльності, розмірність повинна бути однаковою і різко не відрізнятися порядком числа.

Після того, як види та способи виробничої діяльності позначені змінними, визначають обмеження економіко-математичної задачі. Обмеженнями називаються умови і вимоги задачі, що виражають у вигляді системи рівнянь і нерівностей можливості виробництва і баланс ресурсів. Обмеження можуть бути трьох типів: дорівнює – ($=$); більше або дорівнює (обмеження знизу) – ($\geq$); менше або дорівнює (обмеження зверху) – ($\leq$).

За характером формулювання економічних вимог і математичним записом розрізняють **основні, додаткові і допоміжні обмеження**.

Основні обмеження накладаються на всі або більшість змінних задачі. Як правило, вони виражають і основні умови задачі.

Додаткові обмеження накладаються на невеликі групи або окремі змінні.

Допоміжні обмеження використовуються, як правило, для математичного запису системи співвідношень, або для правильного формулювання економічних вимог при використанні різноманітних прийомів моделювання. Наприклад, обмеження щодо встановлення пропорційного зв'язку між окремими змінними або їх групами.

Паралельно з визначенням переліку обмежень відповідно до умов задачі встановлюють і обсяги обмежень (обсяги правої частини обмежень).

Обсяги обмежень – це постійні величини (константи), що виражають межі використання виробничих ресурсів або гарантований обсяг виробництва. Якщо обмеження відображають умови пропорційного зв'язку між змінними, то їх правими частинами будуть нулі.

Одиниця вимірювання правої частини обмеження (b_i) визначає розмірність кожного i -го обмеження. Наприклад, якщо b означає наявні в господарстві фонди мінеральних добрив у центнерах діючої речовини, то розмірність обмеження щодо використання мінеральних добрив буде також у центнерах діючої речовини.

Кількісне вираження норм витрат ресурсів або норм виходу продукції у розрахунку на одиницю виду виробничої діяльності здійснюється за допомогою **техніко-економічних коефіцієнтів (ТЕК)**.

У числовій економіко-математичній моделі техніко-економічні коефіцієнти записуються при змінних у системі обмежень.

Розрізняють **коефіцієнти витрат** ресурсів та **виробництва** продукції (випуску), **коефіцієнти пропорційності**.

Коефіцієнти витрат (a_{ij}) вказують на те, яка кількість ресурсів i -го виду витрачається на одиницю j -го виду виробничої діяльності.

Коефіцієнти випуску (v_{ij}) вказують на те, яка кількість продукції i -го виду вироблена в розрахунку на одиницю j -го способу виробництва.

За допомогою **коефіцієнтів пропорційності** виражають певні співвідношення між змінними або їх групами щодо відношення один до одного або до величини обсягу обмеження.

Техніко-економічні коефіцієнти, що використовуються в економіко-математичних задачах, можуть бути **нормативними, розрахунково-прогнозованими і фактичними**.

При розробці коефіцієнтів числової економіко-математичної моделі важливо правильно встановити їх розмірність і пов'язати її з розмірністю змінних величин і правих частин обмежень. При цьому необхідно користуватися таким **правилом**: розмірність будь-якого коефіцієнта a_{ij} , що входить в i -е обмеження, повинна відповідати розмірності, прийнятій для цього обмеження (розмірності b_i), поділений на розмірність змінної x_j .

Обґрунтування критерію оптимізації та побудова цільової функції задачі найбільш відповідальна робота на етапі побудови числової економіко-математичної моделі. Це виражається передусім у дотриманні принципу оптимальності, тобто в досягненні заданої мети розвитку системи з найбільшою при заданих умовах ефективністю.

Виходячи з поняття оптимальності системи – найкращого її стану, що відповідає цілям функціонування в процесі розвитку, на етапі постановки економіко-математичної задачі визначається її цільова установка (мета). Остання визначає якісну сторону бажаного економічного результату. Кількісна міра цього результату характеризується **критерієм оптимальності**. Тому поняття “критерій оптимальності” не треба ототожнювати, як це часто роблять з поняттям “цільової установки” (цілі) задачі.

Цільова установка – це деякий бажаний стан системи, а **критерій оптимальності** – показник ефективності функціонування системи з точки зору досягнення заданої мети.

В економіці найбільший інтерес представляють так звані екстремальні задачі, тобто задачі, в яких знаходять екстремум деякої величини. Якщо визначається екстремальне значення конкретного економічного показника, що кількісно виражає цільову установку задачі, то такий показник і є критерієм оптимальності. Виходячи з даного визначення, цільова установка економіко-математичної задачі повинна мати чітке кількісне визначення та відповідати математичному апарату, за допомогою якого проводяться розрахунки.

Залежно від мети задачі знаходять максимальне або мінімальне значення конкретних економічних показників.

При побудові числової економіко-математичної моделі критерій оптимальності виражають цільовою функцією (функціоналом, функцією мети) задачі, тобто аналітичною формою. При цьому коефіцієнти цільової функції (c_j) своєю розмірністю повинні відповідати розмірності змінних (x_j).

● апробація моделі та отримання перших результатів

На цьому, завершальному, етапі циклу виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про рівень практичного застосування останніх.

Математичні методи перевірки можуть виявляти некоректність підходу до побудови моделі і тим самим звужувати клас потенційно правильних моделей. Неформальний аналіз теоретичних висновків і числових результатів, які одержують за допомогою моделі, зіставлення їх із знаннями, якими володіємо, і фактами дійсності також дозволяють знаходити недоліки постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі, її інформаційного і математичного забезпечення

Одним із зручних способів представлення числової економіко-математичної моделі є так званий **матричний**, тобто запис задачі у вигляді відповідної таблиці. **Матриця** – це сукупність чисел або об'єктів іншої природи, розташованих у вигляді прямокутної таблиці.

Така таблиця, що складається з m рядків і n стовпців, містить $m \times n$ клітин (позицій). При цьому кажуть, що матриця має розмір $m \times n$.

Числа або інші об'єкти, розташовані в клітинах таблиці, називають **елементами матриці**. Положення елементів суворо фіксоване, в кожній клітині повинен розташовуватись лише один елемент і жодна клітина не повинна залишатися вільною. Елементи матриці позначають a_{ij} , де перший індекс вказує на номер рядка, а другий на номер стовпчика.

Матричний запис економіко-математичних задач, що розв'язуються **симплексним методом**, містить:

- смислове і кодове позначення змінних та обмежень;
- власне матрицю коефіцієнтів при змінних;
- стовпчик математичних символів типів обмежень;
- стовпчик обсягів обмежень;
- рядок коефіцієнтів цільової функції (оцінки змінних).

● Післяоптимізаційний аналіз оптимального плану та вибір проекту розвитку досліджуваної операції

Отриманий внаслідок розв'язування задачі за скоригованою моделлю результат повинен бути ретельно проаналізований методами економічного та економіко-математичного аналізу. Не зупиняючись на традиційних методах економічного аналізу, зазначимо, що невід'ємною частиною роботи щодо моделювання економічних задач є **економіко-математичний аналіз** результатів їх розв'язку.

Суть економіко-математичного аналізу полягає в перевірці обґрунтованості як сформульованої моделі, так і отриманого на її основі оптимального розв'язку.

Економіко-математичний аналіз розв'язку здійснюється у вигляді **варіантних розрахунків** за моделями із зіставленням різних варіантів плану та у вигляді аналізу внутрішньої структури кожного з отриманих розв'язків за допомогою **двоїстих оцінок** (оптимальних, об'єктивно-обумовлених оцінок) і **коефіцієнтів заміщення** (структурних зрушень) останньої симплексної таблиці.

Варіантні розрахунки можуть здійснюватися при незмінній структурі самої моделі, але зі зміною чисельної величини конкретних її показників, або при зміні елементів моделі: критерію оптимізації, системи обмежень, способів та видів виробничої діяльності тощо.

Для прийняття вибору проекту розвитку економічного процесу або управлінського рішення на основі варіантних розрахунків необхідний подальший економічний аналіз з використанням традиційних методів.

Економіко-математичний аналіз внутрішньої структури розв'язків за допомогою **двоїстих (подвійних) оцінок і коефіцієнтів заміщення (структурних зрушень)** дозволяє:

- вивчити стійкість оптимального плану при зміні коефіцієнтів цільової функції, коефіцієнтів "витрати-випуск", перевірки можливості включення в план видів діяльності і технологічних способів, що не увійшли в базис;
- визначити можливі зміни оптимального плану при зміні обсягів ресурсів і складу умов-обмежень.

Такий аналіз є досить ефективним засобом оцінки оптимального плану, що дозволяє не тільки вибрати проект розвитку економічного процесу, але і передбачати можливі зміни стану системи при відповідних змінах умов її функціонування.

Розглянута послідовність етапів дослідження за допомогою методів моделювання, як і перелік робіт, що виконуються, віднесених до того чи іншого етапу, не є абсолютно строгою і незмінною. Розвиток математичного моделювання як науки, математичних методів, технічних та програмних засобів розв'язку економічних задач, досвіду та практичних навичок дослідника – все це вносить і буде вносити корективи в процес застосування економіко-математичних моделей у практичній та науковій діяльності.

Для розробки економіко-математичних моделей та проведення з їх допомогою подальших досліджень необхідно володіти прийомами та правилами, що забезпечують формалізацію економічних процесів та явищ, тобто вміти відобразити взаємозв'язки та закономірності економічних явищ у математичній формі.

Для задач, що розв'язуються методами лінійного програмування, організаційні, економічні, технологічні та інші умови записуються у математичній формі у вигляді лінійних співвідношень типу $(\leq)$, $(\geq)$, $(=)$.

У зв'язку з великою кількістю і розмаїтістю задач, що розв'язуються методами оптимізації, важко уявити всю сукупність прийомів та правил, що забезпечують формалізацію економічних процесів і явищ. Тому у практиці

• Формалізація умов з використанням відображеної змінної

При моделюванні економічних процесів можливі випадки, коли обсяг i -го виду ресурсів, або обсяг виробництва продукту необхідно одержати як розрахункову величину, тобто величину, що визначається у процесі розв'язку задачі. У таких випадках використовують прийом введення допоміжної змінної з відображеною величиною, яку іноді називають "**відображеною**" змінною. Прийом базується на лінійному співвідношенні вигляду:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = \bar{x}_k,$$

або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n - \bar{x}_k = 0,$$

де $\bar{x}_k$ – допоміжна відображуюча змінна.

• Формалізація умов пропорційного зв'язку

У багатьох моделях зустрічаються умови, в яких необхідно врахувати структурні пропорції. Для того, щоб уникнути трудомістких процесів перетворення співвідношень пропорційного зв'язку, коефіцієнти пропорційності можна визначати за формулою

$$K = \frac{100-d}{d},$$

де K – коефіцієнт пропорційності,

d – обмеження виду діяльності у відсотках.

• Формалізація умов із техніко-економічними коефіцієнтами (ТЕК), що змінюються (метод сумування коефіцієнтів)

Зустрічається у специфічних балансових моделях. У загальному випадку його суть полягає у використанні прийому введення допоміжних змінних і допоміжних обмежень.

Іноді виникає необхідність оптимізувати задачу при максимізації одних та мінімізації інших величин. У кожному з цих випадків використовують відповідні прийоми моделювання або алгоритми розв'язання задач.

У цій роботі ми розглянули методи та прийоми моделювання економічних умов, що найчастіше застосовуються при розробці числової економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування.

2.4. Приклади формалізації економічних задач

Приклад 2.1. Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$ використовується m видів ресурсів $R_1, R_2, \dots, R_m$. Запаси ресурсів, норми витрат

ресурсів по видах на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції				Запас ресурсу
	P_1	P_2	...	P_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Прибуток від одиниці продукції	c_1	c_2	...	c_n	

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним. Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Розв'язання.

Наведений приклад є задачею планування виробництва (задачею про раціональне використання ресурсів). Постановка задачі планування виробництва у загальному випадку: знайти такий план випуску продукції

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє систему обмежень і при якому цільова функція набуває максимального значення.

Математична модель даної задачі представлена формулами

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1:n} \end{cases}$$

У літературі можна знайти постановку інших задач математичного програмування:

- задача про складання раціону (задача про дієти, задача про суміші);
- задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання);
- задача про розкрій матеріалів,
- транспортна задача тощо

Приклад 2.2. Задача про складання раціону (задача про дієти, задача про суміші).

Нехай маємо два види кормів А і В, які містять поживні речовини R_1, R_2, R_3 . Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму і необхідний мінімум поживних речовин наведено у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Поживні речовини	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
		А	В
R_1	b_1	a_{11}	a_{12}
R_2	b_2	a_{21}	a_{22}
R_3	b_3	a_{31}	a_{32}

Вартість 1 кг корму виду А і В становить, відповідно, c_1 і c_2 умовних грошових одиниць. Скласти денний раціон, який має мінімальну вартість і в якому поживних речовин кожного виду буде не менше встановленої норми.

Розв'язання.

За невідомі у задачах даного типу приймають кількість кормів по видах. Так, у даному прикладі, x_1 - кількість корму виду А у кормовому раціоні, x_2 - кількість корму виду В у кормовому раціоні.

Цільова функція відображає мінімальну вартість кормового раціону:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \min.$$

Система обмежень задає мінімально припустимий вміст у кормовому раціоні поживних речовин по видах:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Приклад 2.3. Задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання). Нехай деяке підприємство за зміну має випустити продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 у кількості відповідно n_1, n_2, n_3 . Дана продукція може бути виготовлена на станках чотирьох типів S_1, S_2, S_3, S_4 . Продуктивність роботи станків за зміну задана матрицею A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} - кількість одиниць продукції виду j , що можна виготовити на станку

типу i за одну зміну.

Витрати часу на виготовлення одиниці продукції по видах задано матрицею B :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix},$$

де b_{ij} - витрати часу на виготовлення одиниці продукції виду j на станку типу i за одиницю часу.

Скласти такий план роботи станків, щоб загальні часові витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Розв'язання.

За невідомі у задачах даного типу обирають час, протягом якого станок типу

i буде зайнятий виробництвом продукції виду j і позначають їх x_{ij} .

Цільова функція відображає мінімальні витрати на виробництво всієї продукції:

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots + b_{43}x_{43} \rightarrow \min.$$

Система обмежень складається з двох груп:

- обмеження на використання робочого часу кожного станка (дозволений час роботи станка, наприклад, за зміну, обирають за одиницю);
- виконання плану випуску продукції по видах.

Перша група обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1 \end{cases}.$$

Друга група обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{31}x_{31} + a_{41}x_{41} = n_1 \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{32} + a_{42}x_{42} = n_2 \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + a_{33}x_{33} + a_{43}x_{43} = n_3 \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1:4}, j = \overline{1:3} \end{cases}.$$

Приклад 2.4. Задача про розкрій матеріалів (задача про відходи). Для виготовлення брусу довжиною l_1, l_2 і l_3 м у співвідношенні $k_1:k_2:k_3$ на розкрій поступають N колод довжиною d м. Визначити план розпилу, який

забезпечить максимальну кількість комплектів ($l_1 = 0.8, l_2 = 2, l_3 = 1.5, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, N = 100, d = 4$).

Розв'язання.

Перш за все, необхідно визначити всі можливі способи розпилу колод, вказавши відповідну кількість брусків певної довжини, яку можна одержати з однієї колоди (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Спосіб розпилу	Можлива кількість брусків довжиною		
	0,8 м	2 м	1,5 м
1	5	-	-
2	3	-	1
3	2	1	-
4	1	-	2
5	-	2	-
6	-	1	1

За змінні x_i обирають кількість колод, розпилених i -м способом. В даному випадку $i = \overline{1,6}$. Змінна x - кількість комплектів брусків.

Враховуючи, що всі колоди повинні бути розпилені, а кількість брусків кожного розміру має задовольняти умову комплектності, економіко-математична модель задачі набуває вигляду:

$$F = x \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = x \\ x_3 + x_5 + x_6 = 2x \\ x_2 + 2x_4 + x_6 = 3x \end{cases}.$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,6})$$

Запитання та завдання для самостійної роботи

- ✓ Класифікація задач математичного програмування .
- ✓ Напрямки математичного програмування та їх характеристика.
- ✓ Застосування задач МП у різних сферах буття.
- ✓ Загальна задача лінійного програмування. Її елементи.
- ✓ Канонічні постаті задач лінійного програмування.
- ✓ Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
- ✓ Які є форми запису задач лінійного програмування?
- ✓ Сформулюйте поняття «модель» та «метод моделювання».
- ✓ Охарактеризуйте основні етапи економіко-математичного моделювання.

- ✓ Назвіть основні класифікаційні ознаки економіко-математичних моделей.
- ✓ Назвіть основні прийоми формалізації економічних умов.
- ✓ Основні принципи, що використовуються в моделюванні економіки. Їхня сутність.
- ✓ Дати характеристику задач оптимізації та навести кілька їх прикладів із практики економічного господарювання.
- ✓ Поясніть наступні поняття: оптимізаційна задача, критерій оптимальності, оптимальний розв'язок
- ✓ Записати економіко-математичну модель загальної оптимізаційної задачі.
- ✓ Назвати основні складові частини економіко-математичної моделі та параметри, які вона містить.
- ✓ Пояснити, які напрямлення математики об'єднують назви «Математичне програмування», «Дослідження операцій» та «Методи оптимізації».
- ✓ Назвати основні класи задач математичного програмування.
- ✓ Назвати основні класи задач дослідження операцій.
- ✓ Пояснити, чому процес прийняття рішення потребує системного підходу.
- ✓ Назвати основні етапи розв'язування оптимізаційних задач.

Тестові завдання:

1. Яке слово пропущене в реченні?

Модель – це абстрактне відображення реальної ...	(у бланку відповідей подати одним словом)
--	---

2. Основний метод ЕММ:

(у бланку відповідей впишіть вірну відповідь одним словом)
--

3. Розставити у відповідності до рисунку типи структур

1. Із зворотним зв'язком	а б
2. Без зворотного зв'язку	

4. Моделювання:

1	- це розв'язок економічної задачі за допомогою ППП
---	--

2	- це дослідження реальних систем за допомогою моделей, що включає побудову моделі, дослідження властивостей моделей та перенесення отриманих результатів на реальні системи
3	- це врахування всіх факторів, що впливають на розвиток підприємства та визначення їх кількісних параметрів
4	- це концентрований вираз економічних факторів і умов за допомогою математичних рівнянь та нерівностей

5. Техніко-економічні коефіцієнти (ТЕК):

1	- коефіцієнти, що записуються при невідомих (х), відображають норму затрат ресурсів або норму виходу продукції чи служать для відображення певних співвідношень
2	- коефіцієнти, що вказують яку кількість і-го ресурсу витрачають на 1-цю j-го продукту у конкурентів
3	- коефіцієнти, що вказують яку кількість і-го ресурсу витрачають на 1-цю j-го продукту у партнерів
4	- коефіцієнти, що служать для відображення певних співвідношень між контрактами

6. Розставити назви складових базової моделі у відповідності до рисунку:

1. Цільова функція	$\text{А) } \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \text{extr}$ $\text{Б) } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) B_i, \quad i=[1;m],$ $\text{В) } x_j \geq 0, \quad j=[1;n]$
2. Система основних обмежень	
3. Умови невід'ємності (природні умови)	

7. Розставити у відповідності :

1. зовнішня інформація	А. відомості про внутрішній стан та функціонування системи
2. внутрішня інформація	Б. відомості про конкурентів, партнерів та чинне законодавство, демографічні , соціальні тенденції

8. До етапів дослідження за допомогою економіко-математичних моделей не належать:

1	- вивчення процесу (об'єкта) моделювання;
2	- знаходження суб'єкта моделювання;
3	- постановка економіко-математичної задачі;
4	- вибір базової економіко-математичної моделі, формалізація умов та цільової функції задачі;
5	- апробація моделі задачі на ПЕОМ.

9. Вихідна інформація повинна відповідати таким основним вимогам:

1	- достатність, стохастичність, оперативність, доступність;
2	- достовірність, великий обсяг, однозначність;
3	- достатність, оперативність, запис у зрозумілій формі;
4	- достовірність, достатність, багатозначність, оперативність;
5	- достовірність, достатність, доступність, однозначність, оперативність.

10. Вказати чи вірно, що процес моделювання передбачає такі елементи:

Суб'єкт, об'єкт та моделі, що опосередковує відношення «суб'єкт-об'єкт»	так чи ні
---	-----------

11. За змістом невідомі (змінні) економіко-математичні моделі можна умовно поділити на:

- 1) основні; 2) нехарактерні; 3) неосновні;
4) допоміжні; 5) додаткові; 6) характерні.

12. Матричний спосіб представлення числової економіко-математичної моделі – це:

1	- запис умов моделі у вигляді системи алгебраїчних нерівностей та рівнянь;
2	- запис задачі у вигляді відповідної таблиці;
3	- запис у таблиці лише умов задачі;
4	- запис у таблиці лише типів та обсягів обмежень.

13. Оптимальне управління системою:

1	- це комплекс науково - обґрунтованих методів управління та застосування інформаційних систем для отримання, передачі та оброблення інформації з метою забезпечення ефективного функціонування системи
2	- сукупність елементів , що знаходяться у відношеннях та зв'язках між собою та утворюють деяку єдність
3	- це одностороння стохастична лінійна залежність між випадковими величинами показника Y і фактора X , які знаходяться у причинно-наслідкових відношеннях
4	- це тимчасова відмова економічного суб'єкта від споживання наявних у його розпорядженні ресурсів(коштів) і використання цих коштів для зростання свого добробуту у майбутньому
5	- це програма заходів пов'язаних із здійсненням капітальних вкладень з метою наступного повернення коштів та отримання прибутку

14. Соціально – економічна система:

1	- складні імовірнісні динамічні системи, в яких відбувається процеси виробництва, розподілу, обміну й споживання матеріальних та інших благ.
2	- сукупність елементів , що знаходяться у відношеннях та зв'язках між собою та утворюють деяку єдність
3	- це одностороння стохастична лінійна залежність між випадковими величинами показника Y і фактора X , які знаходяться у причинно-наслідкових відношеннях
4	- це тимчасова відмова економічного суб'єкта від споживання наявних у його розпорядженні ресурсів(коштів) і використання цих коштів для зростання свого добробуту у майбутньому

15. Яке слово пропущене в реченні?

у моделі „чорна скринька” відомі лише входи та	(у бланку відповідей подати одним словом
---	--

16. Верифікація моделі:

1	- повнота, достовірність, цінність, однозначність, актуальність вхідної інформації
2	- перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу у економіці.
3	- детальна характеристика стратегічних планів конкурентів, що виробляють із даним однотипну продукцію
4	- перевірка правильності структури (логіки) моделі.

17. Валідація моделі:

1	- повнота, достовірність, цінність, однозначність, актуальність вхідної інформації
2	- перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу у економіці.
3	- детальна характеристика стратегічних планів конкурентів
4	- детальна характеристика стратегічних планів партнерів по бізнесі

18. Вказати чи правильне наступне визначення :

під ЕММ розуміють концентрований вираз найсуттєвіших взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичній формі	Так чи ні
---	-----------

19. Яке слово пропущене в реченні?

числова ЕММ – це таке її представлення, де алгебраїчні рівняння і нерівності із коефіцієнтами.	(у бланку відповідей подати одним словом)
--	---

20. Розмірність матриці визначається як:

(у бланку відповідей впишіть вірну відповідь)

21. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	задача лінійного програмування	А.	коефіцієнти цільової функції або коефіцієнти системи обмежень - випадкові величини
2.	задача нелінійного програмування	Б.	цільова функція і функції системи обмежень лінійні
3.	задача стохастичного програмування	В.	задача, процес розв'язання якої багатостадійний
4.	задача динамічного програмування	Г.	цільова функція і (або) функції системи обмежень нелінійні

22. Встановити відповідність між словесним формулюванням наступних обмежень та їх математичним записом у вигляді комбінації цифр і букв. Фермер може посіяти 3 культури на 80 га: огірки, цибулю, капусту, площі яких позначено відповідно x_1, x_2, x_3 га. Причому огірків він повинен виростити не менше 112 ц, а капусти не менш 300 ц. Врожайність культур: огірки 214 ц/га, цибуля 230 ц/га, капуста 280 ц/га.

1. Обмеження на загальну площу	А.	$x_1 + x_2 + x_3 = 80$
	Б.	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 80$
	В.	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 80$
2. Обмеження на виробництво огірків	А.	$214x_1 \geq 112$
	Б.	$214x_1 \leq 112$
	В.	$112x_1 \geq 214$
	Г.	$112x_1 \leq 214$
3. Обмеження на виробництво капусти	А.	$300x_1 \geq 280$
	Б.	$280x_1 \leq 300$
	В.	$280x_1 \geq 300$
	Г.	$300x_1 \leq 280$

У запитаннях 23-33 вибрати одну правильну відповідь.

23. Постановка задачі лінійного програмування у стандартній формі:

1. знайти $\max$ значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних нерівностей виду « $\leq$ » та умову невід'ємності;

2. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, при обмеженнях, заданих у вигляді системи лінійних нерівностей і (або) рівнянь;

3. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних нерівностей та умові невід'ємності;

4. знайти розв'язок системи лінійних обмежень, при яких лінійна цільова функція приймає екстремальне значення.

24. Вибрати вірне твердження:

1. в задачах дробово-лінійного програмування цільова функція лінійна, а обмеження є співвідношеннями лінійних функцій;

2. в задачах дробово-лінійного програмування цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій, а обмеження – лінійні;

3. в задачах дробово-лінійного програмування цільова функція і обмеження є співвідношенням лінійних функцій;

4. в задачах дробово-лінійного програмування цільова функція або обмеження є співвідношенням лінійних функцій.

25. У задачі про планування виробництва цільова функція означає:

1. прибуток від реалізації продукції;

2. витрати на виготовлення продукції;

3. прибуток від реалізації одиниці продукції;

4. витрати на вироблення одиниці продукції.

26. Рівнянню $x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$, де x_3 – додаткова змінна, $x_3 \geq 0$ еквівалентна:

1. нерівність $x_1 + 2x_2 \leq 12$;

2. нерівність $x_1 + 2x_2 \geq 12$;

3. нерівність $-x_1 - 2x_2 \geq 12$;

4. нерівність $-x_1 - 2x_2 \leq -12$.

27. У систему обмежень задачі лінійного програмування, яка записана у стандартній формі, входять:

1. лінійні нерівності і рівняння;

2. тільки лінійні нерівності;

3. тільки лінійні рівняння;

4. лінійні нерівності і рівняння.

28. Що відображає цільова функція економіко-математичної моделі

1. критерій оптимальності у математичній формі

2. виробничі витрати

3. хід виробничого процесу

4. математичний запис обмежень економіко-математичної моделі

29. Нерівність $x_1 + 2x_2 \leq 8$ еквівалентна:

1. рівнянню $x_1 + 2x_2 = 8$;

2. рівнянню $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$, де x_3 – додаткова змінна, $x_3 \geq 0$;

3. рівнянню $x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$, де x_3 — додаткова змінна, $x_3 \geq 0$;
 4. нерівності $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 0$.
- 30. Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:**
1. будь-який розв'язок задачі лінійного програмування;
 2. розв'язок, при якому лінійна цільова функція приймає максимальне значення;
 3. розв'язок, що задовольняє систему обмежень;
 4. розв'язок, що задовольняє систему обмежень, при якому лінійна цільова функція приймає максимальне значення.
- 31. Постановка загальної задачі лінійного програмування:**
1. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних рівнянь і (або) нерівностей та виконується умова невід'ємності змінних;
 2. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних нерівностей та виконується умова невід'ємності змінних;
 3. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних рівнянь та виконується умова невід'ємності змінних;
 4. знайти $\max$ ($\min$) значення цільової функції, змінні якої задовольняють систему рівнянь і (або) нерівностей та виконується умова невід'ємності змінних.
- 32. Постановка задачі лінійного програмування у канонічній формі:**
1. знайти $\max$ значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних рівнянь та умову невід'ємності;
 2. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних нерівностей;
 3. знайти $\max$ ($\min$) значення лінійної цільової функції, змінні якої задовольняють систему лінійних рівнянь та умову невід'ємності;
 4. знайти розв'язок системи лінійних обмежень, при яких лінійна цільова функція приймає екстремальні значення.
- 33. Вибрати невірне твердження:**
1. у задачах нелінійного програмування цільова функція або обмеження нелінійні;
 2. у задачах нелінійного програмування цільова функція може бути як лінійною, так і нелінійною;
 3. у задачах дробово-лінійного програмування цільова функція лінійна, а обмеження є співвідношенням двох лінійних функцій;
 4. у задачах стохастичного програмування коефіцієнти цільової функції і (або) коефіцієнти системи обмежень містять випадкові величини.

Практичні завдання

1. Скласти економіко-математичну модель задачі на складання раціону (задачі про дієту, задачі про суміші).

Нехай маємо два види кормів А і В, які містять поживні речовини R_1, R_2, R_3 . Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму і необхідний мінімум поживних речовин подано у таблиці 2.5 (числа умовні).

Таблиця 2.5

Поживні речовини (вітаміни)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
		А	В
R_1	b_1	a_{11}	a_{12}
R_2	b_2	a_{21}	a_{22}
R_3	b_3	a_{31}	a_{32}

Вартість 1 кг корму виду А і В становить, відповідно, c_1 і c_2 умовних грошових одиниць. Скласти денний раціон, який має мінімальну вартість і в якому поживних речовин кожного виду буде не менше встановленої норми.

Значення $b_1, b_2, b_3, a_{11}, \dots, a_{32}, c_1, c_2$ обрати згідно варіанту з таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Варі-ант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
2	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
3	14	12	8	8	4	2	624	541	372	7	3
4	10	9	5	6	3	1	735	765	455	8	4
5	8	7	7	10	6	2	459	379	459	9	9
6	7	12	8	4	4	2	312	541	372	7	3
7	10	3	5	6	1	1	735	255	455	8	4
8	5	9	10	7	9	8	343	587	587	11	7
9	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
10	3	4	3	1	3	4	300	520	600	6	3
11	8	7	14	7	4	1	417	290	591	5	5
12	16	14	4	6	12	9	1728	1728	945	2	3
13	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	3
14	16	7	4	6	6	9	1728	864	945	2	3
15	19	16	19	26	17	8	868	638	853	5	4
16	15	15	18	33	25	6	571	577	890	8	10
17	19	32	19	26	34	8	868	1276	853	5	4
18	3	2	3	5	4	11	453	308	627	2	3

Варі- ант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
19	3	3	10	5	1	2	414	241	768	12	16
20	7	14	8	13	16	2	363	654	429	6	4
21	3	8	3	1	6	4	300	1040	600	6	3
22	2	3	2	3	6	8	428	672	672	3	8
23	2	1	2	3	2	8	428	224	672	3	8
24	8	3	3	6	4	5	880	393	450	6	5
25	8	3	6	6	4	10	880	393	900	6	5
26	5	6	7	7	6	1	256	283	363	9	7
27	15	15	9	33	25	3	571	577	445	8	10
28	9	15	15	27	15	3	606	802	840	11	6
29	10	18	10	14	18	8	686	1174	587	11	7
30	7	12	4	4	4	1	312	541	188	7	3

2. Записати модель, отриману у завданні 1, у формі основної задачі лінійного програмування. Визначити економічний зміст основних і додаткових змінних.

3. Скласти економіко-математичну модель задачі розкрою матеріалу (задачі про відходи).

Для виготовлення бруса довжиною l_1, l_2 і l_3 м у співвідношенні $k_1 : k_2 : k_3$ на розкрій поступають N колод довжиною d м. Визначити план розпилу, який забезпечує максимальне число комплектів.

Значення $l_1, l_2, l_3, k_1, k_2, k_3, N, d$ обрати згідно варіанту (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Варіант	l_1	l_2	l_3	k_1	k_2	k_3	N	d
1	0,8	1,2	2,2	1	2	3	96	4,2
2	1	1,5	1,6	1	2	1	56	4
3	2	2,4	2,6	1	2	2	45	5,6
4	1	2	3	1	3	2	85	4,8
5	1,5	2,5	1	2	1	2	12	6
6	0,8	1	1,2	1	2	1	95	3,6
7	1,3	1,2	1	2	3	3	75	3,8
8	1,5	1,2	3,7	2	3	1	48	4,1
9	0,6	2,4	3,2	1	3	3	100	5
10	5	2,5	3	5	1	1	203	5,2
11	2,3	2,7	3	1	2	2	856	5,4
12	1	3	2	2	7	1	458	5,3
13	3	5	4	2	1	1	856	5,8
14	2,2	3,9	4	1	1	2	135	4,9
15	1,8	4	2,3	1	1	1	452	4,6
16	0,6	1,2	2,2	1	2	3	203	4,3

17	1,2	1,5	1,6	1	2	1	250	4,5
18	2,5	2,4	2,6	1	2	2	456	3
19	1,8	2	3	1	3	2	950	3,1
20	1,8	2,5	1	2	1	2	1000	3,3
21	1,6	1	1,2	1	2	1	560	3,6
22	2,3	1,2	1	2	3	3	589	3,8
23	2,5	1,2	3,4	2	3	1	975	3,4
24	2,6	2,4	3,2	1	3	3	461	3,2
25	2,5	2,5	3	5	1	1	543	3,7
26	3,3	2,7	3	1	2	2	458	4,7
27	4	3	2	2	7	1	764	4,2
28	4,5	2,5	4	2	1	1	964	4,6
29	3,2	3,9	4	1	1	2	542	6
30	2,8	4	2,3	1	1	1	125	6,2

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1.Форми запису задачі лінійного програмування

У попередньому розділі наведено приклади задач лінійного програмування на знаходження максимуму або мінімуму цільової функції при системі обмежень, які в одних задачах мають форму нерівностей, в інших форму рівнянь, а в деяких з них обмеження задаються як нерівностями, так і рівняннями. В розглянутих задачах невідомі змінні вважались зв'язаними умовою невід'ємності, що зумовлено реальною природою розглядуваних явищ. Це положення справедливе для більшості прикладних задач математичного програмування. Тому умову невід'ємності невідомих змінних часто називають природними обмеженнями задачі. Ці обмеження мають основне значення в теорії задач лінійного програмування та побудові алгоритмів їх розв'язування, і тому їх завжди виділяють в окрему групу умов. Однак інколи в реальних ситуаціях на змінні або не можна накладати обмеження по знаку, або навіть слід прийняти умову недодатності деяких змінних.

Отже, щоб представити задачу лінійного програмування в найбільш загальній формі, з якої можна добути всі окремі випадки, слід відмовитись від умови невід'ємності всіх змінних задачі.

Загальною формою задачі лінійного програмування (ЛП) є задача на знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень, що включає як рівності, так і нерівності обох знаків і при невідомих змінних, із яких одні зв'язані умовою невід'ємності, інші – умовою недодатності, а на знак третіх деяких умов не накладено, тобто задача має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}(\max/\min) \quad (3.1.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (3.1.2)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$
$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n \leq b_{k+1} \quad (3.1.3)$$

$$a_{e1}x_1 + a_{e2}x_2 + \dots + a_{en}x_n \leq b_e$$
$$a_{e+1,1}x_1 + a_{e+1,2}x_2 + \dots + a_{e+1,n}x_n \geq b_{e+1} \quad (3.4.4)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0$$
$$x_{2+1} \leq 0, \dots, x_s \leq 0 \quad (3.1.5)$$
$$x_{s+1} \times < 0, \dots, x_n \times < 0$$

Групу обмежень (3.1.2.-3.1.4) називають основними обмеженнями, а групу (3.1.5) – обмеженнями на знак змінних. Отже, загальна форма задачі є формою зі змішаною системою основних умов і змішаною системою обмежень на знаки невідомих.

Слід зауважити, що обмеження загальної задачі, тобто задачі у вигляді рівнянь (3.1.2) називають жорсткими обмеженнями, а задачі у вигляді нерівностей (3.1.3.-3.1.4) – нежорсткими обмеженнями.

Загальна форма запису задач ЛП (3.1.1-3.1.5) непридатна для побудови простих і ефективних методів її розв’язку, оскільки вона містить неоднорідну систему основних умов (3.1.2-3.1.4), а тому задачу зводять до стандартної форми (перша канонічна):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}(\max/\min) \quad (3.1.6)$$

за умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (3.1.7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Необхідно знайти значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють умови (3.1.7) і (3.1.8), тоді як цільова функція (3.1.6) має набути екстремального значення. При розв’язку задачі методами математичного програмування, як правило, вимагається *стандартна форма* запису, при якій система обмежень (3.1.7) складається тільки з рівнянь, а всі b_i ($b_1, b_2, \dots, b_m$) – невід’ємні.

Задачу лінійного програмування (ЗЛП) зручно записувати за допомогою знаку $\sum$.

У такому випадку:

$$\begin{aligned} Z &= \sum c_j x_j \rightarrow \text{extr} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Для дослідження багатьох важливих властивостей задачі ЛП буває зручно представити всі її основні обмеження у формі нерівності одного визначеного типу зі змінними, що задовольняють природні умови (умови невід'ємності).

Назвемо таку форму запису задачі ЛП другою канонічною, яка згідно з написаним, має вигляд (I задача):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_j &\geq 0, j = 1; 2; n \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Потрібно відмітити, що у задачі на максимум обов'язково обмеження типу “ $\leq$ ”, у задачі на мінімум – типу “ $\geq$ ”.

Якщо записати до цієї задачі симетричну (II задача), то вона набуде вигляду:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_j &\geq 0, j = 1; 2; n \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Задачі I і II наведені у другій канонічній формі, вони взаємно симетричні. Задачу II одержують із задачі I, якщо помножити на (-1) цільову функцію та кожне із основних обмежень.

Векторно-матричний запис задачі лінійного програмування має вигляд:

$$Z = CX \rightarrow \text{extr}$$

$$AX = A_0,$$

$$X \geq 0,$$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

де
невідомих; – це матриця коефіцієнтів при

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ - вектор невідомих; } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ - вектор вільних елементів;}$$

$C = (C_1; C_2; \dots; C_n)$ - вектор коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції.

Векторна форма:

$$Z = CX \rightarrow \text{extr}$$

за умов

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n = A_0,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

де
невідомих. – вектори коефіцієнтів при

В загальному вигляді екстремальна задача математичного програмування складається з визначення найбільшого і найменшого значення цільової функції

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1:m},$$

де f і g_i - задані функції, а b_i - деякі дійсні числа.

3.2. Графічний метод розв'язку задач лінійного програмування

Геометрична інтерпретація аналітичних задач дає можливість наочно представити їх структуру, що сприяє засвоєнню їхніх основних властивостей та відкриває шляхи виявлення і дослідження інших, більш складних властивостей цих задач. У найпростіших випадках, як це буде описано далі, геометричне подання дає змогу знайти розв'язок задачі, однак навіть у тривимірному просторі геометричне розв'язування ускладнюється і створює ряд труднощів у побудові відповідних геометричних фігур, а в просторах вимірності, більшої за три, таке розв'язування і зовсім неможливе.

Зробимо кілька попередніх зауважень. В якій би формі не розглядалася задача лінійного програмування, кожне обмеження-рівняння визначає в n -вимірному просторі основних змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ деяку гіперплощину, яка є $(n-1)$ -вимірною множиною у згаданому просторі. Кожне обмеження-нерівність, включаючи і обмеження по знаку, визначає теж деяку площину і півпростір n -вимірного простору, що лежить по один бік від цієї площини. Перетин усіх цих опуклих множин, які визначаються обмеженнями задачі, дає опуклий многогранник допустимих розв'язків системи основних обмежень задачі. Лінійну форму можна також інтерпретувати в n -вимірному просторі основних змінних як сімейство деяких паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z . Отже, кожен таку окрему гіперплощину можна інтерпретувати як площину рівня цільової функції Z .

Зрозуміло, що кожна точка простору основних змінних належить одній з гіперплощин зазначеного сімейства, а тому, беручи до уваги многогранник допустимих розв'язків системи основних обмежень, все вказане сімейство паралельних гіперплощин рівня цільової функції можна поділити на два підсімейства: перше – гіперплощини, що мають спільні точки з многогранником планів задачі, і друге – гіперплощини, що не мають цих точок. Оскільки нас цікавлять лише значення цільової функції в точках, що є планами задачі, то має значення лише перше із зазначених підсімейств. Завдання тепер полягає в тому, щоб серед площин цього першого підсімейства вибрати ту, якій відповідає потрібне екстремальне значення Z .

Графічний метод вирізняється серед методів лінійного програмування простотою та наглядністю, але недоліком його є те, що використовується цей метод лише для задач незначної розмірності (лише для 2-3 змінних).

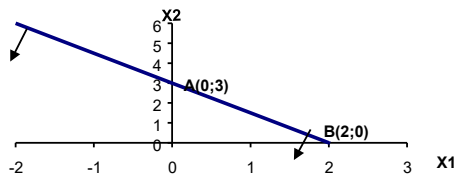
Нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ визначає граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, яка поділяє площину на дві півплощини: додатну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$ та від'ємну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$. Для того, щоб побудувати обмеження-нерівність, необхідно побудувати граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ за двома точками, а потім визначити півплощину, що задовольняє дану нерівність.

Розглянемо докладніше зображення на площині області допустимих розв'язків задачі:

Нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ визначає граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, яка поділяє площину на дві півплощини: додатну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$ та від'ємну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$. Для того, щоб побудувати обмеження нерівність, необхідно

побудувати граничну пряму $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ за двома точками, а потім визначити півплощину, що задовольняє дану нерівність. Якщо гранична пряма не проходить через початок координат, то для визначення півплощини зручно в нерівність підставити координати точки початку координат $O(0, 0)$. Якщо нерівність при цьому виконується, то початок координат належить півплощині. При невиконанні нерівності початок координат не належить шуканій півплощині. Якщо початок координат належить граничній прямій, то для визначення шуканої півплощини підставляють у задану нерівність координати будь-якої точки, що не належить граничній прямій.

Наприклад, необхідно визначити півплощину для нерівності $3x_1 + 2x_2 \leq 6$. На декартовій площині будемо граничну пряму, що визначається рівністю $3x_1 + 2x_2 = 6$, за двома точками $A(0;3)$ і $B(2;0)$. Гранична пряма не проходить через початок координат, тому підставляємо координати точки $O(0;0)$ у нерівність. Одержуємо вірну нерівність $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 6$ ($0 < 6$) отже, початок координат належить півплощині, що визначає нерівність $3x_1 + 2x_2 \leq 6$. Напівплощину, що задовольняє нерівність, будемо помічати стрілочками.



У результаті зображення всіх нерівностей на площині формується область допустимих розв'язків чи многогранник планів задачі.

Областю допустимих розв'язків є фігура, що утворена перетином півплощин, які визначають усі нерівності (обмеження) системи обмежень й умови невід'ємності змінних задачі. Таким чином, для знаходження області допустимих розв'язків задачі необхідно побудувати півплощини для кожного обмеження і для умови невід'ємності змінних і визначити область, спільну для всіх півплощин.

Цільовій функції Z можна надати будь-якого значення і побудувати пряму, що відповідає отриманому виразу. Пряма, одержана таким чином, називається лінією рівня. Оскільки цільовій функції можна надати безліч значень (дійсних), то можна отримати й безліч ліній рівня. Усі лінії рівня паралельні між собою. Напрямок максимізації цільової функції показує вектор-градієнт. Введемо поняття градієнта функції Z .

Якщо наша цільова функція має вигляд $Z = C_1x_1 + C_2x_2$, то $\overrightarrow{\text{grad}} Z = (dZ/dx_1; dZ/dx_2) = (C_1; C_2)$. Таким чином, вектор-градієнт N – це вектор, котрий завжди виходить з початку координат, проходить через точку $(C_1; C_2)$, координати якої є частинними похідними цільової функції і вказує напрямком її зростання. Вектор-градієнт та лінії рівня перпендикулярні між собою.

Якщо задача лінійного програмування має єдиний оптимальний розв'язок, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многокутника планів задачі. Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає, керуючись напрямком вектора-градієнта N , знайти таку вершину многокутника планів задачі, координати якої надаватимуть виразу цільової функції екстремального значення. Знайти оптимальний план задачі, а отже розв'язати її графічно дає можливість певний алгоритм.

Розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставлення координат якої у вираз, лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з таких кроків:

- будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною знаків нерівностей задачі, на знаки рівності;
- визначаємо півплощини, які відповідають кожному обмеженню задачі;
- знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування (симплекс);
- будуємо вектор $N = (c_1; c_2)$ (вектор-градієнт), що задає напрям зростання цільової функції задачі;
- будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора-градієнта N ;
- переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ у напрямі вектора-градієнта (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення;
- визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

- цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині многокутника планів задачі;
- максимального значення цільова функція досягає у будь-якій точці деякого відрізка, що паралельний лінії рівня;
- задача лінійного програмування не має оптимального плану (цільова функція не обмежена згори (зверху), система обмежень задачі не сумісна)

Використання алгоритму графічного методу проілюструємо на конкретному прикладі, розв'язавши декілька задач графічно:

Приклад 3.1.

Знайти графічно розв'язок задачі лінійного програмування:

$$L(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Побудуємо граничні прямі, для чого знаки нерівностей змінимо на рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Знайдемо координати точок, через які проходять граничні прямі, врахувавши знак обмежень, сформуємо ОДЗ задачі-многогранник планів задачі ABCDEF (рис.3.1)

$$(1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1 .

3. Цільова функція на площині представлена лінією рівня, що будується по рівнянню: $L(x) = 3x_1 + 2x_2$

Надаючи довільних значень параметру $L(x)$ можна побудувати на площині сімейство паралельних прямих, що представляють цільову функцію.

Цільову функцію для нашої задачі можна побудувати за рівнянням:

$$3x_1 + 2x_2 = 6, \text{ тобто за координатами } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

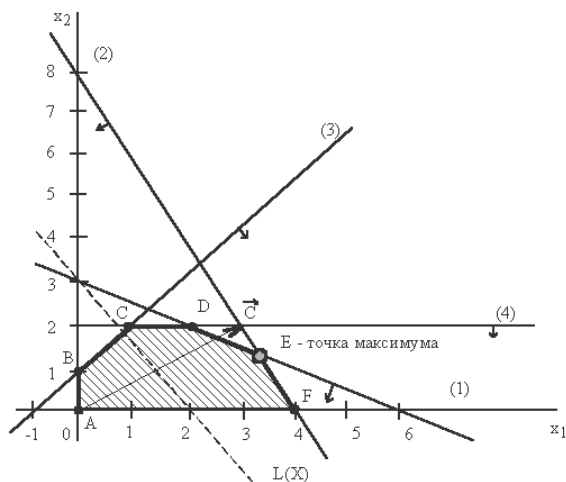


Рис. 3.1. Графічна інтерпретація прикладу

4. Будуємо на площині вектор градієнт $\vec{N}$, тобто вектор, що виходить з початку координат, точки $(0,0)$ та направлений в точку $(3,2)$ координати якої є коефіцієнтами цільової функції.

5. Досліджуючи многогранник планів задачі, тобто фігуру ABCDEF на наявність екстремальних точок, за алгоритмом необхідно лінію рівня переміщувати за напрямком вектора-градієнта для знаходження розв'язку задачі на максимум та проти напрямку вектора-градієнта (для задач на мінімум) до крайньої точки ОДЗ.

Для нашої задачі Точка E - крайня точка за напрямком вектора-градієнта многогранника планів задачі ABCDEF, через яку проходить цільова функція. Тому E - точка максимуму цільової функції. Визначимо координати цієї точки, розв'язавши систему рівнянь для ліній, перетином яких вона утворилася, тобто

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ Точка E } \left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right).$$

Підставляючи координати точки E в цільову функцію, знайдемо значення цільової функції в точці максимуму:

$$L(E) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

6. Досліджуючи цільову функцію на мінімум, шукаємо крайню точку ОДЗ в напрямку, протилежному до напрямку вектора-градієнта. Такою

точкою є точка початку координат $O(0,0)$. Значення цільової функції в точці мінімуму $L(O) = 3x_1 + 2x_2 = 0$.

Приклад 3.2. Дослідити наявність екстремумів

$$L(x) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Будуємо обмеження, як граничні прямі, та для кожного обмеження визначаємо область допустимих значень.

У такий спосіб сформуємо ОДЗ задачі.

$$(1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (3) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (4) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Сформуємо ОДЗ графічно (рис. 3.2).

Обмеження-рівняння (4) допускає тільки точки, що лежать на самій прямій.

Тому ОДЗ для цієї задачі буде відрізок АВ.

Аналогічно до розв'язку попередньої задачі будуємо цільову функцію та шукаємо точки, що надають цільовій функції максимального та мінімального значення.

Цільову функцію побудуємо за рівнянням: $-2x_1 - x_2 = -4$, тобто за координатами $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ та $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

Будуємо вектор-градієнт $\vec{N}$ з точки $(0,0)$ в точку $(-2,-1)$.

Для знаходження точки максимуму рухаємо цільову пряму за напрямком вектора-градієнта, і крайня точка А надасть цільовій функції максимального значення. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (1) та (4), розв'язавши лінійну систему рівнянь для прямих, перетином яких вона утворилася, тобто

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2.86 \\ x_2 \approx 2.57 \end{cases},$$

Рухаючи цільову функцію у напрямку, протилежному до вектора-градієнта, знайдемо точку, що надає цільовій функції мінімального значення. Отже точка В- точка мінімуму.

Визначимо її координати з системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3.46 \\ x_2 \approx 1.85. \end{cases}$$

Отже, максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$L(A) = -2 \cdot 2.86 - 1 \cdot 2.57 = -8.29$$

Відповідно мінімального значення цільова функція досягає в точці В :

$$L(B) = -8.77$$

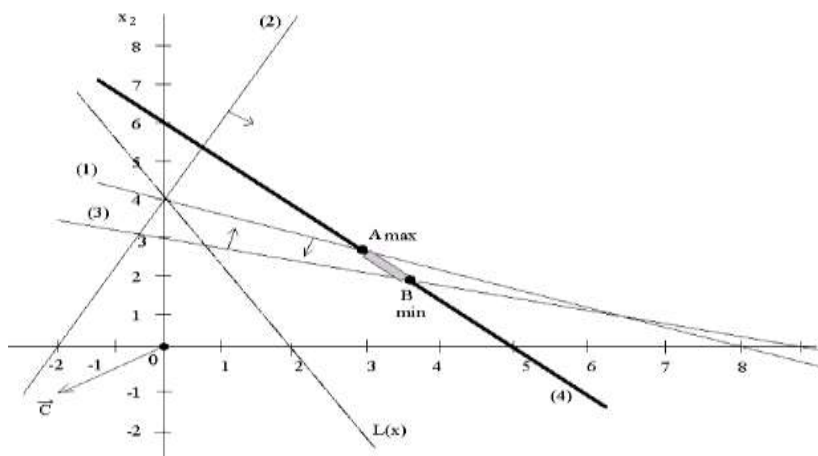


Рис.3.2. Графічна реалізація

Завершуючи знайомство з графічним методом, розглянемо етапи розв'язку задачі лінійного програмування цим методом у вигляді схеми: (рис. 3.3)

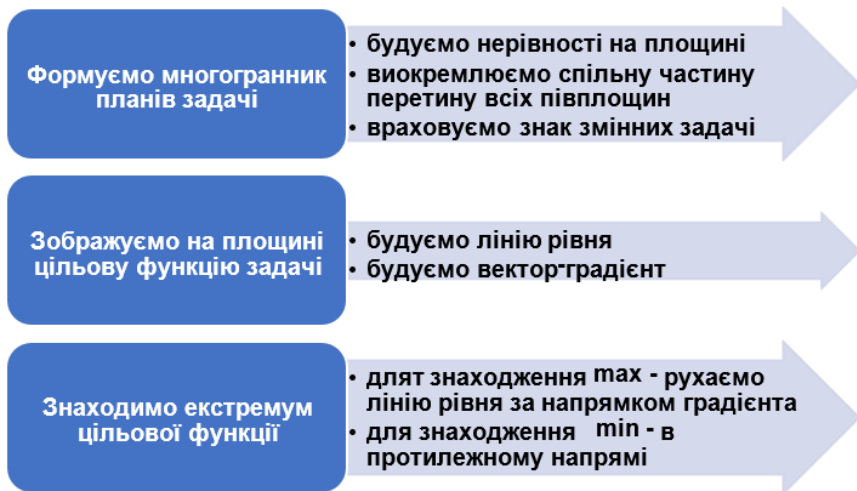


Рис. 3.3. Етапи розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом

Схематично алгоритм побудови та розв'язку задач за допомогою графічного методу можна зобразити наступним чином (рис.3.4).

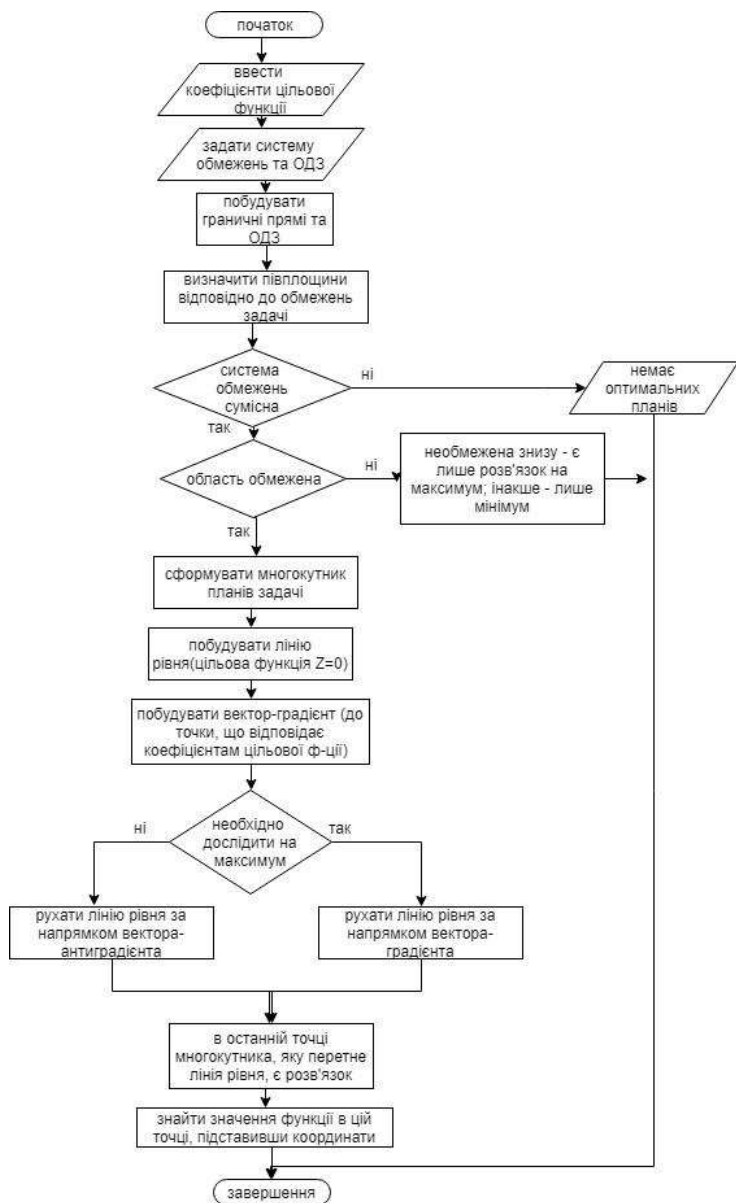


Рис. 3.4. Алгоритм побудови та розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом

3.3. Симплексний метод розв'язку задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома (трьома) змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв'язків задач лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукування оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукування якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій

$$C_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ПК. Тому необхідне використання методу, який уможлиблював би скорочення кількості обчислень. 1949 року такий метод був запропонований американським вченим Дж. Данцігом – так званий симплексний метод, або **симплекс-метод**.

Основою алгоритму симплексного методу є ідея цілеспрямованого перебору вершин многогранника планів задачі, при якому забезпечується монотонна зміна значення цільової функції в потрібному напрямі – монотонне зростання чи зменшення залежно від того, яке екстремальне значення функції треба знайти. При цьому стає можливим обстеження лише невеликої кількості з усього числа вершин многогранника. Число вершин опуклого многогранника завжди скінченне, що забезпечує скінченність алгоритму.

Алгоритм симплексного методу застосовують лише до стандартної форми задачі лінійного програмування. Отже, щоб розв'язати задачу загальної форми симплексним методом, її слід представити стандартною.

Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) одного типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Таким чином, **симплексний метод** – це цілеспрямований перебір вершин многогранника (симплекса), при якому цільова функція монотонно зростає або спадає.

Отже, симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Поняття допустимого та оптимального плану:

Згадаємо загальну постановку задачі лінійного програмування. В загальному вигляді екстремальна задача лінійного програмування складається з визначення найбільшого або найменшого значення цільової функції

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1:m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1:n}$$

де f і g_i - задані функції, а b_i - деякі дійсні числа.

Впорядкована множина чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняють обмеженням задачі МП, називається *допустимим розв'язком* (або *планом*).

План $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$, при якому цільова функція досягає максимального (мінімального) значення, називається *оптимальним*.

Алгоритм методу послідовного поліпшення плану (симплексного методу) полягає у тому, щоб спершу знайти довільний опорний не вироджений план, а потім послідовно переходити до усе кращих планів, поки не буде знайдено оптимальний план. Ітераційні кроки симплексного методу виконуються відповідно до критеріїв, які забезпечують виконання умов, що призводять до кінцевого результату.

Алгоритм розв'язку задач симплекс-методом розглянемо на конкретному прикладі:

Приклад

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 18$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$

1. Представимо задачу у стандартній формі, усі нерівності перетворимо у рівняння, причому у рівнянні справа – const або “0”.

У ліву частину кожного обмеження системи введемо невід’ємні додаткові змінні, які візьмемо зі знаком мінус (“-”), якщо обмеження типу “ $\geq$ ” і зі знаком плюс (“+”), якщо обмеження типу “ $\leq$ ”.

Отже, отримаємо такий запис:

$$\begin{aligned}
Z - 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= 18 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 &= 18 \\
x_j &\geq 0, j = \overline{1,6}
\end{aligned}$$

2. Усі базисні змінні мають утворювати одиничну матрицю, порядок якої дорівнює кількості основних обмежень задачі (у даному випадку – матрицю 3-го порядку):

$$\begin{array}{ccc}
x_4 & x_5 & x_6 \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Для того, щоб змінна x_4 була базисною, треба перший ряд матриці домножити на (-1), тоді отримаємо такий вигляд системи основних обмежень :

$$\begin{aligned}
Z - 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -18 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 &= 18 \\
x_j &\geq 0, j = \overline{1,6}
\end{aligned}$$

3. Побудова симплекс-таблиці:

Таблиця 3.1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
X_4	-2	-3	2	1	0	0	=-18
X_5	2	1	1	0	1	0	=12
X_6	3	2	2	0	0	1	=18
Z	-3	1	-1	0	0	0	=0

← розв'язуючий рядок

← цільовий рядок

↑- розв'язуюча колонка ↑-колонка вільних елементів

$\min(-18/-3; 12/1; 18/2) = (6; 12; 9) = 6$, розв'язуючий елемент (-3)

$$x_1^6 = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$$

$$x_1^6 = (0; 0; 0; -18; 12; 18)$$

$$Z(x_1^6) = 0$$

Позначимо через $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ розв'язок задачі лінійного програмування.

Будь-який розв'язок $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ системи основних умов стандартної задачі лінійного програмування, в якому значення небазисних змінних дорівнюють нулю, а базисних – відповідним елементам колонки вільних членів називається **базисним розв'язком** задачі.

Базисний розв'язок $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, компоненти якого невід'ємні, тобто $x_j \geq 0 \quad (j = 1; n)$

*, називається **опорним планом** задачі.*

*Опорний план, при якому цільова функція приймає екстремальне значення, називається **оптимальним планом** задачі і позначається $x^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$.*

Виділяють три етапи розв'язку задачі симплексним методом:

- побудова базисного плану;
- знаходження опорного плану;
- розв'язок задачі – отримання оптимального плану.

Згідно з даними таблиці базисний розв'язок задачі такий:

$$x_1^6 = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$$

$$x_1^6 = (0; 0; 0; -18; 12; 18)$$

А значення цільової функції, що відповідає цьому розв'язку $-Z(x_1^6) = 0$.

Оскільки, у колонці вільних елементів (табл.1) є від'ємні значення, то план базисний, тому переходимо до знаходження опорного плану.

Алгоритм знаходження опорного плану:

Критерієм опорності плану задачі є невід'ємність елементів колонки вільних членів симплексної таблиці.

1. Проглядаємо колонку вільних елементів. Якщо немає від'ємних елементів, то план опорний, якщо є кілька від'ємних елементів, то вибирають найменший з них або більший за модулем. Вибраний від'ємний елемент визначить розв'язуючий рядок (у нашому прикладі розв'язуючий рядок – перший, де стоїть -18).

2. Якщо у розв'язуючому рядку немає від'ємних елементів, то система несумісна і не має розв'язку. Якщо є кілька від'ємних елементів, то

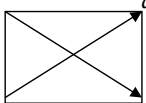
вибирають найменший або більший за модулем. Вибраний від'ємний елемент визначить розв'язуючу колонку (розв'язуюча колонка – друга, де стоїть -3).

3. Складаємо невід'ємні співвідношення колонки вільних елементів до розв'язуючої колонки і знаменник меншого з них приймаємо за розв'язуючий елемент (розв'язуючий елемент -3.)

4. Виконуємо повні виключення Жордана-Гауса.
Алгоритм повторюємо доти, поки не буде знайдено опорний план.

До таблиці 2 перейдемо за таким правилом:

- замість розв'язуючого елемента в наступній таблиці запишемо 1, а решту елементів колонки замінимо на 0.
- елементи рядка, в якому міститься розв'язуючий елемент, ділимо на цей розв'язуючий елемент.
- елементи, що не ввійшли ні в рядок, ні в колонку, де стоїть розв'язуючий елемент, знаходимо за правилом чотирикутника:

$$x' = \frac{a_{rs} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$


Таблиця 3.2

	X_1	x	x_3	x_4	x_5	x_6	1
	2						
x_2	2/3	1	-2/3	-1/3	0	0	=6
x_5	4/3	0	5/3	1/3	1	0	=6
x_6	5/3	0	10/3	2/3	0	1	=6
Z	-11/3	0	-1/3	1/3	0	0	=-6

$$\min (6/2/3; 6/4/3; 6/5/3) = (9; 9/2; 18/5) = 18/5 -$$

розв'язуючий елемент – (5/3)

↑

$$\hat{x}_2 = (0; 6; 0; 0; 6; 6)$$

$$Z(\hat{x}_2) = -6$$

У таблиці 3.2 отримали **опорний план**, бо у колонці вільних елементів немає від'ємних елементів, але не оптимальний, тому що у цільовому рядку є від'ємні елементи.

Переходимо до знаходження оптимального плану.

Критерієм оптимальності задачі на максимум є невід'ємність коефіцієнтів цільового рядка таблиці.

Теорема (ознака необмеженості цільової функції зверху): якщо у симплексній таблиці при знаходженні оптимального плану знайдеться колонка з від'ємним елементом цільового рядка, а всі інші елементи цієї колонки будуть недодатні, то функція мети цієї задачі буде на множині планів задачі з боку максимуму необмеженою ($Z \rightarrow \infty$).

Теорема (ознака необмеженості цільової функції знизу): якщо у симплексній таблиці при знаходженні оптимального плану знайдеться колонка з додатним елементом цільового рядка, а всі інші елементи цієї колонки будуть недодатні, то цільова функція задачі буде на множині планів задачі з боку мінімуму необмеженою ($Z \rightarrow -\infty$).

Алгоритм знаходження оптимального плану задачі на max:

1. Проглядаємо цільовий рядок таблиці. Якщо немає від'ємних елементів, то план оптимальний. Якщо є кілька від'ємних елементів, то вибирають найменший або найбільший за модулем. Вибраний від'ємний елемент визначить розв'язуючу колонку.

2. Складаємо невід'ємні співвідношення колонки вільних елементів до розв'язуючої колонки і знаменник меншого з них прийmemo за розв'язуючий елемент.

3. Виконуємо повні виключення Жордана-Гауса.

Алгоритм повторюємо доти, поки не буде знайдено оптимальний план.

Таблиця 3.3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
x_2	0	1	-2	-3/5	0	-2/5	=18/5
x_5	0	0	-1	-1/5	1	-4/5	=6/5
x_1	1	0	2	2/5	0	3/5	=18/5
Z	0	0	7	9/5	0	11/5	=36/5

Знайдено оптимальний план для задачі на max.

$$\hat{x}_3 = x_{\max}^* = (18/5; 18/5; 0; 6/5; 0)$$

$$Z(x_{\max}^*) = 36/5$$

Критерієм оптимальності задачі на мінімум є недодатність коефіцієнтів цільового рядка таблиці.

Алгоритм знаходження оптимального плану задачі на min:

1. Проглядаємо цільовий рядок таблиці. Якщо немає додатних елементів, то план оптимальний. Якщо є кілька додатних елементів, то вибирають найбільший додатний елемент. Вибраний додатний елемент визначає розв'язуючу колонку.

2. Складаємо невід'ємні співвідношення колонки вільних елементів до розв'язуючої колонки і знаменник меншого з них приймаємо за розв'язуючий елемент.

3. Виконуємо повні виключення Жордана-Гауса.

Алгоритм повторюємо доти, поки не буде знайдено оптимальний план. Слід сказати, що оптимальний план (на $\min$ чи на $\max$) знаходять після знаходження опорного плану, що у даному випадку відповідає таблиці 3.2. Повернемося до вказаної таблиці і продовжимо обчислення.

(опорний план)

	x_1	x	x_3	x_4	x_5	x_6	1
	2						
x_4	2/3	1	-2/3	-1/3	0	0	=6
x_5	4/3	0	5/3	1/3	1	0	=6
x_2	5/3	0	10/3	2/3	0	1	=6
Z	-11/3	0	-1/3	1/3	0	0	=-6

Від таблиці 3.2 почнемо знаходити оптимальний план задачі математичного програмування на мінімум (оскільки у цільовому рядку є додатний елемент, що визначає розв'язуючу колонку).

Отже, $\min(6/1/3; 6/2/3) = (18; 9) = 9$ – розв'язуючий елемент (2/3).

Робимо крок повних жорданових вилучень і переходимо до таблиці 3.2, де знайдено оптимальний план задачі на $\min$.

Таблиця 3.4.

	x_1	x	x_3	x	x_5	x_6	1
	2		4				
x_2	3/2	1	1	0	0	1/2	=9
x_5	1/2	0	0	0	1	-1/2	=3
x_4	5/2	0	5	1	0	3/2	=9
Z	-9/2	0	-2	0	0	-1/2	=-9

$$x_{\min}^* = (0; 9; 0; 9; 3; 0)$$

$$Z(x_{\min}^*) = -9$$

Цей алгоритм реалізує надбудова EXCEL "Поиск решения", з якою ми також познайомимися.

Завершуючи знайомство з симплексним методом, розглянемо етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплексним методом у вигляді схеми: (рис.3.5.)

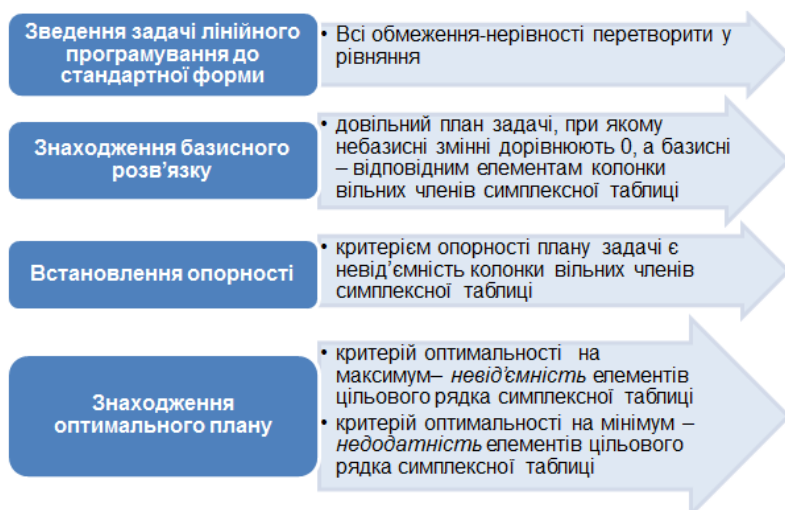


Рис. 3.5. Етапи розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом

Схематично алгоритм побудови та розв'язку задач за допомогою симплексного методу можна зобразити наступним чином (рис. 3.6).

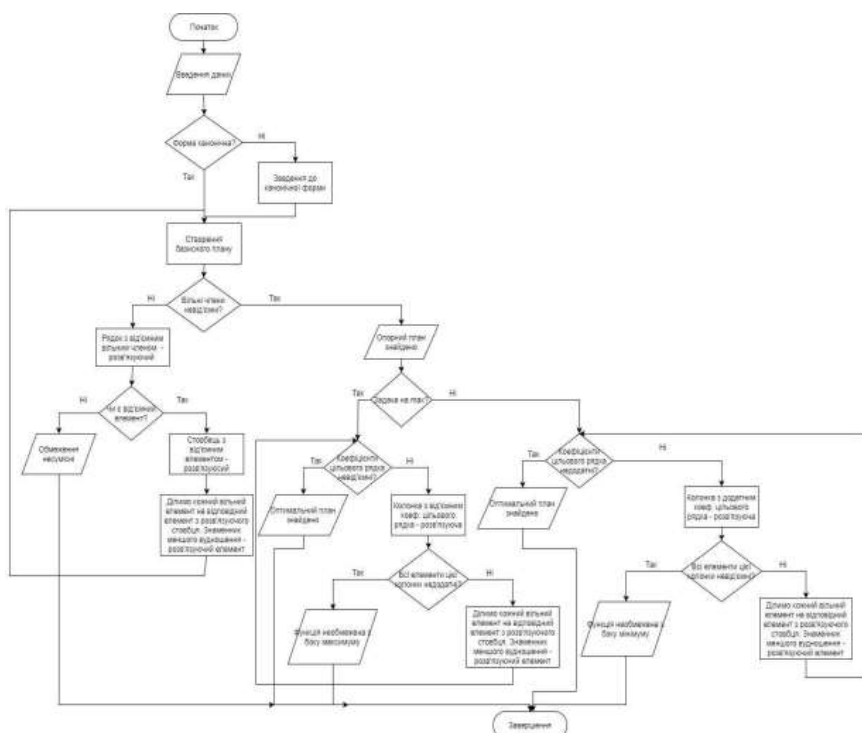


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритму побудови та розв'язку задач симплексним методом

Приклади розв'язку завдань

Приклад 3.1. Математична постановка задачі, наведеної у прикладі 2.1, має вигляд:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 4x_1 + x_2 \leq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її симплексним методом.

Розв'язання.

Перед застосуванням симплексного методу задачу лінійного програмування записують в основній формі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, 5})$$

Алгоритм простого симплексного методу:

1. Складають першу симплексну таблицю (знаходять допустимий план).

- Визначають базисні змінні. Для цього:

а. виписують вектори з координатами, що відповідають коефіцієнтам системи обмежень при відповідних змінних:

$$P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 \begin{pmatrix} 180 \\ 240 \\ 426 \end{pmatrix};$$

б. серед виписаних векторів знаходять ті, що складають систему одиничних.

Нагадаємо, що *одиничним* називається вектор, у якого одна координата дорівнює одиниці, а всі інші – нулі. У *систему одиничних векторів* повинно входити стільки векторів, скільки координат має кожен з них, при чому таких, що в першому одиниця знаходиться на першому місці, а всі інші координати – нулі; в другому одиниця знаходиться на другому місці, а всі інші нулі і т.д.

У даному прикладі систему одиничних складають вектори

$$P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Змінні, що відповідають одиничним векторам, називаються *базисними*. У даному випадку це змінні x_3, x_4, x_5 .

- Заповнюють першу симплексну таблицю:

а. у стовпчик „Базис” записують базисні змінні;

б. над змінними $x_1, x_2, \dots, x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;

с. стовпчик „Сб” складають коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

д. у стовпчик „План” записують координати вектора P_0 ;

е. у стовпчики $x_1, x_2, \dots, x_5$ вносять відповідні координати векторів $P_1, P_2, \dots, P_5$;

ф. заповнюють рядок (m+1):

- о на перетині (m+1)-го рядка і стовпчика „План” записують скалярний добуток векторів $\overline{План}$ і $\overline{C_6}$:

$$\overline{План} \cdot \overline{C_6} = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 426 = 0,$$

- о на перетині (m+1)-го рядка і стовпчиків $X_1, X_2, \dots, X_5$ відповідно записують значення виразів: $\overline{C_6} \cdot \overline{P_j} - c_j$, де $j = \overline{1:5}$, а c_j - коефіцієнти системи обмежень, що записані у таблиці над змінними $X_1, X_2, \dots, X_5$. Так, наприклад, на перетині (m+1)-го рядка і стовпчика X_1 записуємо число $\overline{C_6} \cdot \overline{P_1} - c_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 - 16 = -16$.

№	Базис	C ₆	План	16	6	0	0	0	Оціночне відношення
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	
1	x ₃	0	180	2	3	1	0	0	90
2	x ₄	0	240	4	1	0	1	0	60
3	x ₅	0	426	6	7	0	0	1	71
m+1			0	-16	-6	0	0	0	

2. Оцінюють складений план на оптимальність. Можливі три випадки:
 - (m+1)-й рядок не містить від'ємних елементів, отже план вважається *оптимальним*, переходять до пункту V;
 - серед чисел (m+1)-го рядка знаходяться від'ємні і у відповідному до деякого числа стовпчику немає жодного додатного; задача розв'язків не має;
 - серед чисел (m+1)-го рядка знаходяться від'ємні, і у кожному відповідному до них стовпчику є хоча б одне додатне число. Це означає, що опорний план можна покращити, у даному випадку переходять до нової симплексної таблиці (пункт III).
3. Перехід до нової симплексної таблиці здійснюється заміною існуючого базису, що повинно призвести до збільшення значення цільової функції. При цьому деяка змінна виводиться з базису, замість неї вводиться інша.
 - Знаходження нового базису:
 - а) визначення змінної, що вводиться у новий базис: серед чисел (m+1)-го рядка, що знаходяться у стовпчиках $X_1, X_2, \dots, X_5$, знаходять найменше від'ємне. Стовпчик, в якому це число знаходиться, називається *направляючим*, а відповідна змінна вводиться у новий базис;
 - б) визначення змінної, що виводиться з базису: ділять почленно елементи стовпчика „План” на додатні елементи направляючого стовпчика. Отримані частки записують в стовпчик „Оціночні відношення” симплексної таблиці. Серед них знаходять найменшу.

Рядок, якому вона відповідає, називається *направляючим*, а відповідна змінна виводиться з базису.

У нашому прикладі направляючим стовпчиком є стовпчик x_1 , а направляючим рядком – рядок з номером 2. Отже, у новий базис замість змінної x_4 вводиться змінна x_1 .

На перетині направляючого рядка і направляючого стовпчика знаходиться *генеральний елемент*, відносно якого ведеться перерахунок елементів нової симплексної таблиці.

2) Заповнення нової симплексної таблиці:

а) у стовпчик „Базис” записують базисні змінні;

б) над змінними $x_1, x_2, \dots, x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;

с) стовпчик „ C_6 ” складають коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

д) елементи направляючого рядка ділять на генеральний елемент і заносять у нову таблицю;

е) на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставлять одиниці, всі інші елементи базисних стовпчиків – нулі;

ф) клітини таблиці, що залишилися, заповнюють за правилом чотирикутника:

Для спрощеного знаходження відповідних елементів по рядку і відповідних елементів по стовпчику заштриховують направляючий рядок і направляючий стовпчик.

Проілюструємо обчислення на прикладі елементу (x_3 , План):

$$(x_3, \text{План})' = 180 - \frac{2 \cdot 240}{4} = 60$$

180 – елемент попередньої таблиці, що знаходився в клітині (x_3 , План);

2 – відповідний елемент по рядку; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з направляючим стовпчиком;

240 – відповідний елемент по стовпчику; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з направляючим рядком;

4 – генеральний елемент.

№	Базис	C_6	План	16	6	0	0	0	Оціночне відношення
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	60	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	24
2	x_1	16	60	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	240
3	x_5	0	66	0	$\frac{11}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	12
m+1			960	0	-2	0	4	0	

4. Оцінюють складений план на оптимальність, тобто переходять до п. П. Як бачимо з таблиці, отриманий план нової симплексної таблиці не є оптимальним. Отже, знов знаходимо новий базис і переходимо до ще однієї симплексної таблиці.

Як бачимо, останній рядок не містить від'ємних елементів, отже отриманий план є оптимальним.

№	Базис	C ₆	План	16	6	0	0	0	Оціночні відношення
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	
1	x ₃	0	30	0	0	1	2/11	-5/11	
2	x ₁	16	57	1	0	0	7/22	-1/22	
3	X ₂	6	12	0	1	0	-3/11	2/11	
m+1			984	0	0	0	38/11	4/11	

V. Виписують отриману відповідь із стовпчика „План”. На перетині (m+1)-го рядка і стовпчика „План” знаходиться значення цільової функції. Інші елементи стовпчика план показують значення базисних змінних. Якщо змінна не увійшла в базис, її значення дорівнює нулю.

У нашому прикладі $F_{\max} = 984 \text{ в т. } X^*(57;12;30;0;0)$. Фермер отримає максимальний прибуток розміром 984 грошові одиниці, якщо буде відгодовувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. При цьому корм 1-го виду залишається у кількості 30 одиниць, а корми 2-го і 3-го виду використовуються повністю.

Деякі зауваження до використання симплексного методу:

- при переході до нової симплексної таблиці елементи (m+1)-го рядка можна обчислювати не тільки за правилом чотирикутника, але й за правилом їх знаходження при складанні першої симплексної таблиці;

- якщо за умовою задачі цільова функція була спрямована на мінімум, то отримане кінцеве значення цільової функції із стовпчика „План” слід помножити на (-1);

- якщо не переходити від пошуку мінімуму функції до пошуку максимуму функції, то при застосуванні симплексного методу в (m+1)-му рядку позбавляються додатних елементів; направляючий стовпчик визначається за найбільшим додатним числом (m+1)-го рядка; всі інші етапи симплексного методу аналогічні описаним вище.

Симплексний метод із штучним базисом

Симплексний метод із штучним базисом застосовується у тих випадках, коли з початкової системи обмежень не можна визначити потрібну кількість базисних векторів.

Приклад 3.2. У прикладі 3.1 за початковими умовами обмеження накладалися тільки на кількість кормів. Введемо ще одне обмеження. Нехай

фермер уклав угоду на продаж 20 тварин виду В. Тоді у систему обмежень вводиться ще одна нерівність: $x_2 \geq 20$. Математична модель набуває вигляду:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 4x_1 + x_2 \leq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426 \\ x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Запишемо її в основній формі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426 \\ x_2 - x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Розв'язання.

Почнемо розв'язувати задачу відомим нам симплексним методом:

1. Складають першу симплексну таблицю (знаходять опорний план).

- Визначають базисні змінні. Для цього:

а) виписують вектори з координатами, що відповідають коефіцієнтам системи обмежень при відповідних змінних:

$$P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_0 \begin{pmatrix} 180 \\ 240 \\ 426 \\ 20 \end{pmatrix};$$

б) серед виписаних векторів знаходять одиничні:

$$P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ми маємо тільки три одиничних вектори, у той час як система одиничних векторів має містити чотири. Для системи одиничних векторів не

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

вистачає вектора з координатами $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, для того, щоб стало можливим застосування симплексного методу, необхідно ввести в четверте обмеження

деяку змінну, щоб відповідний вектор мав потрібні нам координати. Дана змінна не буде мати економічного змісту, вона вводиться лише для можливості отримання системи одиничних векторів. Такі змінні називаються штучними, позначаються $y_j, j = \overline{1, m}$, і вводяться в цільову функцію з коефіцієнтом $-M$. Математична модель набуде вигляду:

$$F = 16x_1 + 6x_2 - My_1 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426 \\ x_2 - x_6 + y_1 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P_{y_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

До векторів P_j додається ще один P_{y_1} - одиничний вектор, якого не вистачало.

Отже, систему одиничних векторів складають вектори $P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{y_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а відповідні змінні x_3, x_4, x_5, y_1 є базисними.

- Заповнюють таблицю, до якої додається ще один рядок з номером m+2

№	Базис	C _б	План	16	6	0	0	0	0	-M	Оціночні відношення
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	Y ₁	
1	x ₃	0	180	2	6	1	0	0	0	0	
2	x ₄	0	240	4	1	0	1	0	0	0	
3	x ₅	0	426	6	7	0	0	1	0	0	
4	y ₁	-M	20	0	1	0	0	0	-1	1	
m+1			0	-16	-6	0	0	0	0	0	
m+2			-20	0	-1	0	0	0	1	0	

а) у стовпчик „Базис” записують базисні змінні;

б) над змінними $x_1, x_2, \dots, y_1$ надписують коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;

с) стовпчик „С₆” складають коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

д) у стовпчик „План” записують координати вектора P_0 ;

е) у стовпчики $X_1, X_2, \dots, Y_1$ заносимо відповідно координати векторів $P_1, P_2, \dots, P_6, Y_1$;

ф) заповнюють рядки (m+1) і (m+2). Алгоритм аналогічний до заповнення (m+1)-го рядка, проте доданок без M заносимо у рядок (m+1), а коефіцієнт доданку, що містить M , - у рядок (m+2).

$$\overline{\text{План}} \cdot \overline{C_6} = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 426 + (-M) \cdot 20 = -20M$$

У рядок (m+1) впишемо 0, а в (m+2)-й рядок -20 .

Аналогічно знаходимо інші елементи (m+1)-го та (m+2)-го рядків.

2. Оцінюють складений план на оптимальність за (m+2)-м рядком. Ітераційний процес за (m+2)-м рядком зупиняється, коли:

- всі штучні вектори виключені з базису; у цьому випадку подальше оцінювання оптимальності отриманого плану здійснюється за (m+1)-м рядком;
- не всі штучні вектори виключені з базису, але (m+2)-й рядок не містить

більше від’ємних елементів в стовпчиках $X_1, X_2, \dots, Y_1$; у цьому випадку, якщо:

а) елемент, що знаходиться на перетині (m+2)-го рядка і стовпчика „План”, від’ємний, то задача не має розв’язків, тому що значення цільової функції прямує до нескінченості;

б) елемент, що знаходиться на перетині (m+2)-го рядка і стовпчика „План”, дорівнює нулю, то задача не має розв’язків, тому що система обмежень несумісна.

3-5 кроки аналогічні алгоритму простого симплексного методу.

3.4. Параметричне програмування

У практичних завданнях, як правило, ряд вихідних параметрів не мають точних значень, а приймати довільне з деякого діапазону змін. Тому для обґрунтування вирішення такої задачі необхідно вивчити залежність оптимального плану задачі від варіації деяких параметрів моделі.

При проектуванні систем, при плануванні розробки деякі параметри можуть вибиратися довільно. У цьому випадку корисні рекомендації можуть бути отримані при використанні апарату параметричного програмування. Воно також дозволяє оцінити стійкість рішення по відношенню до випадкових огріхів у вихідних даних.

Розглянемо окремий випадок, коли від параметру t залежать тільки коефіцієнти цільової функції:

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + t \cdot \overline{P}_2$$

а вся задача виглядає наступним чином: $Q(x) = \bar{P}^T \bar{x} \rightarrow \max$
 тобто $Q(x) = (P_1 + t \cdot P_2)^T x \rightarrow \max$

$$\begin{cases} Ax \leq b; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію такої моделі.

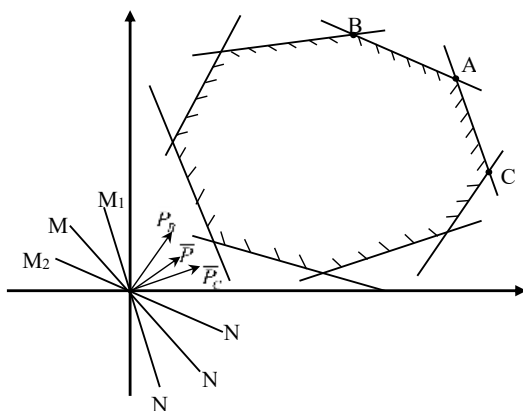


Рис. 3.7. Геометрична інтерпретація параметричної задачі

Для $t = t_0$ лінії рівня цільової функції паралельні MN. При $t = t$ лінії рівня паралельні M_2N_2 , а при $t = t$ - M_1N_1 . Зміні t від t до t відповідає поворот MN за годинниковою стрілкою. При $t = t_0$ оптимальне рішення відповідає т. А. При $t < t$, рішення в т. В, при $t > t$ - в т. С.

Продовжуючи розглядати задачу, можна розбити заданий діапазон зміни t на кінцеве число частин, кожній з яких відповідає свій оптимальний план.

Сукупність значень параметра t , при яких даний опорний план оптимальний, називають множиною оптимальності цього плану.

Для дослідження параметричної моделі скористаємося алгоритмом методу послідовного поліпшення плану.

Задаємо будь-який t_0 . Якщо в моделі область зміни параметра t обмежена, тобто $t \in [t_1, t_2]$, отже в якості t_0 можна взяти одну з меж.

Після кінцевого числа кроків алгоритму або прийдемо до оптимального плану задачі (випадок 1), або переконаємося, що цільова функція при даному t_0 не обмежена на допустимій області (задача не має розв'язків) (випадок 2).

Розглянемо спочатку випадок 1.

Випадок 1.

Якщо ми шукаємо max лінійної форми, то ознакою оптимальності опорного плану є невід'ємність коефіцієнтів P_i' рядка критерію.

Ці коефіцієнти можна представити у вигляді такої суми

$$P_i' = P_{i_1}' + t \cdot P_{i_2}', \quad i = 1, \dots, n.$$

Оскільки план оптимальний для $t = t_0$, то

$$P_i'(t_0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

і, отже, сумісна система нерівностей (з невід'ємності коефіцієнтів)

$$P_{i_1}' + t \cdot P_{i_2}' \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Для всіх $P_{i_2}' < 0$ нерівності цієї системи можна переписати у вигляді

$$t \leq -\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'},$$

$$\text{а для всіх } P_{i_2}' > 0 \quad t \geq -\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'}$$

Введемо наступні позначення

$$\underline{t} = \begin{cases} \max_{P_{i_2}' > 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right) \\ -\infty, \text{ якщо всі } P_{i_2}' \leq 0; \end{cases}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min_{P_{i_2}' < 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right) \\ \infty, \text{ якщо всі } P_{i_2}' \geq 0. \end{cases}$$

Таким чином, можна стверджувати, що якщо $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$, то знайдений оптимальний план для t_0 залишатиметься оптимальним для всіх t , що задовольняють нерівності.

Якщо область зміни $[t_1, t_2]$ параметра t , задана в технічних умовах, що не накривається відрізком $[\underline{t}, \bar{t}]$, то виникає необхідність дослідження параметричної моделі для

$$t < \underline{t} \quad ; \quad t > \bar{t}$$

Це в тому випадку, якщо хоча б $\bar{t} < \infty$ або $\underline{t} > -\infty$.

Досліджуємо задачу на області $t > \bar{t}$. Нехай $\bar{t} = \min_{P_{i_2}' < 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right) = -\frac{P_{k_1}'}{P_{k_2}'}$.

Тоді в опорний план (у базис) необхідно ввести змінну, відповідну колонці k (x_k).

Проглядається колонка коефіцієнтів в таблиці. Якщо серед них немає додатних, то при $t > \bar{t}$ лінійна форма не обмежена на множині планів. Якщо є позитивні коефіцієнти, то серед них вибираємо той, для якого відношення вільного члена до відповідного позитивного коефіцієнту мінімальне. Він і береться як розв'язуючий елемент.

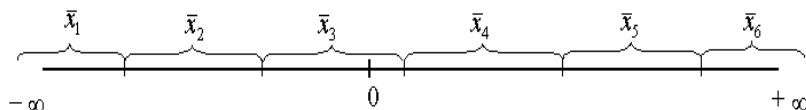
Для нового плану отримуємо, що $t' = t$, тобто наше t стає лівою межею нового інтервалу.

Знаходиться права межа $\bar{t}' = \min_{P_{i_2}' < 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right)$

Якщо $t' = \infty$ або права межа вихідного інтервалу $[t_1, t_2]$, $t_2 < \bar{t}'$, то дослідження в цьому напрямку припиняється.

Аналогічно проводиться дослідження параметричної моделі для $t < \underline{t}$. У цьому випадку в базис вводять змінну, відповідну $\underline{t}$.

В результаті дослідження за кінцеве число ітерацій вісь t розбіється на множину проміжків, кожному з яких відповідає свій оптимальний план.



Випадок 2.

Необхідно спеціально зупинитися на цьому випадку, коли в результаті попереднього аналізу при $t = t_0$ було виявлено, що цільова функція необмежена.

Це відповідає тому, що коефіцієнт в рядку цільової функції $P_k' = P_{k_1}' + t_0 \cdot P_{k_2}' < 0$

і всі коефіцієнти в k -й колонці недодатні.

При $P_{k_2}' = 0$ попередня умова виконується для будь-якого значення параметра, а отже задаче не має розв'язків на всій осі t .

Якщо $P_{k_2}' > 0$, то умова виконується для всіх значень $t < t_1 = -\frac{P_{k_1}'}{P_{k_2}'}$

Якщо $P_{k_2}' < 0$, то $(P_k' = P_{k_1}' + t_0 \cdot P_{k_2}' < 0)$ виконується при $t > t_1 = -\frac{P_{k_1}'}{P_{k_2}'}$

Аналіз параметричної задачі на промені $t \geq t_1$ починається з рішення задачі лінійного програмування при $t = t_1$, вирушаючи з наявного базису. Якщо в цьому випадку в процесі вирішення буде знайдений оптимальний план при t_1 , то розв'язок далі продовжується як і у випадку 1.

Якщо і зараз процес закінчився виявленням того, що задача не має розв'язків: $P_S' = P_{S_1}' + t_1 \cdot P_{S_2}' < 0$ і в колонці коефіцієнтів $a_{js} \leq 0$, $j = 1, \dots, n$, то подальший аналіз залежить від знаку P_{S_2}' . Якщо $P_{S_2}' = 0$, то задача немає розв'язків на всій множині.

Якщо $P_{S_2}' < 0$, то не має розв'язків при $t > t_2 = -\frac{P_{S_1}'}{P_{S_2}'}$

І якщо $t_1 \geq t_2$, то задача не має розв'язків на всій осі (при $t < t_1$ та при $t > t_2$ задача розв'язків не має).

Алгоритм методу послідовного поліпшення плану для параметричної моделі має деякі особливості. Замість одного рядка критерію вводяться три

додаткові рядки P_{i_1}', P_{i_2}' і $-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'}$ для випадку 1 і два рядки $P_{i_1}' + t_S \cdot P_{i_2}'$ і P_{i_2}' у випадку 2.

Процес розв'язку починається з аналізу для деякого $t = t_0$. Після виявлення випадку 1, вводять рядки P_{i_1}', P_{i_2}' і $-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'}$. t_0 намагаються вибрати таким чином, щоб при аналізі рух по осі t відбувалося в одному фіксованому напрямку.

Тоді при русі вправо рядок з $-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'}$ заповнюють лише для позицій, відповідних $P_{i_2}' < 0$. Якщо всі позиції останнього рядка виявилися незаповненими, то поточний опорний план оптимальний для всіх $t \geq t_0$, $[t_0, \infty)$. В іншому випадку індекс мінімального елемента цього рядка

визначить індекс змінної, яку треба зробити базисною, а значення цього елемента співпадає з правого границю поточного опорного плану.

При русі вліво заповнюються лише рядки, відповідні $P_{i_2}' > 0$. У цьому випадку, якщо останній рядок залишиться не заповненим, то поточний опорний план оптимальний для всіх $t \leq t_0, (-\infty, t_0)$. Незаповненість останнього рядка при русі у фіксованому напрямку є ознакою припинення аналізу в цьому напрямку, тобто план залишається оптимальним при $t \rightarrow \pm \infty$.

Якщо в моделі $t \in [t_1, t_2]$, то цей процес може закінчитися раніше, як тільки область аналізу охопить цей інтервал.

$$-\infty \left(\text{---} \text{---} \text{---} \right) + \infty$$

Приклад 3.3. Для всіх значень параметра t знайти максимум лінійної форми $L(\bar{x}) = (2+3t)x_1 + (-1+2t)x_2 + 3tx_3 + 4x_4 \rightarrow \max$, при

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 7,$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 15,$$

$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2,$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}$$

Рішення починаємо при $t = 0$:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	1	2	1	3	7
$y_2 =$	-3	4	3	-1	15
$y_3 =$	2	-5	2	2	2
$P_1' =$	-2	1	0	-4	0
$P_2' =$	-3	-2	-3	0	0

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2=$	-4/19	2/19	-4/19	-3/19	8/19
$y_2=$	-32/19	-3/19	82/19	14/19	292/19
$x_4=$	2/19	5/19	9/19	2/19	39/19
$P_1'=$	2/19	18/19	40/19	11/19	148/19
$P_2'=$	-65/19	4/19	-65/19	-6/19	16/19
$-\frac{P_1'}{P_2'}=$	2/65	-9/2	40/65	11/6	-

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1=$	-2	19/2	-2	-3/2	4
$y_2=$	-2	3/2	4	1/2	16
$x_4=$	1	-5/2	1	1/2	1
$P_1'=$	2	-9	4	2	4
$P_2'=$	-3	-2	-3	0	0

План $x_1 = (0,8/19, 0,39/19)^T$ оптимальний при $t \in [t, \bar{t}]$, де

$$t = \max_{P_{i_2}' > 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right) = -\frac{9}{2}, \quad \bar{t} = \min_{P_{i_2}' < 0} \left(-\frac{P_{i_1}'}{P_{i_2}'} \right) = \frac{2}{65}$$

Для того, щоб дослідити задачу при $t < -\frac{9}{2}$, треба ввести в базис y_1 , а при $t > \frac{2}{65}$ - ввести в базис x_1 .

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1=$	-2	19/2	-2	-3/2	4
$y_2=$	-2	3/2	4	1/2	16
$x_4=$	1	-5/2	1	1/2	1
$P_1'=$	2	-9	4	2	4
$P_2'=$	-3	-2	-3	0	0

Цій таблиці відповідає оптимальний план $x_2 = (0,0,0,1)^T$. Так як. всі P_{i_2}' недодатні, и ми рухалися вліво по осі t , то останній рядок не заповнюють, так як отриманий план буде оптимальний для всіх $t < -\frac{9}{2}$ і $t = -\infty$: $[t, t] = [-\infty, -\frac{9}{2}]$. Досліджуємо модель при $t > \frac{2}{65}$. Із базиса виводимо змінну x_4 .

	$-x_4$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2 =$	2	12/19	14/19	1/19	86/19
$x_2 =$	16	77/19	226/19	46/19	916/19
$x_3 =$	19/2	5/2	9/2	1	39/2
$P_1' =$	-1	13/19	31/19	9/19	109/19
$P_2' =$	65/2	333/38	455/38	59/19	2467/38

Цій таблиці відповідає оптимальний план $x_3 = (39/2, 86/19, 0, 0)^T$. Так як. всі P_{i_2}' невід'ємні, і ми рухалися вправо по осі t , то останній рядок не заповнюють, тому отриманий план буде оптимальний для всіх $t > \frac{2}{65}$ і $t = \infty$: $[t, t] = [\frac{2}{65}, \infty]$.

3.5. Цілочислове програмування

У більшості економічних задач їх розв'язок має бути виражений цілими числами. Наприклад, кількість одиниць продукції, кількість обладнання тощо.

Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочислові значення, називається *задачею цілочислового програмування*.

У математичній моделі задачі цілочислового програмування цільова функція і функції системи обмежень можуть бути лінійними, нелінійними та змішаними. Загальний вигляд основної задачі лінійного програмування, у якій змінні можуть бути тільки цілими числами, такий:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.5.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3.5.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.5.3)$$

$$x_j - \text{цілі} \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3.5.4)$$

Розв'язання задачі (3.5.1.)-(3.5.4) симплексним методом не обов'язково дає цілочислову відповідь. У такому випадку для знаходження оптимального плану задачі потрібні спеціальні методи. На сьогодні найбільш відомими з них є графічний метод та метод Гоморі.

Алгоритм методу Гоморі

Іншим способом розв'язання задач цілочислового програмування є метод Гоморі, який складається з таких етапів:

1. Знаходять розв'язок задачі цілочислового програмування симплексним методом, незважаючи на умови цілочисельності змінних.
2. Аналізують знайдений розв'язок: якщо серед його компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування; у противному випадку складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (3.5.1.)-(3.5.3) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (3.5.1.)-(3.5.4) повинна бути цілочисловою.

$$\sum_j f(a_{ij}^*) x_j \geq f(b_i^*) \quad (3.5.5)$$

У цій нерівності значення a_{ij}^* і b_i^* виписують з останньої симплексної таблиці з рядка, що відповідає змінній, для якої складається додаткове обмеження. $f(a_{ij}^*)$ і $f(b_i^*)$ - дробові частини відповідних чисел.

Довідкова інформація

Дробовою частиною числа називається різниця між цим числом і його цілою частиною.

Цілою частиною числа називається найбільше ціле число, яке не перевищує дане.

$$\text{Наприклад, } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}; \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}.$$

3. За допомогою двоїстого симплексного методу знаходять розв'язок задачі, яку отримали із задачі 3.5.1.)-(3.5.4) шляхом введення додаткового обмеження.

4. За необхідності складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до отримання оптимального плану задачі (3.9.1.)-(3.9.4) або до встановлення неможливості її розв'язання.

Приклад 3.4. Молокозавод № 2 випускає дві види йогуртів – «Вишенька» і «Полуничний» і використовує для цього два види добавок. Норми витрат добавок кожного виду на виготовлення 1 т по видах подано у таблиці. В ній також указано прибуток від реалізації 1 т йогурту кожного виду і загальна кількість добавок по видах.

Скласти такий план виробництва, при якому загальний прибуток підприємства буде максимальним.

Вид добавки	Норми витрат добавок на 1 т йогурту, кг		Запаси добавок, кг
	«Вишенька»	«Полуничний»	
I	2	1	$6\frac{1}{3}$
II	1	3	4
Прибуток від реалізації 1 т йогурту, тис. грн.	1	4	

Розв'язання.

Нехай x_1 - кількість (у тоннах) йогурту «Вишенька», x_2 - кількість (у тонах) йогурту «Полуничний». Тоді прибуток підприємства складає

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6\frac{1}{3} \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цїлі} \end{cases}$$

Запишемо задачу у формі основної задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6\frac{1}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 4 \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{цїлі} \end{aligned}$$

Складена задача являється частково цілочисловою, так як змінні x_3 та x_4 можуть приймати не тільки цілочислові значення.

Застосуємо алгоритм розв'язання цілочислових задач лінійного програмування методом Гоморі.

1) Розв'яжемо задачу симплексним методом без урахування умови

цілочисловості змінних x_1 та x_2

2)

№	Базис	C _б	План	1	4	0	0	Оціночні відношення
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	
1	X ₃	0	$\frac{6}{3}$	2	1	1	0	$\frac{6}{3}$
2	X ₄	0	4	1	3	0	1	$\frac{4}{3}$
m+1			0	-1	-4	0	0	
1	X ₃	0	5	5/3	0	1	-1/3	
2	X ₂	4	4/3	1/3	1	0	1/3	
m+1			16/3	1/3	0	0	4/3	

3) Аналізуємо знайдений розв'язок: $F = 16/3$ в $m.X^*(0;4/3;5;0)$. В

цьому плані змінна x_2 набула дробового значення. Тому необхідно перейти до нової задачі, додавши до системи обмежень ще одне обмеження:

$$f(1/3)x_1 + f(1)x_2 + f(0)x_3 + f(1/3)x_4 \geq f(4/3).$$

Знаходимо значення функції f як дробової частини вказаних аргументів:

$$(1/3)x_1 + (1/3)x_4 \geq 1/3$$

або

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1.$$

Для того, щоб змінна x_5 стала базисною, помножимо отримане рівняння на -1 :

$$-x_1 - x_4 + x_5 = -1.$$

Впишемо додаткове обмеження в останню таблицю розв'язання початкової задачі звичайним симплексним методом

№	Базис	C _б	План	1	4	0	0	0
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
1	X ₃	0	5	5/3	0	1	-1/3	0
2	X ₂	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	X ₅	0	-1	-1	0	0	-1	1
m+1			16/3	1/3	0	0	4/3	0

4) За допомогою двоїстого симплексного методу знаходимо розв'язок отриманої задачі

№	Базис	C _б	План	1	4	0	0	0
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
1	X3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0
2	X2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	X5	0	-1	-1	0	0	-1	1
m+1			16/3	1/3	0	0	4/3	0
1	X3	0	10/3	0	0	1	-2	5/3
2	X2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	X1	1	1	1	0	0	1	-1
m+1			5	0	0	0	1	1/3

Отримали цілочисловий розв'язок: $F = 5$ в т. $X^*(1;1;10/3;0)$. Отже, підприємство повинно виробляти 1 т йогурту «Вишенька» 1 т йогурту «Полуничний». При цьому його прибуток складатиме 5 тис. грн.

3.6. Розв'язання задач лінійного програмування з використанням MS EXCEL

Для того, щоб розв'язати задачу ЛП(лінійного програмування) в табличному редакторі Microsoft Excel надбудови, необхідно виконати такі дії.

1. Ввести умову задачі:

а) створити форму для введення умови задачі:

- змінних;
- цільової функції (ЦФ);
- обмежень;
- граничних умов;

б) ввести початкові дані в форму:

- коефіцієнти ЦФ;
- коефіцієнти при змінних в обмеженнях;
- праві частини обмежень;

в) ввести залежність з математичної моделі в форму:

- формулу для розрахунку ЦФ;
- формули для розрахунку значень лівих частин обмежень;

г) задати ЦФ (інтерактивному вікні “Розв’язувач”):

- цільова комірка;
- напрям оптимізації ЦФ;

д) ввести обмеження і граничні умови (у вікні “Розв’язувач”):

- комірки з значеннями змінних;
- граничні умови для допустимих значень змінних;
- співвідношення між правими і лівими частинами обмежень.

2. Розв'язати задачу:

- а) встановити параметри розв'язання задачі (у вікні “Розв'язувач”);
- б) запустити задачу на розв'язання (у вікні “Розв'язувач”);
- в) вибрати формат висновку розв'язання (у вікні “Результати”).

Розглянемо приклад знаходження розв'язку для такої одноіндексної задачі ЛП:

$$\begin{aligned}
 L(X) &= 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\
 \begin{cases}
 -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\
 -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\
 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\
 x_j \geq 0; j = \overline{1,4}.
 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Починаємо з введення початкових даних, створення форми і наповнення її умовою задачі.

Екранна форма для введення умов задачі (1) разом з введеними в неї початковими даними подана на рис.3.7.

В екранній формі на рис.3.7. кожній змінній і кожному коефіцієнту задачі поставлена відповідно конкретна комірка в Excel. Ім'я комірки складається з букви, що позначає стовпець, і цифри, що позначає рядок, на перетині яких знаходиться об'єкт задачі ЛП. Так, наприклад, змінним задачі (1) відповідають комірки B3 ((x_1), C3 ((x_2), D3 ((x_3), E3 ((x_4), коефіцієнтам ЦФ відповідають комірки B6 (($c_1 = 130,5$), C6 (($c_1 = 20$), D6 (($c_1 = 56$), E6 (($c_4 = 87,8$), правим частинам обмежень відповідають комірки H10 (($b_1 = 756$), H11 (($b_2 = 450$), H12 (($b_3 = 89$) і т.д.

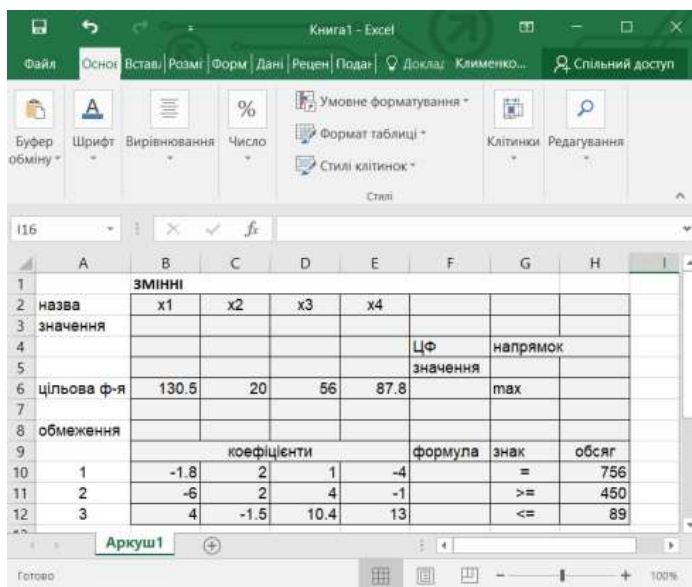


Рис. 3.7. Форма для введення даних задачі

В комірку F6, в якій буде відображатися значення ЦФ, необхідно ввести формулу, за якою це значення буде розраховано. Згідно з (1) значення ЦФ визначається виразом

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \quad (2)$$

Використовуючи позначення відповідних комірок в Excel (див. рис.3.5.), формулу для розрахунку ЦФ (2) можна записати як суму значень кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (B3, C3, D3, E3), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів ЦФ (B6, C6, D6, E6), тобто

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 \quad (3)$$

Щоб задати формулу (3) необхідно в комірку F6 ввести такий вираз і натиснути клавішу "Enter"

$$=SUMPRODUCT(B3:E3;B6:E6) \quad (4)$$

де символ "\$" перед номером рядка 3 може означати, що при копіюванні цієї формули в інші місця листа Excel номер рядка 3 не зміниться;
символ ":" означає, що у формулі будуть використані всі комірки, розташовані між комірками, вказаними зліва і справа від двокрапки (наприклад, запис

B6:E6 указує на комірки B6, C6, D6 і E6). Після цього в цільовій комірці з'явиться 0 (нульове значення) (рис.3.8.).

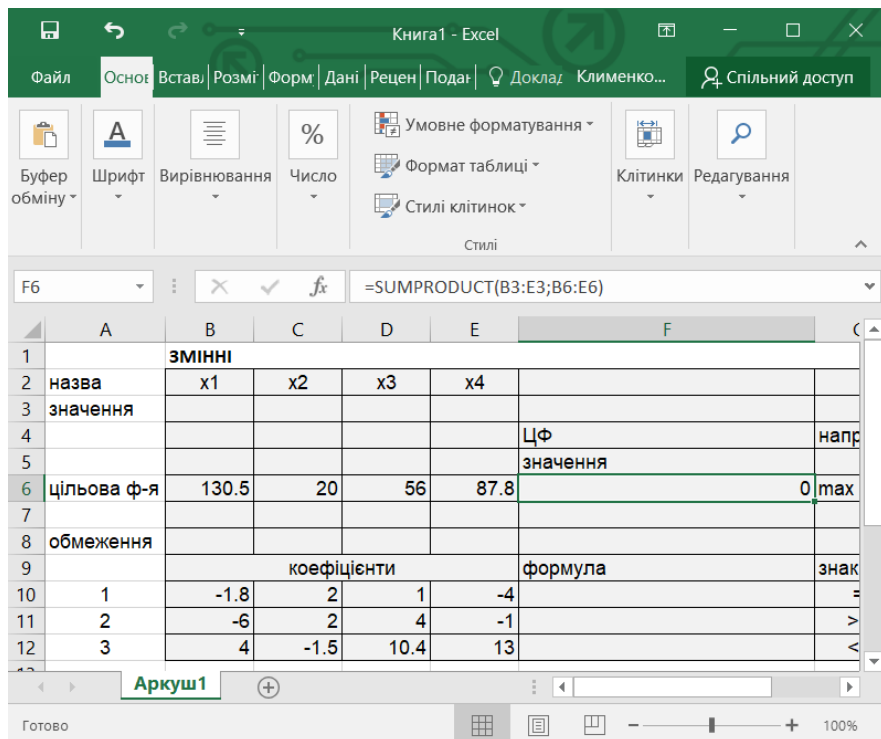


Рис.3.8. Екранна форма задачі

Примітка. Існує інший спосіб задання функцій в Excel за допомогою режиму “Вставити функцію”, який можна викликати з меню “Формули” або при натисненні кнопки “ f_x ” на стандартній панелі інструментів. Так, наприклад, формулу (4) можна задати таким чином.

1. Курсор в полі F6.
2. Натисніть кнопку “ f_x ”, викличте вікно “Вставлення функції”
3. Виберіть у вікні “Категорія” категорію “Математичні”.
4. У вікні “Виберіть функцію” виберіть функцію **SUMPRODUCT**
5. У вікні “SUMPRODUCT”, що з’явилося, в рядок “Масив 1” введіть вираз B\$3:E\$3, а в рядок “Масив 2” – вираз B6:E6 (рис.3.9).
6. Після введення комірок в рядки “Масив 1” і “Масив 2” у вікні “SUMPRODUCT” з’являться числові значення введених масивів (см. рис.3.9.), а в екранній формі в комірці F6 з’явиться поточне значення, обчислене за введеною

формулою, тобто 0 (оскільки у момент введення формули значення змінних задачі нульові).

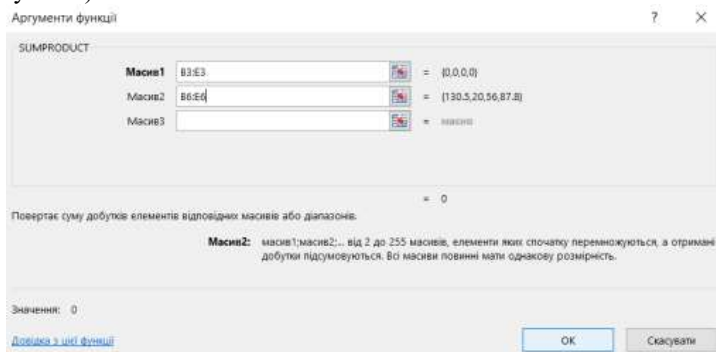


Рис. 3.9. Введення формули для розрахунку ЦФ

Залежність для лівих частин обмежень. Ліві частини обмежень задачі (1) є сумою кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (B3, C3, D3, E3), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів конкретного обмеження (B10, C10, D10, E10 – 1-е обмеження; B11, C11, D11, E11 – 2-е обмеження і B12, C12, D12, E12 – 3-е обмеження). Формули, відповідні лівим частинам обмежень, наведені в таблиці:

Ліва частина обмеження	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<code>=SUMPRODUCT (B\$3:E\$3;B10:E10)</code>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ або $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<code>= SUMPRODUCT (B\$3:E\$3;B11:E11)</code>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<code>= SUMPRODUCT (B\$3:E\$3;B12:E12)</code>

Як видно з таблиці, формули, задаючи ліві частини обмежень задачі (1), відрізняються одна від одної і від формули (4) в цільовій комірці F6 тільки номером рядка в другому масиві. Цей номер визначається тим рядком, в якому обмеження записано в екранній формі. Тому для задання залежності для лівих частин обмежень достатньо скопіювати формулу з цільової комірки в комірки лівих частин обмежень. Для цього необхідно:

1. Помістити курсор в полі цільової комірки F6 і скопіювати в буфер вміст комірки F6 (клавішами “Ctrl-C”).

2. Переміщати курсор по черзі в поля лівої частини кожного з обмежень, тобто в F10, F11 і F12, і вставляти в ці поля вміст буфера (клавішами “Shift-Insert”) (при цьому номер комірок в другому масиві формули буде змінюватись на номер того рядка, в який була зроблена вставка з буфера).

3. На екрані в полях F10, F11 і F12 з'явиться 0 (нульове значення) (див. рис.3.6).

Перевірка правильності введення формул. Для перевірки правильності введених формул виконують по черзі подвійне натискання лівої клавіші миші на комірки з формулами. При цьому на екрані рамкою будуть виділятися комірки, використовувані у формулі (рис.3.10. і 3.11.).

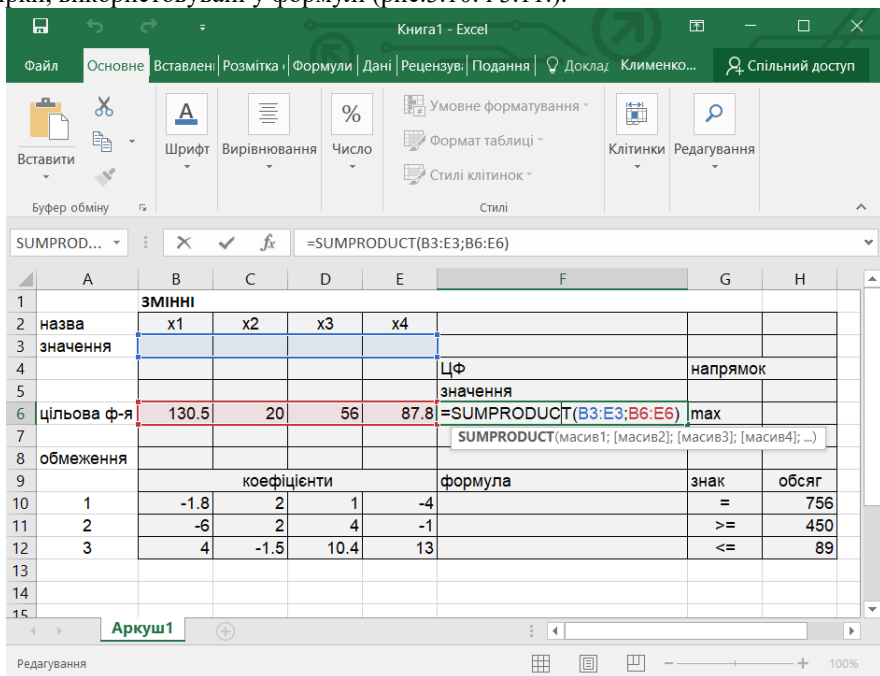


Рис. 3.10. Перевірка правильності введення формули в цільову комірку

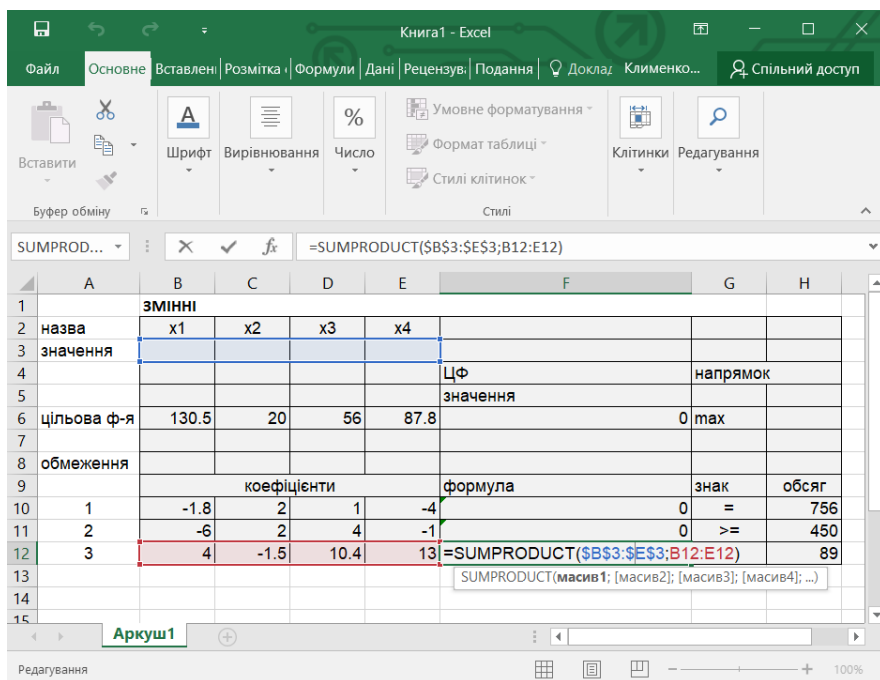


Рис. 3.11. Перевірка правильності введення формули в комірку F12

Подальші дії виконуються у вікні “Параметри Розв’язувача”, яке викликається з меню “Дані” (рис.3.12).

Задання ЦФ

1. Поставте курсор в полі “Оптимізувати цільову функцію”.
2. Введіть адресу цільової комірки \$F\$6 або зробіть одне натискання лівої клавіші миші на цільову комірку в екранній формі – це буде рівносильно введенню адреси з клавіатури.
3. Введіть напрям оптимізації ЦФ, клацнувши один раз лівою клавішею миші по селекторній кнопці “максимум”.

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

До: ☒ Максимум ☐ Мінімум ☐ Значення:

Змінюючи клітинки змінних:

Підлягає обмеженням:

\$F\$10 = \$H\$10
 \$F\$11 >= \$H\$11
 \$F\$12 <= \$H\$12

☒ Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання

Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Додати
 Змінити
 Видалити
 Скинути
 Завантажити/зберегти

Параметри

Довідка Розв'язати Закрити

Рис.3.12. Вікно “Параметри розв’язувача”

Введення обмежень, граничних умов та задання комірок змінних. У вікно “**Парметри розв’язувача**” в полі “Змінюючи клітини змінних ” впишіть адреси **\$B\$3:\$E\$3**. Необхідні адреси можна вносити в полі і автоматично шляхом виділення мишею відповідних комірок змінних безпосередньо в екранній формі.

Задання обмежень задачі.

1. Переходимо у вікно «Підлягає обмеженням». Натискайте кнопку “Додати”, після чого з’явиться вікно “Додати обмеження” (рис.3.13).

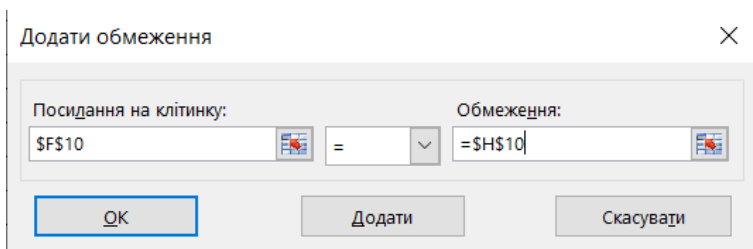


Рис. 3.13. Додавання умови позитивності змінних

2. В полі “Посилання на клітинку” введіть адресу комірки лівої частини конкретного обмеження, наприклад \$F\$10. Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею потрібної комірки безпосередньо в екранній формі.

3. Відповідно до умови задачі (1) вибрати в полі знака необхідний знак, наприклад =.

4. В полі “Обмеження” введіть адреси комірки правої частини даного обмеження, наприклад \$H\$10.

5. Аналогічно введіть обмеження: \$F\$11>=\$H\$11 \$F\$12<=\$H\$12.

6. Підтвердіть введення всіх перерахованих вище умов натисканням кнопки “ОК”.

Якщо при введенні умови задачі виникає необхідність в зміні або видаленні внесених обмежень або граничних умов, то це роблять, натисканням кнопки “Змінити” або “Видалити”

Розв’язування задачі. Встановлення параметрів розв’язування задачі.

Задача запускається на розв’язування у вікні “ **Параметри розв’язувача** ”. Але заздалегідь для перевірки конкретних параметрів розв’язування задач оптимізації певного класу необхідно натиснути кнопку “Параметри” (рис.3.14).

Параметри

Усі методи | За методом зведеного градієнта | Розвинений розв'яз

Точність обмеження: 0,000001

☐ Використовувати автоматичне масштабування

☐ Відображати результати ітерацій

Розв'язання з цілочисловими обмеженнями

☐ Ігнорувати цілочислові обмеження

Цілочислова оптимальність (%): 1

Ліміти розв'язання

Максимальний час (сек.):

Ітерації:

Розвинені та цілочислові обмеження:

Максимальна кількість підзадач:

Максимальна кількість допустимих розв'язань:

ОК Скасувати

Рис.3.14. Параметри пошуку розв'язування, відповідні для більшості задач ЛП

Параметр “Максимальний час” служить для призначення часу (в секундах), що виділяється на розв'язування задачі. В полі можна ввести час, що не перевищує 32 767 секунд (більше 9 годин).

Параметр “Ітерації” служить для управління часом розв'язування задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. В полі можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32767.

Параметр “Точність обмеження” служить для задання точності, з якою визначається відповідність комірки цільовому значенню або наближення до

вказаних меж. Поле повинно містити число з інтервалу від 0 до 1. Чим менша кількість десяткових знаків у введеному числі, тим нижча точність. Висока точність збільшить час, який потрібний для того, щоб зійшовся процес оптимізації.

Підтвердіть встановлені параметри натисканням кнопки “ОК”.
Запуск задачі на розв’язування робиться з вікна “Параметри розв’язувача” шляхом натискання кнопки “Розв’язати”.

Після запуску на розв’язування задачі ЛП на екрані з’являється вікно “Результати розв’язувача” з одним з повідомлень, поданих на рис.3.15, 3.16 і 3.17.

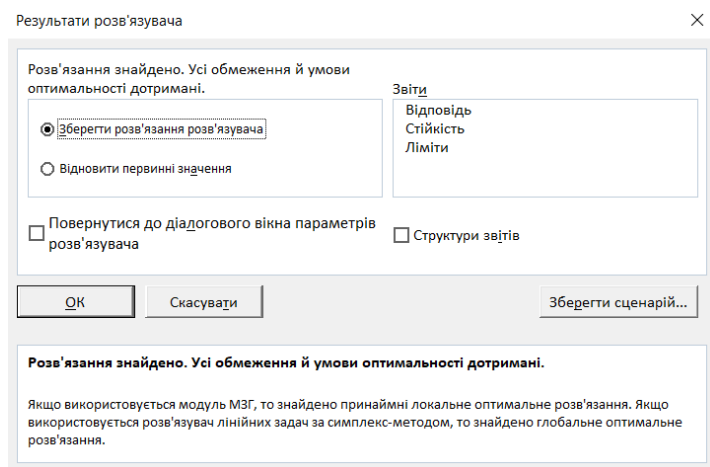


Рис. 3.15. Повідомлення про успішне розв’язання задачі

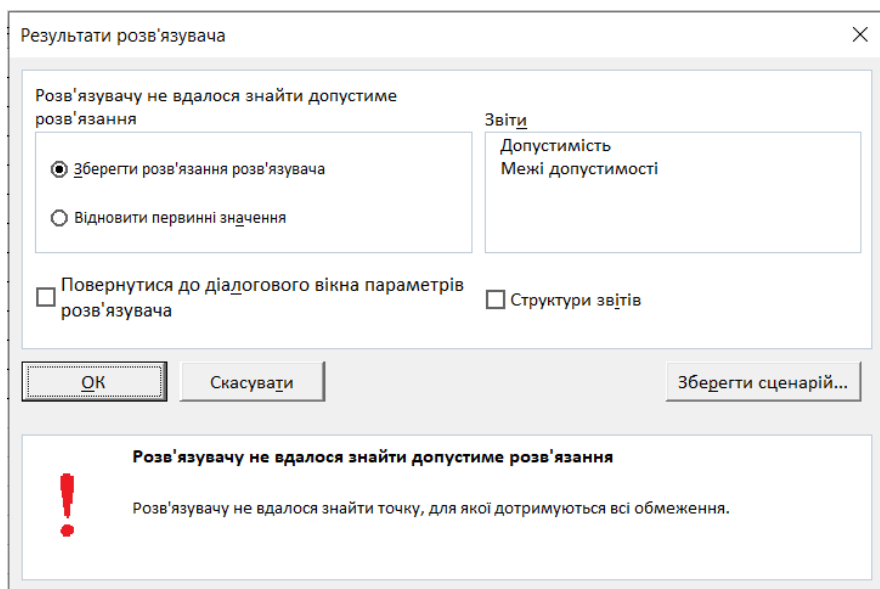


Рис. 3.16. Повідомлення при несумісній системі обмежень задачі

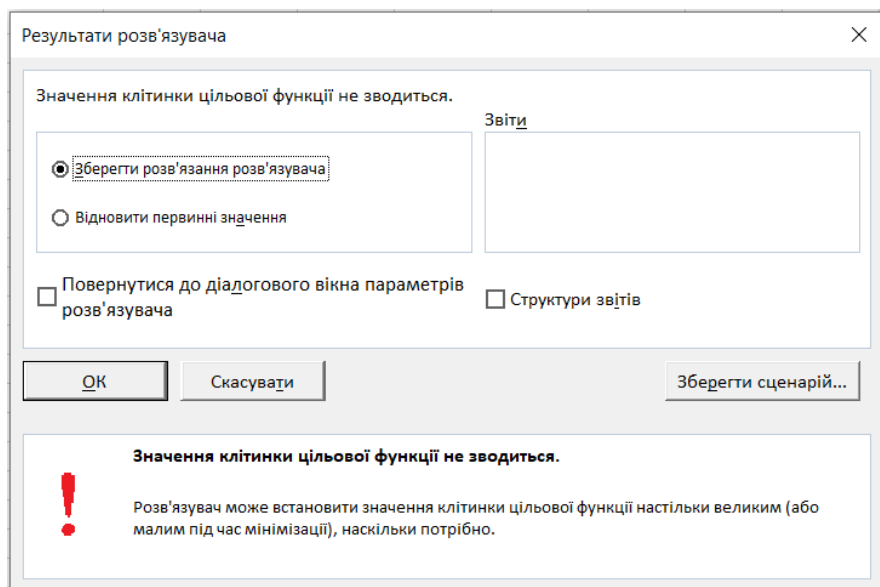


Рис. 3.17. Повідомлення при необмеженості ЦФ в необхідному напрямку

Іноді повідомлення, показані на рис.3.16 і 3.17, свідчать не про характер оптимального розв'язування задачі, а про те, що при введенні умов задачі в Excel були допущені помилки, що не дозволяють Excel знайти оптимальний розв'язок, який насправді існує.

Якщо при заповненні полів вікна були допущені помилки, що не дозволяють Excel застосувати симплекс-метод для розв'язування задачі або довести її розв'язання до кінця, то після запуску задачі на розв'язування на екран буде видано відповідне повідомлення з вказанням причини, за якою розв'язування не знайдено.

Також у вікні “Результати поиска решения” подані назви трьох типів звітів: “Результаты”, “Устойчивость”, “Пределы”. Вони необхідні при аналізі отриманого розв'язку на чутливість. Для отримання ж відповіді (значень змінних, ЦФ і лівих частин обмежень) прямо в екранній формі просто натискайте кнопку “OK”. Після цього в екранній формі з'являється оптимальний розв'язок задачі (рис.3.18).

Книга1 - Excel

ФайлОсновнеВставленРозміткаФормулиДаніРецензувПоданняДокладКлименко...Спільний доступ

Вставити

Шрифт

Вирівнювання

Число

Умове форматування

Формат таблиці

Стилі клітинок

Клітинки

Редагування

Буфер обміну

Стилі

K13

Рис. 3.18. Екранна форма задачі після отримання розв'язку

Припустимо, що до умови задачі (1) додалася вимога цілочислових значень усіх змінних. В цьому випадку описаний вище процес введення умови задачі необхідно доповнити такими кроками.

1. В екранній формі вкажіть, на які змінні накладається вимога

2. У вікні “Розв’язувач” натискайте кнопку “Додати обмеження” і у вікні що з’явилося, введіть обмеження таким чином (рис.3.18):



3. В полі “Посилання на клітину” введіть адреси комірок змінних задачі, тобто $B\$3:E\3 ;
4. В полі введення знака обмеження встановіть “Ціле”;
5. Підтвердіть введення обмеження натисканням кнопки “ОК” – отримаємо цілочисельний розв’язок (рис.3.20).



На рис.3.20 подано розв'язування задачі (1), до обмежень якої додано умову цілочислових значень її змінних.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1.Знайти оптимальні розв'язки задач графічним методом :

$$\begin{aligned} 1. \max Z &= 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \max Z &= x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \max Z &= 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + 6x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 1,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \min Z &= x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 2,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \max Z &= 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \min Z &= 3x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\leq 2,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \min Z &= -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \min Z &= 2x_1 - x_2 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \min Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 &\geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \leq 6, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \min Z &= -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ x_1 \leq 3, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \max Z &= 3x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \max Z &= -x_1 + 3x_2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ -2x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \max Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 6x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 \geq 1, \quad x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \max Z &= 3/2 x_1 + x_2 \\
 6x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\
 2x_1 - 5x_2 &\leq 10 \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
 x_1 \geq 1, \quad x_2 &\leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \max Z &= 3x_1 + x_2 \\
 x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\
 -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
 x_1 \geq 3, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \max Z &= x_1 + 2x_2 \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\
 -3x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 2x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\
 x_1 \geq 1, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \max Z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\
 -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \max Z &= x_1 + 3x_2 \\
 x_1 + x_2 &\geq 2 \\
 -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \max Z &= x_1 + x_2 \\
 2x_1 - 4x_2 &\leq 8 \\
 -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
 2x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \max Z &= -x_1 + 2x_2 \\
 -x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
 2x_1 - 3x_2 &\geq 6 \\
 x_1 + x_2 &\geq 6 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \max Z &= 2x_1 - x_2 \\
 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 3x_1 - 2x_2 &\geq 6 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \max Z &= -x_1 + 3x_2 \\
 -3x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
 x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 2x_1 - x_2 &\geq 4 \\
 x_1 + x_2 &\geq 6 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. \max Z &= 2x_1 - x_2 \\
 3x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
 x_1 - x_2 &\geq 3 \\
 -x_1 + x_2 &\geq 3 \\
 x_1 \geq 4, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25. \max Z &= -x_1 + 3x_2 \\
 -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
 x_1 - x_2 &\geq 3 \\
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26. \max Z &= x_1 + x_2 \\
 3x_1 - 6x_2 &\leq 12 \\
 -x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 x_1 + x_2 &\geq 4 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

2. Скласти економіко-математичну модель задачі. Розв'язати задачу симплексним методом. Дати економічне тлумачення отриманого розв'язку.

Підприємство випускає два види виробів А і В. Для їх виробництва використовуються три типи сировини S_1 , S_2 , S_3 . Витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду та запаси сировини подано у таблиці 3.9 (числа умовні).

Таблиця 3.9

Вид сировини	Запаси сировини (кг)	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції	
		А	В
S ₁	b_1	a_{11}	a_{12}
S ₂	b_2	a_{21}	a_{22}
S ₃	b_3	a_{31}	a_{32}

Вартість одного виробу виду А і В становить, відповідно, c_1 і c_2 умовних грошових одиниць. Скласти такий план виробництва, при якому прибуток підприємства буде максимальним.

Значення $b_1, b_2, b_3, a_{11}, \dots, a_{32}, c_1, c_2$ обрати згідно варіанту з таблиці 3.10.

Таблиця 3.10

Варіант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
2	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
3	14	12	8	8	4	2	624	541	372	7	3
4	10	9	5	6	3	1	735	765	455	8	4
5	8	7	7	10	6	2	459	379	459	9	9
6	7	12	8	4	4	2	312	541	372	7	3
7	10	3	5	6	1	1	735	255	455	8	4
8	5	9	10	7	9	8	343	587	587	11	7
9	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
10	3	4	3	1	3	4	300	520	600	6	3
11	8	7	14	7	4	1	417	290	591	5	5
12	16	14	4	6	12	9	1728	1728	945	2	3
13	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	3
14	16	7	4	6	6	9	1728	864	945	2	3
15	19	16	19	26	17	8	868	638	853	5	4
16	15	15	18	33	25	6	571	577	890	8	10
17	19	32	19	26	34	8	868	1276	853	5	4
18	3	2	3	5	4	11	453	308	627	2	3
19	3	3	10	5	1	2	414	241	768	12	16
20	7	14	8	13	16	2	363	654	429	6	4
21	3	8	3	1	6	4	300	1040	600	6	3
22	2	3	2	3	6	8	428	672	672	3	8
23	2	1	2	3	2	8	428	224	672	3	8
24	8	3	3	6	4	5	880	393	450	6	5
25	8	3	6	6	4	10	880	393	900	6	5
26	5	6	7	7	6	1	256	283	363	9	7

Варіант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
27	15	15	9	33	25	3	571	577	445	8	10
28	9	15	15	27	15	3	606	802	840	11	6
29	10	18	10	14	18	8	686	1174	587	11	7
30	7	12	4	4	4	1	312	541	188	7	3

3. Симплексним методом знайти максимум функції

Варіант 1

$$z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 2

$$z = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 3

$$z = -x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 4

$$z = -5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 5

$$z = 3x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 6

$$z = 8x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 7

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 8

$$z = 4x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 9

$$z = 6x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 11

$$z = -5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 9 \\ -3x_1 + 12x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 13

$$z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ x_1 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 15

$$z = -3x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ 14x_1 + 2x_2 \leq 28 \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 17

$$z = 12x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 19

$$z = 12x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 10

$$z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 12

$$z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 14

$$z = 6x_1 + 14x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 9 \\ 10x_1 + 14x_2 \leq 140 \\ 3x_1 + 15x_2 \leq 45 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 16

$$z = 12x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 10x_2 \leq 100 \\ 5x_1 \leq 30 \\ 2x_1 + 14x_2 \leq 28 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 18

$$z = 5x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 16 \\ 6x_1 - 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 20

$$z = -4x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ 6x_1 \leq 24 \\ 2x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 21

$$z = 12x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 22

$$z = 3x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 23

$$z = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 24

$$z = -5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 25

$$z = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 26

$$z = 8x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 27

$$z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 28

$$z = 4x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 29

$$z = 6x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Варіант 30

$$z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 4x_1 + x_2 \leq 24 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Використовуючи MS Excel, знайти розв'язок для моделі ЛП, відповідної заданому варіанту

Номер варіанту	Математична модель
-------------------	--------------------

1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 1,5x_3 + 2,3x_4 + 1,8x_5 \leq 50000, \\ 0,4x_1 + 1,1x_2 - 0,5x_3 + 1,3x_4 - 2,8x_5 \geq 32000, \\ 0,5x_1 + 1,8x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 \leq 40000, \\ 2,2x_1 - 1,4x_2 - 0,8x_3 + 0,9x_4 = 15000, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
2	$L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0,4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 460, \\ 0,5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 190, \\ 11x_2 - 8,5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
3	$L(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 1,5x_3 + 0,9x_4 + 4x_5 \leq 26, \\ 1,8x_1 - 42x_2 + 6,4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
4	$L(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 0,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 245, \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54, \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
5	$L(X) = 46x_1 + 2,3x_2 + 9,4x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 49, \\ 2,3x_2 + 5x_3 + 5,6x_4 - x_5 \leq 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

6	$L(X) = 0,5x_1 + 1,8x_3 - 9,2x_4 + 14x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9,6x_2 + 15,7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74, \\ 0,8x_1 + 11,1x_2 - 4,5x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9,6x_2 + 15,7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73, \\ 0,9x_1 + 11,1x_2 - 4,3x_3 + 1,5x_4 + 6,4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72, \\ 87x_1 - 6,4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34, \\ 2,1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
10	$L(X) = 10x_1 + 40x_3 + 13x_4 + 56x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600, \\ 8x_1 + 1,7x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 = 890, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 270, \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 2300, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

11	$L(X) = 84x_1 + 5,7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8,5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50, \\ 10,4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120, \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600, \\ 200x_1 + 45x_2 - 8x_3 + 3,4x_4 \geq 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
12	$L(X) = 0,84x_2 - 4x_3 + 3,8x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9,6x_2 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180, \\ 0,6x_1 + 11,1x_2 - 2,6x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 68, \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81, \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

Тестові завдання

1. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1, 2, 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 3	В якщо правильні відповіді 2, 3, 4	Г якщо правильна відповідь 2	Д якщо всі відповіді правильні
Графічним методом можуть бути розв'язані задачі, які містять не більше двох змінних і записані: - у канонічній формі - у стандартній формі - у загальній формі - у симетричній формі				

2. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв. При розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом:

1.	не можна визначити багатокутник розв'язків	А.	задача має розв'язок
2.	багатокутник розв'язків замкнений	Б.	задача не має розв'язку
3.	багатокутник розв'язків незамкнений	В.	задача може мати чи не мати розв'язок залежно від напрямку вектора С

У питаннях 3-12 виберіть правильну відповідь:

3. При розв'язанні задач лінійного програмування графічним методом прями, що визначають багатокутник розв'язків, отримують шляхом:

- заміни в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівнянь шляхом введення додаткових змінних;

2. заміни в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівнянь шляхом введення в ліву частину нерівностей додаткових невід'ємних змінних;
3. заміни в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівнянь;
4. зведення задачі до канонічного вигляду.
4. При розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом

вектор $\bar{C}$ визначає:

1. напрямок спадання цільової функції;
2. напрямок зростання цільової функції;
3. півплощину, яка є областю допустимих розв'язків кожного з нерівностей системи обмежень задачі;
4. багатокутник розв'язків.
5. При побудові багатокутника розв'язків може бути утворена необмежена область, в цьому випадку:

1. задача не має розв'язку;
2. задача має розв'язок;
3. задача може мати чи не мати розв'язку залежно від того, що необхідно знайти - максимум чи мінімум цільової функції;
4. задача може мати чи не мати розв'язку залежно від напрямку вектора C .

6. Кожна нерівність системи обмежень задачі с двома змінними геометрично визначає на площині:

1. півплощину;
2. багатокутник;
3. багатогранник;
4. вершину багатокутника.

7. Для використання симплексного методу задача має бути зведена до:

1. канонічного виду;
2. стандартного виду;
3. загального виду;
4. правильна відповіді відсутня.

8. Змінні, що використовуються для приведення задачі лінійного програмування до канонічного вигляду, називаються:

1. допоміжні
2. основні
3. додаткові
4. штучні

9. Змінні, що використовуються при розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом у випадку недостатньої кількості одиничних векторів, називаються:

1. штучні
2. додаткові
3. основні
4. допоміжні

10. При розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом при пошуку максимального значення цільової функції критерієм оптимальності є відсутність в останньому рядку симплексної таблиці:

1. нульових коефіцієнтів;
2. додатних коефіцієнтів;
3. від'ємних коефіцієнтів;
4. від'ємних и нульових коефіцієнтів.

11. При розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом при пошуку максимального значення цільової функції направляючий рядок визначається:

1. найбільшим від'ємним оціночним співвідношенням;
2. найменшим від'ємним оціночним співвідношенням;
3. найбільшим додатним оціночним відношенням;
4. найменшим додатним оціночним відношенням.

12. Вказати вірне правило вибору направляючого стовпця при розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом для пошуку максимального значення цільової функції:

1. серед від'ємних коефіцієнтів останнього рядка симплекс-таблиці необхідно вибрати найбільший за абсолютною величиною;
2. серед від'ємних коефіцієнтів останнього рядка симплекс-таблиці необхідно вибрати найменший за абсолютною величиною;
3. серед додатних коефіцієнтів останнього рядка симплекс-таблиці необхідно вибрати найбільший;
4. серед додатних коефіцієнтів останнього рядка симплекс-таблиці необхідно вибрати найменший.

У питаннях 13-15 виберіть неправильну відповідь:

13. При розв'язанні задачі лінійного програмування симплексним методом для пошуку максимального значення цільової функції

1. направляючий стовпчик визначає найбільший за модулем від'ємний коефіцієнт в останньому рядку;
2. направляючий рядок визначає найбільше оціночне співвідношення;
3. на перетині направляючого стовпця і направляючого рядка знаходиться генеральний елемент;
4. критерієм оптимальності є відсутність в останньому рядку симплекс-таблиці від'ємних коефіцієнтів.

14. Якщо при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом пряма, що перпендикулярна вектору $\vec{C}$, співпадає з однією із сторін багатокутника розв'язків, то:

1. задача не має розв'язку;
2. задача має один оптимальний розв'язок;
3. точки даної сторони і є оптимальними розв'язками;

4. точка перетину вектора $\vec{c}$ з цією стороною є оптимальним розв'язком.

15. До правил переходу до наступної симплекс-таблиці відносять такі:

1. в базисі замість змінної, яка відповідає направляючому стовпчику, вводимо змінну, яка відповідає направляючому рядку;
2. на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставимо одиниці;
3. елементи направляючого рядка ділимо на генеральний елемент;
4. всі інші елементи обчислюються за правилом чотирикутника.

16. Визначити координати точки максимуму багатокутника розв'язків цілочислової задачі лінійного програмування (рис1):

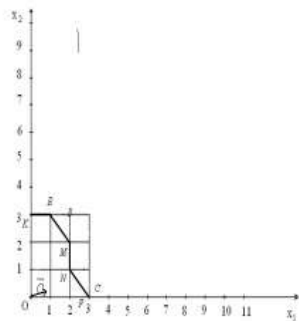


Рис. 1.

1. (3;0);
2. (0;3);
3. (0;0);
4. (2;2).

17. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильна відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
У математичній моделі задачі цілочислового програмування цільова функція та система обмежень можуть бути: 1. лінійними функціями 2. нелінійними функціями 3. змішаними (як лінійними, так і нелінійними функціями)				

18. Вибрати літеру

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

якщо правильні відповіді 1 і 3	якщо правильні відповіді 1 і 2	якщо правильні відповіді 2 і 3	якщо правильна відповідь 1	якщо всі відповіді правильні
В ході розв'язання задачі цілочислового програмування методом Гоморі при введенні додаткового обмеження в симплексну таблицю: 1. вводиться додатковий рядок 2. вводиться додатковий стовпчик 3. розміри симплекс-таблиці залишаються без змін				

19. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	ціла частина числа $\frac{8}{3}$	А.	2
		Б.	3
2.	дробова частина числа $\frac{8}{3}$	В.	$\frac{2}{3}$
		Г.	$\frac{1}{3}$

20. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильна відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
В ході розв'язання задачі цілочислового програмування методом Гоморі при введенні додаткового обмеження в симплексну таблицю: 1. збільшується кількість базисних змінних 2. зменшується кількість базисних змінних 3. збільшується кількість стовпчиків 4. розміри таблиці залишаються без змін				

21. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильна відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
Задачу цілочислового програмування можна розв'язати: 1. симплексним методом 2. графічним методом 3. методом Гоморі 4. методом потенціалів				

22. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.		А.	-2
----	--	----	----

	ціла частина числа $-\frac{8}{3}$	Б.	-3
2.	дробова частина числа $-\frac{8}{3}$	В.	$\frac{2}{3}$
		Г.	$\frac{1}{3}$

23. Пронумерувати етапи розв'язання задачі цілочислового програмування методом Гоморі:

- побудова додаткового обмеження;
- знаходження оптимального рішення двоїтим симплекс-методом;
- знаходження оптимального рішення симплекс-методом.

24. Надати найбільш точну і правильну відповідь:

Задачу цілочислового програмування можна розв'язати:

1. методом Гоморі;
2. методом Гурвіца;
3. методом Севіджа;
4. методом Лапласа.

25. За методом Гоморі:

- 1) відповідно до наведеної математичної моделі скласти словесне формулювання економічної задачі;
- 2) розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом;
- 3) знайти методом Гоморі цілочисловий розв'язок задачі лінійного програмування;
- 4) дати економічне тлумачення отриманого розв'язку.

- | | |
|--|--|
| <p>1 $Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> | <p>2 $Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> |
| <p>3 $Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9; \\ x_1 + 2x_2 \leq 13; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> | <p>4 $Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 11; \\ 4x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> |
| <p>5 $Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4; \\ 3x_1 + x_2 \leq 14; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> | <p>6 $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 7x_1 + x_2 \leq 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>x_1, x_2 – цілі</p> |

$$7 \quad \begin{aligned} Z &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$9 \quad \begin{aligned} Z &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 20; \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 11; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$11 \quad \begin{aligned} Z &= 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 9; \\ 3x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$13 \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 15; \\ 2x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$15 \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17; \\ 3x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$17 \quad \begin{aligned} Z &= 4x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 13; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$19 \quad \begin{aligned} Z &= 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 8x_2 \leq 10; \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 18; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$21 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ 2x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$8 \quad \begin{aligned} Z &= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 9; \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$10 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 11; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 17; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$12 \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 7; \\ 2x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$14 \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$16 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 15; \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 21; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$18 \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leq 15; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$20 \quad \begin{aligned} Z &= 5x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ x_1 + 3x_2 \leq 11; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$22 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3; \\ 4x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 - \text{қіліні}$$

$$23 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$25 \quad \begin{aligned} x_1, x_2 - \text{цїлї} \\ Z &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 3x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$27 \quad \begin{aligned} x_1, x_2 - \text{цїлї} \\ Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3; \\ 3x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$29 \quad \begin{aligned} x_1, x_2 - \text{цїлї} \\ Z &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \\ x_1, x_2 - \text{цїлї} \end{aligned}$$

$$24 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3; \\ 4x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$26 \quad \begin{aligned} x_1, x_2 - \text{цїлї} \\ Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \\ x_1, x_2 - \text{цїлї} \end{aligned}$$

$$28 \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5; \\ x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \\ x_1, x_2 - \text{цїлї} \end{aligned}$$

$$30 \quad \begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \\ x_1, x_2 - \text{цїлї} \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 4. ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

4.1. Проблема двоїстості в лінійному програмуванні

Ознайомлення з явищем подвійності в лінійному програмуванні почнемо із задачі оптимізації ресурсів фірми. Припустимо, що деяка фірма має m видів виробничих ресурсів у визначеній кількості b_i для виробництва n видів продукції. Знаючи технологічні витрати (a_{ij}) ресурсів на виробництво одиниці продукції та прибуток (C_j) від реалізації товару, задача для цієї фірми зводиться до знаходження такого плану виробництва продукції кожного виду (x_j), який би максимізував загальний прибуток і має вигляд:

$$\begin{aligned} Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_j &\geq 0, j = 1; 2; \dots; n \end{aligned}$$

Розглянемо іншу задачу. Припустимо, що є фірма, яка бажає купити для своїх потреб ресурси першої, маючи на це кошти. Постає питання про ціни (цінність) ресурсів, за якими перша фірма погодилася б продати їх, а другій фірмі було б вигідно придбати. Але мова йде не про ринкові ціни на ресурси, а лише про оцінку наявних ресурсів з точки зору сподіваних прибутків від їх використання і тому зрозуміло, що вони будуть залежати від прибутків C_j (чим більші прибутки, тим дорожчі будуть наявні ресурси).

Якщо позначити ціну одиниці відповідного ресурсу y_i , то задача другої фірми зводиться до мінімізації витрат на придбання ресурсів кожного виду. Але перша фірма погодиться на продаж ресурсів за умови, що сума, одержана від реалізації ресурсів, які можна витратити на виготовлення продукції, буде не меншою, ніж сума від очікуваного прибутку, одержаного при виробництві цієї продукції. Така задача має вигляд:

$$\begin{aligned} W &= b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + \dots + b_my_m \rightarrow \min \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \dots + a_{m1}y_m &\geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \dots + a_{m2}y_m &\geq c_2 \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \dots + a_{mn}y_m &\geq c_n \\ y_i &\geq 0, i = 1; 2; \dots; m \end{aligned} \quad (4.2)$$

Природно, що і ціни на ресурси u_i , і кількість продукції кожного виду x_j , знайдені оптимальним планом, не можуть бути від'ємні.

Задача (4.2) називається подвійною (двоїстою) або спряженою до задачі (4.1), яку називають прямою, вихідною чи просто заданою щодо задачі (4.2).

Зв'язок вихідної і подвійної задач полягає, насамперед, в тому, що розв'язок однієї з них можна отримати безпосередньо із розв'язку іншої.

Добре розроблений математичний апарат лінійного програмування дозволяє за допомогою обчислювальних процедур не тільки отримати оптимальний план, але й зробити ряд економічних змістовних висновків, що базуються на властивостях подвійної задачі.

Кожна з пари подвійних задач фактично є самостійною задачею лінійного програмування і може розв'язуватися незалежно, але подвійна задача по відношенню до вихідної будується за відповідними правилами:

- Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min) і навпаки.

- Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна в подвійній, взята з протилежним знаком. Обмеженню-рівнянню відповідає змінна, на яку не накладається умова по знаку. Кількість змінних подвійної задачі відповідає кількості обмежень прямої.

- Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження подвійної з тим самим знаком. Змінній прямої задачі, на яку не накладається умова по знаку, відповідає обмеження-рівняння в подвійній. Кількість обмежень подвійної задачі рівне числу змінних прямої.

- Коефіцієнтами цільової функції подвійної задачі є вільні члени прямої і навпаки.

- Колонкою вільних членів подвійної задачі є коефіцієнти цільової функції прямої і навпаки.

- Матрицю коефіцієнтів системи основних обмежень прямої задачі перетворюють в матрицю коефіцієнтів системи обмежень подвійної задачі шляхом транспонування, тобто заміною стовпчиків рядками, а рядків – стовпчиками.

Між прямою та подвійною задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який впливає з наведених далі теорем.

Перша теорема подвійності

Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має оптимальний розв'язок, причому значення цільових функцій при ньому збігаються, $\max Z = \min W$.

(Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв'язку).

Економічний зміст першої теореми двоїстості такий: план виробництва X та набір цін (оцінок) ресурсів Y будуть оптимальними тоді і тільки тоді, коли загальний прибуток від реалізації продукції збігається із затратами на ресурси за “внутрішніми”, що визначені під час розв'язку задачі цінами на ресурси.

Цей зміст можна інтерпретувати і так: фірмі байдуже, чи виробляти продукцію за оптимальним планом X і отримати максимальний прибуток, чи продати ресурси виробництва за оптимальними цінами Y .

За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$ та $Y \neq Y_{opt}$ можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

Друга теорема подвійності

Для того, щоб плани X та Y були оптимальними, необхідно і достатньо виконання таких співвідношень, що називають умовами доповнюючої нежорсткості:

$$Y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) = 0 ;$$

$$X_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^* - C_j \right) = 0$$

Ці умови дають можливість, знаючи оптимальний план однієї із пари подвійних задач, знайти оптимальний план другої.

Із другої теореми подвійності випливають такі вимоги до оптимального плану X та оптимального вектора цін Y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Якщо } Y_i > 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i, \quad i=1, \dots, m; \\ \text{Якщо } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j < b_i, \quad \text{, то } Y_i = 0, \quad i=1, \dots, m; \\ \text{Якщо } X_j > 0, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i = C_j, \quad j=1, \dots, n; \\ \text{Якщо } \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i < C_j, \quad \text{, то } X_j = 0, \quad j=1, \dots, n. \end{array} \right\}$$

Першу групу умов можна інтерпретувати: якщо оцінка Y_i одиниці ресурсу додатна, то при оптимальній виробничій програмі цей ресурс

використовується повністю, в протилежному випадку – його оцінка дорівнює 0.

Із умов другої групи випливає, що якщо j -й вид продукції увійшов в оптимальний план, то він в оптимальних оцінках не збитковий, якщо ж j -й вид продукції збитковий, то він не увійде в план, тобто не буде вироблятися.

Розглянемо ще одну теорему, висновки якої будуть використовуватися для аналізу оптимальних планів. Як було з'ясовано, існування двоїстих змінних уможливує зіставлення витрат на виробництво і цін на продукцію, на підставі чого обґрунтовується висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім цього, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що зумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді такої теореми.

Третя теорема подвійності (теорема про оцінки)

Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тонах, м, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: чи числові значення двоїстих оцінок показують на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу.

Економічне тлумачення оцінок впливає з їх загальних економіко-математичних властивостей щодо конкретного змісту задачі. За розглянутими умовами ресурс, що використовується не повністю в оптимальному плані, отримує нульову оцінку. Це свідчить про його не дефіцитність. Але ресурс недефіцитний не тому, що необмежений в кількості, а через неможливість його повного використання в оптимальному плані. Оскільки сумарні витрати недефіцитного ресурсу менші за його загальну кількість, то план виробництва товарів ним не лімітується. Даний ресурс не перешкоджає продовжувати максимізувати цільову функцію.

Кожну з двох спряжених задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та подвійної задач уможливають знаходження розв'язку двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Розв'язуючи пряму задачу у подвійній симплексній таблиці методом **модифікованих жорданових вилучень**, в останній симплексній таблиці можна отримати і розв'язок подвійної задачі.

Модифіковані жорданові вилучення відрізняються від звичайних лише:

- формуванням скороченої симплексної таблиці;
- операціями у розв'язуючій колонці – на місці розв'язуючого елемента ставимо обернене число, всі елементи розв'язуючої колонки ділимо на розв'язуючий елемент і змінюємо знаки на протилежні.

Приклад 4.1.

Побудувати задачу, подвійну до заданої, знайти її розв'язок у подвійній симплексній таблиці.

Пряма задача

$$Z = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,2}$$

Подвійна задача

$$W = 2y_1 + 4y_2 \rightarrow \min$$

$$y_1 + y_2 \geq 3$$

$$-y_1 + 2y_2 \geq -1$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,2}$$

Подвійна симплекс-таблиця матиме вигляд:

		y ₃	y ₄	W
		-x ₁	-x ₂	1
y ₁	X ₃	<u>1</u>	-1	2
y ₂	X ₄	1	2	4
1	Z	-3	1	0

		y ₁	y ₄	W
		-x ₃	-x ₂	1
y ₃	x ₁	1	-1	2
y ₂	x ₄	-1	<u>3</u>	2
1	Z	3	2	6

Розв'язок прямої задачі одержано в кінцевій таблиці, де знайдено оптимальні плани обох задач, а саме:

		y ₁	y ₂	W
		-x ₃	-x ₄	1
y ₃	X ₁	2/3	1/3	8/3
y ₄	X ₂	-1/3	1/3	2/3
1	Z	7/3	2/3	22/3

$$x_1 = 8/3;$$

$$x_2 = 2/3$$

$$Z(x_{\max}^*) = 22/3$$

$$y_1 = 7/3;$$

$$y_2 = 2/3$$

$$W(y_{\min}^*) = 22/3$$

Приклад 4.2.

Для заданої ЗЛП побудувати двоїсту, розв'язати одну з пари двоїстих задач симплекс-методом і за її розв'язком знайти розв'язок іншої задачі

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 \geq -6$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 26$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,2}$$

Перепишемо ЗЛП, помноживши першу нерівність на -1:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 26$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,2}$$

Двоїста задача записується у вигляді:

$$W = 6y_1 + 26y_2 + 10y_3 \rightarrow \min$$

$$-1y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$1y_1 + 4y_2 - 1y_3 \geq 1$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

Зведемо вихідну задачу до канонічної форми. Для цього добавимо невід'ємні величини x_3, x_4, x_5 , щоб нерівності перетворити в рівняння:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 26$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

Розв'яжемо дану задачу симплекс-методом Заповнюємо симплекс-таблицю початковими значеннями, вибираємо стовпець (x_1) з першим від'ємним значенням (-1) в останньому рядку, вибираємо рядок (x_5) з найменшим значенням b_i/x_i (5) і виділяємо розв'язувальний елемент (2):

x_6	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i/x_i
x_3	6	-1	1	1	0	0	—
x_4	26	3	4	0	1	0	26/3
x_5	10	2	-1	0	0	1	5 (min)
Δ	0	-1	-1	0	0	0	

Вводимо в базис x_1 замість x_5 і перераховуємо таблицю. Вибираємо стовпець (x_2) з єдиним від'ємним значенням ($-3/2$) в останньому рядку, вибираємо рядок (x_4) з найменшим значенням b_i/x_i (2) і виділяємо розв'язувальний елемент ($11/2$):

x_6	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i/x_i
x_3	11	0	$1/2$	1	0	$1/2$	22
x_4	11	0	$11/2$	0	1	$-3/2$	2 (min)
x_1	5	1	$-1/2$	0	0	$1/2$	—
Δ	5	0	$-3/2$	0	0	$1/2$	

Вводимо в базис x_2 замість x_4 і перераховуємо таблицю:

x_6	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i/x_i
x_3	10	0	0	1	$-1/11$	$7/11$	—
x_2	2	0	1	0	$2/11$	$-3/11$	—
x_1	6	1	0	0	$1/11$	$4/11$	—
Δ	8	0	0	0	$3/11$	$1/11$	

В останньому рядку не залишилося від'ємних величин, тому стовбець b містить рішення вихідної задачі – максимум функції F:

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \\x_2 &= 2 \\F_{\max} &= 8\end{aligned}$$

Запишемо рішення двоїстої задачі з останнього рядка останньої симплекс-таблиці:

$$\begin{aligned}y_1 &= 0 \\y_2 &= 3/11 \\y_3 &= 1/11 \\F^*_{\min} &= 8\end{aligned}$$

Відповідь:

Вихідна задача: $F_{\max} = F(6; 2) = 8$

Двоїста задача: $W_{\min} = W(0; 3/11; 1/11) = 8$

4.2. Економічна інтерпретація задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів

У теорії лінійного програмування для кожної задачі можна побудувати іншу – так звану двоїсту, або спряжену. Розглянемо економічну інтерпретацію задачі, що є двоїстою до задачі про використання ресурсів.

Згадаємо задачу про відгодівлю фермером тварин. Припустимо, що деяке господарство вирішило викупити корми (ресурси). Фермеру необхідно встановити оптимальні ціни на ці корми. Позначимо через y_1 - ціну корму першого виду, y_2 - ціну корму другого виду, y_3 - ціну корму третього виду.

Взагалі кажучи, поняття ціни корму в даному випадку не співпадає зі звичним для нас економічним поняттям ціни. В теорії двоїстості змінні y_1, y_2, y_3 є так званими двоїстими оцінками ресурсів. Вони показують розмір прибутку, який може принести одиниця певного ресурсу.

Очевидно, що господарство, яке закупає корми, зацікавлено в тому, щоб витрати на них були мінімальними. Отже, цільова функція буде мати вигляд $F^* = 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \rightarrow \min$.

З іншого боку, фермер при продажу кормів прагне отримати не менше грошей, ніж він би отримав, якщо б використовував ці корми на годівлю тварин. Тобто система обмежень матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16 \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Отже, ми отримали нову модель задачі лінійного програмування, яка називається двоїстою до вихідної:

$$\begin{aligned} F^* &= 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16 \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6 \end{cases} \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Алгоритм побудови математичної моделі двоїстої задачі

Сформулюємо алгоритм переходу від прямої до двоїстої задачі:

- 1) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;
- 2) кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі;
- 3) коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі є праві частини співвідношень системи обмежень (вільні члени системи обмежень) прямої задачі;
- 4) цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, а цільова функція двоїстої задачі – до мінімуму
- 5) матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі складається шляхом транспонування матриці коефіцієнтів при невідомих прямої задачі (транспонування матриці – заміна рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками);

7) якщо змінна x_j прямої задачі може приймати лише невід'ємні значення, то відповідне j -те обмеження двоїстої задачі має знак « $\geq$ »; якщо ж змінна x_j може приймати як додатні, так і від'ємні значення, то j -те співвідношення системи обмежень двоїстої задачі має знак « $=$ »;

Виходячи з побудованого алгоритму, запишемо визначення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі лінійного програмування.

[illegible][illegible]

Розв'язок двійстої задачі можна знайти з останньої симплексної таблиці розв'язку прямої задачі.

В останню симплексну таблицю розв'язання з попереднього розділу додамо ще один рядок (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

№	Базис	C_6	План	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_3	0	30	0	0	1	2/11	-5/11
2	x_1	16	57	1	0	0	7/22	-1/22
3	X_2	6	12	0	1	0	-3/11	2/11
m+1			984	0	0	0	38/11	4/11
				y_4^*	y_5^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

В цей рядок під додатковими змінними прямої задачі (x_3, x_4, x_5) вписують основні змінні двоїстої (y_1, y_2, y_3). І навпаки, під основними змінними прямої задачі (x_1, x_2) вписують додаткові змінні двоїстої задачі (y_4, y_5).

Розв'язок двоїстої задачі вписують з (m+1)-го рядка. Над відповідними змінними знаходяться їх значення. Отже, $F_{\min}^* = F_{\max} = 984$ в точці $U^*(0; 38/11; 4/11; 0; 0)$.

Економічний зміст двоїстих оцінок

Визначимо економічний зміст основних та додаткових змінних двоїстої задачі. Як зазначалося раніше, основні змінні прямої задачі показують ціну (оцінку) корму (сировини) певного виду. Отже, змінні, y_1^* , y_2^* та y_3^* показують двоїсті оцінки корму (сировини) відповідно I, II, та III-го виду. Двоїсті оцінки сировини другого та третього видів додатні, це означає, що дані види сировини повністю використовуються у виробництві. Двоїста оцінка сировини першого виду дорівнює нулю. Це вказує на те, що сировина першого виду використовується не повністю. Отже, двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини. Крім того, величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться прибуток підприємства при збільшенні сировини відповідного виду на одиницю.

Розтлумачимо економічний зміст двоїстої оцінки $y_2^* = 38/11$. Якщо збільшити кількість корму II виду на одиницю, тобто якщо його кількість складатиме 241, то загальний прибуток збільшиться на $\frac{38}{11}$ і складатиме $984 + \frac{38}{11} = 987\frac{38}{11}$ грошових одиниць. При цьому числа, що знаходяться у відповідному до змінної y_2^* стовпчику (табл. 3.1), показують, як при цьому

змениться план випуску продукції: залишок сировини першого виду збільшиться на $\frac{2}{11}$ і складатиме $\frac{302}{11}$, кількість продукції 1-го виду збільшиться на $\frac{7}{22}$ і складатиме $\frac{577}{22}$, кількість продукції другого виду зменшиться на $\frac{3}{11}$ і складатиме $\frac{298}{11}$.

Аналогічно збільшення сировини третього виду на одиницю дозволить знайти новий оптимальний план виробництва.

Який економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі? Розглянемо першу нерівність двоїстої задачі $2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16$.

Ліва частина нерівності $2y_1 + 4y_2 + 6y_3$ показує витрати (у грошових одиницях) на відгодівлю однієї тварини виду А (витрати на виробництво одиниці продукції певного виду). 16 – ціна від реалізації однієї тварини виду А (ціна одиниці продукції). Перетворимо дану нерівність у рівняння. Введемо додаткову змінну y_4 :

$$2y_1 + 4y_2 + 6y_3 - y_4 = 16.$$

Величина y_4 показує, на скільки витрати на виробництво одиниці продукції більші за ціну цієї продукції. Виходячи з визначеного економічного змісту, можна зробити висновок про вигідність виробництва того чи іншого виду продукції: якщо додаткова змінна двоїстої задачі додатна, то це означає, що продукцію відповідного виду випускати економічно невигідно, так як ціна сировини, що витрачається на виробництво одиниці продукції, більша за ціну цієї продукції.

Аналізуючи отриманий розв'язок, робимо висновки, що, так як $y_4 = y_5 = 0$, то вартість сировини на виробництво цих видів продукції не перевищує ціну одиниці продукції, а значить випускати продукцію даних видів економічно вигідно.

Аналіз чутливості двоїстих оцінок

Аналіз чутливості має за мету визначити: чи призведе зміна вільних членів системи обмежень прямої задачі до зміни поточного оптимального розв'язку і якщо так, то як ефективно знайти новий оптимальний розв'язок у випадку його існування.

При відомому оптимальному розв'язку прямої задачі новий розв'язок задачі із зміненими правими частинами системи обмежень знаходять за формулою:

$$X_E = P^{-1}P_0. \quad (4.5)$$

де X_B - це матриця розв'язку, який планується знайти, P^{-1} - матриця, що розташована в останній симплексній таблиці розв'язку прямої задачі під початковими базисними змінними, P_0 - матриця нових вільних членів.

У загальному випадку зміна вільних членів системи обмежень вихідної задачі може призвести до однієї з ситуацій:

- поточний базисний розв'язок залишається допустимим;
- поточний базисний розв'язок стає неприпустимим. Неприпустимість розв'язку виявляється в тому, що хоча б один елемент вектора „План” стає від'ємним, тобто одна або декілька базисних змінних набувають від'ємного значення;
- поточний базисний розв'язок стає неоптимальним;
- поточний базисний розв'язок стає неоптимальним і неприпустимим.

У першому випадку питань не виникає. У другому випадку для поновлення допустимості розв'язку використовують двоїстий симплексний метод. У третій ситуації застосовують простий симплексний метод для отримання нового симплексного розв'язку. Четверта ситуація потребує використання як прямого, так і двоїстого симплексного методів.

Приклад 4.3. Припустимо, що фермер (приклад 1.1) планує розширити власне господарство за умов збільшення запасів кормів на 20%, тобто запаси кормів будуть складати 216, 288 та 511.2 умовних одиниць відповідно. Визначити, чи буде це економічно вигідним рішенням.

Розв'язання:

За формулою (3.3)

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 216 \\ 288 \\ 511.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 68.4 \\ 14.4 \end{pmatrix}$$

Таким чином, базисні змінні x_1, x_2, x_3 з новими значеннями 68,4; 14,4; 36 як і раніше складають припустимий розв'язок. Максимальне значення цільової функції $F = 16 \cdot 68,4 + 6 \cdot 14,4 = 1180,8$ грошових одиниць.

Отже, збільшення запасів кормів на 20% принесе додатковий прибуток розміром $1180,8 - 984 = 196,8$ грошових одиниць.

Приклад 4.4. Припустимо, що частину коштів, які витрачаються на корм першого виду (його залишки складають 30 гр.од.), фермер вирішив витратити на закупку кормів 2 та 3 видів. Нехай нові запаси кормів складають 155, 250 і 450 ум. од. відповідно. Визначити економічну вигідність даного рішення.

Розв'язання.

Знайдемо новий розв'язок за формулою 4.5:

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_3 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 155 \\ 250 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/11 \\ 650/11 \\ 150/11 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, отримали випадок, що підпадає під другу ситуацію – отриманий розв'язок став недопустимим, так як $\bar{a}_3 = -45/11$. Для повернення в область допустимих розв'язків і отримання відповіді на питання задачі необхідно застосувати двоїстий симплексний метод.

4.3. Двоїстий симплексний метод

Розв'язання прикладу 4.2 (продовження).

В останній симплексній таблиці розв'язку прямої задачі замінюють елементи стовпчику «План» на елементи отриманого нового вектору розв'язків. Причому значення цільової функції також змінюють (табл. 4.2).

В нашому прикладі значення цільової функції буде дорівнювати

$$F = 16 \cdot \frac{650}{11} + 6 \cdot \frac{150}{11} = \frac{11300}{11}.$$

Таблиця 4.2

№	Базис	C _b	План	16	6	0	0	0
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
1	x ₃	0	-45/11	0	0	1	2/11	-5/11
2	x ₁	16	650/11	1	0	0	7/22	-1/22
3	x ₂	6	150/11	0	1	0	-3/11	2/11
m+1			11300/11	0	0	0	38/11	4/11

В двоїстому симплексному методі змінюються правила визначення направляючого рядка і направляючого стовпчика, а також критерій оптимальності.

Особливості двоїстого симплексного методу:

- 1) критерій оптимальності: стовпчик „План” не містить від'ємних елементів;
- 2) правило вибору направляючого рядка: серед від'ємних елементів стовпчика „План” знаходимо найменший. Рядок, в якому він знаходиться, називається направляючим, а змінна, яка йому відповідає, виключається з базису;
- 3) правило вибору направляючого стовпчика: ділять почленно елементи (m+1)-го рядка, взяті із знаком „мінус”, на відповідні від'ємні елементи направляючого рядка. Серед отриманих часток обирають найменшу. Стовпчик, в якому вона знаходиться, називають направляючим, а змінна, яка йому відповідає, виводиться з базису.

Правила перерахунку елементів нової симплексної таблиці аналогічні звичайному симплексному методу.

Як видно з таблиці 3.2, отриманий план не є оптимальним, так як стовпчик «План» містить від'ємний елемент. Отже, необхідно переходити до нової симплексної таблиці.

Направляючий рядок – перший (він містить від’ємний елемент стовпчика «План»), направляючий стовпець – X_5 (від’ємний елемент у направляючому рядку один, отже він і визначає направляючий стовпець). Генеральний елемент – $(-5/11)$.

Здійснивши необхідні розрахунки, отримуємо таблицю 4.3, аналіз якої дозволяє зробити висновок про оптимальність отриманого плану (всі елементи стовпчика «План» $(m+1)$ -го рядка додатні.

Таблиця 4.3

№	Базис	C_b	План	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_5	0	9	0	0	-2,2	-0,4	1
2	x_1	16	1309/22	1	0	-0,1	33/110	0
3	x_2	6	12	0	1	0,4	-0,2	0
$m+1$			1024	0	0	0,8	198/55	0

Отже, нова кількість кормів дозволить отримати прибуток у розмірі 1024 гр. од, що на $1024-984=40$ гр. од. більше за попередній.

Аналіз (стійкості) двоїстих оцінок

Ми визначили, що додатна величина двоїстої оцінки сировини певного виду показує, на скільки збільшиться прибуток при збільшенні відповідної сировини на одиницю. Перед нами стоїть задача: до яких границь ми можемо збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини і при цьому оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним?

Для відповіді на це питання знаходять так званий інтервал стійкості (незмінності) двоїстих оцінок.

Приклад 4.5. Визначимо інтервали стійкості для всіх видів сировини у прикладі 2.1.

Розв’язання.

Замінімо вектор $P_0 \begin{pmatrix} 180 \\ 240 \\ 426 \end{pmatrix}$ на вектор $P_0 \begin{pmatrix} 180 + D_1 \\ 240 + D_2 \\ 426 + D_3 \end{pmatrix}$. Змінна D_1 показує, наскільки може змінитися запас ресурсу по відношенню до початкового значення 180 і при цьому отриманий розв’язок буде припустимим. Змінні D_2 і D_3 мають аналогічний зміст відносно запасів сировини II і III видів.

Для того, щоб новий розв'язок був припустимим, необхідно виконання нерівності $X_B = P^{-1}P_0 \geq 0$. Отримаємо наступну систему:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 + D_1 \\ 240 + D_2 \\ 426 + D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 + 11D_1 + 2D_2 - 5D_3 \\ 1254 + 7D_2 - D_3 \\ 132 - 3D_2 + 2D_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Якщо $D_2 = 0$ і $D_3 = 0$, залишається нерівність $330 + 11D_1 \geq 0$ або $D_1 \geq -30$. Це свідчить про те, що, якщо кількість сировини I виду зменшувати на величину до 30 одиниць, тобто її кількість коливатиметься у межах $[150, 180]$, то оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним.

$$\begin{cases} 330 + 2D_2 \geq 0 \\ 1254 + 7D_2 \geq 0 \\ 132 - 3D_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Якщо } D_1 = 0 \text{ і } D_3 = 0, \text{ отримуємо нерівності} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} D_2 \geq -165 \\ D_2 \geq -1254/7 \\ D_2 \leq 44 \end{cases}$$

Отже, $-165 \leq D_2 \leq 44$. Це означає, що кількість сировини II виду може зменшитись на 165 одиниць або збільшитись на 44 одиниці відносно початкової кількості. За початковою умовою задачі кількість сировини другого виду дорівнює 240 одиниць. Отже, незмінність двоїстих оцінок залишиться у межах коливання сировини II виду від 75 одиниць до 288.

Для знаходження інтервалу стійкості двоїстої оцінки сировини III виду приймаємо $D_1 = 0$ і $D_2 = 0$. Тоді $-66 \leq D_3 \leq 66$. Отже, збереження незмінності двоїстої оцінки сировини III виду знаходиться у межах від 360 до 492.

Випадок одночасної зміни кількості ресурсів двох та більше видів більш складний для аналізу і для його аналізу користуються алгоритмом, описаним у прикладі 3.1 даної теми.

Запитання та завдання для самостійної роботи

Для задач з розділу 2. виконати наступні дії:

- 1) записати економіко-математичну модель задачі в основній формі;
- 2) дати економічну інтерпретацію основних та додаткових змінних;
- 3) скласти задачу, двоїсту до даної;
- 4) дати економічну інтерпретацію основних і додаткових змінних двоїстої задачі;
- 5) з останньої симплексної таблиці розв'язку прямої задачі виписати оптимальний план;

- 6) дати економічну інтерпретацію отриманого розв'язку;
- 7) з останньої симплексної таблиці розв'язку прямої задачі виписати розв'язок двоїстої задачі;
- 8) дати економічну інтерпретацію отриманого розв'язку двоїстої задачі;
- 9) знайти інтервали стійкості для всіх видів сировини.

Тестові завдання

1. Інтервал стійкості деякого ресурсу зображено на рис.1. Вибрати його правильний математичний запис:

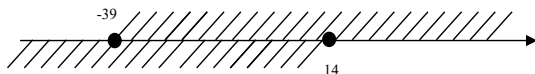


Рис. 1

1. $[-\infty; -39];$
2. $[14; +\infty];$
3. $[-39; 14];$
4. $[-39; +\infty].$

2. Для випуску продукції видів А та В підприємство використовує три типи сировини. Поставити у відповідність змінні даної задачі та їх економічний зміст в отриманому рішенні прямої задачі лінійного програмування $X^*=(16;0;14;0;0)$:

1.	змінна x_1	А.	сировина 1-го виду використовується не повністю
2.	змінна x_2	Б.	сировина другого виду використана повністю
3.	змінна x_3	В.	продукцію виду В випускати економічно не вигідно
4.	змінна x_4	Г.	сировина третього виду використана повністю
5.	змінна x_5	Д.	продукцію виду А слід випускати в кількості 16 одиниць
		Є.	маємо залишки сировини 1-го виду в кількості 14 одиниць

3. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1, 2, 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 4	В якщо правильні відповіді 2, 3, 4	Г якщо правильна відповідь 2	Д якщо всі відповіді правильні
--	--	--	------------------------------------	---

1.	матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі отримана шляхом транспонування матриці коефіцієнтів прямої задачі
2.	кількість обмежень прямої задачі дорівнює кількості обмежень двоїстої задачі
3.	якщо пряма задача має рішення, то двоїста ні
4.	вільні члени системи обмежень прямої задачі є коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі

4. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	змінна прямої задачі може приймати будь-які значення	А.	відповідне обмеження двоїстої задачі має знак $\leq$
		Б.	відповідне обмеження двоїстої задачі має знак $\geq$
2.	змінна прямої задачі може приймати тільки невід'ємні значення	В.	відповідне обмеження двоїстої задачі має знак $=$
		Г.	знак змінної прямої задачі не впливає на знак відповідного обмеження двоїстої задачі

5. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	обмеження прямої задачі має знак $\leq$	А.	змінна двоїстої задачі може приймати тільки невід'ємні значення
2.	обмеження прямої задачі має знак $\geq$	Б.	змінна двоїстої задачі може приймати будь-які значення
3.	обмеження прямої задачі має знак $=$	В.	змінна двоїстої задачі може приймати тільки додатні значення

6. Підприємство випускає 2 види продукції, використовує на це 3 види сировини. Обвести літеру

А	Б	В	Г	Д
якщо вірно 1, 2, 3	якщо вірно 1 і 3	якщо вірно 2 і 4	якщо вірно тільки 2	якщо усе вірно

При розв'язанні даної задачі симплексним методом отримали відповідь (80; 0; 120; 0; 0). З цього можна зробити висновки:

1. Кількість виробів першого виду 80 штук
2. Залишки сировини 1-го виду становлять 80 одиниць
3. Сировина 2 і 3 виду використовується повністю
4. Залишки сировини 3-го виду становлять 120 одиниць

7. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі	А.	кількість продукції по видах
----	--	----	------------------------------

2.	економічний зміст основних змінних прямої задачі	Б.	залишки сировини по видах
3.	економічний зміст додаткових змінних прямої задачі	В.	розмір перевищення вартості сировини на 1 продукції її ціну
4.	економічний зміст основних змінних двоїстої задачі	Г.	розмір зростання величини прибутку при збільшенні кількості відповідної сировини на 1

У питаннях 8-12 вибрати правильну відповідь:

8. При розв'язанні задачі лінійного програмування двоїтим симплекс-методом вектор, який вводять в новий базис, обирають за правилом:

1. обирають найбільшу частку від ділення елементів $(m+1)$ рядка, взятих із знаком “-”, на відповідні їм від’ємні елементи направляючого рядка;
2. обирають найменшу частку від ділення елементів $(m+1)$ рядка, взятих із знаком “-”, на відповідні їм додатні елементи направляючого рядка;
3. обирають найменшу частку від ділення елементів $(m+1)$ рядка, взятих із знаком “-”, на відповідні їм від’ємні елементи направляючого рядка;
4. обирають найбільшу частку від ділення елементів $(m+1)$ рядка, взятих із знаком “-”, на відповідні їм додатні елементи направляючого рядка.

9. Співвідношення значень цільових функцій прямої ($F_{\max}$) та двоїстої задач ($Z_{\min}$) задається формулою:

1. $F_{\max} = -Z_{\min}$;
2. $F_{\max} = Z_{\min}$;
3. $F_{\max} = \frac{1}{Z_{\min}}$;
4. $F_{\max} = -\frac{1}{Z_{\min}}$.

10. Якщо змінна прямої задачі може приймати лише додатні значення, то відповідне до неї обмеження двоїстої задачі має знак:

1. $\leq$
2. $=$
3. $\geq$
4. Знак змінної прямої задачі не впливає на знак відповідного обмеження двоїстої задачі

11. Для випуску продукції видів А та В підприємство використовує три типи сировини. Пояснити зміст значення другої змінної в отриманому рішенні прямої задачі лінійного програмування: $X^*=(12;0;125;0;0)$:

1. продукцію виду В випускати економічно не вигідно;
2. сировина 2-го виду використовується повністю;
3. вартість сировини на випуск продукції виду В не перевищує ціни на 1 даної продукції;
4. немає вірної відповіді.

12. Для випуску продукції видів А та В підприємство використовує три типи сировини. Пояснити зміст останнього компонента в отриманому рішенні двоїстої задачі лінійного програмування: $X^*=(0;18;19/4;0;3/2)$:

1. продукцію виду В випускати не вигідно;
2. сировина 2-го виду використовується повністю;
3. вартість сировини на випуск продукції виду В не перевищує ціни на 1 даної продукції;
4. немає вірної відповіді.

У питаннях 13-15 вибрати неправильну відповідь:

13.

1. додатну двоїсту оцінку мають ті види сировини, які повністю використовуються при оптимальному плані випуску виробів;
2. двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини;
3. величина двоїстої оцінки показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції при збільшенні кількості відповідної сировини на одиницю;
4. додатну двоїсту оцінку мають ті види сировини, які неповністю використовуються при оптимальному плані випуску виробів.

14.

1. якщо пряма задача прямує до максимуму, то двоїста - до мінімуму;
2. кількість обмежень прямої задачі дорівнює кількості обмежень двоїстої задачі;
3. вільні члени системи обмежень прямої задачі є коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі;
4. матриця коефіцієнтів двоїстої задачі отримана шляхом транспонування з матриці коефіцієнтів прямої задачі.

15.

1. додаткова змінна прямої задачі може бути будь-яким числом;
2. додаткова змінна прямої задачі може бути тільки невід'ємним числом;
3. додаткова змінна двоїстої задачі може бути тільки невід'ємним числом;
4. основна змінна двоїстої задачі може бути додатним числом або нулем.

РОЗДІЛ 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Економічна постановка транспортної задачі

Як уже зазначалось, симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте окремі типи задач лінійного програмування мають такі особливості структури, що дають змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування. Але, як би зовні ці методи не відрізнялись від симплексного, останній є їх незмінною основою, так що при більш уважному аналізі завжди можна виявити його основні елементи, що дає можливість вважати всі методи розв'язування задач лінійного програмування більш-менш глибокою модифікацією симплексного методу.

Найважливішим типом згаданих задач є так звана транспортна задача, загальна постановка якої вже розглядалась. Математична структура цієї задачі характерна для великого класу задач лінійного програмування, що називаються розподільчими, а реальний зміст їх може бути найрізноманітнішим, зовсім не пов'язаним із задачею про перевезення вантажів.

Такою є, наприклад, задача оптимального добору, а також задачі розміщення виробництва, баз та складів, задачі оптимального призначення і т. п.

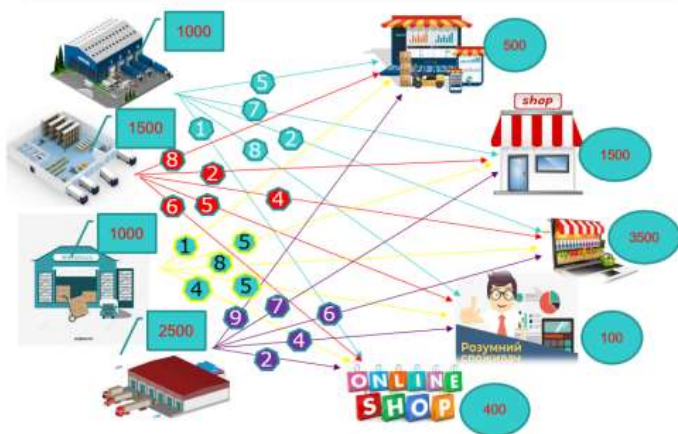
Слід зауважити, що і власне транспортні задачі за своїм змістом поділяються на кілька груп. Як правило, критерієм поділу є критерій оптимальності цільової функції задачі, а саме; задачі на мінімізацію вартості перевезень, задачі на мінімізацію строків перевезень, задачі на мінімізацію довжини маршрутів тощо.

Звичайно, тут не можна охопити всю різноманітність задач транспортного типу та методів їх розв'язування. Тому розглянемо лише найбільш відомі і широко вживані, що стали вже класичними.

Транспортна задача – це особлива задача лінійного програмування, яку застосовують для визначення найбільш ефективного плану перевезень однорідної продукції або взаємозамінних продуктів із пунктів виробництва у пункти споживання.

Розглянемо економічну постановку класичної транспортної задачі: нехай маємо m пунктів виробництва чи запасу однорідної продукції з відомими величинами її обсягу у кожному пункті $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ та n пунктів споживання цієї продукції з відомими величинами попиту на неї $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Також відома матриця транспортних витрат $C // c_{ij} //$, що необхідно витратити для перевезення одиниці продукції від кожного виробника до кожного споживача.

Економіка транспортної задачі



Необхідно скласти такий план перевезення однорідної продукції, щоб вона була вивезена від усіх виробників, попит усіх споживачів був задоволений і сукупні транспортні витрати на це перевезення були мінімальними.

Для запису математичної моделі транспортної задачі уведемо такі позначення:

a_i – запаси вантажу у i -му пункті відправлення ($i = 1, 2, 3, \dots, m$);

b_j – потреба у вантажі у j -му пункті призначення ($j = 1, 2, 3, \dots, n$);

X_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного від i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення;

c_{ij} – тарифи перевезення одиниці вантажу від i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення.

Математична постановка задачі зводиться до знаходження мінімального значення функції

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \quad (5.4)$$

Оскільки змінні x_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) задовольняють системи лінійних рівнянь (5.2) і (5.3) і умови невід'ємності (5.4), то забезпечується доставка необхідної кількості вантажу у кожний із пунктів призначення, вивезення наявного вантажу із всіх пунктів відправлення, а також не допускаються зворотні перевезення.

Означення. Будь – який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (5.2) і (5.3), що визначається матрицею $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), називається **планом** транспортної задачі.

Означення. План $X^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), при якому функція (5.1) набуває свого мінімального значення, називається **оптимальним планом** транспортної задачі.

Вхідні дані транспортної задачі оформлюють у вигляді таблиці (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
A_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	...	C_{3n} X_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреби	b_1	B_2	b_3	...	b_n	

У правому верхньому куті клітинок $A_i B_j$ записують вартість перевезення одиниці вантажу з i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення. Посередині кожної клітинки $A_i B_j$ вносять кількість перевезеного вантажу з i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення.

5.2. Типи транспортних задач

Якщо загальна потреба вантажу у пунктах призначення дорівнює загальним запасам вантажу у пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5.5)$$

то модель такої транспортної задачі називається *закритою*.

Якщо вказана умова не виконується, то модель транспортної задачі називається *відкритою*.

Для розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу у пунктах відправлення дорівнювали потребам у вантажі у пунктах призначення, тобто, щоб виконувалась рівність (5.5).

У випадку, якщо запаси перевищують потреби, тобто $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$,
 $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$
 вводиться фіктивний $(n+1)$ -й пункт призначення із потребою $\sum_{j=1}^n b_j$ і відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{in+l} = 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Отримана задача є транспортною задачею, для якої виконується рівність

Дисбаланс:
 Запас більший потреби -
 вводимо фіктивного споживача

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

(5.5).

						a_i	
	2	5	4	6	0		
					0	$a_1=150$	
	8	4	3	8	0	$a_2=200$	
					0	$a_3=100$	
	5	1	4	5	0		
						450	
b_j	$b_1=80$	$b_2=140$	$b_3=100$	$b_4=80$	$b_5=50$		400

Аналогічно при $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ вводиться фіктивний $(m+1)$ -й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ і тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+l} = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Дисбаланс:
Потреба більша запасу -
вводимо фіктивного виробника

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

	a_i				
	2	5	4	6	
					$a_1=100$
	8	4	3	8	
					$a_2=200$
	5	1	4	5	
					$a_3=100$
	0	0	0	0	$a_4=100$
					400
b_j	$b_1=80$	$b_2=140$	$b_3=100$	$b_4=180$	500

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі): необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Першим кроком розв'язування транспортної задачі є перевірка балансової умови:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

5.3. Побудова опорного плану транспортної задачі

Найбільш розповсюдженими і простими у застосуванні методами складання опорного плану транспортної задачі є:

- метод північно-західного кута;
- метод найменшої вартості;
- метод подвійної переваги (подвійних відміток).

Суть цих методів заключається у тому, що опорний план знаходять послідовно за $n+m-1$ кроків, на кожному із яких у початковій таблиці задачі заповнюють одну клітинку, яку називають *зайнятою*. Заповнення однієї із клітинок забезпечує повністю задоволення потреб у вантажі одного із пунктів призначення або вивезення вантажу із одного з пунктів відправлення. У першому випадку тимчасово виключається з подальшого розгляду стовпчик, що містить заповнену на даному кроці клітинку. У другому випадку тимчасово виключається із розгляду рядок, що містить заповнену клітинку.

Після виконання $n+m-2$ кроків має залишитись вільною лише одна клітинка, причому для неї запаси пункту відправлення будуть дорівнювати потребам пункту призначення. Заповнивши цю клітинку ($n+m-1$ -й крок), отримують шуканий опорний план.

Метод північно-західного кута. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно – західного кута на кожному кроці розглядають перший пункт відправлення і перший пункт призначення з тих, що залишилися. Заповнення клітинок таблиці умов починається із лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11} (північно – західний кут) і закінчують для невідомого x_{mn} .

Метод найменшої вартості. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом найменшої (мінімальної) вартості першою заповнюють клітину з найменшою вартістю перевезення. Якщо таких клітин декілька – обирають ту з них, що має більші потреби. Серед клітин, що залишилися, обирають знов клітину з найменшою вартістю перевезення і т.д.

Метод подвійної переваги. При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом подвійної переваги спочатку у кожному рядку і кожному стовпчику помічають клітину з найменшою вартістю перевезення позначають, наприклад, знаком «v». Потім за описаним вище правилом у першу чергу заповнюють клітини, які позначені подвійним знаком «vv», потім ті, що мають один знак «v», в останню чергу – всі інші у порядку зростання вартості перевезення.

Алгоритм розв'язку транспортної задачі розглянемо при розв'язуванні конкретного прикладу.

Приклад. Завод має 3 філії (пункти виробництва), кожна з яких за квартал випускає відповідно 100; 200; 100 одиниць комп'ютерів. Чотири школи (пункти споживання) хочуть придбати ПК для навчання учнів у кількості відповідно 80; 140; 100; 80 шт. Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від виробника до споживача складають:

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Скласти такий план перевезення продукції, при якому будуть задоволені і виробники, і споживачі, а сукупна вартість перевезення буде найдешевшою.

Перенесемо умову задачі у транспортну таблицю та знайдемо опорний план транспортної задачі.

Таблиця 1.

	2	5	4	6	a_i
					$a_1=100$
	8	4	3	8	$a_2=200$
	5	1	4	5	$a_3=100$
b_j	$b_1=80$	$b_2=140$	$b_3=100$	$b_4=80$	400

У даному випадку балансова умова виконується:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 100 + 200 + 100 = 400 \quad (\text{ум})$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 80 + 140 + 100 + 80 = 400 \quad (\text{ум})$$

Другий крок розв'язку транспортної задачі – знаходження опорного плану.

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати методом, який було розглянуто в розділі 3, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості та метод подвійної відмітки. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам. Детальніше розглянемо методи побудови опорного плану задачі.

Ідея **методу північно-західного кута** полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_i та b_j . Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Побудова опорного плану діагональним методом починається із заповнення верхньої лівої клітини (північно-західного кута, звідси і назва методу діагональний або метод північно-західного кута)

$x_{11} = \min \{a_1; b_1\}$, якщо $x_{11} = a_1$, то перший виробник повністю вивіз свою продукцію, і наступною обчислюється величина

$$x_{21} = \min \{a_2; b_1 - a_1\}.$$

Якщо ж $x_{11} = b_1$, то всі $x_{i1} = 0$ і наступною обчислюється величина $x_{12} = \min \{a_1 - b_1; b_2\}$.

Розглянемо цей процес на нашому прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача В1 використовуючи запаси першого постачальника А1. У нашому прикладі потреби споживача В1 становлять 80, а запаси постачальника А1 100 одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку (1,1) записуємо менше із значень a_1 і b_1 , тобто 80. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача В2. Обсяг його потреб В2 - 140. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить $100 - 80 = 20$. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 20 одиниць продукції, тому в клітину (1,2) записуємо число 20. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника А2. Його запаси $a_2 = 200$, а незадоволені потреби другого споживача $140 - 20 = 120$, тому в клітинку (2,2) записуємо число 120, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до задоволення потреб наступного споживача В3 і т.д. Розрахунки проводяться до моменту виконання умов:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}$$

				a_i
2	5	4	6	
80	20			$a_1=10$ 0
8	4 -	3 +	8	
	120	80		$a_2=20$ 0
5	1 +	4 -	5	
		20	80	$a_3=10$ 0
b_j	$b_1=80$	$b_2=14$ 0	$b_3=10$ 0	$b_4=80$ 400 400

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} 80 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{vmatrix}$$

$$Z(\hat{x}_i) = 80 * 2 + 20 * 5 + 4 * 120 + 3 * 80 + 4 * 20 + 5 * 80 = 1460 \text{ (гр.од)}$$

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Суть **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що спочатку заповнюються ті клітини таблиці, в яких вартості перевезень дорівнюють найменшому елементу матриці C/c_{ij} . Потім заповнюються клітини, які мають найменшу вартість перевезення, що залишилися незаповненими після першого кроку і знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені, тобто аж до виконання умов (5.2)–(5.3).

Складемо за допомогою цього методу план розглядуваної задачі.

				a_i
2	5	4	6	
80			20	$a_1=100$
8	4	3	8	
	40	100	60	$a_2=200$
5	1	4	5	
	100			$a_3=100$
b_j	$b_1=80$	$b_2=140$	$b_3=100$	$b_4=80$ 400 400

Метод подвійних відміток. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної відмітки (переваги).

Метод подвійних відміток працює за таким правилом: проглядають рядки і позначають певними відмітками клітини, що характеризуються найменшими транспортними витратами, потім, аналогічно по колонках. У результаті таких дій отримаємо таблицю, позначену певним чином: деякі клітини –подвійною відміткою, інші –одинарною, деякі – непомічені. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

При знаходженні опорного плану необхідно максимально заповнити клітини з подвійною відміткою, потім – з одинарною, і, якщо необхідно – непомічені аж до виконання умов (2-3).

Третій крок розв’язку транспортної задачі – перевірка опорного плану на виродженість.

План транспортної задачі є невиродженим, якщо кількість відмінних від нуля елементів матриці плану (базисних клітин) дорівнює $k=m+n-1$, де m – кількість рядків (пунктів виробництва), а n – кількість колонок (пунктів споживання).

Для нашої задачі – $k=3+4-1=6$

План $\hat{x}_1$ теж містить 6 заповнених клітин, тому він є невиродженим. У випадку невиродженості плану до сукупності базисних (ненульових) клітин таблиці додається небазисна (нульова) клітина, але так, щоб вона не утворювала циклу зі сукупністю базисних клітин таблиці.

Якщо одержаний за будь-яким методом опорний план транспортної задачі є не виродженим, можна порушувати питання про знаходження оптимального плану цієї задачі.

5.4. Розв’язання транспортної задачі методом потенціалів

Розв’язання транспортної задачі, як і розв’язання будь-якої іншої задачі лінійного програмування, наприклад, симплексним методом, передбачає складання опорного плану; перевірку опорного плану на оптимальність і, у разі неоптимальності даного плану, перехід до іншого; перевірку покращеного плану на оптимальність і т.д. до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розв’язок або поки не буде встановлена неможливість розв’язання даної задачі.

Для перевірки складеного плану на оптимальність при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів використовують систему оцінок (потенціалів) рядків і стовпчиків.

Потенціали – це деякі числа, які ставляться у відповідність кожному рядку і стовпчику.

Алгоритм методу потенціалів

Міркування, що стосуються побудови методу потенціалів, виходять з другої теореми подвійності (розділ 4), яку в застосуванні до опорного плану транспортної задачі можна сформулювати так.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі): Для того, щоб деякий опорний план транспортної задачі був оптимальним, необхідно і достатньо його потенціальності.

Якщо для деякого опорного плану $X^* = x_{ij}^*$ існують числа (потенціали) U_i та V_j для яких виконуються умови:

для базисних клітин:

$$x_{ij} \geq 0, U_i + V_j = C_{ij};$$

для небазисних клітин:

$$x_{ij} = 0, U_i + V_j \leq C_{ij}.$$

для всіх $i=(1,2,...m)$ та $j=(1,2,...n)$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Знайдемо оптимальний план методом потенціалів, маючи не вироджений опорний план, побудований за діагональним методом.

	a_i				U_i
2	80	20			$a_1=100$
8		–	+		$a_2=200$
		120	80		$U_2=-1$
5		+	–		$a_3=100$
			20	80	$U_3=0$
				400	
b_j	$b_1=80$	$b_2=140$	$b_3=100$	$b_4=80$	400
V_j	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=4$	$V_4=5$	

Розглянемо умову (5), згідно з якою позначимо рядки (пункти виробництва) через U_1, U_2, U_3 ; а колонки (пункти споживання) через V_1, V_2, V_3, V_4 .

Сукупність чисел U_i та V_j називають системою потенціалів і складають по заповненим клітинам, тобто

$$\underline{x} > 0$$

$$U_1 + V_1 = 2$$

$$U_1 + V_2 = 5$$

$$U_2 + V_2 = 4$$

$$U_2 + V_3 = 3$$

$$U_3 + V_3 = 4$$

$$U_3 + V_4 = 5$$

Ця система містить 6 рівнянь та 7 невідомих і є неозначеною, тобто не має єдиного розв'язку. Нехай один із потенціалів (бажано потенціал того рядка чи колонки, що містить найбільшу кількість заповнених клітин) дорівнює 0, тобто нехай $U_1=0$. Тоді, шляхом підстановки у систему (4) замість $U_1=0$, отримаємо:

$$V_1=2; V_2=5; V_3=4; V_4=5; U_2=-1, U_3=0.$$

Початкову транспортну таблицю доповнимо колонками U_i та V_j , куди і впишемо одержані потенціали. Перевіримо, чи виконується умова (потенціальності) для небазисних клітин таблиці:

$$x_{ij}=0$$

$$U_2 + V_1 = 2 + (-1) = 1 < 8$$

$$U_3 + V_1 = 0 + 2 = 2 < 5$$

$$U_3 + V_2 = 0 + 5 = 5 > 1$$

$$U_1 + V_3 = 0 + 4 = 4 = 4$$

$$U_1 + V_4 = 0 + 5 = 5 < 6$$

$$U_2 + V_4 = 5 + (-1) = 4 < 8$$

Умова потенціальності порушена у клітині ($U_3; V_2$).

Якщо такі порушення є більше ніж у одній клітині, то вибирають ту з них, для якої найбільше порушена умова потенціальності плану.

У даному випадку вона одна, що і визначить першу клітину ланцюга транспортної задачі.

Ланцюгом транспортної задачі називають послідовність клітин таблиці, яка задовольняє умови:

- Кожна пара клітин міститься або в одному рядку або в одній колонці;
- Кількість клітин має бути парною (починаючи з 4-х), тобто 4,6,8 і т.д.;
- Перша і остання клітини ланцюга транспортної задачі мають бути або в одному рядку, або в одній колонці, тобто він повинен бути замкнутим;
- Клітини ланцюга транспортної задачі по чергово позначають “+”, “-” і т.д.

Ланцюг, у якого збігається перша та остання клітини, називається **циклом**. Ланцюг, що не утворює циклу, називається **ациклічним**.

Четвертий крок розв'язку транспортної задачі – побудова ланцюгу та перехід до нового плану

Серед елементів ланцюга транспортної задачі, які позначені мінусом (-), треба вибрати найменший.

$$\lambda = \min(120; 20) = 20$$

Перехід до наступної таблиці здійснюється за правилом:

- якщо елемент таблиці не входив у ланцюг транспортної задачі, то у наступну таблицю він переноситься без змін, тобто $x = x'$
- якщо елемент таблиці входив у ланцюг транспортної задачі з позначкою плюс "+", то у наступній таблиці він буде збільшений на λ

$$x_{\oplus} = x + \lambda$$

- якщо елемент таблиці входив у ланцюг транспортної задачі із позначкою мінус "-", то у наступній таблиці він буде зменшений на λ .

$$x_{-} = x - \lambda$$

Отримали наступну таблицю

					a_i	U_i
2	5	—	4	6	+	
80	20				$a_1=100$	$U_1=5$
8	4		3	8		
	100		100		$a_2=200$	$U_2=4$
5	1	+	4	5	—	
	20			80	$a_3=100$	$U_3=1$
b_j					400	
	$b_1=80$	$b_2=14$	$b_3=10$	$b_4=80$	400	
	0		0			
V_j	$V_1=-3$	$V_2=0$	$V_3=-1$	$V_4=4$		

$$\hat{X}_2 = \begin{vmatrix} 80 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 100 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 80 \end{vmatrix}$$

$$Z(\hat{x}_2) = 80 * 2 + 5 * 20 + 4 * 100 + 3 * 100 + 1 * 20 + 5 * 80 = 1380 \text{ (гр.од)}$$

Тобто $Z_1 > Z_2$. Ми перейшли до другого опорного плану, що є кращим за попередній (дешевший) і ближчим до оптимального.

Перевіримо його на оптимальність згідно з умовами (4-5).

Для базисних клітин $x > 0$

$$U_1 + V_1 = 2$$

$$U_1 + V_2 = 5$$

$$U_2 + V_2 = 4$$

$$U_3 + V_3 = 1$$

$$U_2 + V_3 = 3$$

$$U_3 + V_4 = 5$$

Нехай $V_2=0$, тоді розв'яжемо систему рівнянь (7) і отримаємо відповідні значення:

$$V_1 = -3; V_3 = -1; V_4 = 4; U_2 = 4, U_3 = 1. U_1 = 5.$$

Для порожніх клітин $x = 0$

$$U_2 + V_1 = 4 - 3 = 1 < 8$$

$$U_3 + V_1 = 1 - 3 = -2 < 5$$

$$U_1 + V_3 = 5 + (-1) = 4 = 4$$

$$U_3 + V_3 = 1 + (-1) = 0 < 4$$

$$U_1 + V_4 = 5 + 4 = 9 > 6$$

$$U_2 + V_4 = 4 + 4 = 8 = 8$$

Умова потенціальності порушена у клітині ($U_1; V_4$).

Будуємо з цієї клітини ланцюг транспортної задачі.

Вибираємо $\lambda = \min(20; 80) = 20$

Переходимо до нової таблиці.

					a_i	U_i
	2	5	4	6		
	80			20	$a_1=100$	$U_1=2$
	8	4	3	8		
		100	100		$a_2=200$	$U_2=4$
	5	1	4	5		
		40		60	$a_3=100$	$U_3=1$
					400	
b_j	$b_1=80$	$b_2=14$	$b_3=10$	$b_4=80$	400	
	0	0	0			
V_j	$V_1=0$	$V_2=0$	$V_3=-1$	$V_4=4$		

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} 80 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 100 & 100 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 60 \end{vmatrix}$$

$$Z(\hat{x}_2) = 2 \cdot 80 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 60 = 1320 \text{ (зр.од)}$$

тобто $Z(x_1) > Z(x_2) > Z(x_3)$

Перевіримо на оптимальність 3-й план перевезення продукції:

$$\underline{x > 0}$$

$$U_1 + V_1 = 2$$

$$U_2 + V_2 = 4$$

$$U_3 + V_2 = 1$$

$$U_2 + V_3 = 3$$

$$U_1 + V_4 = 6$$

$$U_3 + V_4 = 5$$

Нехай $V_2 = 0$, тоді розв'язавши систему рівнянь, отримаємо такі значення:

$$V_1 = 0; V_3 = -1; V_4 = 4; U_2 = 4, U_3 = 1, U_1 = 2.$$

$$\underline{x = 0}$$

$$U_2 + V_1 = 4 + 0 = 4 < 8$$

$$U_3 + V_1 = 1 + 0 = 1 < 5$$

$$U_1 + V_2 = 2 + 0 = 2 < 5$$

$$U_1 + V_3 = 2 + (-1) = 1 < 4$$

$$U_3 + V_3 = 1 + (-1) = 0 < 4$$

$$U_2 + V_4 = 4 + 4 = 8 = 8$$

Умова потенціальності виконується для всіх небазисних клітин. Це свідчить про те, що останній план перевезень є оптимальним, і йому відповідає найменша загальна вартість перевезень, тобто

$$\hat{x}_3 = x^*; Z(x^*) = Z(x_3) = 1320 \text{ (зр.од.)}$$

Приклад 5.1. У трьох пунктах відправлення A_1, A_2, A_3 зосереджено однорідний вантаж у кількості 26, 33 і 45 т відповідно. Його потрібно перевезти у чотири пункти призначення B_1, B_2, B_3, B_4 у кількості 14, 19, 20 і 5 т відповідно. Вартість перевезення одиниці вантажу з кожного пункту

відправлення в кожний пункт призначення задана матрицею C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 15 & 19 \\ 13 & 17 & 28 & 3 \\ 5 & 20 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальний план перевезень вантажу.

Розв'язання.

1. З'ясовують тип транспортної задачі.

Загальні запаси складають $26+33+45=104$ т; загальні потреби $14+19+20+5=58$ т. Задача відкритого типу, причому запаси перевищують потреби, тому необхідно ввести фіктивного споживача, потужність якого $B_{\text{фікт}} = 104 - 58 = 46$ т.

2. Складають опорний план методом північно-західного кута (табл. 6.3). У правих верхніх кутах кожної клітини записана вартість перевезення одиниці вантажу з відповідного пункту відправлення у відповідний пункт призначення. У саму клітину записують кількість перевезеного вантажу. Якщо з деякого пункту відправлення у певний пункт призначення вантаж не перевозиться, то клітину залишають пустою.

Клітини з фіктивним споживачем (постачальником) заповнюють в останню чергу, порушення умови оптимальності у цих клітинах розглядається лише після того, як в основних клітинах порушення умови оптимальності не спостерігається.

Для наведеного прикладу першою заповнюємо верхню ліву клітину X_{11} , в яку заносимо розмір запасу A_1 або розмір потреби B_1 залежно від того, що менше. У нашому прикладі $A_1=26$, $B_1=14$. У клітину X_{11} записуємо 14. Потребу у вантажі першого споживача задоволено за рахунок першого постачальника, у якого залишається вантаж у кількості $26-14=12$ тон. У подальшій побудові опорного плану не розглядається стовпець B_1 , так як потреби цього пункту призначення задоволено.

На кожному наступному кроці розглядають перший з тих, що залишилися, пункт призначення або пункт відправлення. У нашому прикладі потреба другого пункту призначення B_2 становить 19 тон, а за рахунок першого постачальника A_1 можна завести лише 12 тон, 7 тон завозиться з другого пункту відправлення. У подальшій побудові опорного плану не розглядається рядок A_1 .

У постачальника A_2 було 33 тони, з яких 7 тон перевезено до пункту споживання B_2 , 20 тон - до пункту споживання B_3 , 1 тонна – до фіктивного пункту споживання $B_{\text{фікт}}$. Потреба фіктивного пункту споживання задовольняється за рахунок другого та третього постачальника.

Аналогічно заповнити всі клітинки таблиці з X_{11} по X_{mn} . Це заповнення має вигляд сходів по діагоналі (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{фікт}}$	
A_1	14	12	15	19	0	26

A_2	¹³	¹⁷ 7	²⁸ 20	³ 5	⁰ 1	33
A_3	⁵	²⁰	⁶	¹⁰	⁰ 45	45
Потреби	14	19	20	5	46	104

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення буде становити:

$$F_{\min} = 14 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 7 \cdot 17 + 20 \cdot 28 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 45 \cdot 0 = 826 \text{ гр. од.}$$

3. Розраховують потенціали рядків і стовпчиків (табл. 5.4).

Нехай $U_1 = 0$, тоді потенціали першого та другого стовпчиків (так як вони містять заповнені клітини у рядку A_1) будуть становити:

$$V_1 = C_{11} - U_1 = 6 - 0 = 6 \quad \text{для } B_1,$$

$$V_2 = C_{12} - U_1 = 4 - 0 = 4 \quad \text{для } B_2.$$

Потенціал другого рядка:

$$U_2 = C_{22} - V_2 = 17 - 4 = 13.$$

Потенціали для B_3 , B_4 і $B_{\text{фікт}}$:

$$V_3 = C_{23} - U_2 = 28 - 13 = 15 \quad \text{для } B_3,$$

$$V_4 = C_{24} - U_2 = 3 - 13 = -10 \quad \text{для } B_4,$$

$$V_5 = C_{25} - U_2 = 0 - 13 = -13 \quad \text{для } B_{\text{фікт}}.$$

Потенціал A_3 :

$$U_3 = C_{35} - V_5 = 0 - (-13) = 13.$$

Таблиця 5.4

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{фікт}}$		
A_1	⁶ 14	⁴ 12	¹⁵	¹⁹	⁰	26	0
A_2	¹³	¹⁷ 7	²⁸ 20	³ 5	⁰ 1	33	13
A_3	⁵	²⁰	⁶	¹⁰	⁰ 45	45	13
Потреби	14	19	20	5	46	104	
Потенціали	6	4	15	-10	-13		

4. Перевіряють складений план на оптимальність.

Для A_1B_3 сума потенціалів $U_1 + V_3 = 0 + 15 = 15$, що ≤ 15 .

Для A_1B_4 сума потенціалів $U_1 + V_4 = 0 + (-10) = -10$, що ≤ 19 .

Для A_1B_5 сума потенціалів $U_1 + V_5 = 0 + (-13) = -13$, що ≤ 0 .

Для A_2B_1 сума потенціалів $U_2 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 13 (умова оптимальності порушена).

Для A_3B_1 сума потенціалів $U_3 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 5 (умова оптимальності порушена).

Для A_3B_2 сума потенціалів $U_3 + V_2 = 13 + 4 = 17$, що ≤ 20 .

Для A_3B_3 сума потенціалів $U_3 + V_3 = 13 + 15 = 28$, що > 6 (умова оптимальності порушена).

Для A_3B_4 сума потенціалів $U_3 + V_4 = 13 + (-10) = 3$, що ≤ 10 .

Отже, даний план перевезень не є оптимальним, тому що в клітинках A_2B_1 , A_3B_1 , A_3B_3 не виконується вимога $U_i + V_j \leq C_{ij}$. У ці клітинки у нижній лівий кут записуємо перевищення вартості перевезення (таблиця 5.5). У клітину A_2B_1 число $19-13=6$, у клітину A_3B_1 число $19-5=14$, у клітину A_3B_3 число $28-6=22$. Переходять до наступного плану.

Таблиця 5.5

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Потенціали, U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{фікст}}$		
A_1	14 ⁶	12 ⁴	15	19	0	26	0
A_2	6 ¹³	7 ¹⁷	20 ²⁸	5 ³	1 ⁰	33	13
A_3	14 ⁵	20	6	10	45 ⁰	45	13
Потреби	14	19	20	5	46	104	
Потенціали, V_j	6	4	15	-10	-13		

5. Перехід до нового опорного плану.

Вибирають клітину, в якій сума потенціалів найбільш перевищує оцінку, і позначають її знаком «+» (табл. 5.5). Це клітина A_3B_3 і вона називається клітиною перерахунку.

Починаючи з клітини перерахунку будують фігуру перерахунку.

Фігура перерахунку – замкнений контур, вершини якого знаходяться в зайнятих клітинах (крім першої). Причому лінії цього контуру можуть бути строго вертикальні або горизонтальні. Деякі варіанти фігури перерахунку зображено на рис. 5.1.



Рис. 5.1. Приклади фігур перерахунку

Клітини, які увійшли до фігури перерахунку, позначають по черзі знаками “+”, “-”, “+”, “-”, ... , починаючи з клітини перерахунку.

Правила заповнення нової транспортної таблиці:

- кількість вантажу у клітинах, які не увійшли до фігури перерахунку, переносять у нову таблицю без змін;
- для клітин фігури перерахунку: кількість вантажу в клітинках зі знаком “+” збільшують, а в клітинках зі знаком “-” зменшують на одну і ту ж величину, а саме - на найменшу кількість вантажу у клітинках, позначених знаком “-”.

Виправлений таким чином план перевезень записується у відповідну таблицю (табл. 5.6) і досліджується на оптимальність, як і попередній.

Таблиця 5.6

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Потенціали, U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{внт}}$		
A_1	14 ⁶ (-)	12 ⁴ (-)	15	19	0	26	0
A_2	6 ¹³ (-)	7 ¹⁷ (-)	28	5 ³ (-)	21 ⁰ (-)	33	13
A_3	14 ⁵ (-)	20	20 ⁶ (-)	10	25 ⁰ (-)	45	13
Потреби	14	19	20	5	46	104	
Потенціали, V_j	6	4	-7	-10	-13		

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення буде становити:

$$F_{\min} = 14 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 7 \cdot 17 + 5 \cdot 3 + 21 \cdot 0 + 20 \cdot 6 + 25 \cdot 0 = 386 \text{ гр. од.}$$

Обчислимо потенціали за правилом, описаним вище, і перевіримо складений план на оптимальність. Як видно з таблиці 5.6, порушення оптимальності відбулося у клітинах A_2B_1 і A_3B_1 , причому найбільше у A_3B_1 .

Фігура перерахунку елементів нової транспортної таблиці зображена у табл. 6.6, а сама нова таблиця – табл. 5.7.

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення буде становити:

$$F_{\min} = 7 \cdot 6 + 19 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 28 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 18 \cdot 0 = 288 \text{ гр. од.}$$

У таблиці 6.7 порушення умови оптимальності спостерігається у клітинці $A_1B_{\text{фікт}}$. Виконуючи описані вище кроки переходу до нової транспортної таблиці, отримуємо таблицю 5.8, яка містить оптимальний план перевезення вантажу.

Таблиця 5.7

Фіктивний споживач показує залишки вантажу у пунктах відправлення. Так, у пункті A_1 залишилось 7 одиниць вантажу, у пункті A_2 – 28 одиниць вантажу, у пункті A_3 – 11 одиниць вантажу.

Представимо загальні етапи розв'язку транспортної задачі у вигляді схеми (рис.5.2).

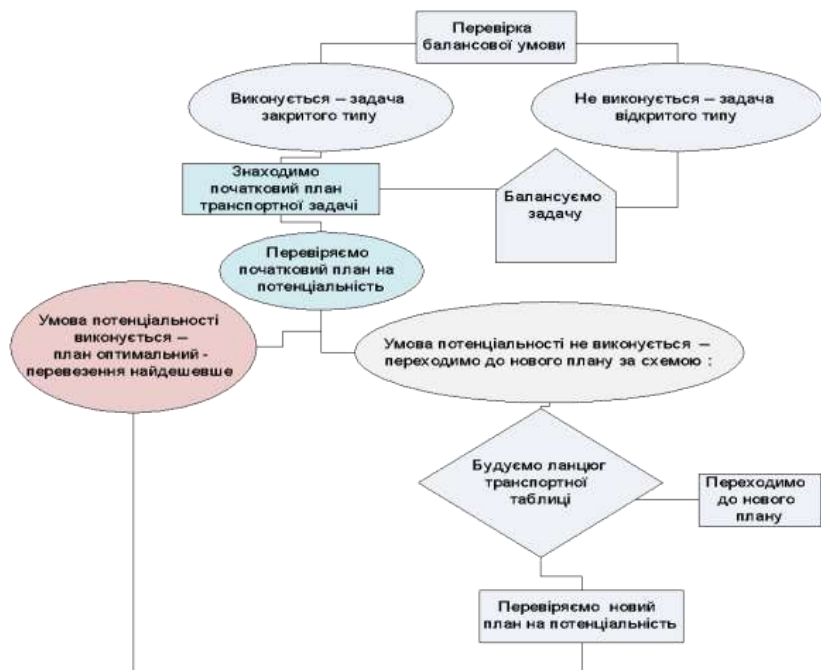


Рис. 5.2. Схема розв'язку транспортної задачі методом потенціалів

У класичній транспортній задачі допускається, що витрати на транспортування лінійно залежать від обсягів перевезень. Але на практиці ця умова порушується, тобто такі зв'язки, як правило, є нелінійними, стохастичними тощо. Особливої уваги заслуговує така постановка транспортної задачі, в якій необхідно мінімізувати тривалість виконання заданих обсягів робіт, наприклад, перевезення сировини та продукції, яка швидко псується. Цей критерій часто використовується для оптимізації військових операцій, виконання сільськогосподарських робіт (наприклад, збору врожаю) тощо.

Транспортна задача значно ускладнюється за моделювання виробничо-транспортних економічних систем, які виробляють продукцію в широкому асортименті, а для перевезення її застосовують різні види транспорту.

Практичне застосування класичної економіко-математичної моделі транспортної задачі нашоюхується на певні труднощі. Насамперед, як правило, необхідно перевозити неоднорідні продукти. Тоді транспортна задача ускладнюється. У класичній транспортній задачі, як правило, критерієм оптимальності є мінімізація транспортних витрат, тобто розв'язується задача на мінімум. Проте на практиці бувають випадки, коли необхідно знайти максимум цільової функції. Наприклад, необхідно розподілити робітників (верстати) між окремими видами робіт, щоб отримати максимальну сумарну продуктивність праці. Подібна ситуація має місце за оптимізації розміщення сільськогосподарських культур на ділянках землі різної родючості. У такому разі критерієм оптимальності є максимізація вартості виробленої (вальної) продукції.

5.5. Транспортна задача відкритого типу

Приклад задачі з додаванням фіктивного споживача

Задача з додаванням фіктивного споживача – це задача, де пропозиція продукції, що є виробленою, перевищує потреби споживачів. За допомогою так званого фіктивного споживача ми фіксуємо кількість продукції на виробництвах, яку не буде вивезено від виробників (надлишок продукції).

Розглянено даний варіант задачі на прикладі.

Підприємство «Аква» має 3 точки виробництва очищувачів води (бази виробництва) та 4 точки збуту (магазини) очищувачів води. Необхідно знайти оптимальний план перевезення продукції (грузу) за мінімальних загальних витрат на перевезення. Далі у таблиці наведено дані щодо кількості виробленої продукції (тис. ум. од) та необхідної кількості продукції для продажу на точках збуту (тис. ум. од). Вартість доставки одиниці вантажу з кожного пункту відправлення у відповідні пункти призначення задана матрицею тарифів.

	1	2	3	4	Запаси на виробництвах
1	10	30	40	20	140
2	11	12	13	14	180
3	18	17	5	6	160
Потреби точок збуту	60	70	120	180	

Формалізуємо задачу в математичний вигляд:

Змінні:

x_{11} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до першого магазину;
 x_{12} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до другого магазину;
 x_{13} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до третього магазину;
 x_{14} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до четвертого магазину;

x_{21} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до першого магазину;
 x_{22} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до другого магазину;
 x_{23} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до третього магазину;
 x_{24} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до четвертого магазину;

x_{31} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до першого магазину;
 x_{32} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до другого магазину;
 x_{33} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до третього магазину;
 x_{34} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до четвертого магазину.

Обмеження по запасах:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 140$ (для 1 бази) $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 180$ (для 2 бази) $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 160$ (для 3 бази) Обмеження по потребах:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$ (для 1-го магазину) $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$ (для 2-го магазину) $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$ (для 3-го магазину) $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 180$ (для 4-го магазину)

Цільова функція:

$Z = 10x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 20x_{14} + 11x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 14x_{24} + 18x_{31} +$

$17x_{32} + 5x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min$ Здійснюємо побудову та розв'язок задачі.

Перевіримо необхідну і достатню умову розв'язання задачі (балансову умову).

$$\sum a = 140 + 180 + 160 = 480$$

$$\sum b = 60 + 70 + 120 + 180 = 430$$

Сумарна потреба вантажу в пунктах призначення перевищує запаси вантажу на базах. Отже, модель вихідної транспортної задачі є відкритою.

Щоб отримати закриту модель, введемо додаткову (фіктивну) змінну із запасом вантажу, рівним 50 (480—430). Тарифи перевезення одиниці вантажу до фіктивної змінної (споживача) від усіх баз вважаємо - дорівнюють нулю.

Занесемо вихідні дані у таблицю.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10	30	40	20	0	140
2	11	12	13	14	0	180
3	18	17	5	6	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

1. Використовуючи метод північно-західного кута, побудуємо перший опорний план транспортної задачі.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[70]	40[10]	20	0	140
2	11	12	13[110]	14[70]	0	180
3	18	17	5	6[110]	0[50]	160
Потреби	60	70	120	180	50	

В результаті отримано перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі.

Згідно даного опорного плану 50 тис.од. продукції не буде вивезено з бази №3.

2. Підрахуємо число зайнятих клітин таблиці, їх 7, а має бути $m+n-1 = 7$. Отже, опорний план є невивірженим.

3. Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i , v_i по зайнятих клітинам таблиці, в яких $u_i + v_i = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

	$v_1=10$	$v_2=30$	$v_3=40$	$v_4=41$	$v_5=35$
$u_1=0$	10[60]	30[70]	40[10]	20	0

u2=27	11	12	13[110]	14[70]	0
u3=35	18	17	5	6[110]	0[50]

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких $u_i + v_i > c_{ij}$

$$(1;4): 0 + 41 > 20$$

$$(1;5): 0 + 35 > 0$$

$$(2;5): -27 + 35 > 0$$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1;5): 0

Для цього в перспективну клітку (1;5) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[70]	40[10][-]	20	0[+]	140
2	11	12	13[110][+]	14[70][-]	0	180
3	18	17	5	6[110][+]	0[50][-]	160
Потреби	60	70	120	180	50	

3 вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(1, 3) = 10$. Додаємо 10 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 10 з x_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[70]	40	20	0[10]	140
2	11	12	13[120]	14[60]	0	180
3	18	17	5	6[120]	0[40]	160
Потреби	60	70	120	180	50	

4. Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i , v_i , по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_i = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

	v1=10	v2=30	v3=5	v4=6	v5=0
--	-------	-------	------	------	------

u1=0	10[60]	30[70]	40	20	0[10]
u2=8	11	12	13[120]	14[60]	0
u3=0	18	17	5	6[120]	0[40]

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких $u_i + v_j > c_{ij}$

(2;1): $8 + 10 > 11$

(2;2): $8 + 30 > 12$

(2;5): $8 + 0 > 0$

(3;2): $0 + 30 > 17$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (2;2): 12

Для цього в перспективну клітку (2;2) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[70][-]	40	20	0[10][+]	140
2	11	12[+]	13[120]	14[60][-]	0	180
3	18	17	5	6[120][+]	0[40][-]	160
Потреби	60	70	120	180	50	

З вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(3, 5) = 40$. Додаємо 40 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 40 з x_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримуємо новий опорний план.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[30]	40	20	0[50]	140
2	11	12[40]	13[120]	14[20]	0	180
3	18	17	5	6[160]	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

Знову перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i, v_i по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_i = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

	$v_1=10$	$v_2=30$	$v_3=31$	$v_4=32$	$v_5=0$
$u_1=0$	10[60]	30[30]	40	20	0[50]
$u_2=18$	11	12[40]	13[120]	14[20]	0
$u_3=26$	18	17	5	6[160]	0

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких $u_i + v_i > c_{ij}$

(1;4): $0 + 32 > 20$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1;4): 20

Для цього в перспективну клітку (1;4) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[30][-]	40	20[+]	0[50]	140
2	11	12[40][+]	13[120]	14[20][-]	0	180
3	18	17	5	6[160]	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

З вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(2, 4) = 20$. Додаємо 20 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 20 з x_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[10]	40	20[20]	0[50]	140
2	11	12[60]	13[120]	14	0	180
3	18	17	5	6[160]	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

Знову перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i, v_i по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_i = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

	$v_1=10$	$v_2=30$	$v_3=31$	$v_4=20$	$v_5=0$
$u_1=0$	10[60]	30[10]	40	20[20]	0[50]
$u_2=-18$	11	12[60]	13[120]	14	0
$u_3=-14$	18	17	5	6[160]	0

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин для яких $u_i + v_i > c_{ij}$

(3;3): $-14 + 31 > 5$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (3;3): 5

Для цього в перспективну клітку (3;3) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-». Цикл наведено в таблиці.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30[10][-]	40	20[20][+]	0[50]	140
2	11	12[60][+]	13[120][-]	14	0	180
3	18	17	5[+]	6[160][-]	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

3 вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(1, 2) = 10$. Додаємо 10 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 10 з X_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

	1	2	3	4	5	Запаси
1	10[60]	30	40	20[30]	0[50]	140

2	11	12[70]	13[110]	14	0	180
3	18	17	5[10]	6[150]	0	160
Потреби	60	70	120	180	50	

Знову перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i, v_i по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_i = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

	$v_1=10$	$v_2=18$	$v_3=19$	$v_4=20$	$v_5=0$
$u_1=0$	10[60]	30	40	20[30]	0[50]
$u_2=-6$	11	12[70]	13[110]	14	0
$u_3=14$	18	17	5[10]	6[150]	0

Даний опорний план є оптимальним. Загальні витрати складуть:

$F(x) = 10*60 + 20*30 + 0*50 + 12*70 + 13*110 + 5*10 + 6*150 = 4420$
ум. грош. од.

З 1-ї бази необхідно груз перевозити до 1-го магазину (60), 4-го магазину (30), 50 тис. прод. залишитися на складі.

З 2-ї бази необхідно груз перевозити до 2-го магазину (70), до 3-го магазину (110).

З 3-ї бази необхідно груз перевозити до 3-го магазину (10), до 4-го магазину. (150).

Приклад задачі з додаванням фіктивного виробника

Задача з додаванням фіктивного виробника – це задача, де пропозиція продукції, яка вироблена, є меншою за потреби споживачів. За допомогою так званого фіктивного виробника ми фіксуємо кількість продукції споживачів, яку вони не доотримують (дефіцит продукції).

Розглянемо додавання фіктивного виробника на прикладі представленої вище задачі із зміненими даними по запасах продукції.

Підприємство «Аква» має 3 точки виробництва очищувачів води (бази виробництва) та 4 точки збуту (магазини) очищувачів води. Необхідно знайти оптимальний план перевезення продукції (грузу) за мінімальних загальних витрат на перевезення. Далі у таблиці наведено дані щодо кількості виробленої продукції (тис. ум. од) та необхідної кількості продукції для продажу на точках збуту (тис. ум. од). Вартість доставки одиниці вантажу з кожного пункту відправлення у відповідні пункти призначення задана матрицею тарифів.

	1	2	3	4	Запаси на виробництвах
--	---	---	---	---	------------------------

1	10	30	40	20	210
2	11	12	13	14	180
3	18	17	5	6	160
Потреби точок збуту	60	140	120	180	

Формалізуємо задачу в математичний вигляд:

Змінні:

x_{11} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до першого магазину;

x_{12} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до другого магазину;

x_{13} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до третього магазину;

x_{14} – обсяг вантажу, що транспортується з першого складу до четвертого магазину;

x_{21} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до першого магазину;

x_{22} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до другого магазину;

x_{23} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до третього магазину;

x_{24} – обсяг вантажу, що транспортується з другого складу до четвертого магазину;

x_{31} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до першого магазину;

x_{32} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до другого магазину;

x_{33} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до третього магазину;

x_{34} – обсяг вантажу, що транспортується з третього складу до четвертого магазину.

Обмеження по запасах:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 210$ (для 1 бази) $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 180$ (для 2 бази)
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 160$ (для 3 бази) *Обмеження по потребах:*

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$ (для 1-го магазину) $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 140$ (для 2-го магазину) $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$ (для 3-го магазину) $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 180$ (для 4-го магазину)

Цільова функція:

$$Z = 10x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 20x_{14} + 11x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 14x_{24} + 18x_{31} + 17x_{32} + 5x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min$$

Здійсноємо побудову та розв'язок задачі.

Перевіримо необхідну і достатню умову розв'язання задачі (балансову умову).

$$\sum a = 210 + 180 + 100 = 480$$

$$\sum b = 60 + 140 + 120 + 180 = 500$$

Сумарна потреба вантажу в пунктах призначення є меншою за запаси вантажу на базах. Отже, модель вихідної транспортної задачі є відкритою.

Щоб отримати закриту модель, введемо додаткову (фіктивну) базу із запасом вантажу, рівним 20 (500- 480). Тарифи перевезення одиниці вантажу з бази в усі магазини вважаємо дорівнюють нулю. Занесемо вихідні дані у таблицю.

	1	2	3	4	Запаси
1	10	30	40	20	210
2	11	12	13	14	180
3	18	17	5	6	160
4	0	0	0	0	20
Потреби	60	70	120	180	

1. Використовуючи метод північно-західного кута, побудуємо перший опорний план транспортної задачі.

	1	2	3	4	Запаси
1	10 [60]	30 [80]	40 [0]	20	210
2	11	12 [60]	13 [120]	14	180
3	18	17	5	6 [160]	160

4	0	0	0	0	20
				[20]	
Потреби	60	70	120	180	

2. В результаті отримано перший опорний план, який є допустимим, оскільки всі вантажі з баз вивезені, потреба магазинів задоволена, а план відповідає системі обмежень транспортної задачі

Цільова функція становить:

$$F(x) = 10 \cdot 60 + 30 \cdot 80 + 12 \cdot 60 + 13 \cdot 120 + 6 \cdot 160 + 0 \cdot 20 = 6240.$$

Згідно даного опорного плану 20 тис.од. продукції не буде отримано споживачем №4.

3. Підрахуємо число зайнятих клітин таблиці, їх 7, а має бути $m+n-1 = 7$. Отже, опорний план є не виродженим.

3. Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i, v_j по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_j = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 10; 0 + v_1 = 10; v_1 = 10 \\ u_1 + v_2 &= 30; 0 + v_2 = 30; v_2 = 30 \\ u_2 + v_2 &= 12; 30 + u_2 = 12; u_2 = -18 \\ u_2 + v_3 &= 13; -18 + v_3 = 13; v_3 = 31 \\ u_3 + v_4 &= 6; 0 + u_3 = 6; u_3 = 6 \\ u_3 + v_4 &= 6; 6 + v_4 = 6; v_4 = 0 \\ u_4 + v_4 &= 0; 0 + u_4 = 0; u_4 = 0 \end{aligned}$$

	$v_1=10$	$v_2=30$	$v_3=31$	$v_4=0$
$u_1=0$	10[60]	30[80]	40[0]	20
$u_2=-18$	11	12[60]	13[120]	14
$u_3=6$	18	17	5	6[160]
$u_4=0$	0	0	0	0[20]

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин, для яких $u_i + v_j > c_{ij}$

$$(3;2): 6 + 30 > 17; \Delta_{32} = 6 + 30 - 17 = 19$$

$$(3;3): 6 + 31 > 5; \Delta_{33} = 6 + 31 - 5 = 32$$

$$(4;1): 0 + 10 > 0; \Delta_{41} = 0 + 10 - 0 = 10$$

$$(4;2): 0 + 30 > 0; \Delta_{42} = 0 + 30 - 0 = 30$$

$$(4;3): 0 + 31 > 0; \Delta_{43} = 0 + 31 - 0 = 31 \max(19, 32, 10, 30, 31) = 32$$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (3; 3): 5. Для цього в перспективну клітку (3; 3) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запаси
1	10[60]	30[80]	40[0]	20	140
2	11	12[60]	13[120]	14	180
3	18	17	5[0]	6[160]	160
4	0	0	0	0[20]	20
Потреби	60	140	120	180	

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i , v_j по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_j = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 10$; $0 + v_1 = 10$; $v_1 = 10$ $u_1 + v_2 = 30$; $0 + v_2 = 30$; $v_2 = 30$ $u_2 + v_2 = 12$; $30 + u_2 = 12$; $u_2 = -18$ $u_2 + v_3 = 13$; $-18 + v_3 = 13$; $v_3 = 31$ $u_3 + v_3 = 5$; $31 + u_3 = 5$; $u_3 = -26$ $u_3 + v_4 = 6$; $-26 + v_4 = 6$; $v_4 = 32$ $u_4 + v_4 = 0$; $32 + u_4 = 0$; $u_4 = -32$

	$v_1=10$	$v_2=30$	$v_3=31$	$v_4=32$
$u_1=0$	10[60]	30[80]	40[0]	20
$u_2=-18$	11	12[60]	13[120]	14
$u_3=-26$	18	17	5[0]	6[160]
$u_4=-32$	0	0	0	0[20]

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин, для яких $u_i + v_j > c_{ij}$ (1; 4): $0 + 32 > 20$; $\Delta_{14} = 0 + 32 - 20 = 12$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1; 4): 20. Для цього в перспективну клітку (1; 4) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запаси
1	10[60]	30[80][-]	40[0]	20[+]	140
2	11	12[60][+]	13[120][-]	14	180

3	18	17	5[0][+]	6[160][-]	160
4	0	0	0	0[20]	20
Потреби	60	140	120	180	

Цикл наведено в таблиці $(1,4 \rightarrow 1,2 \rightarrow 2,2 \rightarrow 2,3 \rightarrow 3,3 \rightarrow 3,4)$. З вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(1, 2) = 80$. Додаємо 80 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 80 з x_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

	1	2	3	4	Запаси
1	10[60]	30	40[0]	20[80]	140
2	11	12[140]	13[40]	14	180
3	18	17	5[80]	6[80]	160
4	0	0	0	0[20]	20
Потреби	60	140	120	180	

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо попередні потенціали u_i, v_j по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_j = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 10; 0 + v_1 = 10; v_1 = 10$ $u_1 + v_3 = 40; 0 + v_3 = 40; v_3 = 40$ $u_2 + v_3 = 13; 40 + u_2 = 13; u_2 = -27$ $u_2 + v_2 = 12; -27 + v_2 = 12; v_2 = 39$ $u_3 + v_3 = 5; 40 + u_3 = 5; u_3 = -35$ $u_3 + v_4 = 6; -35 + v_4 = 6; v_4 = 41$ $u_4 + v_4 = 0; 41 + u_4 = 0; u_4 = -41$

	$v_1=10$	$v_2=39$	$v_3=40$	$v_4=41$
$u_1=0$	10[60]	30	40[0]	20[80]
$u_2=-27$	11	12[140]	13[40]	14
$u_3=-35$	18	17	5[80]	6[80]

$u_4 = -41$	0	0	0	0[20]
-------------	---	---	---	-------

Опорний план не є оптимальним, тому що існують оцінки вільних клітин, для яких $u_i + v_j > c_{ij}$

$$(1;2): 0 + 39 > 30; \Delta_{12} = 0 + 39 - 30 = 9$$

$$(1;4): 0 + 41 > 20; \Delta_{14} = 0 + 41 - 20 = 21 \max(9, 21) = 21$$

Вибираємо максимальну оцінку вільної клітини (1; 4): 20. Для цього в перспективну клітку (1; 4) поставимо знак «+», а в інших вершинах багатокутника чергуються знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	Запаси
1	10[60]	30	40[0][-]	20[80][+]	140
2	11	12[140]	13[40]	14	180
3	18	17	5[80][+]	6[80][-]	160
4	0	0	0	0[20]	20
Потреби	60	140	120	180	

Цикл наведено в таблиці $(1,4 \rightarrow 1,3 \rightarrow 3,3 \rightarrow 3,4)$. З вантажів x_{ij} що стоять в мінусових клітинах, вибираємо найменше, тобто $y = \min(1, 3) = 0$. Додаємо 0 до обсягів вантажів, що стоять в плюсових клітинах і віднімаємо 0 з x_{ij} , що стоять в мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

	1	2	3	4	Запаси
1	10[60]	30	40	20[80]	140
2	11	12[140]	13[40]	14	180
3	18	17	5[80]	6[80]	160
4	0	0	0	0[20]	20
Потреби	60	140	120	180	

Перевіримо оптимальність опорного плану. Знайдемо потенціали u_i, v_i по зайнятих клітинах таблиці, в яких $u_i + v_j = c_{ij}$, вважаючи, що $u_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
&u_1 + v_1 = 10; 0 + v_1 = 10; v_1 = 10 \quad u_1 + v_4 = 20; 0 + v_4 = 20; v_4 = 20 \quad u_3 + v_4 = 6; \\
&20 + u_3 = 6; u_3 = -14 \quad u_3 + v_3 = 5; -14 + v_3 = 5; v_3 = 19 \quad u_2 + v_3 = 13; 19 + u_2 = 13; u_2 \\
&= -6 \quad u_2 + v_2 = 12; -6 + v_2 = 12; v_2 = 18 \\
&u_4 + v_4 = 0; 20 + u_4 = 0; u_4 = -20
\end{aligned}$$

	$v_1=10$	$v_2=18$	$v_3=19$	$v_4=20$
$u_1=0$	10[60]	30	40	20[80]
$u_2=-6$	11	12[140]	13[40]	14
$u_3=-14$	18	17	5[80]	6[80]
$u_4=-20$	0	0	0	0[20]

Опорний план є оптимальним, так все оцінки вільних клітин задовольняють умові $u_i + v_j \leq c_{ij}$.

Загальні витрати складуть:

$$F(x) = 10 \cdot 60 + 20 \cdot 80 + 12 \cdot 140 + 13 \cdot 40 + 5 \cdot 80 + 6 \cdot 80 + 0 \cdot 20 = 5280 \quad 3$$

1-ї бази необхідно груз перевозити до 1-го магазину (60), 4-го магазину (80).

З 2-ї бази необхідно груз перевозити до 2-го магазину (140), до 3-го магазину (40).

З 3-ї бази необхідно груз перевозити до 3-го магазину (80), до 4-го магазину (80).

Недоотримає продукцію у розмірі 20 тис. од. 4-й магазин.

5.6. Транспортна задача перевезення неоднорідної продукції

На практиці в задачах логістичного характеру, що пов'язані з перевезеннями, часто доводиться враховувати додаткові умови: неможливість здійснення перевезень за окремими маршрутами; необхідність перевезень неоднорідної продукції тощо. Такі умови ускладнюють математичну постановку транспортної задачі та вимагають особливих підходів до її розв'язання.

Особливості **транспортних задач з додатковими умовами**:

1. Додаткова умова заборони перевезень від певного постачальника до певного споживача. В такому разі в оптимальному плані відповідні клітини обов'язково мають бути вільними ($x_{ij} = 0$). Розв'язуючи транспортну задачу з додатковою умовою на заборону окремих постачань, необхідно у відповідних

клітинах замінити значення вартостей перевезень одиниці продукції на деяке велике число (ставиться досить велике число M).

Оскільки розглянуті вище методи розв'язання транспортних задач уможливають організацію перевезень у такий спосіб, що мінімізується загальна вартість витрат на транспортування, то це зумовить виключення з розгляду перевезень з надто великими вартостями, що і забезпечить виконання такої додаткової умови.

2. Додаткова умова перевезення за окремими маршрутами строго визначеного обсягу продукції, тобто виконання обов'язкових поставок. В оптимальному плані відкритої транспортної задачі з такою додатковою умовою клітини відповідних фіктивно введених поставальників чи споживачів мають бути вільними.

Розв'язуючи такого типу транспортну задачу, необхідно у відповідних клітинах також збільшити значення вартостей перевезень (ставиться досить велике число M).

3. Додаткова умова необхідності перевезення від i -го поставальника j -му споживачеві не менше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: $x_{ij} \geq k_{ij}$.

Розв'язуючи транспортну задачу з такою додатковою умовою, необхідно змінити початкові умови: обсяг поставання k_{ij} відняти від обсягу запасу i -го поставальника ($a'_i = a_i - k_{ij}$) та від потреби j -го споживача ($b'_j = b_j - k_{ij}$). Знайдений оптимальний план транспортної задачі зі зміненими умовами (де використані значення a'_i, b'_j) коригується, враховуючи обмеження $x_{ij} \geq k_{ij}$.

4. Додаткова умова необхідності перевезення від i -го поставальника j -му споживачеві не більше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: $x_{ij} \leq k_{ij}$.

Для виконання такої додаткової умови необхідно в транспортну таблицю j -го споживача записати двічі. Один раз його потреби визначатимуться величиною k_{ij} , а другий раз — різницею $b_j - k_{ij} = b'_j$. Витрати на перевезення одиниці продукції в обох стовпцях повинні бути однаковими за винятком клітини на перетині i -го поставальника і j -го споживача з потребою b'_j . У цій клітині ставиться досить велике число M . В такій постановці задача розв'язується відомими методами.

5. На практиці часто потрібно визначити оптимальний план перевезень неоднорідної продукції, тобто розв'язати багатопродуктову задачу. Її математична модель має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l c_{ijk} x_{ijk};$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = \overline{a_{ik}}, \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, l};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} = \overline{b_{jk}}, \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l};$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l},$$

де k — індекс виду продукції, що необхідно перевезти.

Розв'язуючи багатопродуктову транспортну задачу, потрібно заблокувати ті клітини, які зв'язують постачальників і споживачів щодо постачань різної продукції. Таке блокування здійснюється введенням досить високих вартостей перевезень одиниці продукції (великого числа M), але слід зауважити, що наявність заблокованих клітин може призвести до неможливості розв'язання задачі. Тому в такому разі необхідно перевіряти, чи є достатня кількість незаблокованих перевезень для побудови опорного плану задачі, який повинен містити $m+n-1$ додатну змінну.

Приклад транспортної задачі відкритого типу для перевезення неоднорідної продукції Три газопереробних заводи $A1$, $A2$ та $A3$ із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20 і 15 т. газу забезпечують чотири газосховища $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, щоденна потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 та 20 т. газу. Газ постачається до газосховищ трубопроводами. Вартості перекачування 1000 т газу від заводів до сховищ (в умовних одиницях) наведені в таблиці

Завод	Вартість перекачування 1000 т газу до сховища, ум. од.			
	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	4	5	3	7
$A2$	7	6	2	5
$A3$	1	3	9	8

Сформулювати та розв'язати відповідну транспортну задачу з неодмінним виконанням таких умов:

- 1) повністю задовольнити потребу газосховища $B4$;
- 2) за недопостачання газу до сховища $B2$ згідно з договором передбачені штрафні санкції: 5 ум. од. за кожні 1000 т газу;
- 3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання газу із заводу $A1$ до сховища $B1$ тимчасово неможливе. Визначимо, до якого типу належить транспортна задача:

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 20 + 15 = 65$$

За умовою ця транспортна задача є відкритою, незбалансованою. Зведення її до закритого типу потребує введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю $a_4 = 75 - 65 = 10$ (тисяч тонн). Кількість газу, що «відправляється» фіктивним заводом до газосховищ, в оптимальному плані означатиме обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно заблокувати клітинку фіктивного постачальника A_4 та споживача B_4 , записавши в ній досить високу вартість перевезення M . Тоді можна бути впевненим, що в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника у стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т газу дорівнюватиме 5 ум. од. замість нуля.

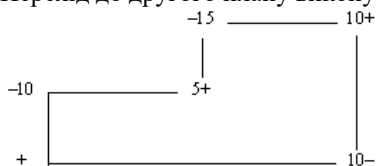
Оскільки неможливо транспортувати газ від заводу A_1 до сховища B_1 , то необхідно також заблокувати маршрут A_1B_1 . Для цього в зазначеній клітинці замість $C_{11} = 4$ запишемо величину M .

З огляду на викладене з першим планом транспортної задачі має такий вигляд (початковий опорний план побудовано методом апроксимації Фогеля):

A_i	B_j					Різниця для рядків
	$b_1 = 10$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 20$	u_i	
$a_1 = 30$	M	15 $\begin{array}{c} 5 \\ - \end{array}$	3 $\begin{array}{c} 5 \\ - \end{array}$	7 $\begin{array}{c} 10 \\ + \end{array}$	$u_1 = 0$	2 2 2
$a_2 = 20$	7	6 $\begin{array}{c} 2 \\ 20 \end{array}$	2 $\begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array}$	5 $\begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array}$	$u_2 = -1$	3 3 3
$a_3 = 15$	10 $\begin{array}{c} 1 \\ - \end{array}$	3 $\begin{array}{c} 5 \\ + \end{array}$	9	8	$u_3 = -2$	2 5
$a_4 = 10$	$\begin{array}{c} 0 \\ + \end{array}$	5	0	$\begin{array}{c} - \\ M \end{array}$	$u_4 = M - 7$	
	$M - 4$	$M - 7$	$M - 4$	10		
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$		
Різниця для стовпчиків	6	2 2 1	1 1 1	2 2 2		

Отже, перший опорний план задачі неоптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім клітинкам A_4B_1 та A_4B_3 таблиці. Оскільки обидві вони мають однакові коефіцієнти $C_{41} =$

$C_{43} = 0$, то для заповнення можна вибрати будь-яку з них, наприклад, A_4B_1 . Перехід до другого плану виконується за таким циклом:



Після цього кроку заблокована клітинка A_4B_4 стає порожньою.

Дальше розв'язування задачі подано у вигляді нижче зображених таблиць

A_i	B_j				u_i	
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$		
$A_1 = 30$	M	5	5	3	7	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	20	2	5	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	0	1	15	3	9	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	10	0	5	0		$u_4 = -3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$		

A_j	B_j				u_i	
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$		
$A_1 = 30$	M	5	5	3	7	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	0	2	5	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	0	1	3	9	8	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	10	0	5	0	M	$u_4 = -3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 6$		

З останньої таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

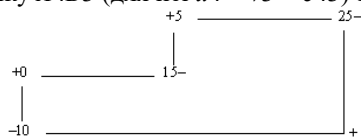
Загальні витрати складуть:

$$F(x) = 5 \times 5 + 3 \times 25 + 5 \times 20 + 3 \times 15 = 245 \text{ ум. од.}$$

Через незбалансованість цієї транспортної задачі спостерігатиметься недопостачання газу до першого газосховища в

обсязі 10000 т. Загальні витрати на транспортування за такого плану будуть найменшими і становитимуть 245 ум. од.

Альтернативний оптимальний план дістанемо, заповнивши клітинку $A4B3$ (для неї $u_4 + v_3 = c_{43}$) згідно з таким циклом:



Оптимальний план транспортної задачі:

$$x_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальні витрати складуть:

$F(x) = 5 \times 15 + 3 \times 15 + 5 \times 20 + 1 \times 10 + 3 \times 5 = 245$ ум. од. Мінімальні загальні витрати на транспортування обсягом 245 ум. од. відповідають і третьому оптимальному плану задачі, згідно з яким третє газосховище отримає на 10000 т газу менше, ніж потребує.

Існування двох альтернативних оптимальних планів розглянутої транспортної задачі розширює можливості стосовно остаточного прийняття рішення.

Завершуючи знайомство з транспортною задачею та його основними методами побудови опорного плану та перевірки на оптимальність, розглянемо ще раз етапи розв'язку транспортних задач за допомогою розгляду блок-схеми алгоритму побудови та розв'язку транспортної задачі шляхом перевірки опорного плану на оптимальність методом потенціалів, що зображена нижче (рис. 5.3).

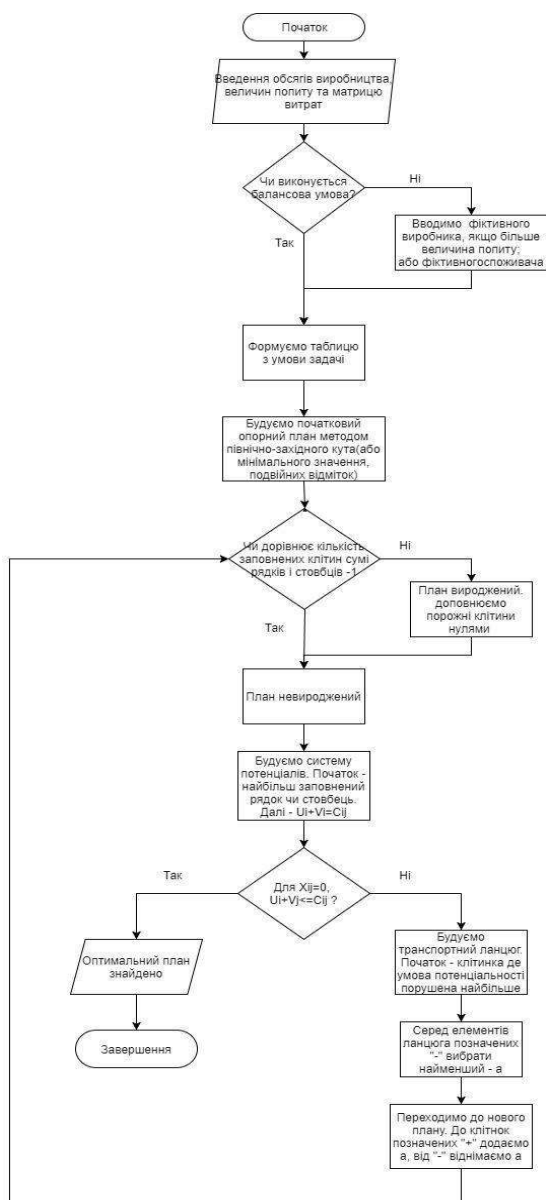


Рис. 5.3. Блок-схема алгоритму розв'язку транспортної задачі шляхом перевірки опорного плану на оптимальність методом потенціалів

5.7. Приклади розподільчих задач

Задача про призначення. Постановка задачі про призначення

Нехай маємо n видів робіт і стільки ж робітників. Кожен робітник може виконати будь-яку роботу, але з різним ступенем майстерності. Якщо на деяку роботу призначають робітника саме тієї кваліфікації, яка необхідна для її виконання, тоді вартість виконання цієї роботи буде нижча, ніж при призначенні на дану роботу робітника іншої кваліфікації. Мета – знайти оптимальний розподіл робітників по всіх роботах, що є у наявності. Тобто такий розподіл, щоб загальна вартість виконання комплексу робіт була мінімальною.

Загальна задача про призначення n робітників на n робіт наведена на рис. 5.4.

Р о б і т н и к и	Роботи					
		1	2	..	n	
	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1
	.	.	.	.	.	1
	.	.	.	.	.	1
	.	.	.	.	.	1
	n	c_{n1}	c_{n2}		c_{nn}	1
		1	1	1	1	

Рис. 5.4. Табличний вигляд задачі про призначення

Коефіцієнт c_{ij} показує вартість призначення робітника i на роботу j ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Якщо кількість робітників не дорівнює кількості робіт, то у модель вводять фіктивних робітників або фіктивні роботи.

Задача про призначення є окремим випадком транспортної задачі. Робітники відповідають пунктам відправлення, а роботи – пунктам призначення. Всі величини попиту та пропозиції дорівнюють одиниці.

Якщо ввести позначення

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо робітник } i \text{ призначений на роботу } j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases},$$

то математична модель даної задачі буде мати вигляд:

Знайти мінімум функції

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

З урахуванням специфічних особливостей задачі про призначення існують специфічні алгоритми її розв'язання, одним з яких є так званий угорський метод.

Алгоритм угорського методу

Приклад 5.1. У умовну фірму надійшло замовлення на складання проектів перебудови трьох споруд. Виконати кожен з цих проектів може один з трьох проектантів фірми, однак час виконання роботи кожним робітником буде різним. Розподілити роботи між проектантами таким чином, щоб замовлення було виконано якомога раніше.

Таблиця 5.9

	1 проект	2 проект	3 проект
1-й робітник	15 діб	10 діб	9 діб
2-й робітник	9 діб	15 діб	10 діб
3-й робітник	10 діб	12 діб	8 діб

Розв'яжемо задачу угорським методом.

Розв'язання.

1. У кожному рядку знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів рядка.

	1 проект	2 проект	3 проект	min
1-й робітник	15	10	9	9
2-й робітник	9	15	10	9
3-й робітник	10	12	8	8

	1 проект	2 проект	3 проект
1-й робітник	6	1	0

2-й робітник	0	6	1
3-й робітник	2	4	0

2. В отриманій матриці у кожному стовпчику знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів відповідних стовпчиків.

	1 проект	2 проект	3 проект
1-й робітник	6	4	0
2-й робітник	0	6	1
3-й робітник	2	4	0
<i>Min</i>	0	1	0

	1 проект	2 проект	3 проект
1-й робітник	6	<u>0</u>	0
2-й робітник	<u>0</u>	5	1
3-й робітник	2	3	<u>0</u>

В останній таблиці нульові елементи, що підкреслені, визначають оптимальний розв'язок: перший проект виконає 2-й робітник, 2-й проект – 1-й робітник, 3-й проект – 3-й робітник. Всі ці проекти виконуються в мінімально можливий термін $\max\{9, 10, 8\} = 10$ діб.

У деяких випадках нульові елементи, що отримані на першому та другому кроках алгоритму угорського методу, не дозволяють безпосередньо визначити припустимий розв'язок. У таких випадках застосовують додаткові кроки для отримання оптимального розв'язку.

Приклад 5.2. Припустимо, що у попередньому прикладі представлено чотири робітники та замовлення на виконання чотирьох проектів:

	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект
1-й робітник	1 діб	4 діб	6 діб	3 доби
2-й робітник	9 діб	7 діб	10 діб	9 діб
3-й робітник	4 діб	5 діб	11 діб	7 діб
4-й робітник	8 діб	7 діб	8 діб	5 діб

Виконання перших двох кроків алгоритму угорського методу призводить до такої таблиці:

	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект
1-й робітник	0	3	2	2
2-й робітник	2	0	0	2
3-й робітник	0	1	4	3
4-й робітник	3	2	0	0

Нульові елементи даної таблиці не дозволяють призначити кожному робітнику певний проект. Так, наприклад, якщо ми призначимо першому

виконавцю роботу 1, з подальшого розгляду виключається перший стовпчик, і тоді в рядку для третього робітника не залишаться нульових елементів. У таких випадках виконують такі *додаткові кроки*:

1. В останній таблиці проводять *мінімальну кількість* горизонтальних і вертикальних по рядках прямих з метою закреслення всіх нульових елементів.

	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект
1-й робітник	<u>0</u>	3	2	2
2-й робітник	2	<u>0</u>	<u>0</u>	2
3-й робітник	<u>0</u>	<u>1</u>	4	3
4-й робітник	3	2	<u>0</u>	<u>0</u>

2. Знаходять найменший невикреслений елемент: віднімають його від інших невикреслених елементів і додають до елементів, що знаходяться на перетині проведених на попередньому кроці прямих.

У нашому прикладі це елемент 1 (перетин 3-го робітника і 2-го проекту). Результатом описаних вище дій є таблиця:

	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект
1-й робітник	<u>0</u>	2	1	1
2-й робітник	3	0	<u>0</u>	2
3-й робітник	0	<u>0</u>	3	2
4-й робітник	4	2	0	<u>0</u>

Оптимальний розв'язок показаний підкресленими нулями. Отже, ми отримали таке розподілення робіт між працівниками (табл.5.10):

Таблиця 5.10

Оптимальне розподілення робіт між працівниками

№ проекту	виконавець
1	1
2	3
3	2
4	4

Якщо нова отримана таблиця не дозволяє побудувати припустимий розв'язок, повторюють кроки додаткового алгоритму.

5.8. Розв'язання транспортної задачі з використанням MICROSOFT EXCEL

Двохіндексні (транспортні) задачі ЛП вводяться і розв'язуються в Excel аналогічно одноіндексним задачам. Специфіка введення умови двухіндексної задачі ЛП полягає лише в зручності матричної задання змінних задачі і коефіцієнтів ЦФ.

Розглянемо розв'язування двоіндексної задачі, суть якої полягає в оптимальній організації транспортних перевезень штучного товару зі складів в магазини:

Початкові дані транспортної задачі

Тарифи, грн./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запаси, штук
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потреби, шт.	45	90	50	

Цільова функція і обмеження даної задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 L(X) &= 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\
 &\quad + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min; \\
 \begin{cases}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\
 \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{цїлі} \ (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).
 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Екранні форми, задання змінних, цільової функції, обмежень і граничних умов двох індексної (транспортної) задачі (5) і її розв'язування подані на рис.5.4, 5.5, 5.6 і в наступній таблиці.

Формули екранної форми задачі

Об'єкт математичної моделі	Вираз в Excel
Змінні задачі	C3:E6
Формула в цільовій комірці F15	=SUMPRODUCT(C3:E6;C12:E15)
Обмеження по рядках в комірках F3, F4, F5, F6	= SUM (C3:E3) = SUM (C4:E4) = SUM (C5:E5)

	= SUM (C6:E6)
Обмеження по стовпцях в комірках C7, D7, E7	= SUM (C3:C6) = SUM (D3:D6) = SUM (E3:E6)
Сумарні запаси і потреби в комірках H8, G9	= SUM (H3:H6) = SUM (C9:E9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			ЗМІННІ			ОБМЕЖЕННЯ				
2			xi1	xi2	xi3	ліва частина	знак	права частина		
3		x1j				0	=	25		
4		x2j				0	=	50		
5		x3j				0	=	35		
6		x4j				0	=	75		
7		Ліва частина	0	0	0					
8			=	=	=			БАЛАНС		
9		Права частина	45	90	50			185		
10										
11		ТАРИФИ	xi1	xi2	xi3					
12		x1j	2	9	7					
13		x2i	1	0	5	ЦФ	напрямок			

Рис. 5.4 Екранна форма транспортної задачі

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

\$F\$15



До:

☐ Максимум

☒ Мінімум

☐ Значення:

0



Змінюючи клітинки змінних:

\$C\$3:\$E\$6



Підлягає обмеженням:

\$C\$3:\$E\$6 = ціле
\$C\$7:\$E\$7 = \$C\$9:\$E\$9
\$F\$3:\$F\$6 = \$H\$3:\$H\$6

Додати

Змінити

Видалити

Скинути

Завантажити/зберегти

☒ Зробити необмежені зміни не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

За симплекс-методом



Параметри

Метод розв'язання

Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Довідка

Розв'язати

Закрити

Рис. 5.5. Обмеження і граничні умови задачі

Книга1 - Excel										
Файл	Основне	Вставлення	Розмітка сторі	Формули	Дані	Рецензування	Подання	Доклад	Кліматико...	Спільний доступ
Отримання зовнішніх даних	Новий запит	Оновити все	Сортування й фільтр	Знаряддя даних	Прогноз	Структура	Розв'язувач	Data Analysis		
Завантажити та перетворити			Підключення		Analysis					
L7										
1			ЗМІННІ			ОБМЕЖЕННЯ				
2			xi1	xi2	xi3	ліва частина	знак	права частина		
3	x1j		25	0	0	25	=	25		
4	x2j		0	50	0	50	=	50		
5	x3j		0	35	0	35	=	35		
6	x4j		20	5	50	75	=	75		
7	Ліва частина		45	90	50					
8			=	=	=			БАЛАНС		
9	Права частина		45	90	50			185		
10										
11	ТАРИФИ		xi1	xi2	xi3					
12	x1j		2	9	7					
13	x2j		1	0	5					
14	x3j		5	4	100	цФ	напрямок			
15	x4j		2	3	6	значення	545 min			
16										

Рис. 5.6. Екранна форма після отримання розв'язку задачі

Окремим випадком задач з цілочисловими змінними є задачі, в результаті розв'язування яких шукані змінні x_j можуть приймати тільки одне з двох значень: 0 або 1. Такі змінні названі на честь англійського математика Джорджа Буля, що запропонував їх називати булевими. На рис.5.7 подана екранна форма та на рис. 5.8 - розв'язок деякої двохіндексної задачі з булевими змінними.

Книга1 - Excel												
Файл	Основне	Вставлення	Розмітка сторі	Формули	Дані	Рецензування	Подання	Доклад	Клименко...	Спільний доступ		
Вставити	Шрифт	Вирівнювання	Число	Умовне форматування	Формат таблиці	Стилі клітинок	Клітинки	Редагування				
Буфер обміну	Стилі											
L12												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
1			ЗМІННІ			ОБМЕЖЕННЯ						
2			xi1	xi2	xi3	ліва частина	знак	права частина				
3		x1j				0	=	1				
4		x2j				0	=	1				
5		x3j				0	=	1				
6		Ліва частина	0	0	0							
7			=	=	=			БАЛАНС				
8		Права частина	1	1	1			3				
9												
10		ТАРИФИ	xi1	xi2	xi3							
11		x1j	2	9	7							
12		x2j	1	0	5	цф	напрямок					
13		x3j	5	4	100	значення						
14						0	min					
15												
16												
	Аркуш1											

Рис. 5.7. Форма з введеними даними для задачі з булевими змінними

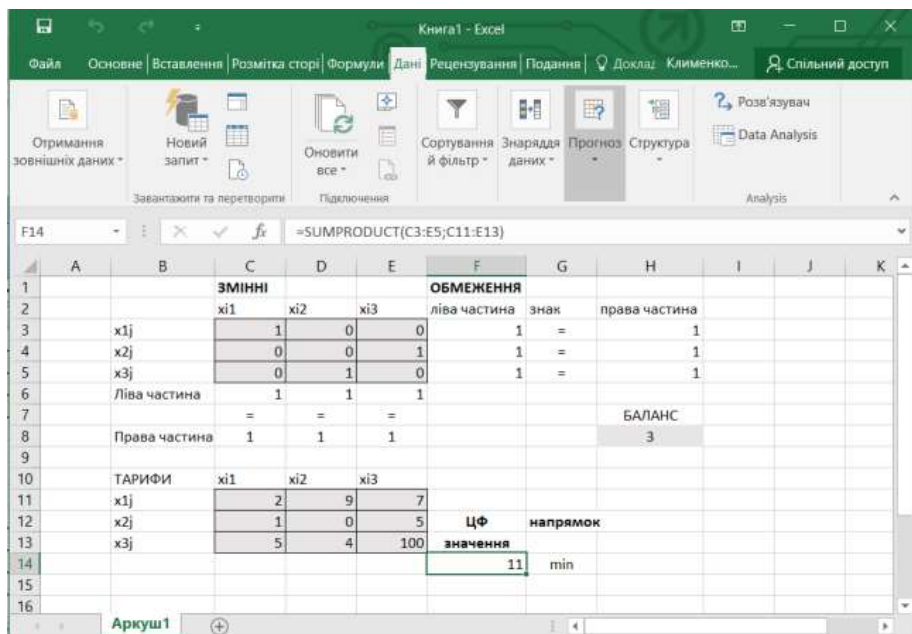


Рис.5.8. Розв'язування задачі з булевими змінними

Крім задання вимоги цілочислової при введенні умови задач з булевими змінними необхідно:

1. Для наочності сприйняття ввести в екранну форму слово "булеві" як характеристики змінних (див. рис.5.8).
2. У вікні "Розв'язувач" додати граничні умови, що мають обмеження значень змінних за їх одиничною верхньою межею (рис.5.9).

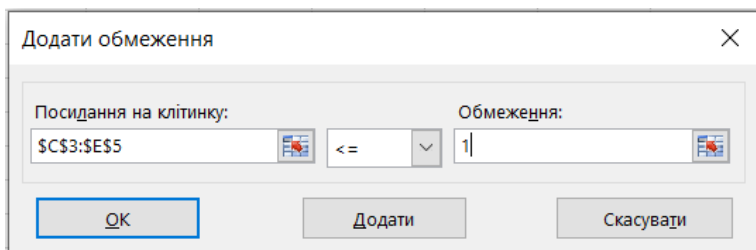


Рис. 5.9. Додавання умови одиничної верхньої межі значень змінних двоіндексної задачі з булевими змінними

Вигляд вікна “Розв’язувач” для задачі з булевими змінними, поданої на рис.5.10

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

До: ☐ Максимум ☒ Мінімум ☐ Значення:

Змінюючи клітинки змінних:

Підлягає обмеженням:

☒ Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання
 Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Рис. 5.10. Вікно “Розв’язувач” для задачі з булевими змінними

Алгоритм розв’язання транспортної задачі за допомогою табличного процесора Excel розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 5.3. Нехай маємо три постачальники з запасами вантажу 26, 33, 45 т відповідно і чотири споживача з потребами на цей вантаж у кількості 14, 29, 20, 41 т відповідно. Вартість перевезення 1 т вантажу задана таблицею 5.11

Таблиця 5.11

Вартість перевезення 1 т вантажу, грн. (C_{ij}).				
Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	4	15	19
A_2	13	17	28	3
A_3	5	20	6	10

Знайти кількість вантажу, яку повинен отримати кожен споживач від того або іншого постачальника, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною. Розв'язати задачу засобами табличного процесору Excel.

Розв'язання.

1. Створюють підготовчу форму для розв'язання задачі (рис. 5.11).

	A	B	C	D	E	F	G
1			Вхідні дані				
2							
3		B1	B2	B3	B4		
4	A1	6	4	15	19		
5	A2	13	17	28	3		
6	A3	5	20	6	10		
7							
8			Результат				
9							
10		B1	B2	B3	B4		Запаси
11	A1					=SUM(B11:E11)	26
12	A2					=SUM(B12:E12)	33
13	A3					=SUM(B13:E13)	45
14		=SUM(B11:B13)	=SUM(C11:C13)	=SUM(D11:D13)	=SUM(E11:E13)		
15	Потреби	14	29	20	41		
16							
17	Сумарна вартість перевезення	=SUMPRODUCT(B4:F6;B11:F13)					

Рис. 5.11. Підготовча форма для розв'язання транспортної задачі

Відстань між пунктами перевезень вказують у клітинках **B4:E6**. У клітинках **B11:E13** після застосування *Розв'язувача* з'являться шукані значення змінних. Клітинка **B17** буде містити вартість перевезення. У чарунки **B14:E14** та **F11:F13** вводять формули для лівих частин обмежень. Значення правих частин обмежень – у чарунках **B15:E15**, **G11:G13**. Чарунка **B17** містить формулу для розрахунку значення цільової функції.

2. Виконують пункти головного меню **Дані**→**Розв'язувач**. На екрані з'являється діалогове вікно „**Розв'язувач**”, у якому встановлюють такі параметри (рис.5.12):

а) у полі **Оптимізувати цільову функцію** вводять адресу чарунки, що містить цільову функцію (у нашому прикладі **B17**);

б) у полі **ДО**: встановлюють перемикач у положення **Мінімум** (за спрямованістю цільової функції);

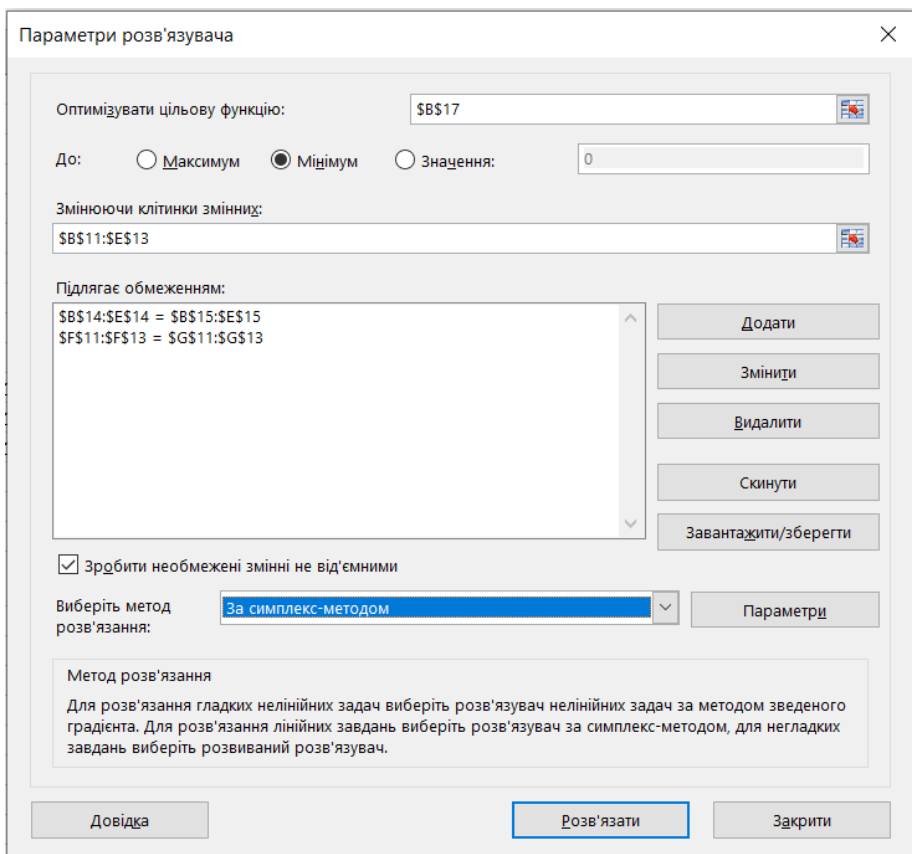


Рис. 5.12. Діалогове вікно “Розв’язувач” при розв’язанні транспортної задачі

- с) у полі **Змінюючи клітини змінних** вводять діапазон чарунок для шуканих змінних **B11:E13**;
- д) задаючи праві частини обмежень таким чином:
 - у діалоговому вікні **Розв’язувача** клацають на кнопці **Додати**. Відкривається діалогове вікно „**Додавання обмеження**” (рис. 5.13);

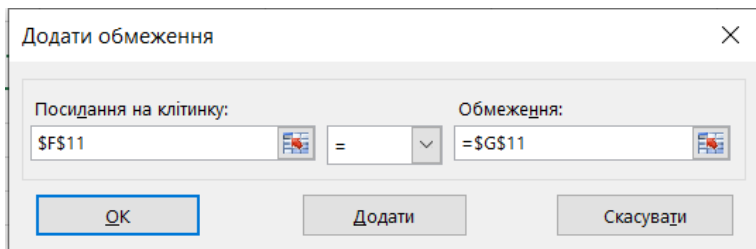


Рис. 5.13. Діалогове вікно „Додавання обмеження” при розв’язанні транспортної задачі

у полі **Посилання на клітинку** вводять адреси чарунок з формулами для обчислення лівих частин обмежень. Обмеження, що записані одне за одним і мають однаковий знак можна вводити групою (рис. 5.14).

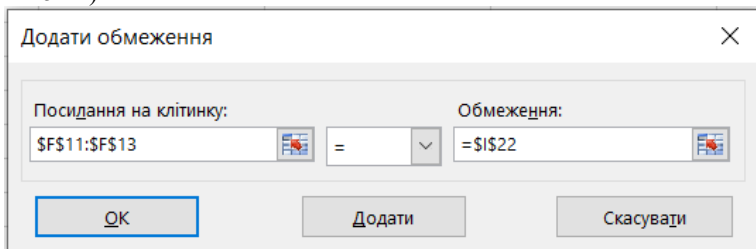


Рис. 5.14. Введення обмежень моделі транспортної задачі групою

е) встановлюють метод пошуку рішень. Для цього у діалоговому вікні „Розв’язувач” треба обрати Симплексний метод та встановити відмітку невід’ємності змінних (рис. 5.15), Після встановлення необхідних параметрів клацають на кнопці **ОК** і потрапляють знов у вікно „Розв’язувач”.

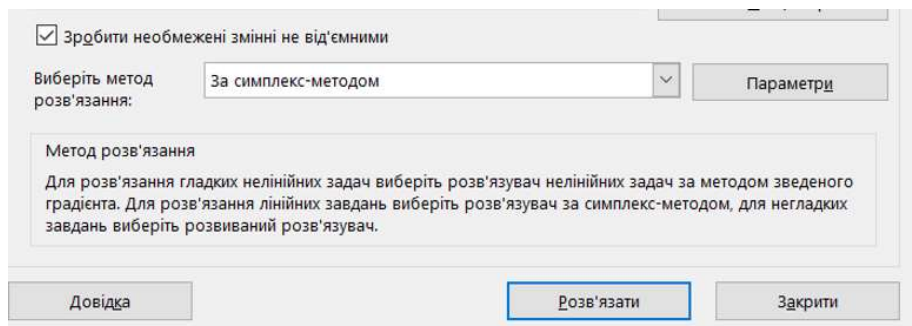


Рис. 5.15. Діалогове вікно Вибір методу розв’язку

f) клацають на кнопки **Розв'язати** діалогового вікна після чого на екрані з'являється вікно «Результати розв'язувача» (рис. 5.16).

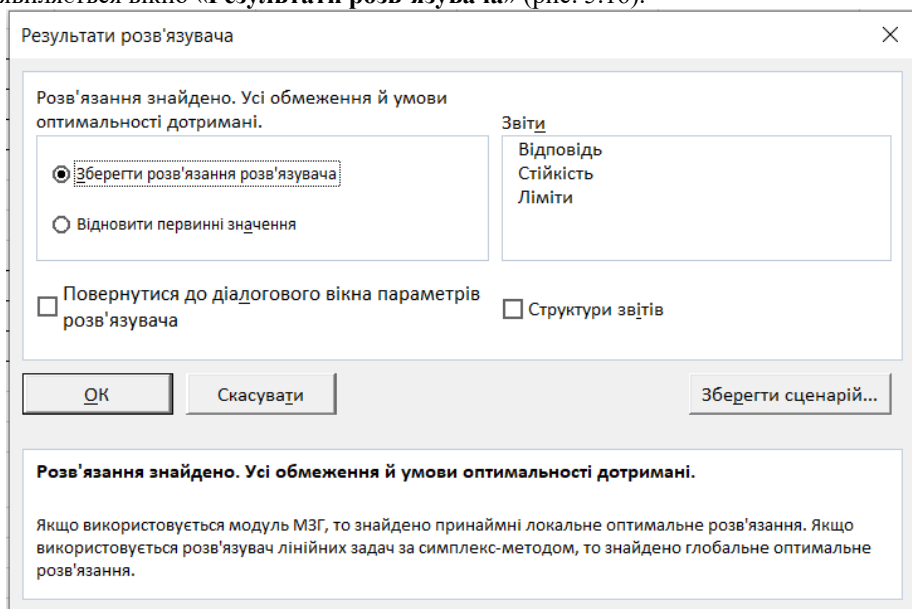


Рис. 5.16. Діалогове вікно Результати «Розв'язувача»

Можна зберегти знайдений розв'язок, перейти до розв'язування іншої задачі.

3. Описують (тлумачать) отримані результати (рис. 5.17), які знаходяться у чарунках **B11:E13** і **B17**.

	A	B	C	D	E	F	G
1			Вхідні дані				
2							
3		B1	B2	B3	B4		
4	A1	6	4	15	19		
5	A2	13	17	28	3		
6	A3	5	20	6	10		
7							
8			Результат				
9							
10		B1	B2	B3	B4		Запаси
11	A1	0	26	0	0	26	26
12	A2	0	0	0	33	33	33
13	A3	14	3	20	8	45	45
14		14	29	20	41		
15	Потреби	14	29	20	41		
16							
	Сумарна вартість						
17		533					

Рис. 5.17. Результати розв'язання транспортної задачі

У ході розв'язання транспортної задачі отримано такі результати:

- 1) мінімальна вартість перевезення вантажу становить 533 гр. од.

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \\ 14 & 3 & 20 & 8 \end{pmatrix}$$

- 2) матриця перевезень. Це означає, що 26 одиниць вантажу перевозять від першого постачальника до другого споживача, 33 одиниці - від другого постачальника до четвертого споживача, від третього постачальника перевозять 14, 3, 20, 8 одиниць вантажу відповідно у перший, другий, третій та четвертий пункти призначення.

Запитання та завдання для самостійної роботи

- 1.** Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів за варіантом.

У пунктах відправлення $A_1, A_2, A_3, \dots$ знаходиться однорідний вантаж у кількості $a_1, a_2, a_3, \dots$ відповідно, який необхідно перевезти до пунктів призначення $B_1, B_2, B_3, \dots$, потреба кожного з яких становить $b_1, b_2, b_3, \dots$. Відома відстань між пунктами перевезень.

Визначити такий план перевезень, при якому загальна кількість тонокілометрів буде мінімальною.

Вхідні дані згідно варіанту наведено у таблиці 5.12.

Таблиця 5.12

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
1	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1=6$ $a_2=8$ $a_3=5$ $a_4=6$	$b_1=9$ $b_2=8$ $b_3=4$
2	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1=60$ $a_2=85$ $a_3=52$ $a_4=66$	$b_1=92$ $b_2=81$ $b_3=43$
3	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 14 & 15 & 39 \\ 25 & 12 & 31 \\ 27 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1=26$ $a_2=28$ $a_3=25$ $a_4=26$	$b_1=29$ $b_2=28$ $b_3=34$
4	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 33 & 12 \\ 35 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1=56$ $a_2=58$ $a_3=55$ $a_4=56$	$b_1=69$ $b_2=68$ $b_3=44$
5	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 33 \end{vmatrix}$	$a_1=16$ $a_2=18$ $a_3=15$ $a_4=16$	$b_1=19$ $b_2=18$ $b_3=14$
6	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 22 \\ 16 & 20 & 11 \\ 18 & 16 & 33 \end{vmatrix}$	$a_1=50$ $a_2=85$ $a_3=52$	$b_1=62$ $b_2=81$ $b_3=43$
7	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 10 & 24 \\ 16 & 31 & 11 \\ 14 & 16 & 19 \end{vmatrix}$	$a_1=45$ $a_2=43$ $a_3=42$	$b_1=42$ $b_2=40$ $b_3=44$
8	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 22 \\ 32 & 16 & 11 \\ 19 & 23 & 17 \end{vmatrix}$	$a_1=15$ $a_2=18$ $a_3=15$	$b_1=20$ $b_2=18$ $b_3=10$
9	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 18 & 24 \\ 25 & 11 & 25 \\ 19 & 16 & 29 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=22$	$b_1=32$ $b_2=20$ $b_3=24$
10	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 25 & 23 & 25 \\ 29 & 16 & 19 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=31$ $a_3=27$	$b_1=33$ $b_2=20$ $b_3=34$

Продовження таблиці 5.12

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
11	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=32$	$b_1=32$ $b_2=20$ $b_3=24$ $b_4=14$
12	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}$	$a_1=55$ $a_2=63$ $a_3=72$	$b_1=32$ $b_2=60$ $b_3=54$ $b_4=54$
13	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$	$a_1=15$ $a_2=13$ $a_3=12$	$b_1=12$ $b_2=10$ $b_3=14$ $b_4=54$
14	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 13 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=33$	$b_1=12$ $b_2=10$ $b_3=24$ $b_4=24$
15	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$a_1=53$ $a_2=40$ $a_3=35$	$b_1=33$ $b_2=30$ $b_3=31$ $b_4=34$
16	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 15 & 40 \\ 39 & 21 & 31 \\ 28 & 26 & 33 \\ 22 & 18 & 10 \end{vmatrix}$	$a_1=2$ $a_2=8$ $a_3=4$ $a_4=6$	$b_1=7$ $b_2=8$ $b_3=4$
17	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 28 \\ 45 & 22 & 31 \\ 10 & 36 & 12 \\ 33 & 18 & 10 \end{vmatrix}$	$a_1=16$ $a_2=11$ $a_3=15$ $a_4=16$	$b_1=19$ $b_2=18$ $b_3=24$
18	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 36 & 24 & 31 \\ 28 & 36 & 12 \\ 33 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=7$ $a_2=8$ $a_3=3$ $a_4=6$	$b_1=8$ $b_2=8$ $b_3=7$
19	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 39 \\ 33 & 20 & 31 \\ 28 & 19 & 12 \\ 22 & 18 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=60$ $a_2=85$ $a_3=52$ $a_4=66$	$b_1=22$ $b_2=21$ $b_3=33$
20	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 32 \\ 31 & 25 & 18 \\ 28 & 10 & 32 \\ 22 & 19 & 12 \end{vmatrix}$	$a_1=10$ $a_2=15$ $a_3=12$	$b_1=12$ $b_2=31$ $b_3=33$

		$a_4=6$	
21	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 31 & 17 & 24 \\ 16 & 28 & 16 \\ 14 & 16 & 29 \end{vmatrix}$	$a_1=46$ $a_2=33$ $a_3=22$	$B_1=55$ $B_2=22$ $B_3=24$
22	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 17 \\ 22 & 20 & 14 \\ 32 & 16 & 21 \end{vmatrix}$	$a_1=5$ $a_2=8$ $a_3=5$	$B_1=6$ $B_2=8$ $B_3=4$
23	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 24 & 10 \\ 16 & 27 & 28 \\ 24 & 16 & 19 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=22$	$B_1=32$ $B_2=20$ $B_3=24$
24	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 10 & 28 & 24 \\ 16 & 31 & 11 \\ 31 & 16 & 29 \end{vmatrix}$	$a_1=44$ $a_2=33$ $a_3=22$	$B_1=55$ $B_2=20$ $B_3=24$
25	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 35 & 24 & 45 \\ 33 & 47 & 28 \\ 26 & 36 & 46 \end{vmatrix}$	$a_1=15$ $a_2=13$ $a_3=12$	$B_1=12$ $B_2=10$ $B_3=14$
26	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 15 & 14 & 9 & 2 \\ 11 & 17 & 2 & 8 \\ 14 & 16 & 9 & 3 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=25$ $a_3=32$	$B_1=12$ $B_2=20$ $B_3=13$ $B_4=14$
27	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 8 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$	$a_1=5$ $a_2=3$ $a_3=7$	$B_1=3$ $B_2=6$ $B_3=4$ $B_4=5$
28	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}$	$a_1=25$ $a_2=33$ $a_3=32$	$B_1=32$ $B_2=20$ $B_3=24$ $B_4=14$
29	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 13 \end{vmatrix}$	$a_1=75$ $a_2=73$ $a_3=73$	$B_1=62$ $B_2=40$ $B_3=54$ $B_4=54$
30	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 13 \end{vmatrix}$	$a_1=5$ $a_2=3$ $a_3=9$	$B_1=2$ $B_2=1$ $B_3=4$ $B_4=6$

2. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів

Варіант 1

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 6 & 12 & 9 \\ 9 & 8 & 12 \\ 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}$
I – 120	I – 120	
II – 200	II – 245	
III – 130	III – 235	
IV – 150		

Варіант 2

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 25 & 19 & 26 \\ 23 & 24 & 23 & 20 & 28 \\ 29 & 27 & 28 & 15 & 27 \\ 25 & 20 & 17 & 19 & 29 \end{pmatrix}$
I – 160	I – 80	
II – 200	II – 140	
III – 140	III – 200	
IV – 150	IV – 80	
	V – 150	

Варіант 3

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 55 & 47 & 48 \\ 54 & 48 & 47 \\ 61 & 53 & 55 \\ 60 & 56 & 52 \end{pmatrix}$
I – 5	I – 4	
II – 4	II – 9	
III – 8	III – 10	
IV – 7		

Варіант 4

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 20 & 27 & 31 & 30 \\ 25 & 32 & 22 & 19 \\ 28 & 30 & 24 & 25 \end{pmatrix}$
I – 200	I – 160	
II – 300	II – 200	
III – 150	III – 140	
	IV – 150	

Варіант 5

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 17 & 15 & 28 & 26 \\ 15 & 18 & 13 & 22 & 24 \\ 10 & 14 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}$
I – 120	I – 120	
II – 300	II – 100	
III – 250	III – 120	
	IV – 110	
	V – 220	

Варіант 6

Постачальники	Споживачі	
I – 5	I – 9	
II – 8	II – 8	

III – 6	III – 7	$C_v = \begin{pmatrix} 49 & 44 & 37 \\ 50 & 41 & 38 \\ 51 & 40 & 61 \\ 43 & 43 & 33 \end{pmatrix}$
IV – 4		

Варіант 7

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ 9 & 5 & 2 & 8 \\ 8 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}$
I – 20	I – 15	
II – 10	II – 15	
III – 40	III – 35	
IV – 40		

Варіант 8

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 33 & 31 & 28 \\ 25 & 28 & 26 \\ 28 & 22 & 29 \\ 30 & 20 & 32 \end{pmatrix}$
I – 50	I – 70	
II – 40	II – 40	
III – 80	III – 90	
IV – 30		

Варіант 9

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 \\ 12 & 15 & 15 \\ 14 & 16 & 17 \end{pmatrix}$
I – 180	I – 180	
II – 200	II – 220	
III – 220	III – 200	

Варіант 10

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 21 & 27 & 33 & 25 \\ 22 & 30 & 28 & 27 \\ 26 & 31 & 22 & 24 \\ 22 & 30 & 28 & 32 \\ 25 & 26 & 30 & 27 \end{pmatrix}$
I – 7	I – 4	
II – 7	II – 5	
III – 8	III – 9	
IV – 3	IV – 3	
V – 4		

Варіант 11

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 22 & 30 & 28 & 43 \\ 23 & 28 & 37 & 25 \\ 41 & 29 & 32 & 26 \\ 37 & 35 & 31 & 33 \\ 33 & 25 & 40 & 45 \end{pmatrix}$
I – 40	I – 45	
II – 33	II – 37	
III – 15	III – 38	
IV – 17	IV – 43	
V – 28		

Варіант 12

Постачальники	Споживачі	
I – 20	I – 20	

II – 15	II – 25	$C_s = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 & 13 \\ 4 & 14 & 12 & 10 \\ 11 & 7 & 8 & 6 \\ 12 & 9 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
III – 33	III – 23	
IV – 30	IV – 30	

Варіант 13

Постачальники	Споживачі	$C_v = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \\ 9 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
I – 300	I – 240	
II – 150	II – 350	
III – 220	III – 380	
IV – 270		
V – 190		

Варіант 14

Постачальники	Споживачі	$C_{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 56 & 47 & 49 \\ 55 & 49 & 47 \\ 62 & 55 & 56 \\ 61 & 54 & 52 \end{pmatrix}$
I – 5	I – 3	
II – 3	II – 9	
III – 9	III – 8	
IV – 6		

Варіант 15

Постачальники	Споживачі	$C_{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 33 & 31 & 28 \\ 25 & 28 & 26 \\ 28 & 22 & 29 \\ 30 & 20 & 32 \end{pmatrix}$
I – 50	I – 70	
II – 40	II – 40	
III – 80	III – 90	
IV – 30		

Варіант 16

Постачальники	Споживачі	$C_{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 28 & 34 & 35 \\ 30 & 32 & 36 \\ 27 & 34 & 39 \\ 31 & 33 & 38 \end{pmatrix}$
I – 7	I – 3	
II – 7	II – 6	
III – 7	III – 5	
IV – 2		

Варіант 17

Постачальники	Споживачі	$C_{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 34 & 27 & 28 \\ 27 & 26 & 22 \\ 31 & 25 & 28 \\ 32 & 29 & 30 \end{pmatrix}$
I – 5	I – 9	
II – 7	II – 7	
III – 5	III – 9	
IV – 7		

Варіант 18

Постачальники	Споживачі	
I – 5	I – 5	
II – 9	II – 4	

III – 6	III – 9	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 54 & 45 & 57 \\ 55 & 48 & 61 \\ 56 & 47 & 63 \\ 49 & 44 & 52 \end{pmatrix}$
IV – 7		

Варіант 19

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 43 & 37 & 46 \\ 45 & 41 & 49 \\ 41 & 35 & 42 \\ 35 & 33 & 37 \end{pmatrix}$
I – 6	I – 4	
II – 8	II – 8	
III – 7	III – 9	
IV – 5		

Варіант 20

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 49 & 43 & 37 \\ 50 & 42 & 38 \\ 45 & 44 & 40 \\ 44 & 41 & 35 \end{pmatrix}$
I – 6	I – 4	
II – 9	II – 6	
III – 6	III – 7	
IV – 2		

Варіант 21

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 49 & 43 & 37 \\ 50 & 42 & 38 \\ 45 & 44 & 40 \\ 44 & 41 & 35 \end{pmatrix}$
I – 6	I – 4	
II – 9	II – 6	
III – 6	III – 7	
IV – 2		

Варіант 22

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 21 & 27 & 39 \\ 25 & 33 & 40 \\ 26 & 32 & 41 \\ 22 & 31 & 35 \end{pmatrix}$
I – 7	I – 6	
II – 6	II – 8	
III – 4	III – 5	
IV – 7		

Варіант 23

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 33 & 38 & 36 \\ 32 & 31 & 37 \\ 35 & 30 & 39 \end{pmatrix}$
I – 120	I – 180	
II – 160	II – 100	
III – 140	III – 140	

Варіант 24

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 17 & 15 & 28 & 26 \\ 15 & 18 & 13 & 22 & 24 \\ 10 & 14 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}$
I – 120	I – 120	
II – 300	II – 100	
III – 250	III – 120	
	IV – 110	
	V – 220	

Варіант 25

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 54 & 45 & 464 \\ 47 & 41 & 55 \\ 52 & 46 & 68 \\ 50 & 44 & 57 \end{pmatrix}$
I – 8	I – 9	
II – 7	II – 5	
III – 5	III – 7	
IV – 6		

Варіант 26

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
I – 40	I – 45	
II – 33	II – 37	
III – 15	III – 38	

Варіант 27

Постачальники	Споживачі	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 54 & 57 & 61 \\ 50 & 55 & 57 \\ 48 & 52 & 56 \\ 47 & 56 & 55 \end{pmatrix}$
I – 8	I – 7	
II – 6	II – 9	
III – 2	III – 5	
IV – 8		

Варіант 28

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 54 & 45 & 64 \\ 47 & 41 & 55 \\ 52 & 46 & 68 \\ 50 & 44 & 57 \end{pmatrix}$
I – 8	I – 9	
II – 7	II – 5	
III – 5	III – 7	
IV – 6		

Варіант 29

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 6 & 12 & 7 \\ 16 & 8 & 12 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$
I – 20	I – 120	
II – 200	II – 248	
III – 130	III – 235	
IV – 190		

Варіант 30

Постачальники	Споживачі	$C_{\psi} = \begin{pmatrix} 21 & 27 & 33 & 25 \\ 22 & 30 & 28 & 27 \\ 26 & 38 & 22 & 24 \\ 22 & 30 & 28 & 42 \\ 25 & 26 & 55 & 27 \end{pmatrix}$
I – 7	I – 4	
II – 6	II – 4	
III – 8	III – 9	
IV – 9	IV – 1	
V – 4		

3. Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі за допомогою «Розв'язувач», якщо відомі вектор запасу вантажу (пункти виробництва) $(a_1, a_2, \dots, a_m)$; вектор потреб (пункти споживання) $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ та матриця витрат на перевезення вантажу c_{ij} :

1.

$$a=(50;70;40;20);$$

$$b=(40;40;100)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

2.

$$a=(110;120;80;50;70)$$

$$b=(170;110;150)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3.

$$a=(60;30);$$

$$b=(15;15;13;17;12;18)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 2 & 12 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4.

$$a=(85;112;78;120)$$

$$b=(75;130;65;65;60)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 15 & 6 & 5 \\ 9 & 2 & 7 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

5.

$$a=(40;50;30);$$

$$b=(20;40;40;20)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 15 & 4 & 2 \\ 11 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

6.

$$a=(45;60;20)$$

$$b=(30;20;35;40)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7.

$$a=(90;70;50);$$

$$b=(80;60;40;30)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8.

$$a=(100;150;80)$$

$$b=(80;140;110)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

9.

$$a=(70;90;50);$$

$$b=(30;95;25;60)$$

10.

$$a=(46;44;60)$$

$$b=(40;35;30;45)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

11.

$$a=(95;160;105;135;125);$$

$$b=(195;125;125;175)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

13.

$$a=(50;20;30;50);$$

$$b=(30;10;20;50;40)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

15.

$$a=(150;120;130;100);$$

$$b=(130;90;140;140)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

17.

$$a=(37;56;33);$$

$$b=(42;26;33;25)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

19.

$$a=(70;65;70;55);$$

$$b=(65;45;60;44;46)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

12.

$$a=(30;30;40)$$

$$b=(20;26;40;14)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

14.

$$a=(150;75;75;50)$$

$$b=(70;30;60;120;70)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

16.

$$a=(40;20;50)$$

$$b=(25;35;20;30)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

18.

$$a=(65;55;50)$$

$$b=(40;45;55;30)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

20.

$$a=(80;70;90;60)$$

$$b=(50;70;100;80)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

21.

$$a=(30;50;50);$$

$$b=(10;50;40;30)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 11 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

23.

$$a=(50;20;30;100);$$

$$b=(30;90;40;40)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 7 & 10 \\ 7 & 6 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

22.

$$a=(45;65;25)$$

$$b=(30;35;30;40)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

24.

$$a=(140;120;150)$$

$$b=(125;35;120;130)$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Розв'язати запропоновану задачу угорським методом.

Наведена матриця витрат виконання 7 робітниками певних робіт. Розподілити роботи між працівниками таким чином, щоб сумарні витрати на виконання робіт були мінімальними.

Варіант 1

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
Р	1	3	4	2	8	1	7	3
о	2	2	3	13	9	1	6	2
бі	3	12	4	12	5	3	1	4
т	4	5	6	1	7	11	8	6
н	5	11	4	10	10	5	13	7
и	6	9	6	11	12	7	1	2
к	7	2	4	8	5	9	3	10
и								

Варіант 2

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
Ро	1	6	2	15	2	4	9	5
бі	2	12	11	1	13	8	11	13
т	3	3	2	12	9	10	14	1
ни	4	7	1	3	4	5	6	8
ки	5	8	9	14	3	11	18	12
	6	1	7	5	6	15	16	2
	7	13	10	4	7	10	16	17

Варіант 3

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
Р	1	5	17	5	12	11	6	4
о	2	10	9	6	10	12	16	4

Варіант 4

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
Р	1	21	7	2	12	15	2	17
о	2	23	15	24	20	12	5	11

<i>бі</i>	<i>3</i>	9	3	2	8	13	14	8
<i>т</i>	<i>4</i>	13	1	7	11	7	18	19
<i>н</i>	<i>5</i>	1	7	12	8	3	1	5
<i>и</i>	<i>6</i>	3	11	13	9	14	20	21
<i>к</i>	<i>7</i>	10	2	6	6	15	15	22
<i>и</i>								

<i>бі</i>	<i>3</i>	17	24	4	17	2	22	15
<i>т</i>	<i>4</i>	19	7	8	1	13	14	4
<i>н</i>	<i>5</i>	15	6	6	14	19	3	16
<i>и</i>	<i>6</i>	23	6	5	19	15	11	19
<i>к</i>	<i>7</i>	16	18	22	22	1	1	7
<i>и</i>								

Варіант 5

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	2	4	5	10	4	6	8
<i>о</i>	<i>2</i>	3	6	4	13	6	7	9
<i>бі</i>	<i>3</i>	4	7	10	5	10	4	5
<i>т</i>	<i>4</i>	6	5	12	4	7	5	4
<i>н</i>	<i>5</i>	7	4	13	6	6	7	5
<i>ик</i>	<i>6</i>	10	8	5	2	8	9	10
<i>и</i>	<i>7</i>	11	9	4	8	4	5	4

Варіант 6

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	7	9	4	6	4	12	3
<i>о</i>	<i>2</i>	2	4	4	7	8	8	5
<i>бі</i>	<i>3</i>	4	5	6	5	12	7	3
<i>т</i>	<i>4</i>	3	6	8	4	6	6	7
<i>н</i>	<i>5</i>	5	10	9	3	8	5	4
<i>ик</i>	<i>6</i>	6	9	5	10	9	6	7
<i>и</i>	<i>7</i>	7	4	3	6	2	5	4

Варіант 7

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	6	7	8	9	10	12	5
<i>о</i>	<i>2</i>	2	3	4	8	9	16	8
<i>бі</i>	<i>3</i>	9	6	3	6	8	9	3
<i>т</i>	<i>4</i>	5	7	6	7	10	7	8
<i>н</i>	<i>5</i>	4	8	18	8	6	2	3
<i>и</i>	<i>6</i>	12	9	2	10	8	4	5
<i>к</i>	<i>7</i>	3	10	3	5	4	3	8
<i>и</i>								

Варіант 8

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	12	4	8	9	12	4	5
<i>о</i>	<i>2</i>	6	5	10	7	3	6	8
<i>бі</i>	<i>3</i>	3	10	4	12	5	6	10
<i>т</i>	<i>4</i>	11	12	16	5	7	8	12
<i>н</i>	<i>5</i>	6	7	4	6	7	2	1
<i>и</i>	<i>6</i>	12	5	7	12	9	4	5
<i>к</i>	<i>7</i>	4	6	8	4	3	6	7
<i>и</i>								

Варіант 9

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	6	3	5	4	6	7	8
<i>о</i>	<i>2</i>	5	2	4	3	8	9	10
<i>бі</i>	<i>3</i>	4	3	3	5	4	6	7
<i>т</i>	<i>4</i>	7	5	3	2	1	4	5
<i>н</i>	<i>5</i>	8	6	6	10	12	5	4
<i>ик</i>	<i>6</i>	12	7	8	7	4	8	9
<i>и</i>	<i>7</i>	4	8	9	6	7	4	3

Варіант 10

Роботи

		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>Р</i>	<i>1</i>	4	3	5	4	8	9	10
<i>о</i>	<i>2</i>	7	6	2	5	12	13	4
<i>бі</i>	<i>3</i>	6	5	1	6	7	8	9
<i>т</i>	<i>4</i>	7	4	6	10	4	7	3
<i>н</i>	<i>5</i>	4	3	10	8	5	3	2
<i>ик</i>	<i>6</i>	3	8	12	6	3	6	12
<i>и</i>	<i>7</i>	5	9	4	7	8	9	1

Варіант 11

Варіант 12

		Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	6	3	5	4	6	7	8
<i>о</i>	<i>2</i>	5	2	4	3	8	9	10
<i>бі</i>	<i>3</i>	7	4	6	10	4	7	3
<i>т</i>	<i>4</i>	4	3	10	8	5	3	2
<i>н</i>	<i>5</i>	3	8	12	6	3	6	12
<i>и</i>	<i>6</i>	12	7	8	7	4	8	9
<i>к</i>	<i>7</i>	4	8	9	6	7	4	3
<i>и</i>								

		Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	4	3	5	4	8	9	10
<i>о</i>	<i>2</i>	7	6	2	5	12	13	4
<i>бі</i>	<i>3</i>	12	7	8	7	4	8	9
<i>т</i>	<i>4</i>	4	8	9	6	7	4	3
<i>н</i>	<i>5</i>	4	3	10	8	5	3	2
<i>и</i>	<i>6</i>	3	8	12	6	3	6	12
<i>к</i>	<i>7</i>	5	9	4	7	8	9	1
<i>и</i>								

		Варіант 13 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	3	5	7	5	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	4	4	7	5	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	5	4	8	4	11	16	11
<i>т</i>	<i>4</i>	4	5	9	8	9	14	13
<i>н</i>	<i>5</i>	6	6	5	9	8	15	14
<i>ик</i>	<i>6</i>	7	4	7	5	11	12	13
<i>и</i>	<i>7</i>	3	7	6	4	10	13	15

		Варіант 14 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	3	5	7	5	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	4	4	7	5	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	5	6	5	8	9	15	11
<i>т</i>	<i>4</i>	6	7	7	6	7	13	13
<i>н</i>	<i>5</i>	6	6	5	9	8	15	14
<i>ик</i>	<i>6</i>	7	4	7	5	11	12	13
<i>и</i>	<i>7</i>	3	7	6	4	10	13	15

		Варіант 15 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	21	5	7	5	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	22	4	7	5	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	23	4	8	4	11	16	11
<i>т</i>	<i>4</i>	20	5	9	8	9	14	13
<i>н</i>	<i>5</i>	19	6	5	9	8	15	14
<i>ик</i>	<i>6</i>	17	4	7	5	11	12	13
<i>и</i>	<i>7</i>	21	7	6	4	10	13	15

		Варіант 16 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	3	6	7	5	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	4	47	7	5	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	5	68	5	8	9	15	11
<i>т</i>	<i>4</i>	6	76	7	6	7	13	13
<i>н</i>	<i>5</i>	6	69	5	9	8	15	14
<i>ик</i>	<i>6</i>	7	46	7	5	11	12	13
<i>и</i>	<i>7</i>	3	7	6	4	10	13	15

		Варіант 17 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	3	5	3	5	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	4	4	4	5	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	5	4	2	4	11	16	11
<i>т</i>	<i>4</i>	4	5	5	8	9	14	13
<i>н</i>	<i>5</i>	6	6	4	9	8	15	14
	<i>6</i>	7	4	3	5	11	12	13

		Варіант 18 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
<i>Р</i>	<i>1</i>	3	5	7	10	9	12	11
<i>о</i>	<i>2</i>	4	4	7	11	10	14	12
<i>бі</i>	<i>3</i>	5	6	5	12	9	15	11
<i>т</i>	<i>4</i>	6	7	7	13	7	13	13
<i>н</i>	<i>5</i>	6	6	5	17	8	15	14
	<i>6</i>	7	4	7	11	11	12	13

ик	7	3	7	8	4	10	13	15
и								

ик	7	3	7	6	12	10	13	15
и								

Варіант 19

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	3	5	7	5	5	12	11
о	2	4	4	7	5	4	14	12
бі	3	5	4	8	4	6	16	11
т	4	4	5	9	8	3	14	13
н	5	6	6	5	9	5	15	14
ик	6	7	4	7	5	4	12	13
и	7	3	7	6	4	6	13	15

Варіант 20

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	3	5	7	5	9	5	11
о	2	4	4	7	5	10	4	12
бі	3	5	6	5	8	9	3	11
т	4	6	7	7	6	7	4	13
н	5	6	6	5	9	8	5	14
ик	6	7	4	7	5	11	4	13
и	7	3	7	6	4	10	3	15

Варіант 21

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	3	5	7	5	9	12	7
о	2	4	4	7	5	10	14	6
бі	3	5	4	8	4	11	16	7
т	4	4	5	9	8	9	14	5
н	5	6	6	5	9	8	15	8
и	6	7	4	7	5	11	12	6
к	7	3	7	6	4	10	13	9
и								

Варіант 22

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	21	34	45	23	65	11	78
о	2	19	35	43	26	68	13	79
бі	3	34	31	76	29	61	15	78
т	4	24	32	42	31	62	12	77
н	5	27	33	37	32	66	14	75
и	6	23	33	41	39	67	16	73
к	7	26	30	40	40	70	10	74
и								

Варіант 23

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	54	34	45	23	65	11	78
о	2	45	35	43	26	68	13	79
бі	3	34	31	76	29	61	15	78
т	4	31	38	42	31	62	12	77
н	5	32	33	57	32	66	14	75
и	6	51	33	41	39	67	16	73
к	7	55	30	40	40	70	10	74
и								

Варіант 24

Роботи

		1	2	3	4	5	6	7
P	1	21	22	45	23	65	11	78
о	2	19	21	43	26	68	13	79
бі	3	34	20	76	29	61	15	78
т	4	24	25	42	31	62	12	77
н	5	27	24	37	32	66	14	75
и	6	23	23	41	39	67	16	73
к	7	26	22	40	40	70	10	74
и								

Варіант 25

Варіант 26

		Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	54	34	21	23	65	11	78
	2	45	35	23	26	68	13	79
	3	34	31	34	29	61	15	78
	4	31	38	31	31	62	12	77
	5	32	33	29	32	66	14	75
	6	51	33	28	39	67	16	73
	7	55	30	26	40	70	10	74

		Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	21	22	45	43	65	11	78
	2	19	21	43	45	68	13	79
	3	34	20	76	44	41	15	78
	4	24	25	42	43	64	12	77
	5	27	24	37	41	66	14	75
	6	23	23	41	36	67	16	73
	7	26	22	40	39	70	10	74

		Варіант 27 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	54	34	21	23	34	11	78
	2	45	35	23	26	32	13	79
	3	34	31	34	29	37	15	78
	4	31	38	31	31	34	12	77
	5	32	33	29	32	35	14	75
	6	51	33	28	39	33	16	73
	7	55	30	26	40	30	10	74

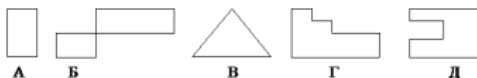
		Варіант 28 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	21	22	45	43	65	65	78
	2	19	21	43	45	68	64	79
	3	34	20	76	44	41	63	78
	4	24	25	42	43	64	68	77
	5	27	24	37	41	66	67	75
	6	23	23	41	36	67	69	73
	7	26	22	40	39	70	65	74

		Варіант 29 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	54	34	21	23	65	11	4
	2	45	35	23	26	68	13	5
	3	34	31	34	29	61	15	3
	4	31	38	31	31	62	12	4
	5	32	33	29	32	66	14	7
	6	51	33	28	39	67	16	8
	7	55	30	26	40	70	10	2

		Варіант 30 Роботи						
		1	2	3	4	5	6	7
Р о бі т н и к и	1	11	22	31	14	65	11	78
	2	12	21	32	15	68	13	79
	3	13	20	33	12	41	15	78
	4	14	25	34	16	64	12	77
	5	15	24	32	15	66	14	75
	6	16	23	31	12	67	16	73
	7	17	22	29	17	70	10	74

Тестові завдання

1. Вибрати фігуру, яка не може бути фігурою циклу перерахунку при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів:



2. Розрахувати потенціал рядка A_2 :

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{дोन}}$		
A_1	7 ⁶	19 ⁴	15 ¹⁵	19 ¹⁹	0 ¹	26	0
A_2	13 ¹³	17 ¹⁷	28 ²⁸	5 ³	28 ⁰	33	
A_3	7 ⁵	20 ²⁰	20 ⁶	10 ¹⁰	18 ⁰	45	-1
Потреби	14	19	20	5	46	104	
Потенціали	6	4	7		1		

3. Розрахувати потенціал стовпчика B_3 :

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Потенціали
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{\text{дोन}}$		
A_1	14 ⁶	12 ⁴	15 ¹⁵	19 ¹⁹	0 ⁰	26	0
A_2	13 ¹³	7 ¹⁷	20 ²⁸	5 ³	1 ⁰	33	13
A_3	7 ⁵	20 ²⁰	20 ⁶	10 ¹⁰	45 ⁰	45	
Потреби	14	19	20	5	46	104	
Потенціали	6	4					

4. Вибрати фігури, яка можуть бути фігурами циклу перерахунку при розв'язанні транспортної задачі методом потенціалів:



А



Б



В



Г



Д

5. Встановити відповідність типів транспортних задач у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	<u>Запаси</u> 28 35 46 54	<u>Потреби</u> 16 18 95	А.	Відкритого типу
2.	<u>Запаси</u> 33 5 6	<u>Потреби</u> 12 16 25		
3.	<u>Запаси</u> 28 35	<u>Потреби</u> 16 18		
			Б.	Закритого типу

	46	25 50		
4.	<u>Запаси</u> 33 30 46	<u>Потреби</u> 29 44 36		

У питаннях 6-24 вибрати правильну відповідь:

6. Умова оптимальності транспортної задачі:

1. кількість заповнених клітинок таблиці дорівнює $n+m-1$, де n – кількість стовпчиків, m – кількість рядків таблиці;
2. для вільних клітин таблиці сума потенціалів менше оцінки даної клітини;
3. для вільних клітин таблиці сума потенціалів менше або дорівнює оцінці даної клітини;
4. для заповнених клітинок таблиці сума потенціалів дорівнює оцінці даної клітини.

7. Для покращення неоптимального розв'язку транспортної задачі застосовують:

1. метод північно-західного кута;
2. метод мінімальної вартості;
3. метод потенціалів;
4. симплексний метод.

8. Яка транспортна задача називається закритою:

1. задача, в якій загальні запаси не співпадають з загальними потребами;
2. задача, в якій загальні запаси співпадають з загальними потребами;
3. задача, в якій кількість постачальників не співпадає з кількістю споживачів;
4. задача, в якій кількість постачальників співпадає з кількістю споживачів.

9. Мета розв'язання транспортної задачі лінійного програмування:

1. складання плану перевезень продукції, що дозволяє вивезти весь вантаж, цілком задовольнити потреби і який має мінімальну вартість;
2. складання плану перевезень продукції, що дозволяє вивезти весь вантаж і який має мінімальну вартість;
3. складання плану перевезень продукції, що дозволяє цілком задовольнити потреби і який має мінімальну вартість;
4. складання плану перевезень продукції, що дозволяє вивезти весь вантаж і цілком задовольнити потреби.

10. З якою метою будується первинний опорний план транспортної задачі:

1. будучи припустимим рішенням, дозволяє за певне число ітерацій отримати оптимальний розв'язок;
 2. такий план є оптимальним планом перевезення вантажів;
 3. дозволяє спростити систему обмежень транспортної задачі;
 4. дозволяє визначити оптимальне значення цільової функції.
11. З якою метою при розв'язанні транспортної задачі розраховуються потенціали постачальників і споживачів:
1. дозволяють визначити оптимальність плану транспортної задачі;
 2. використовуються для побудови первинного опорного плану;
 3. використовуються для розрахунку оптимального значення цільової функції;
 4. використовуються для розрахунку вартості перевезень вантажів.
12. Якщо загальна потреба у вантажі у пунктах призначення дорівнює загальним запасам вантажу у пунктах відправлення, то модель такої транспортної задачі називається:
1. чистою;
 2. закритою;
 3. відкритою;
 4. збалансованою.
13. Якщо загальна потреба у вантажі у пунктах призначення не дорівнює загальним запасам вантажу у пунктах відправлення, то модель такої транспортної задачі називається:
1. неповною;
 2. закритою;
 3. відкритою;
 4. незбалансованою.
14. Якщо запаси вантажу у пунктах відправлення перевищують потреби у вантажі у пунктах призначення, то при зведенні задачі до закритого типу вводять:
1. фіктивний пункт відправлення;
 2. фіктивний пункт призначення;
 3. додатковий потенціал;
 4. $m+n+1$ – й елемент.
15. Для побудови опорного плану транспортної задачі використовують метод:
1. спроб і помилок;
 2. північно – західного кута;
 3. потенціалів;
 4. Гоморі.
16. Задачу про призначення можна розглядати як окремий випадок:
1. транспортної задачі;
 2. задачі масового обслуговування;

3. задачі управління запасами;
4. задачі сіткового планування.

17. *Укажіть спеціальний метод, за допомогою якого можна розв'язати задачу про призначення:*

1. метод потенціалів;
2. угорський метод;
3. метод Гоморі;
4. будь-який з вказаних методів.

18. *Перший крок алгоритму угорського методу передбачає:*

1. знаходження мінімального елементу у кожному стовпчику;
2. знаходження мінімального елементу у кожному рядку;
3. знаходження максимального елементу у кожному стовпчику;
4. знаходження максимального елементу у кожному рядку.

19. *Перший крок алгоритму угорського методу передбачає:*

1. віднімання мінімального елементу кожного стовпчика від всіх елементів цього стовпчика
2. віднімання мінімального елементу кожного рядка від всіх елементів цього рядка
3. віднімання максимального елементу кожного стовпчика від всіх елементів цього стовпчика
4. віднімання максимального елементу кожного рядка від всіх елементів цього рядка

20. *Другий крок алгоритму угорського методу передбачає:*

1. знаходження мінімального елементу у кожному стовпчику;
2. знаходження мінімального елементу у кожному рядку;
3. знаходження максимального елементу у кожному стовпчику;
4. знаходження максимального елементу у кожному рядку.

21. *Другий крок алгоритму угорського методу передбачає:*

1. віднімання мінімального елементу кожного стовпчика від всіх елементів цього стовпчика;
2. віднімання мінімального елементу кожного рядка від всіх елементів цього рядка;
3. віднімання максимального елементу кожного стовпчика від всіх елементів цього стовпчика;
4. віднімання максимального елементу кожного рядка від всіх елементів цього рядка.

22. *Оптимальний розв'язок задачі про призначення визначають:*

1. додатні елементи рядків, отримані після застосування алгоритму угорського методу;

2. від'ємні елементи рядків, отримані після застосування алгоритму угорського методу;
3. нульові елементи рядків, отримані після застосування алгоритму угорського методу;
4. немає вірної відповіді.

23. Першим з додаткових кроків алгоритму угорського методу є:

1. проведення мінімальної кількості вертикальних і горизонтальних прямих з метою закреслення всіх нульових елементів таблиці;
2. проведення максимальної кількості вертикальних і горизонтальних прямих з метою закреслення всіх нульових елементів таблиці;
3. проведення мінімальної кількості вертикальних і горизонтальних прямих з метою закреслення всіх ненульових елементів таблиці;
4. проведення максимальної кількості вертикальних і горизонтальних прямих з метою закреслення всіх ненульових елементів таблиці.

24. Одним з додаткових кроків алгоритму угорського методу є:

1. знаходження найменшого невикресленого елемента;
2. знаходження найбільшого невикресленого елемента;
3. знаходження найменшого викресленого елемента;
4. знаходження найбільшого викресленого елемента.

25. Визначити оптимальний план розподілення робіт за наведеною таблицею:

	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект
1-й робітник	0	2	1	1
2-й робітник	3	0	0	2
3-й робітник	0	0	3	2
4-й робітник	4	2	0	0

РОЗДІЛ 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Особливості методів нелінійного програмування

У попередніх розділах було розглянуто методи розв'язування задач лінійного програмування та деякі типи задач, що певними нескладними перетвореннями зводяться до лінійних. Ці методи найкраще розроблені, легко реалізуються на ПК, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну й вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси переважно не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому адекватно їх можна описати нелінійними, стохастичними, динамічними моделями. Отже, для ефективного управління галузями і окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей та методів.

Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для застосування нелінійних методів, а це може суттєво підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формувати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції.

Однак, загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на

оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійною. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загального обсягу перевезень за маршрутом товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійній моделі були сталими величинами, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову приводить до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. Як показник ризику часто використовують дисперсію, тому для врахування обмеженості ризику потрібно вводити нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Нелінійні задачі математичного програмування не зводяться до певної стандартної форми. Тип задачі визначається типом функцій, які входять до цільової функції і обмежень. Не існує загального універсального методу розв'язування нелінійних задач, подібного до того, яким є симплексний метод для задач лінійного програмування. Ця обставина, а також специфіка окремих типів нелінійних задач зумовили значну різноманітність методів їх розв'язування.

Далі подано деякі загальні властивості нелінійних задач різних типів і основні ідейні засади, на яких ґрунтуються алгоритми їх розв'язування.

При побудові методів розв'язування задач нелінійного програмування, особливо задач з лінійними обмеженнями, широко використовується ідея зведення їх до вигляду, що так чи інакше допускає застосування симплексного або подібного до нього методу. Проте коли для лінійних задач симплексний метод дає точний розв'язок, то за допомогою згаданих методів можна дістати лише наближений розв'язок нелінійних задач. Як правило, нелінійна задача замінюється при цьому лінійною, розв'язок якої близький до розв'язку нелінійної задачі.

Для такого зведення треба, щоб задача нелінійного програмування мала певні властивості. При побудові наближених лінійних задач виникає ряд труднощів, які можуть призвести до того, що розв'язок наближеної задачі буде надто грубим і непридатним для використання.

Слід зауважити, що навіть питання про існування розв'язку задач нелінійного програмування не вирішується так просто, як для лінійних задач, а часто потребує окремого дослідження.

Поряд з цим розроблено деякі методи, що дають змогу діставати точні розв'язки нелінійних задач певних типів; проте і в цьому разі для реальних задач виникають часто труднощі обчислювального характеру.

Існує доволі широке коло задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають

набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах, людей тощо.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею цілочисельного програмування. У тому разі, коли цілочислових значень можуть набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається частково цілочисельною.

До цілочислового програмування належать також ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (булеві, або бінарні змінні). Умова цілочисельності є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції.

Слід зазначити, що у розглянутих в попередньому розділі класичній транспортній задачі та інших задачах транспортного типу (в задачах про призначення, про найкоротший шлях тощо) з цілочисловими параметрами початкових умов забезпечується цілочисловий розв'язок без застосування спеціальних методів, однак у загальному випадку вимога цілочисельності змінних значно ускладнює розв'язування задач математичного програмування.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

- 1) точні методи:
 - методи відтинання;
 - комбінаторні методи;
- 2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисельності змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисельність змінних, багатогранник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

- а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);
- б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач з булевими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є булевими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж. До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Поява вимоги цілочисельності в економічних задачах є досить очевидною і пов'язана з наявністю у моделях параметрів, які можуть набувати тільки цілих значень. Нелінійність, яка впливає з вимог цілочисельності змінних, є незначною. Тому часто цілочислове програмування розглядають як розділ математичної оптимізації лінійних моделей, в яких на деякі чи всі змінні накладено умову цілочисельності.

Зауважимо, що задачі цілочислового програмування є частковим випадком загального типу задач – дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі властиві багатьом практичним типам задач, що забезпечує дуже широке коло застосування дискретного програмування в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Задачі проектування, планування, розміщення, класифікації і управління добре формалізуються за допомогою різних моделей дискретного програмування.

6.2. Постановка задачі нелінійного програмування

У загальному вигляді задача нелінійного програмування складається з визначення максимального чи мінімального значення функції

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (6.1)$$

за умов, що її змінні задовольняють співвідношення:

$$\begin{cases} g_i(x_1; x_2; \dots; x_n) \leq b_i & (i = \overline{1, k}) \\ g_i(x_1; x_2; \dots; x_n) = b_i & (i = \overline{k+1, m}), \end{cases} \quad (6.2)$$

де f і g_i – деякі відомі функції n змінних, а b_i – задані числа.

У результаті розв'язання задачі визначають точку $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношення (6.2), причому таку, що для будь-якої іншої точки $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координати якої також задовольняють співвідношення (6.2), виконується нерівність $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Якщо f і g_i – лінійні функції, то задача (6.1)-(6.2) є задачею лінійного програмування.

6.3. Класифікація задач нелінійного програмування

Залежно від того, які функції f і g_i , розрізняють різні **класи задач математичного програмування**

Задачі *опуклого програмування* - це задачі, розв'язком яких є максимум опуклої чи мінімум увігнутої функції.

Задачі *квадратичного програмування* – задачі, в яких необхідно знайти максимум і мінімум квадратичної функції за умов, що її змінні задовольняють деяку систему лінійних обмежень (нерівностей чи рівнянь).

Задачі *дробово-лінійного програмування* – задачі, в яких цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій.

Задачі *стохастичного програмування* – задачі, в яких цільова функція або система обмежень містять випадкові величини.

Задачі *динамічного програмування* – задачі, процес розв'язання яких є багатоступінчастим.

Існують **інші класифікації** задач математичного програмування:

1. За характером взаємозв'язку між змінними: *лінійні* та *нелінійні*.
2. За типом змінних: *неперервні* (значення змінних можуть приймати будь-які значення з деякого інтервалу) та *дискретні* (*цілочислові*) (усі змінні або хоча б одна з них приймають окремі – цілочислові – значення).
3. За врахуванням фактора часу: *статичні* (незалежність елементів моделі від часу) та *динамічні* (залежність елементів моделі від часу).

4. За наявністю інформації про змінні: *задачі в умовах повної визначеності (детерміновані); задачі в умовах неповної визначеності та задачі в умовах невизначеності.*
 5. За числом критеріїв оцінки альтернатив: *прості (однокритеріальні задачі) та складні (багатокритеріальні задачі).*
- Докладну класифікацію наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1. Класифікація задач нелінійного програмування

Класифікаційна ознака	Тип задачі	Характеристика	Приклад / коментар
Вид цільової функції	Опуклі	Цільова функція та допустима область опуклі; існує глобальний оптимум	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$
	Неопуклі	Можливі локальні оптимуми; складний пошук глобального розв'язку	$f(x) = x^4 - 3x^2 \rightarrow \min$
Наявність обмежень	Безумовні	Обмеження відсутні	$\min f(x)$
	Умовні	Присутні обмеження	$g_i(x) \leq 0$
Тип обмежень	З рівностями	Обмеження задаються рівняннями	Метод множників Лагранжа
	З нерівностями	Обмеження задаються нерівностями	Умови Куна–Таккера
	Змішані	Містять рівності та нерівності	Найпоширеніші на практиці
Гладкість функцій	Гладкі	Функції диференційовні	Градентні, ньютонівські методи
	Негладкі	Містять модулі, max/min, кускові функції	Субградентні методи
Тип змінних	Неперервні	Змінні дійсні	Класичне НЛП
	Цілочисельні	Частина змінних цілочисельна	NP-важкі задачі
	Змішані (MINLP)	Неперервні + цілочисельні змінні	Економіка, логістика
Розмірність	Малорозмірні	($n \leq 10$)	Можливе аналітичне розв'язання
	Великорозмірні	($n \geq 100$)	Чисельні та евристичні методи
Методи розв'язання	Аналітичні	Точні умови оптимальності	Лагранж, ККТ
	Чисельні	Ітераційні методи	Градентний, Ньютона
	Евристичні	Пошук наближеного оптимуму	Генетичні алгоритми

6.4. Графічний метод розв'язання задач нелінійного програмування

Процес знаходження розв'язку задачі нелінійного програмування (6.1)-(6.2) графічним методом складається з таких кроків:

1. знаходять область допустимих розв'язків задачі, визначену співвідношеннями (6.2) (якщо вона порожня, то задача не має розв'язку);

2. будують гіперповерхню $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$;

3. визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня або встановлюють неможливість розв'язання задачі через необмеженість функції (6.1) зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків;

4. знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, та знаходять в ній значення функції (6.1) у цій точці.

Приклад 6.1: Знайти максимальне значення функції

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \quad (6.3)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}, \quad (6.4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6.5)$$

Розв'язання.

Цільова функція (6.3) нелінійна, тому задача (6.3)-(6.5) є задачею нелінійного програмування. Областю допустимих розв'язків даної задачі є багатокутник OABC (рис.6.1).

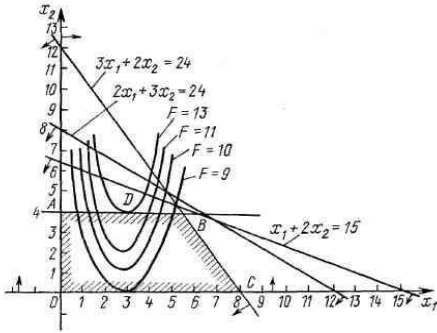


Рис. 6.1

Для знаходження розв'язку потрібно знайти таку точку багатокутника ОАВС, в якій функція (6.3) набуває максимального значення. Побудуємо лінію рівня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, де h деяка стала, і дослідимо її поведінку при різних значеннях.

При кожному значенні h отримуємо параболу, яка із збільшенням h буде вище підніматися над віссю Ox_1 . Отже, функція F набуває максимального значення в точці дотику (D) однієї з парабол з границею багатокутника ОАВС. Координати точки D можна знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad (6.6)$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Отже $F_{max} = 13$ у точці $X^* = (3; 4)$.

У задачі (6.3) - (6.5) точка максимального значення цільової функції не є вершиною багатокутника розв'язків. Тому процедура перебору вершин, яка використовувалася при розв'язанні задач лінійного програмування, не застосовна для розв'язання даної задачі.

Приклад 6.2. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \quad (6.7)$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}, \quad (6.8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6.9)$$

Розв'язання.

Областю допустимих розв'язків задачі (6.7) – (6.9) є трикутник ABC (рис. 6.2)

Нехай значення цільової функції дорівнює h . Отримаємо лінію рівня $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$. Це буде коло з центром у точці $E(3;4)$ і радіусом $\sqrt{h}$. Із збільшенням (зменшенням) числа h значення функції F відповідно збільшується (зменшується).

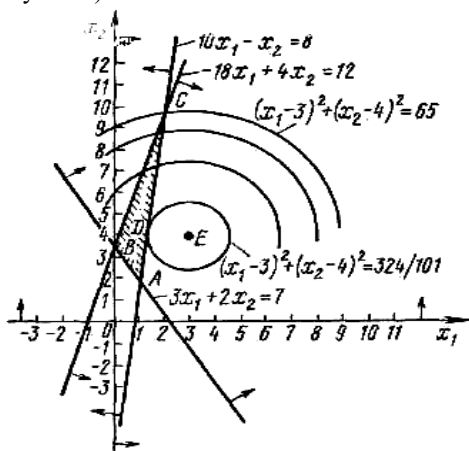


Рис. 6.2

Будуючи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення цільова функція набуває у точці D , у якій коло дотикається до області розв'язків. Для визначення координат цієї точки скористаємося рівністю

кутових коефіцієнтів прямої $10x_1 - x_2 = 8$ і дотичної до кола у точці D . Із рівняння прямої $x_2 = 10x_1 - 8$ бачимо, що її кутовий коефіцієнт у точці D дорівнює 10. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення дотичної функції x_2 від змінної x_1 у цій точці. Розглядаючи x_2 як неявну функцію змінної x_1 і диференціюючи рівняння кола, отримаємо $2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0$, звідки $x_2' = -(x_1 - 3)/(x_2 - 4)$.

Привівнявши знайдений вираз до числа 10, отримаємо рівняння для визначення координат точки D . Приєднаємо до нього рівняння прямої, на якій

лежить точка D . Отримаємо систему
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}, \quad \text{звідки}$$

$$x_1^* = 123/101; \quad x_2^* = 422/101.$$

Таким чином, $F_{\min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$.

Як бачимо з рис. 6.2 цільова функція набуває максимального значення у точці $C(2;12)$. Її координати визначені шляхом розв'язання системи рівнянь прямих, на перетині яких знаходиться точка C . Таким чином, $F_{max}=65$.

Приклад 6.3. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad (6.10)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}, \quad (6.11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6.12)$$

Розв'язання.

Областю допустимих розв'язків вихідної задачі (6.10) – (6.12) є багатокутник ABCDE (рис. 6.3), а лініями рівня – кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ з центром у точці $F(4;3)$ і радіусом $\sqrt{h}$.

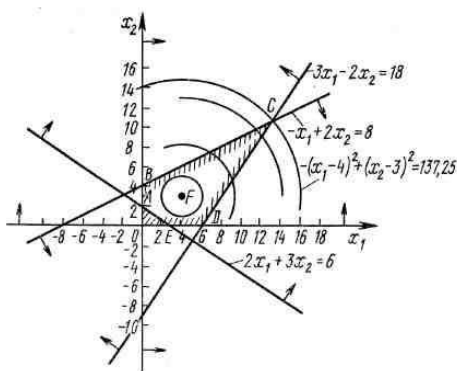


Рис. 6.3

З рис. 6.3 видно, що цільова функція набуває мінімального значення у точці $F(4;3)$, а максимального – у точці $C(2;12)$. Отже, $F_{min}=0$ і $F_{max}=137,25$.

6.5. Нелінійне програмування: множники Лагранжа

Методи нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є *градієнтні*. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи *квадратичного* та *сепарабельного* програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами зведеного градієнта, скажімо методом Якобі, та множників Лагранжа. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму Куна–Таккера.

Метод класичного аналізу знаходження потрібного екстремуму функції багатьох змінних, коли жодних обмежень на ці змінні не накладено вимагає такої умови, що для відшукування екстремальних точок функції вона повинна бути неперервною та диференційованою і мати неперервні похідні хоча б до другого порядку включно.

Необхідними умовами існування точок, в яких задана цільова функція $Z = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ може досягати екстремальних значень, є те, що в цих точках частинні похідні першого порядку функції повинні дорівнювати нулю. Самі ці точки (стаціонарні точки функції) визначаються як розв'язки системи рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, (j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

яка в загальному випадку буде нелінійною. Проте, як відомо, не кожна стаціонарна точка є екстремальною точкою функції; серед стаціонарних точок можуть бути і точки перетину (сідлові точки) функції.

Для встановлення типу стаціонарних точок слід перевірити виконання для них достатніх умов, якими визначається вид екстремуму і сідлові точки.

У стаціонарній точці функція має максимум, якщо її диференціал другого порядку в околі цієї точки є від'ємно-визначена квадратична форма:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \leq 0.$$

Якщо ж другий диференціал буде в околі стаціонарної точки додатно-означеною формою, то стаціонарна точка є точкою мінімуму.

У випадку напіввизначеності другого диференціалу в згаданому околі характер значення функції в стаціонарній точці залежить від властивостей

диференціалів, вищих за другий порядок. Якщо ж $d^2 f$ є неозначеною квадратичною формою, то функція $f(x)$ не має в розглядуваній стаціонарній

точці ні максимуму, ні мінімуму. Характер квадратичної форми може бути визначений відомими методами.

Проте, крім функції однієї змінної, згадані достатні умови мають досить складний характер і тому часто тип стаціонарної точки встановлюють, керуючись або відомими властивостями цільової функції або міркуваннями економічного чи фізичного характеру, або ж безпосередньо застосовуючи означення типів стаціонарних точок, тобто обчислюючи фактичні значення функції в точках, близьких до стаціонарної, і порівнюючи їх із значенням у стаціонарній точці. При цьому функція повинна мати лише перші похідні в області своєї означеності.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати для знаходження умовного (відносного, локального) екстремуму, тобто екстремуму заданої функції,

$$Z = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n),$$

на множині точок, які є розв'язками заданої системи m деяких, зокрема, нелінійних рівнянь такого виду

$$g_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0, (i=1, 2, 3, \dots, m),$$

в яких функції можуть містити вільні коефіцієнти, перенесені з правих частин.

Усі функції $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$; $g_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ повинні бути диференційованими. Важливою умовою є відсутність обмежень на знак змінних. Нехай $m < n$, тобто це означає, що серед загальної кількості n змінних m є неявними функціями, $k = n - m$ інших. Якби вдалося розв'язати систему рівнянь відносно залежних змінних, наприклад змінних:

$$X_{k+1} = \varphi_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$X_n = \varphi_m(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k),$$

то, замінюючи у функції мети

$$Z = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

ці змінні правими частинами виразів отримаємо функцію від k незалежних змінних $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$:

$$Z = F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = f[x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)],$$

де, $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$ і задача звелася б до задачі попереднього пункту – знаходження точок безумовного екстремуму функції при відсутності обмежень. Питання про існування функцій розв'язується теоремою про неявні функції.

Слід вказати на те, що через складність знаходження аналітичного розв'язку системи іноді задача немає розв'язку.

Ідея методу множників Лагранжа також полягає в заміні задачі

$$Z = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n),$$

$$g_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0, (i=1, 2, 3, \dots, m),$$

простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення хоч і складнішої функції, проте без обмежень. Остання називається функцією Лагранжа і має таку структуру:

$$L = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

де, λ_i ($i=1,2,3, \dots m$) – поки що неозначені числа, які і називаються множниками Лагранжа.

Слід зазначити, що метод множників Лагранжа має особливе значення для теоретичних досліджень властивостей нелінійних задач математичного програмування і тісно пов'язаний з теорією подвійності.

Припустимо, що деяка точка $X(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ є для функції f точкою умовного максимуму або мінімуму. Тоді в цій точці повинні виконуватись необхідні умови існування екстремуму,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, (j = 1, 2, 3, \dots n),$$

внаслідок чого повний диференціал розглядуваної функції дорівнюватиме нулю, тобто:

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Перші диференціали функцій $g_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0, (i=1,2,3, \dots m)$, у всіх точках $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, а отже, і в точках екстремуму, дорівнюють нулю, тобто отримаємо:

$$dg_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j = 0, (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Помноживши останні рівності на поки що невизначені множники

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

λ_i , додамо їх почленно між собою і до рівності будемо мати таке співвідношення:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0.$$

Визначимо множники λ_i , так, щоб коефіцієнти (вирази в дужках) при диференціалах залежних змінних $dx_{k+1}, \dots, dx_n$ дорівнювали нулю в розглядуваній екстремальній точці, тобто величини множників λ_i , визначимо як корені такої лінійної відносно λ_i системи з m рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j} = 0,$$

$$(j = k + 1, k + 2, k + 3, \dots, k + m = n).$$

При визначенні таким способом величинах λ_i , у лівій частині виразу залишаються лише доданки з диференціалами незалежних змінних dx_j ($j = 1, 2, 3, \dots, k$),

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0.$$

Диференціали незалежних змінних є величинами незалежними і довільними. Покладаючи по черзі один з них відмінним від нуля і прирівнюючи нулю значення всіх інших, отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial \lambda_i} \lambda_j = 0, (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Таким чином, n координат екстремальної точки цільової функції $Z = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

і m множників λ_i повинні з необхідністю задовольняти систему з $(m + n)$ рівнянь

Легко побачити, що ліва частина кожного j -го рівняння системи є частинною похідною функції Лагранжа по x_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$), а ліва частина кожного i -го рівняння – частинною похідною цієї самої функції по відповідному λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), так що всі разом вирази становлять необхідні умови існування екстремуму функції Лагранжа в розглядуваній точці.

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування, система обмежень якої складається тільки з рівнянь, відсутні умови невід'ємності змінних і функції f і g_i неперервні разом із своїми частинними похідними:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) \rightarrow \max (\min), \quad (6.13)$$

$$g_i(x_1; x_2; \dots; x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (6.14)$$

У курсі математичного аналізу задачу (6.13) – (6.14) називають класичною задачею оптимізації. Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, які називаються *множниками Лагранжа*, і складають *функцію Лагранжа*:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (6.15)$$

Далі знаходять частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_j} (j = \overline{1, n})$ та $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} (i = \overline{1, m})$ і розглядають систему $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (j = \overline{1, n}); \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (6.16)$$

з $n+m$ змінними $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Будь-який розв'язок системи рівнянь (6.16) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, в якій функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може мати екстремум. Подальші дослідження знайдених точок проводять так, як і у випадку безумовного екстремуму.

Алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа:

- складають функцію Лагранжа;
- знаходять частинні похідні від функції Лагранжа по змінних x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля;
- розв'язують систему рівнянь, знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум;
- серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції у цих точках.

Приклад 6.4. За планом виробництва продукції підприємству потрібно виготовити 180 штук виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами. При виробництві I способом витрати становлять $4x_1 + x_1^2$ грн., а при виготовленні виробів II способом вони складають $8x_2 + x_2^2$ грн. Визначити скільки виробів кожним із способів потрібно виготовити, так щоб загальні витрати підприємства на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язання.

Математична постановка задачі складається із знаходження мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min \quad (6.17)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180, \quad (6.18)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6.19)$$

Для розв'язання задачі використаємо метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (6.17) за умов (6.18), тобто без урахування умови невід'ємності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Обчислимо її частинні похідні по x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Перенесемо у праву частину перших двох рівнянь λ і, прирівнявши їх ліві частини, отримаємо:

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Приєднаємо до отриманого рівняння третє рівняння. Отримаємо систему двох рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$. Точка $X^* = (91, 89)$ є підозрілою на екстремум. Другі частинні похідні функції F додатні, отже у точці $X^* = (91, 89)$ функція f має умовний мінімум. Це означає, що якщо підприємство виготовить 91 виріб першим технологічним способом і 89 виробів другим способом то загальні витрати будуть мінімальними і складуть $4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17278$ грн.

Приклад 6.5. Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

Розв'язання.

Складемо функцію Лагранжа: $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$.

Знайдемо її частинні похідні по x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля. У результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Із першого і другого рівняння маємо $x_1 - x_2 = 0$. Приєднаємо до отриманого рівняння третє і, розв'язавши утворену систему рівнянь, знаходимо $x_1^* = \frac{5}{2}, x_2^* = \frac{5}{2}$

. Таким чином у точці $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ дана функція може мати умовний екстремум. Знайшовши другі частинні похідні, можна показати, що у цій точці функція має умовний мінімум і $F_{\min} = \frac{25}{2}$.

Приклад 6.6. Знайти найменше значення функції $Z = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2$ за умови $x + y = 6$.

Розв'язання.

$$F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2 + \lambda(6-x-y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4(x-1) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6(y-3) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 6 - x - y = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 4(x-1) = \lambda \\ 6(y-3) = \lambda \\ 6 = x + y \end{cases}$$

Далі, $x = (\lambda+4)/4$; $y = (\lambda+18)/6$. Підставивши ці значення у третє рівняння, отримаємо: $6 = (\lambda+4)/4 + (\lambda+18)/6 = (3\lambda+12+2\lambda+36)/12$, звідки $\lambda=4,8$. Отже, $x=2,2$; $y=3,8$. Точка $(2,2; 3,8)$ є підозрілою на екстремум. За допомогою других похідних встановлюємо, що знайдена точка є точкою мінімуму. Найменше значення функції з дорівнює $2 \cdot (2,2-1)^2 + 3 \cdot (3,8-3)^2 = 4,8$.

6.6. Стохастичне програмування : задача стохастичного керування

Позначатимемо S – простір станів, $\vec{x}_k \in S, k = \overline{0, N-1}$.

Можливі керування є множиною припустимих керувань $U(\vec{x}_k)$, яка у свою чергу є підмножиною простору керувань $C: \vec{u}_k = U(\vec{x}_k) \subset C, k = 0, 1, \dots, N-1$

Послідовність керуючих функцій $\bar{u}_k, k = \overline{0, N-1}$, записана у вигляді

$$\bar{\pi} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1}) \quad (6.20),$$

називається стратегією керування.

Задача оптимального керування системою (6.20) полягає в пошуку такої послідовності функцій керування $\bar{\pi}^*$, що мінімізує цільовий функціонал системи за N кроків. Ця послідовність $\bar{\pi}^*$ називається оптимальною стратегією керування.

Визначення. Якщо кількість кроків, на яких досліджується поведінка системи, є скінченною, то задача називається задачею зі скінченним горизонтом рішення. Якщо ж ми розв'язуємо задачу на нескінченному часовому інтервалі ($N \rightarrow \infty$), то горизонт рішення є нескінченним.

Задача оптимального стохастичного керування з дискретним часом впливає із детермінованої задачі, якщо система функціонує за умов випадкових збурень ω_k . У цьому випадку функція (6.20), що визначає стан системи на кожному наступному кроці, залежить від поточного стану $\bar{x}_k$, керування $\bar{u}_k$ і випадкових збурень ω_k :

$$\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, \bar{u}_k, \omega_k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (6.21)$$

Збурення ω_k є елементами деякого ймовірнісного простору (W, W_Σ) (де W – простір збурень, W_Σ – σ -алгебра підмножин з W) і має розподіл $P(d\omega_k | \bar{x}_k, u_k)$.

Розглянемо спочатку критерії якості, які найчастіше використовуються в детермінованих дискретних задачах керування, а потім перейдемо до стохастичного випадку. Якщо на кожному кроці функціонування системи задана функція $g(\bar{x}_k, \bar{u}_k)$, що визначає витрати за один крок керування, то критерій якості руху матиме вигляд

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha^i g(\bar{x}_i, \bar{u}_i) \rightarrow \inf_{\bar{u}}. \quad (6.22)$$

Величина $\alpha > 0$, що називається коефіцієнтом дисконтування, визначає внесок витрат за всі попередні кроки на кожному поточному кроці.

Найчастіше критерій (6.22) використовується в тих випадках, коли необхідно розв'язувати задачі, пов'язані з витратами деяких видів ресурсів. Саме цей функціонал ми будемо використовувати надалі.

Крім критерію (6.22) розглядаються також критерії, які мінімізують горизонт

системи N і є аналогом часу руху для неперервних систем. У цьому випадку цільовий функціонал матиме вигляд

$$J = N \rightarrow \inf_{\bar{u}}$$

Також часто в дискретних задачах керування використовуються термінальні функціонали якості

$$J = \sum_{k=1}^n (x_{k,N} - x_k^*)^2 \rightarrow \inf_{\bar{u}} \quad \text{або} \quad J = \max_k |x_{k,N} - x_k^*| \rightarrow \inf_{\bar{u}},$$

де $\bar{x}^*$ – заданий стан системи, $\bar{x}_N$ – кінцевий стан системи.

Оскільки в задачі оптимального стохастичного керування збурення $\bar{\omega} = (\omega_0, \dots, \omega_{N-1})$ випадкові, то може бути тільки апіорна інформація про них, наприклад, у вигляді функції розподілу, відомої повністю або частково. У цьому випадку якість процесу керування оцінюється за допомогою формули

$$J_M = M_{\bar{\omega}}[J(\bar{x}_N(\bar{x}_0, \bar{\pi}, \bar{\omega}))] \rightarrow \inf_{\bar{u}},$$

яка дорівнює математичному сподіванню функції J .

Задача детермінованого керування відрізняється від свого стохастичного аналога тим, що в першій відсутні неконтрольовані фактори ω_k , і еволюція системи однозначно визначається обраним керуванням $\bar{u}_k$. Отже, у задачі детермінованого керування для кожного початкового стану $\bar{x}_0$ можна заздалегідь вибрати послідовність оптимальних керувань $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1}$, застосування яких дає оптимальне значення функціонала J .

Для стохастичної системи в загальному випадку цього зробити не можна, оскільки система переходить зі стану в стан не тільки під дією керування $\bar{u}_k$; на неї на кожному кроці також впливають випадкові величини ω_k . Очевидно, що, по-перше, ці величини можуть так змінити траєкторію системи, що обране раніше за оптимальне керування $\bar{u}_k$ в момент його застосування вже таким не буде, і, по-друге, інформація, одержувана на кожному кроці про впливи ω_k , що мали місце, може бути додатково використана для поліпшення якості керування (рис. 6.4.).

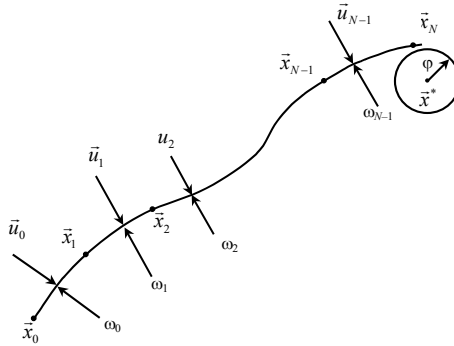


Рис. 6.4. Еволюція стохастичної системи ($\bar{x}^*$ – заданий стан)

Отже, для розв'язання задач оптимального стохастичного керування доцільно використовувати стратегії $\bar{\pi} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1})$, у яких $\bar{u}_k$ – функція минулих станів системи. У цьому випадку схема визначення оптимального керування на кожному кроці наступна. Якщо $\bar{x}_0$ – початковий стан системи, то за перше керування вибирається функція $\bar{u}_0 = \bar{\mu}_0(\bar{x}_0)$. Якщо мали місце стани $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_k$ і були задані керування $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{k-1}$, то керування на k -му кроці вибирається як функція $\bar{u}_k = \bar{\mu}_k(\bar{x}_0, \bar{u}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{u}_{k-1}, \bar{x}_k)$, ($\bar{u}_i \in U_i$ для всіх $i = \overline{0, k}$). Отже, для вибору керування використовується вся інформація, що є в наявності. Описана стратегія керування є позиційною, оскільки керування визначається залежно від реалізованих позицій (станів) системи, на відміну від програмного керування, коли послідовність керувань визначається заздалегідь, до початку процесу керування, і є функцією часу.

Розглянемо окремі випадки.

Якщо $\bar{u}_k = \bar{\mu}(\bar{x}_0)$, $k = \overline{0, N-1}$, то керування називається стаціонарним керуванням. Такі стратегії найпростіші, оскільки є одним і тим же вектором для всіх моментів часу.

Керування $\bar{u}_k = \bar{\mu}_k(\bar{x}_k)$, $k = \overline{0, N-1}$, називається марковською позиційною стратегією (стратегією, кожний елемент якої залежить тільки від поточного стану системи).

Керування $\bar{u}_k = \bar{\mu}_k(\bar{x}_0, \bar{x}_k)$, $k = \overline{0, N-1}$, називається напівмарковською позиційною стратегією (стратегією, кожний елемент якої залежить тільки від поточного і початкового станів системи).

Марковські та напівмарковські позиційні стратегії використовуються найчастіше.

Зрозуміло, що в загальному випадку кінцевий стан системи $\bar{x}_N$, згідно з

формулою (2) $\bar{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k, \bar{u}_k, \omega_k)$, $k = \overline{0, N-1}$, залежить від початкового стану $\bar{x}_0$, керувань $\bar{u}_k \in U$ і збурень ω_k . Щоб переконатися в цьому, досить виразити в (2) $\bar{x}_N$ через $\bar{x}_{N-1}$, потім $\bar{x}_{N-1}$ через $\bar{x}_{N-2}$ і т.д. Якщо ці перетворення можливо провести, то одержимо співвідношення $\bar{x}_N = \bar{x}_N(\bar{x}_0)$. Це означає, що різним реалізаціям випадкового збурення ω_k для одного початкового стану $\bar{x}_0$ відповідатимуть різні оптимальні стратегії керування $\bar{\pi}$.

6.7. Формальна постановка задачі оптимального стохастичного керування

Розглянемо систему (6.21) із цільовим функціоналом (6.22). Надалі, якщо інше не обговорено спеціально, будемо вважати, що оптимальні керування на кожному кроці позиційні: $\bar{u}_k = \bar{\mu}_k(\bar{x}_k)$, $\bar{\mu}_k : S \rightarrow C$; $\bar{\mu}_k(\bar{x}) \in U(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in S$.

За таких умов задача оптимального стохастичного керування полягає в пошуку оптимальної послідовності функцій керування $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0(\bar{x}_0), \bar{\mu}_1(\bar{x}_1), \dots, \bar{\mu}_{N-1}(\bar{x}_{N-1}))$, (тобто стратегії керування), що мінімізує сумарні витрати за увесь час функціонування системи.

Формальна постановка задачі оптимального стохастичного керування зі скінченним горизонтом у дискретному випадку має вигляд:

$$J_{N,\pi}(\bar{x}_0) = M \left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g(\bar{x}_k, \bar{\mu}_k(\bar{x}_k), \omega_k) \right] \rightarrow \min_{\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \dots, \bar{\mu}_{N-1}) \in X}, \quad (6.23)$$

$$X = \left\{ \bar{\mu}_k \in U(\bar{x}_k), x_k \in S, k = \overline{0, N-1} \mid \bar{x}_{k+1} = \bar{f}(\bar{x}_k, \bar{\mu}_k(\bar{x}_k), \omega_k), k = \overline{0, N-1} \right\}. \quad (6.24)$$

Розв'язання задачі оптимального стохастичного керування з нескінченним горизонтом полягає в пошуку послідовності керувань $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0(\bar{x}_0), \bar{\mu}_1(\bar{x}_1), \dots)$, які мінімізують сумарні витрати.

Формальна постановка задачі оптимального стохастичного керування з нескінченним горизонтом у дискретному випадку має вигляд:

$$J_{\pi}(\bar{x}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} M \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(\bar{x}_k, \bar{\mu}_k(\bar{x}_k), \omega_k) \right] \rightarrow \min_{\pi = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots) \in X}, \quad (6.25)$$

$$X = \left\{ \bar{\mu}_k(\bar{x}) \in U(\bar{x}), \forall \bar{x} \in S \mid x_{k+1} = f(\bar{x}_k, \bar{\mu}_k(\bar{x}_k), \omega_k), k = 0, 1, \dots \right\}. \quad (6.26)$$

Далі під час розв'язання задач оптимального керування вважатимемо, що

границя у (6.25) існує для всіх $\bar{\pi}$ і $\bar{x}_0$.

Будемо розглядати задачі (6.23) – (6.24) і (6.25) – (6.26) у стаціонарному випадку, тобто припускаємо, що простори станів і керувань S і C , обмеження керування $U(\bar{x})$, функція f і витрати g не змінюються при переході від кожного кроку до наступного. Якщо ж це не так, то задача є нестаціонарною. Нестаціонарна задача може бути зведена до стаціонарної за допомогою спеціальних методів, тому далі мова йтиме тільки про стаціонарні задачі.

Зупинимося детальніше на позначеннях, зроблених вище.

Визначення. Функція $J_{N,\pi}$ називається функцією витрат за N кроків при стратегії $\bar{\pi}$ в задачі зі скінченим горизонтом N . Аналогом цієї величини для задачі з нескінченим горизонтом є функція J_π – функція витрат при стратегії $\bar{\pi}$.

Для фіксованого стану $\bar{x} \in S$ позначимо через $J_N^*(\bar{x})$ і $J^*(\bar{x})$ оптимальні витрати в цих задачах, тобто

$$J_N^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{\pi} \in X} J_{N,\pi}(\bar{x}),$$

$$J^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{\pi} \in X} J_\pi(\bar{x}).$$

Якщо останні співвідношення вірні для всіх $\bar{x} \in S$, то функція J_N^* називається оптимальною функцією витрат за N кроків, а J^* – оптимальною функцією витрат.

Стратегія $\bar{\pi}^* \in X$ називається оптимальною при горизонті N в стані $\bar{x} \in S$, якщо

$$J_{N,\pi^*}(\bar{x}) = J_N^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{\pi} \in X} J_{N,\pi}(\bar{x}),$$

і оптимальною в стані $\bar{x} \in S$, якщо

$$J_{\pi^*}(\bar{x}) = J^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{\pi} \in X} J_\pi(\bar{x}).$$

Стратегія $\bar{\pi}^* \in X$ називається оптимальною при горизонті N , якщо $J_{N,\pi^*} = J_N^*$. Це означає, що стратегія $\bar{\pi}^* \in X$ доставляє оптимальне значення цільовому

функціоналу при всіх $\vec{x} \in S$.

Аналогічно, стратегія $\vec{\pi}^* \in X$ називається оптимальною, якщо

$$J_{\pi^*} = J^* \quad (6.27)$$

Стратегія $\vec{\pi} = (\vec{\mu}_0^*, \vec{\mu}_1^*, \dots, \vec{\mu}_{N-1}^*)$ називається рівномірно оптимальною при горизонті N , якщо стратегія $(\vec{\mu}_i^*, \vec{\mu}_{i+1}^*, \dots, \vec{\mu}_{i+N-1}^*)$ оптимальна при горизонті $N-i$ для всіх $i=0, 1, \dots, N-1$. Отже, якщо стратегія рівномірно оптимальна при горизонті N , то вона також оптимальна при горизонті N . Зворотнє твердження в загальному випадку невірне.

Стратегія $\vec{\pi} \in X$ називається стаціонарною стратегією, якщо $\vec{\pi} = (\vec{\mu}, \vec{\mu}, \dots) \in X$.

Якщо у цьому випадку значення цільового функціонала J_{π} в задачі оптимального стохастичного керування з нескінченним горизонтом отримано з використанням стаціонарної стратегії $\vec{\pi} = (\vec{\mu}, \vec{\mu}, \dots)$, то результат позначають $J_{\pi} = J_{\mu}$. Отже, стаціонарна стратегія $\vec{\pi}^* = (\vec{\mu}^*, \vec{\mu}^*, \dots) \in X$ у задачі з нескінченним горизонтом оптимальна, якщо $J^* = J_{\mu^*}$. Тут J^* – оптимальне значення цільового функціонала задачі.

Розв'язання будь-якої задачі оптимального стохастичного керування здійснюється за шість етапів:

1. Змістовна постановка задачі.
2. Побудова моделі об'єкта керування, що включає вибір векторів станів і керувань, просторів станів і керувань, вектора і простору випадкових збурень; побудову функції витрат, що визначається метою керування.
3. Формальна постановка задачі.
4. Вибір і обґрунтування методу розв'язання задачі.
5. Обчислення оптимальної стратегії керування одним з методів.
6. Аналіз отриманих результатів.

Процедура пошуку оптимальних позиційних стратегій є досить складною задачею. Одним з головних питань, вирішення якого дозволяє у значній мірі полегшити цю процедуру, є наступне: чи можна обмежитися пошуком оптимальних стратегій у класі стаціонарних або марковських стратегій? Якщо це можливо, то структура керування значно спрощується, і, крім того, зменшується об'єм оброблюваної інформації: не потрібно

запам'ятовувати керування $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{k-1}$, попередні стани $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{k-1}$ і діставати залежність поточного керування $\bar{x}_k$ від усіх цих величин. У цьому випадку для розв'язання дискретних задач оптимального керування зі скінченним горизонтом найчастіше використовується алгоритм, заснований на методі динамічного програмування, запропонованого Беллманом. Суть методу полягає в наступному:

$$J_0(\bar{x}) = 0, \quad (6.28)$$

$$J_k(\bar{x}_{N-k}) = \inf_{u_{N-k} \in U(x)} \left\{ M \left[g(\bar{x}_{N-k}, \bar{u}_{N-k}, \omega_{N-k}) + J_{k-1}(\bar{f}(\bar{x}_{N-k}, \bar{u}_{N-k}, \omega_{N-k})) \right] \right\}, k = \overline{1, N}, \quad (6.29)$$

де математичне сподівання береться за мірою $P(d\omega | \bar{x}, \bar{u})$. Формули (6.28) – (6.29) є стохастичним аналогом детермінованого алгоритму методу динамічного програмування.

Величина $J_k(\bar{x})$ – це оптимальні витрати, пов'язані з функціонуванням системи, за останні k кроків, за умови, що перед першим із цих кроків система перебувала в стані $\bar{x}$. Стратегія $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{N-1})$, кожний елемент якої $\bar{u}_{N-k} = \bar{\mu}_{N-k}(\bar{x})$ доставляє оптимальне значення (6.29) для всіх $\bar{x} \in S$, $k = \overline{1, N}$, є оптимальною стратегією для кожного $\bar{x} \in S$. Оптимальна функція витрат $J^*(\bar{x}_0)$ даної задачі визначається на N -му кроці і дорівнює $J^*(\bar{x}_0) = \inf_{\bar{\pi}} J_{N, \bar{\pi}}(\bar{x}_0) = J_N(\bar{x}_0)$.

Для розв'язання задач оптимального стохастичного керування з нескінченним горизонтом, як правило, застосовуються чисельні методи, які дозволяють на кожній ітерації одержувати наближення до оптимального керування і оптимальної функції витрат. У цьому випадку можна показати, що оптимальна

функція витрат $J^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{\pi}} J_{\pi}(\bar{x})$ задовольняє рівнянню Беллмана

$$J^*(\bar{x}) = \inf_{\bar{u} \in U(\bar{x})} \left[M_{\bar{\omega}} \left\{ g(\bar{x}, \bar{u}) + J^*(\bar{f}(\bar{x}, \bar{u})) \right\} \right].$$

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Деяку продукцію на підприємстві можна виготовити двома технологічними способами. Перший спосіб потребує затрат, рівних

$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2$, а другий - $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$. Визначити, скільки виробів з їх загальної кількості - d штук – необхідно виготовити кожним з можливих способів.

Значення $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, d$ взяти з таблиці 6.2 згідно варіанту.

Розв'язати задачу графічним методом і методом множників Лагранжа.

Таблиця 6.2

Варіант	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	D
1.	2	4	6	1	8	5	4
2.	4	4	4	8	6	9	10
3.	12	1	4	8	3	7	14
4.	4	2	8	3	6	2	14
5.	5	18	2	3	10	8	8
6.	4	8	6	12	8	6	8
7.	6	12	4	9	44	6	14
8.	2	16	5	8	6	5	9
9.	24	40	10	4	40	0	10
10.	3	2	4	12	2	8	24
11.	2	4	1	32	44	9	50
12.	12	4	4	8	4	6	20
13.	12	6	2	4	6	6	28
14.	8	4	6	12	4	4	30
15.	2	10	5	6	10	5	22
16.	4	10	2	4	10	6	16
17.	5	14	4	4	14	6	40
18.	3	6	8	14	6	2	40
19.	2	18	6	32	18	6	22
20.	8	5	1		5	11	12
21.	42	11	2	24	11	2	18
22.	3	8	4	12	8	8	18
23.	4	2	7	8	2	21	4
24.	0	2	7	2	2	7	22
25.	3	0	4	2	0	6	40
26.	2	2	2	4	14	8	8
27.	3	11	5	4	11	17	44
28.	2	1	8	1	1	8	12
29.	2	6	3	11	6	7	10
30.	4	10	1	4	10	3	16

Тестові завдання

1. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

Рівняння лінії		Графік лінії	
1.	$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$	А.	Коло
2.	$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$	Б.	Парабола
3.	$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$	С.	Гіпербола

2. Пронумерувати кроки алгоритму розв'язання задачі нелінійного програмування графічним методом:

___ визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня або встановлюють нерозв'язність задачі через необмеженість цільової функції зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків;

___ знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, та знаходять в ній значення функції;

___ будують гіперповерхню $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$;

___ знаходять область допустимих розв'язків задачі, визначену системою обмежень.

3. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1, 2, 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 3	В якщо правильні відповіді 2 і 4	Г якщо правильні тільки відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
У класичній задачі оптимізації система обмежень містить: 1. тільки рівняння 2. тільки нерівності 3. рівняння і нерівності 4. рівності типу "$\leq$"				

4. Пронумерувати кроки алгоритму розв'язання задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа:

___ знаходять частинні похідні від функції Лагранжа по змінних x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля;

___ складають функцію Лагранжа;

— серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення цільової функції у цих точках;

— розв'язують систему рівнянь, отриманих у п.1, знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум.

5. Якщо область допустимих розв'язків задачі, що визначена системою обмежень, порожня, то задача:

1. має безліч розв'язків;
2. не має розв'язку;
3. має тільки один розв'язок;
4. має своїм розв'язком число «0».

6. При розв'язанні задачі нелінійного програмування графічним методом визначають таку точку області допустимих розв'язків, через яку проходить

гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$. Вказана точка може знаходитися:

1. на границі області;
2. всередині області;
3. на границі області або всередині області;
4. за межами області (зовні).

7. Лініями рівняння $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ є:

1. параболи з вершиною у точці $F(4;3)$;
2. кола з центром у точці $F(4;3)$ і радіусом $\sqrt{h}$;
3. гіперболи з вершиною у точці $F(4;3)$;
4. еліпси з центром у точці $F(4;3)$ і радіусом $\sqrt{h}$.

8. При розв'язанні задачі класичної оптимізації набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ називають:

1. множниками Лагранжа
2. коефіцієнтами Лагранжа;
3. функціями Лагранжа;
4. розв'язком задачі оптимізації.

9. Для задачі пошуку точок екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$ функція Лагранжа матиме вигляд:

1. $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$;
2. $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2)$;
3. $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 + x_2)$;

$$4. F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 5\lambda - x_1 - x_2.$$

10. Для задачі пошуку найменшого значення функції $Z = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2$ за умови $x+y=6$ функція Лагранжа матиме вигляд:

$$1. F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2;$$

$$2. F(x, y, \lambda) = \lambda(6-x-y);$$

$$3. F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2 + \lambda(6-x-y);$$

$$4. F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2 + \lambda(6+x+y).$$

11. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму [11]:

$$1. Z = 2x_1^2 + x_2^2,$$

$$2. Z = x_1^2 - x_2^2,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5.$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12.$$

$$3. Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$$

$$4. Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$$

$$2x_1 - x_2 = 5.$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$$

$$5. Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$$

$$6.$$

$$x_1 + 3x_2 = 6.$$

$$Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2$$

$$x_1 + 5x_2 = 12.$$

$$7. Z = 4x_1 + 2x_1^2 + x_2 + 2x_2^2$$

$$8. Z = 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12.$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8.$$

$$9. Z = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1,$$

$$10.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4.$$

$$Z = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2,$$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

$$11. Z = x_1^2 - x_2^2,$$

$$12.$$

$$x_1 - x_2 = 4.$$

$$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2,$$

$$-x_1 + 2x_2 = -5.$$

$$13. Z = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2,$$

$$14. Z = x_1x_2x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

15. $Z = 3x_1^2 + 5x_2 + 12x_3^2$,
 $3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18$.
16. $Z = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 15x_3^2$,
 $4x_1 + 7x_2 + x_3 = 14$.
17. $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$,
 $3x_1 + 6x_2 \leq 30$.
18. $Z = 3x_1^2 + 2x_2^2$,
 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$
19. $Z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$,
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$.
20. $Z = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3$,
 $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$.
21. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3$,
 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$
22. $Z = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$,
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9$.
23. $Z = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$,
 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$
24. $Z = x_2 - x_1 - 2x_1^2$,
 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12; \\ -x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$
- 25.
- 26.
- $Z = 8x_1 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$,
 $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 6; \\ x_1 + 8x_2 = 16. \end{cases}$
- $Z = x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 + x_2$,
 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12; \\ -4x_1 + 8x_2 = 16. \end{cases}$

РОЗДІЛ 7. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ТЕОРІЯ ІГОР

7.1. Прийняття рішень в умовах визначеності

Прийняття рішень в умовах визначеності – це процес вибору найкращої альтернативи за наявності повної, достовірної та своєчасної інформації про можливі варіанти дій, умови їх реалізації та наслідки. За таких умов особа, що приймає рішення, точно знає результат кожної альтернативи, тому вибір здійснюється шляхом порівняння очікуваних показників ефективності (прибутку, витрат, часу виконання тощо) та вибору варіанта, який найкраще відповідає поставленій меті. Отже цей напрямок передбачає вибір оптимальної альтернативи за умов повної інформації про стан середовища та наслідки кожного можливого рішення. Основними методами є аналіз альтернатив, оптимізаційні моделі та методи багатокритеріального вибору.

Метод аналізу ієрархій (Analytic Hierarchy Process, АНП) є одним із найбільш поширених методів багатокритеріального прийняття рішень в умовах визначеності. Метод передбачає декомпозицію складної проблеми на ієрархічну структуру, що включає мету, критерії оцінювання, підкритерії (за потреби) та альтернативи. Оцінювання здійснюється шляхом попарного порівняння елементів на кожному рівні ієрархії, що дає змогу визначити вагомість критеріїв та пріоритетність альтернатив. Результатом застосування методу є ранжування альтернатив і вибір найбільш доцільного варіанта з урахуванням множини критеріїв та їх відносної важливості.

7.2. Прийняття рішень в умовах ризику

Прийняття рішень в умовах ризику є одним із найважливіших напрямів теорії прийняття рішень і передбачає вибір найкращої альтернативи за наявності кількох можливих станів зовнішнього середовища, для яких відомі або можуть бути оцінені ймовірності настання. На відміну від умов визначеності, коли результат кожної альтернативи є наперед відомим, в умовах ризику особа, що приймає рішення, стикається з невизначеністю щодо майбутніх подій, однак має можливість оцінити їхню ймовірність на основі статистичних даних, експертних оцінок або попереднього досвіду.

Основною метою прийняття рішень в умовах ризику є вибір альтернативи, яка забезпечує найкращий очікуваний результат або мінімізує можливі втрати. Для цього використовується платіжна матриця, що відображає результати реалізації кожної альтернативи за різних станів середовища, а також вектор ймовірностей відповідних станів.

Найбільш поширеним методом вибору в умовах ризику є критерій математичного сподівання (очікуваної грошової оцінки). Відповідно до цього підходу для кожної альтернативи обчислюється середньозважене значення можливих результатів з урахуванням ймовірностей їх настання. Оптимальною

вважається альтернатива з найбільшим значенням математичного сподівання прибутку або найменшим значенням очікуваних витрат. Даний критерій широко застосовується в економіці, фінансах, управлінні проектами та бізнес-аналітиці.

Для оцінювання рівня ризику поряд з очікуваним результатом використовуються показники варіації результатів, зокрема дисперсія, середньоквадратичне відхилення та коефіцієнт варіації. Ці показники дозволяють оцінити ступінь можливих відхилень фактичного результату від його очікуваного значення. Часто особа, що приймає рішення, віддає перевагу альтернативі з дещо меншим очікуваним доходом, але нижчим рівнем ризику.

При вирішенні задач теорії ігор в умовах невизначеності, пов'язаної з невідомим поведінкою противника, передбачалося, що його стратегія є «розумної і найменш вигідною» для нас (гравця A).

При дослідженні операцій доводиться стикатися з іншою невизначеністю, пов'язаною ні з свідомою протидією противника, а просто з недостатнім знанням умов, в яких проходить операція.

Такі ситуації, коли в якості протидії боку виступає невідома нам об'єктивна дійсність, «поведінка» або стратегія якої не містять елемента свідомого протидії, називають «грою з природою».

Таку ситуацію можна представити у вигляді матриці гри, де $A_1, \dots, A_m$ - можливі стратегії гравця, $P_1, \dots, P_n$ - різні припущення про обстановку, які можна розглядати як «стратегії природи».

$\begin{matrix} & P_j \\ A_i \end{matrix}$	$P_1 \dots P_n$
A_1	$a_{11} \dots a_{1n}$
$\dots$	
A_m	$a_{m1} \dots a_{mn}$

Потрібно вибрати таку стратегію гравця A , яка більш вигідна в порівнянні з іншими.

Рішення такого завдання складніше, ніж звичайної ігрової задачі, незважаючи на те, що виграш може бути більше, тому відсутня протидія свідомого супротивника.

Складність вирішення пояснюється тим, що в конфліктній ігровий ситуації відома мета супротивника - «нашкодити нам», тобто знизити виграш, і це в певному сенсі знімає невизначеність.

У тому випадку коли припущення про цілі та інтереси супротивника зробити не можна, невизначеність позначається більшою мірою.

Найбільш простим випадком вибору рішень в умовах невизначеності є випадок, коли одна зі стратегій A_i перевершує інші - «домінує» над ними, тобто

$$a_{i1} \geq a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{i2} > a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2} \dots$$

У цьому випадку рекомендується користуватися стратегією A_i .

У разі коли немає домінуючих стратегій, для прийняття рішень вводиться поняття "ризик".

Ризиком гравця при використанні стратегії A_i в умовах Π_j називається різниця між виграшем, який він отримав би при знанні Π_j , і виграшем, який він отримає, застосовуючи стратегію A_i в тих же умовах.

Знання стану природи Π_j узавсі вибір стратегії, максимізувати виграш в даному стовпці, тобто $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Позначимо ризик r_{ij} , тоді за визначенням $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$.

Ризик не може бути негативною величиною $r_{ij} \in 0$.

Матриця ризиків $\|r_{ij}\|$ дає більш наочну картину невизначеною ситуації, тому дозволяє оцінити сприятливість чи несприятливість для гравця даного стану природи.

Розглядаємо випадок вибору рішень, коли задані ймовірності стану природи

$$Q_1 = P(\Pi_1), \dots, Q_n = P(\Pi_n) \text{ при } \sum_{j=1}^n Q_j = 1. \quad (7.14)$$

Як показник ефективності, який необхідно максимізувати в цьому випадку, доцільно взяти *середнє значення* (математичне очікування) виграшу з урахуванням ймовірностей всіх можливих умов.

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij}$$

Середнє значення виграшу при i -й стратегії гравця буде

В якості оптимальної стратегії можна користуватися поняттям *середнього ризику* у вигляді

$$\bar{r}_i = \sum_j Q_j r_{ij}, \quad (7.15)$$

який необхідно звернути в мінімум.

$$\bar{a}_i + \bar{r}_i = \sum_j Q_j a_{ij} + \sum_j Q_j (\beta_j - a_{ij}) = \sum_j Q_j \beta_j = c,$$

де $\sum_j Q_j \beta_j$ - постійна величина для даної матриці.

Отже, середній ризик буде $\bar{r}_i = c - \bar{a}_i$, тобто $\bar{r}_i$. Звернеться до мінімум при максимізації $\bar{a}_i$. Вирішальне правило буде

$$A^* = \min_i \{\bar{r}_i\} = \min_i \left\{ \sum_j Q_j r_{ij} \right\}. \quad (7.16)$$

Слід зауважити, що при заданих ймовірностях Q_j рішення в умовах невизначеності перетворюється на рішення в умовах визначеності, тільки прийняте рішення є оптимальним не в кожному розглянутому випадку, а в середньому.

Важливе місце серед методів прийняття рішень в умовах ризику займають дерева рішень. Вони дозволяють графічно відобразити послідовність можливих рішень та випадкових подій, оцінити наслідки кожного сценарію та визначити оптимальний шлях дій. Деревя рішень особливо ефективні для аналізу багатоетапних управлінських ситуацій, інвестиційних проєктів і стратегічного планування.

Практичне застосування методів прийняття рішень в умовах ризику охоплює широкий спектр задач: вибір інвестиційних проєктів, управління фінансовими портфелями, прогнозування попиту, планування виробництва, оцінювання ефективності маркетингових стратегій та управління логістичними процесами. Використання ймовірнісних моделей дозволяє підвищити обґрунтованість управлінських рішень, знизити рівень невизначеності та забезпечити більш раціональне використання ресурсів.

Таким чином, прийняття рішень в умовах ризику базується на поєднанні кількісних методів аналізу та оцінювання ймовірностей подій, що дає змогу враховувати можливі наслідки різних альтернатив і вибирати найбільш ефективний варіант дій у ситуаціях невизначеного майбутнього.

7.3. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Прийняття рішень в умовах невизначеності передбачає вибір найкращої альтернативи в ситуаціях, коли особа, що приймає рішення, не має достовірної інформації про майбутні стани зовнішнього середовища та не може визначити ймовірності їх настання. Такі умови є характерними для багатьох управлінських, економічних і соціальних процесів, де вплив численних факторів унеможливорює точне прогнозування результатів. На відміну від прийняття рішень в умовах ризику, де ймовірності подій можуть бути оцінені, в умовах невизначеності такі оцінки відсутні або є недостатньо обґрунтованими.

Основою аналізу в умовах невизначеності є побудова матриці рішень, яка містить перелік можливих альтернатив та відповідні результати їх реалізації за різних станів середовища. Оскільки ймовірності станів невідомі, вибір оптимальної альтернативи здійснюється за допомогою спеціальних критеріїв, які відображають ставлення особи до невизначеності та ризику.

Одним із найбільш відомих є критерій Вальда (максимінний критерій), який ґрунтується на песимістичному підході. Відповідно до нього для кожної альтернативи визначається найгірший можливий результат, після чого обирається альтернатива з найкращим серед цих найгірших результатів. Такий підхід забезпечує максимальний рівень захисту від несприятливих наслідків і часто використовується в умовах високої невизначеності.

Протилежний підхід реалізується через критерій оптимізму (максимакс), який орієнтується на найбільш сприятливі результати. У цьому випадку для кожної альтернативи визначається максимальний можливий виграш, а оптимальним вважається рішення з найбільшим значенням цього показника. Даний критерій характерний для осіб, схильних до ризику та орієнтованих на максимізацію потенційних вигод.

Компроміс між песимістичним і оптимістичним підходами забезпечує критерій Гурвіца. Він поєднує найкращі та найгірші результати кожної альтернативи за допомогою коефіцієнта оптимізму, який відображає суб'єктивне ставлення особи до невизначеності. Залежно від значення цього коефіцієнта можна моделювати різні стилі прийняття рішень — від обережного до ризикованого.

Широкого застосування також набув критерій Лапласа, який базується на принципі недостатньої підстави. Якщо відсутня інформація про ймовірності станів середовища, вважається, що всі вони є однаково можливими. Для кожної альтернативи обчислюється середнє значення результатів, після чого обирається варіант з найкращою середньою оцінкою.

Для мінімізації можливих втрат від неправильного вибору використовується критерій Севіджа. Він ґрунтується на понятті ризику втраченої вигоди та передбачає вибір альтернативи, для якої максимальні можливі втрати від невдалого рішення є мінімальними. Такий підхід дозволяє враховувати не лише отримані результати, а й потенційні можливості, які можуть бути втрачені.

Методи прийняття рішень в умовах невизначеності широко застосовуються під час стратегічного планування, прогнозування розвитку ринків, оцінювання інноваційних проєктів, розроблення державної політики та управління складними соціально-економічними системами. Вибір конкретного критерію залежить від доступної інформації, характеру проблеми та ставлення особи, що приймає рішення, до невизначеності.

Таким чином, прийняття рішень в умовах невизначеності є важливим інструментом обґрунтування управлінських дій у ситуаціях браку інформації. Використання критеріїв дозволяє формалізувати процес вибору та підвищити обґрунтованість прийнятих рішень навіть за відсутності даних про ймовірності майбутніх подій.

Ймовірності станів «зовнішнього середовища» не завжди можуть бути визначені із статистичних даних на підставі багаторазового виконання подібних операцій. Зустрічаються випадки, коли спостерігачеві невідомі закони розподілення ймовірностей. І щодо станів «природи» можна висловлювати тільки певні гіпотези.

Розглянемо докладніше кілька критеріїв для вибору оптимальних стратегій.

Критерії прийняття рішень

- Критерій максимакса (критерій крайнього оптимізму) $K = \max \max a_{ij}$
- Максимінний критерій Вальда $K = \max \min a_{ij}$
- Критерій мінімального ризику Севіджа $K = \min \max r_{ij}$
- Критерій оптимізму-песимізму Гурвіца $K = \max \{p \min a_{ij} + [1 - p] \max a_{ij}\}$
- Критерій Байєса-Лапласа $K = \max \sum x_j a_{ij}$

Критерій Вальда (критерій обережного спостерігача, песимізму). Цей критерій оптимізує виграш у припущенні, що природа знаходиться в самого невідгідному для спостерігача становищі:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} \quad (7.1)$$

Тобто як оптимальної вибирається та стратегія A , при якій мінімальний виграш максимальний.

Критерій Севіджа (мінімаксного ризику). Критерій рекомендує в умовах невизначеності вибирати стратегію, при якій величина ризику приймає найменше значення в самій несприятливій ситуації максимального ризику:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} \quad (7.2)$$

Мета критерію - уникнути великого ризику при прийнятті рішення.

Цей критерій (як і Вальда) є критерієм песимізму: гірший приймається максимальна втрата виграшу в порівнянні з тим, чого можна було б досягти в даних умовах.

Критерій Лапласа передбачає, що якщо стан середовища (або природи) невідомо, то всі стани передбачаються рівноймовірними:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = 1/n.$$

В результаті вирішальне правило зведеться до прийняття рішень в умовах ризику з відомими ймовірностями:

$$A^* = \min_i \left\{ \sum_j Q_j r_{ij} \right\} = \min_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_j r_{ij} \right\} \quad (7.3)$$

Критерій Гурвіца заснований на припущенні, що природа може перебувати в найвідгіднішому стані з ймовірністю $(1 - \alpha)$ і в самому невідгідному з ймовірністю α .

Вирішальне правило запишеться у вигляді

$$H = \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right]. \quad (7.4)$$

α - коефіцієнт довіри, вибирається в межах $0 < \alpha < 1$ виходячи з суб'єктивних міркувань. Чим більше хочемо убезпечити себе, тим α вибирається ближче до 1.

При $\alpha = 1$ критерій Гурвіца перетворюється на песимістичний критерій Вальда.

При $\alpha = 0$ критерій «крайнього оптиміста, що входить в успіх».

Критерій крайнього оптимізму заснований на оптимістичному настрої особи, що приймає рішення

$$W = \max_i \max_j a_{ij} \quad (7.5)$$

Вибір критерію для конкретного випадку є суб'єктивним, тим не менш корисно проаналізувати ситуацію з точки зору кожного з критеріїв. Це дозволить прийняти остаточне рішення.

7.4. Основні поняття теорії ігор

У лінійному програмуванні розглядаються операції, успіх яких залежить від раціональної організації також ефективність операції залежить від дій того, хто планує.

На практиці зустрічаються задачі або операції, в яких беруть участь кілька сторін, інтереси яких не збігаються. При цьому жодна зі сторін не має повної влади над ходом операції.

Аналогічна картина спостерігається при управлінні об'єктом по статистичними законами, коли результати впливу можуть бути оцінені тільки імовірнісним чином.

Для управління подібними операціями використовується математичний апарат, який називається теорією ігор.

Теорія ігор призначена для вироблення рекомендацій та прийняття рішення в конфліктних ситуаціях, тобто ситуаціях з протилежними інтересами учасників.

Якщо маємо декілька конфліктуючих сторін, кожна з яких приймає деяке рішення, що визначається заданим набором правил, і кожній із сторін відомий можливий кінцевий стан конфліктної ситуації з можливими платежами, то кажуть, що має місце *гра*.

Задача теорії ігор – обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Конфліктна ситуація – це ситуація, учасники якої мають повністю або частково протилежні інтереси.

Гра – це формалізована модель реальної конфліктної ситуації дійсний або формальний конфлікт, в якому беруть участь мінімум два учасники, кожен з яких прагне досягти особистих цілей.

За кількістю сторін – ігри бувають парні (2 сторони) і множинні (кілька учасників).

Найбільше поширення мають парні антагоністичні ігри з нульовою сумою (коли виграш одного гравця дорівнює програшу іншого).

Розвиток гри в часі протікає у вигляді окремих рішень або «ходів».

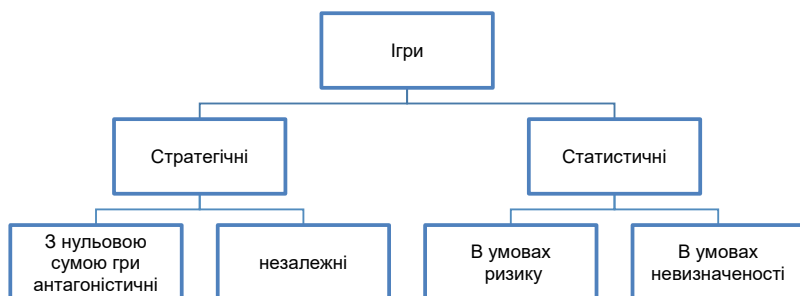
Ходом називається вибір одного з передбачених правилами гри варіантів рішення. Ходи поділяються на особисті і випадкові.

Випадковим ходом називається вибір рішення, що підкоряється випадковим законам.

Особистим ходом називається випадковий вибір гравцем рішень на підставах відомих йому міркувань.

Розрізняють ігри з повною інформацією, коли гравець при особистому ході знає результат усіх попередніх ходів супротивника і його можливості (наприклад, шахи, шашки тощо).

Ігри з неповною інформацією – обернені їм (наприклад, комерційні операції, бойові дії, доміно, карткові ігри тощо). Наведемо схематично загальну класифікацію ігрових моделей



Правила гри – допустимі дії кожного гравця, спрямовані на досягнення деякої мети.

Платіж – кількісна оцінка ситуації.

Парна гра – гра, в якій беруть участь тільки дві сторони.

Гра з нульовою сумою – парна гра, в якій сума платежів дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу іншого.

Стратегія гравця – однозначний опис вибору гравцем кожної з можливих ситуацій, в якій він повинен зробити особистий хід.

Оптимальна стратегія – така стратегія, яка при багатократному повторенні гри забезпечує максимально можливий середній виграш (мінімально можливий середній програш).

Скінченна гра, в якій гравець A , який прагне максимізувати свій виграш, має m стратегій, а гравець B , який прагне мінімізувати свій програш, має n стратегій, називається грою $m \times n$ або матричною грою.

7.5. Оптимальні стратегії. Ціна гри

Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка при багаторазовому повторенні забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

При цьому мається на увазі, що супротивник свідомо перешкоджає виграшу.

В теорії множин існує поняття: *точною нижньою межею* множини X чисел x називається таке найменше число x_0 , для якого всі числа множини не менше цього числа:

$$x \geq x_0 \text{ для всіх } x \in X.$$

Аналогічно *точною верхньою межею* - число, для якого всі цифри не менше цього числа:

$$x \leq x_0 \text{ для всіх } x \in X.$$

Нижня чиста ціна гри α - це найбільший виграш при несприятливих умовах для гравця A в разі використання однієї зі своїх стратегій.

Верхня чиста ціна гри β - це найменший програш гравця B за найнесприятливіших для нього умов у разі використання однієї зі своїх стратегій.

Розглянемо гру двох сторін A і B , задану матрицею гри, з стратегіями A_i , B_j .

Гравці	B1	B2		Bn
A1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.....				
Am	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Гравець A , вибираючи свою стратегію A_i , припускає, що противник відповість на неї такою стратегією B_j , яка зробить виграш найменшим, тому на стратегію A_i він отримає виграш, де $\alpha_i = \min a_{ij}$, де a_{ij} - значення виграшів гравця A при виборі стратегій A_i . У матриці α_i це найменше з чисел a_{ij} в i -му рядку. Випишемо числа α_i у вигляді додаткового стовпця $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$. Таким чином, яку б стратегію A_i не вибрав гравець A , він не виграве більше α_i . Отже, впродовж

гри, діючи по-різному і уникаючи ризику, а також розраховуючи на розумного противника, гравець A повинен зупинитися на такій стратегії A_i , для якої число α_i максимальне.

Ця величина є нижньою ціною гри (максимальним виграшем, або просто максимумом):

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (7.6)$$

Стратегія A_i , що забезпечує виграш, рівний α , називається максі-мінною стратегією. Якщо гравець дотримується максі-мінної стратегії, то йому при будь-якій поведінці супротивника гарантований виграш не менше α , тобто $M \geq \alpha$.

Аналогічно можна міркувати і за гравця B , він повинен аналізувати свої стратегії з погляду найбільшого програшу, тобто розраховувати на найгіршу для нього поведінку гравця A . Знаходимо максимальне значення a_{ij} для кожної стратегії B_j , тобто максимальне значення за стовпцями $\beta_j = \max_i a_{ij}$, і заносимо в окремий рядок ігровий матриці.

З цих значень знайдемо мінімальне, позначивши його β . Тоді мінімальний програш гравця B буде:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (7.7)$$

Величина β називається верхньою чистою ціною гри, міні-максі виграшем, або міні-максі.

Дотримуючись своєї обережної мінімаксної стратегії, гравець B гарантує собі програш не більший, ніж β , незалежно від того, як буде себе вести гравець A .

- Максимінна стратегія – нижня ціна гри – гарантує виграш не менший

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

- Мінімаксна стратегія – верхня ціна гри – обмежує виграш для A та програш для B

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

7.6. Нестійкість мінімаксних стратегій

Мінімаксні стратегії характеризуються однією негативною властивістю - вони нестійкі. Це означає, що якщо обидва гравці користуються своїми мінімаксними стратегіями, то якщо надійшли про це відомості одному з гравців дозволяють йому збільшити виграш, тобто зробити його вище нижньої ціни або нижче верхньої.

Наприклад, гравці A і B одночасно і незалежно записують одне з чисел - 1, 2, 3. Якщо сума чисел парна, то гравець B платить цю суму гравцеві A , якщо непарна - навпаки.

Гравці мають три однакові стратегії: A_1 (B_1) - записати число 1,

A_2 (B_2) - записати число 2,

A_3 (B_3) - записати число 3.

Отже, матриця гри буде (для гравця A) мати вигляд

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	-3	4	-3
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	4	-5	6	-5
β_j	4	4	6	
	$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$			

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Максі-мінімій стратегією гравця A є стратегія A_1 : застосовуючи її, гравець гарантовано виграє не менше -3 (тобто програє не більш 3).

Міні-максної стратегією гравця B є будь-яка з двох: B_1 або B_2 . Застосовуючи її, гравець B , принаймні, програє не більше 4 (матриця складена для A , тому для B програти зі знаком "+").

Застосовуючи стратегію A_1 і враховуючи, що гравець B також застосовує мінімаксну стратегію B_1 або B_2 , гравець A буде мати середній виграш 2, але це поки гравець B дотримується також своєю мінімаксної стратегії B_1 . Тепер якщо гравцеві B стало відомо, що гравець A хоче застосувати стратегію A_1 , він негайно відповість B_2 і змусить гравця A програти -3. У свою чергу, знаючи B_2 , гравець A може відповісти A_2 і збільшити виграш до +4.

У цьому і полягає нестійкість мінімаксної стратегії. Тільки у випадку рівності нижньої і верхньої ціни гри максі-міні стратегії стають оптимальними і положення стійким незалежно від того, чи знає гравець про використання противником оптимальної стратегії. Тоді ці відомості не дають можливості гравцям збільшити виграш.

Наприклад, матриця гри 4×4 містить наведені виграші

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,8	0,4	0,3	0,3
A_2	0,7	0,6	0,8	0,6

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

A_3	0,7	0,2	0,4	0,2
β_j	0,8	0,6	0,8	

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Як видно, $\alpha = \beta = \gamma = 0,6$. Елемент $a_{22} = 0,6$ називають сідловою точкою матриці, їй відповідають стратегії A_2, B_2 , вони є оптимальними. Їх сукупність і становить рішення гри.

Ігри з сідловою точкою називаються детермінованими.

- Оптимальний розв'язок цієї гри досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати свою стратегію, тобто коли

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \gamma$$

- γ - сідлова точка
- Така гра – цілком визначена або гра у чистих стратегіях

Рішення гри володіє тією властивістю, що відхилення від нього є не вигідним і може призвести тільки до зростання програшу будь-якого з гравців.

7.7. Рішення гри в змішаних стратегіях

На практиці серед кінцевих ігор частіше зустрічаються ігри нестрого детерміновані.

Раніше було показано, що для гарантованого виграшу, рівного ціні гри, гравець повинен дотримуватися максі-мінної стратегії.

Гравець може виграти більше, якщо буде застосовувати не одну максі-мінні стратегію, а чергувати випадковим чином декілька стратегій. Такі комбіновані стратегії називаються змішаними.

Застосовуючи змішані стратегії, можна домогтися рівності нижньої і верхньої ціни гри, яка в цьому випадку називається просто ціною гри.

В теорії ігор доводиться, що будь-яка кінцева гра має, принаймні, одне рішення: або в області змішаних, або в області чистих стратегій. Це основна теорема теорії ігор.

Якщо обидва гравці будуть застосовувати оптимальні змішані стратегії, виграш буде дорівнювати ціні гри, а будь-яке відхилення від цих стратегій є не вигідним для гравця, що здійснює це відхилення.

Отже, кожна кінцева гра має ціну λ , яка лежить між верхньою чистою і нижньою чистою цінами гри, тобто $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

Доказ цього. Дійсно, λ є максимальний гарантований виграш, який можна забезпечити гравцеві A , застосовуючи тільки чисті стратегії.

Так як змішані стратегії містять всі чисті стратегії у вигляді окремого випадку, то допускаються крім чистих ще змішані стратегії, очевидно, виграш буде не менше λ , тобто $\lambda \geq \alpha$.

Міркуючи аналогічно для гравця B , можна показати, що $\lambda \leq \beta$, тобто $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, що потрібно було довести.

Вводимо позначення змішаної стратегії у вигляді матриць. При цьому для гравця A , якщо: x_i - ймовірність вибору стратегії A_i ,

x_i - ймовірність вибору стратегії A_i ,

x_m - ймовірність вибору стратегії A_m ,

то його змішана стратегія буде матрицею-стовпцем: $X = \|x_1, \dots, x_i, \dots, x_m\|^T$ при цьому $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ (сума ймовірностей не більше одиниці), $x_i \geq 0$ (ймовірності позитивні).

Оптимальну стратегію позначимо X_0 . Необхідно мати на увазі, що в оптимальну стратегію можуть входити не всі допустимі чисті стратегії, а тільки явно корисні або активні.

Аналогічно для гравця B змішана стратегія буде у вигляді матриці-рядка:

$Y = \|y_1, \dots, y_j, \dots, y_n\|$ при $\sum_{j=1}^n y_j = 1$, $y_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, де y_j - ймовірність вибору стратегії

B_j в змішаній стратегії гравця B .

Визначимо середнє значення виграшів у разі застосування гравцями змішаних стратегій.

Припустимо, сторона A застосовує змішану стратегію X , а сторона B - просто стратегію B_j , тоді середній виграш боку A буде

$$\alpha_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

	B_1	$\dots$	B_j	$\dots$	
A_1	a_{1j} a_{2j} $\dots$ a_{mj}				x_1
A_2					x_2
$\dots$					$\dots$
A_m					x_m
	1	$\dots$	j	$\dots$	n

(за правилом знаходження математичного очікування), що є тільки j -й компонентним всього середнього виграшу, який буде в цьому випадку характеризуватися рядком $\|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\| = X^T A$, де A - матриця гри для гравця A (максимізуючи свій виграш).

Якщо тепер змішану стратегію застосовує тільки сторона B , а сторона A - чисту стратегію A_i , тоді середній виграш гравця A , що позначається β_i , буде, що є i -й компонентним всього виграшу, виражається матрицею-стовпцем $\|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\|^T = AY$.

	B_1	B_2	...	
A_1	a_{i1}	a_{i2}	...	1
...				...
A_i				i
...	v_1	v_2	...	...
...				m

Якщо обидві сторони застосовують змішані стратегії, то середній виграш боку A буде рівний

$$M = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j \quad (7.8)$$

Він визначається як ймовірність спільного попадання в клітину (i, j) , яка дорівнює добутку ймовірностей $x_i y_j$. У матричній формі його можна записати як $M = X^T AY$, а в розгорнутому вигляді:

$$M = \left\| \begin{array}{ccc|c} x_1 a_{11} y_1 & x_1 a_{12} y_2 & \dots & x_1 a_{1n} y_n \\ x_2 a_{21} y_1 & x_2 a_{22} y_2 & \dots & x_2 a_{2n} y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m a_{m1} y_1 & x_m a_{m2} y_2 & \dots & x_m a_{mn} y_n \end{array} \right\|$$

Гравець A буде прагнути максимізувати за своїми керованим координатам X з мінімуму, що дає йому гравець B за координатами Y .

Гравець B буде прагнути мінімізувати за своїми керованим координатам Y з того, що максимізує гравець A по X .

Тоді максимум, що може чекати виграти гравець A , буде

$$\underbrace{X^T AY}_{\max X} = \max_X \min_Y (X^T AY), \quad (7.9)$$

а максимум, що може програти гравець B , буде

$$\underbrace{X^T AY}_{\min Y} = \min_Y \max_X (X^T AY). \quad (7.10)$$

Теорема про міні-максі свідчить, що ці два вирази рівні між собою, тобто

$$\max_X \min_Y (X^T AY) = \min_Y \max_X (X^T AY) = \lambda. \quad (7.11)$$

Величина λ називається ціною гри.

Змішані стратегії, при яких ця умова виконується, називаються оптимальними (X_0 - оптимальна стратегія A , Y_0 - оптимальна стратегія B), при цьому $X_0^T AY_0 = \lambda$.

Отже, $X_0^T AY \geq \lambda$ при всіх Y ,

$$X^T AY_0 \leq \lambda \quad \text{при всіх } X.$$

Таким чином, якщо гравець дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то він виграє не менше ціни гри λ , незалежно від того, яку стратегію застосовує інший гравець.

Відповідно гравець B програє не більш λ .

7.8. Елементарні методи рішення ігор

Вирішити гру - значить визначити для кожного гравця оптимальну стратегію.

Методи знаходження оптимальних стратегій

- Платіжна матриця має сідлову точку – гра в чистих стратегіях
- Платіжна матриця не має сідлової точки – гра у змішаних стратегіях
гра 2х2 – графічно
звести гру до задачі математичного програмування

1. Якщо гра є строго детермінованою, то рішення знаходиться просто.

Оптимальними є дві стратегії, що сходяться у сідловій точці. Рішення знаходиться в області чистих стратегій

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \rightarrow A_i,$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \rightarrow B_j.$$

2. Якщо гра є не строго детермінованою, то рішення шукається в області змішаних стратегій. Рішення таких ігор складніше. Тому для вирішення недетермінованих ігор прагнуть спростити завдання за рахунок зменшення стратегій дублюючих і свідомо не вигідних.

Наприклад, гра задана матрицею 4×4 :

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	3	
A_2	0	2	3	2	→ (2)
A_3	1	2	4	3	→ (1)
A_4	4	3	1	0	
(3)					

A_3 повторює стратегію A_1 - можна виключити (1),

A_2 в порівнянні з A_1 явно не вигідна для гравця A (2),

B_3 в порівнянні з B_4 явно не вигідна для гравця B (3).

Для знаходження рішення недетермінованих ігор використовують їх основну властивість - незалежність виграшу від дій противника, якщо він не виходить за межі своїх активних стратегій. На підставі цієї властивості складається система алгебраїчних, в загальному випадку, нерівностей (оскільки нам не відомі активні стратегії), в які шукані ймовірності застосування стратегій x_i (або y_j) входять в якості невідомих. Таким чином, якщо максимізуючи сторона A дотримується своєї оптимальної стратегії $X_0^T = \|x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\|^T$, то справедлива нерівність

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^0 \geq \lambda, & j = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^m x_i^0 = 1, & x_i^0 \geq 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

Аналогічно, якщо мінімізуючи сторона B також дотримується своєї оптимальної стратегії $Y_0 = \|y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\|$, тоді програш гравця

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^0 \geq \lambda, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{j=1}^n y_j^0 = 1, & y_j^0 \geq 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

Таким чином, рішення задачі буде складатися в знаходженні з цієї системи нерівностей ціни гри λ і оптимальних змішаних стратегій

$$X_0 = \|x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\|^T, \quad Y_0 = \|y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\|.$$

Розглянемо як приклад матричну гру 2×2 .

	1	2	
1	11	12	1
2	21	22	2

1 2
Тому обидві стратегії гри є активними, то від нерівності можна перейти до рівності для визначення оптимальної стратегії гравця A :

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{21}x_2^0 = \lambda, \\ a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = \lambda, & x_1^0, x_2^0 \geq 0, \\ x_1^0 + x_2^0 = 1. \end{cases} \quad 291$$

Із системи рівнянь отримаємо

$$x_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{a_{22} - a_{21}}{k}, \quad x_2^0 = \frac{a_{11} - a_{12}}{k}, \quad \lambda = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{k}$$

Аналогічно для гравця B .

Завдання вирішена, тому відомі X_0, Y_0, λ .

7.9. Графічний метод вирішення ігор

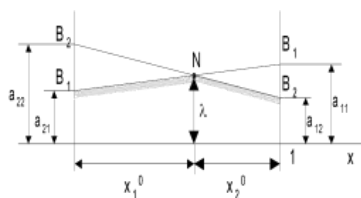
Графічним методом можна вирішувати матричні гри $(2 \times n)$, $(m \times 2)$. Розглядаємо гру 2×2 .

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

$$x_1^0 = x$$

$$x_2^0 = 1 - x_1^0 \text{ т.к. } x_1^0 + x_2^0 = 1$$

Виграш гравця A при використанні гравцем B чистої стратегії B_1 обчислюється таким чином: $L_1(x) = a_{11}x + a_{21}(1-x)$. Аналогічно, якщо гравець B використовує чисту стратегію B_2 , а гравець A - змішану: $L_2(x) = a_{12}x + a_{22}(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$. Візьмемо на прямій X відрізок від 0 до 1, рис.7.1.



Якщо гравець A користується змішаною стратегією, а гравець B - чистою стратегією B_1 , то середній виграш зображується точкою на прямій B_1B_1 .

Рис.7.1. Ілюстрація до прикладу

При стратегії B_2 виграш гравця A буде визначатися прямою B_2B_2 .

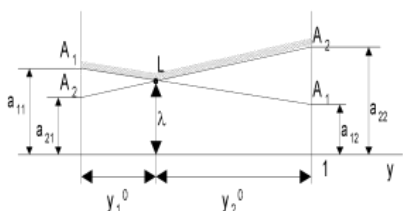
Необхідно знайти оптимальну стратегію гравця A - X_0 таку, яка забезпечувала б максимальний гарантований виграш при будь-якій поведінці супротивника.

Тобто беремо нижню межу B_1NB_2 і знаходимо на ній точку з максимальною ординатою (це буде точка N).

Ордината точки N є ціна гри L , а її абсциса дає - x_1^0 і x_2^0 оптимальну змішану стратегію гравця A . $X_0 = [x_1^0, x_2^0]^T$.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця B аналогічно визначається рішення на осі y , як показано на рис.7.2.

Знаходять верхню межу виграшу A_1, L, A_2 , на ній зазначають точку з найменшою ординатою L . Ордината L визначає ціну гри λ , а абсциса - оптимальну змішану стратегію

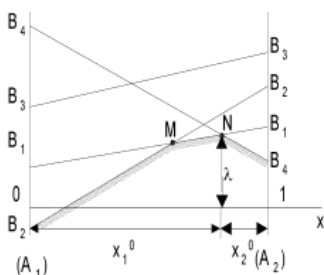


$$Y_0 = \|y_1^0, y_2^0\|^T$$

Рис.7.2. Ілюстрація до прикладу

Застосовуючи цю стратегію, гравець B забезпечує собі програвш не більше λ . Графічний метод можна використовувати і при вирішенні ігор типу $2 \times n$ або $m \times 2$.

У цьому випадку, в точках $x = 0$ і $x = 1$, відповідних стратегій A_1 і A_2 , проводяться перпендикуляри і будуються всі « n » стратегій противника, як наведено на рис.7.3, при цьому:



- Знаходять нижню межу виграшу B_2MNB_4 ;
- Зазначають у ньому точку N з найбільшою ординатою. Її ордината дорівнює ціні гри λ ;
- Проекції дадуть оптимальні змішані стратегії x_1^0 і x_2^0 .

Рис.7.3. Ілюстрація до прикладу

З малюнка видно, що оптимальними стратегіями для супротивника B будуть B_1 і B_4 пересічні в точці N . B_3 - явно не вигідна.

Для знаходження оптимальної стратегії Y_0 гравця B будують графічно тільки дві стратегії, рис.7.4.

Отримують оптимальну змішану стратегію $Y_0 = \|y_1^0, 0, 0, y_4^0\|^T$. Сукупність стратегій X_0 і Y_0 дає рішення гри.

Вводимо змінну $x_i' = \frac{x_i}{\lambda}$, т.к. $\lambda \geq 0$, напрямок нерівностей не зміниться

[illegible]

Так як $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ як сума незалежних ймовірностей, то $x_1' + x_2' + \dots + x_m' = \frac{1}{\lambda}$. Виграш λ буде максимально можливим, якщо праву частину рівності зробити мінімальною, тобто

$$F_A = x_1' + x_2' + \dots + x_m' = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \min \quad (7.16)$$

Це буде цільовою функцією задачі ЛП для гравця A . В якості обмеження будуть система (7.10) і природна умова $x_i' \geq 0$.

Аналогічно можна знайти стратегію гравця B . Очевидно, він прагне мінімізувати програш, отже, максимізувати величину $1/\lambda$. Це означає, цільова функція буде.

$$F_B = y_1' + y_2' + \dots + y_n' = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \max \quad (7.17)$$

Обмеження будуть

[illegible]

7.11. Розв'язок задач методом ітерацій

У практичних завданнях достатньо знаходити наближене рішення, що забезпечує середній виграш, близький до ціни гри.

Відомо, що ціна гри λ лежить між нижньою і верхньою ціною гри: $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

1. У разі якщо α і β близькі, то можна в якості оптимальних взяти змішані стратегії, відповідні α або β

2. Якщо α і β розрізняються суттєво, то наближене рішення гри в змішаних стратегіях можна знайти методом ітерацій.

Цей метод вирішення розрахований на використання ПК, тому збіжність методу повільна.

Метод полягає в наступному. Розігрується ситуація, що виникає при застосуванні стратегій, тобто розігрується партія.

Крок 1: гравець A вибирає довільно чисту стратегію A_j .

Крок 2: гравець B відповідає стратегією, найменш вигідною для гравця A , що застосував A_j , наприклад $\min_j a_{ij} \rightarrow B_j$.

Крок 3: гравець A відповідає стратегією, яка дає максимальний виграш при стратегії B_j гравця B , тобто $\max_i a_{ij} \rightarrow A_{i+1}$.

Крок 4: гравець B відповідає на пару ходів A_j і A_{j+1} тієї стратегією, яка дає найменший середній виграш на одну партію при цих двох стратегіях, наприклад B_{j-1} тощо.

Таким чином, на кожному кроці процесу ітерації кожен гравець відповідає стратегії, яка є оптимальною щодо всіх попередніх ходів супротивника.

Вводяться позначення

$$\lambda_B' = \frac{a_{(i+1)(j-1)} + a_{i(j-1)}}{k=2}, \quad \lambda_A' = \frac{a_{l(j-1)} + a_{lj}}{k=2}, \quad \lambda_{cp}' = \frac{\lambda_B' + \lambda_A'}{2}.$$

У таблиці - накопичений виграш за k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці в попередніх партіях.

λ_A - максимально накопичений виграш, поділений на число партій k .

λ_B - мінімально накопичений виграш, поділений на число партій k .

λ_{cp} - середній арифметичний виграш.

Розглянемо це рішення в таблиці.

k	I	$B_1^H \dots B_{j-1}^H B_j^H \dots B_n^H$	J	$A_1^H \dots A_i^H A_{i+1}^H \dots A_m^H$	λ_B	λ_{cp}	λ_A
1	i	$a_{i1} \dots a_{i(j-1)} a_{ij} \dots a_{in}$ $\min_j \rightarrow B_j$	j	$a_{1j} \dots a_{ij} a_{(i+1)j} \dots a_{mj}$ $\max_i \rightarrow A_{i+1}$	a_{ij}	$\frac{a_{ij} + a_{(i+1)j}}{2}$	$a_{(i+1)j}$
2	$i+1$	$a_{(i+1)1} \dots a_{(i+1)(j-1)} a_{(i+1)j} \dots a_{(i+1)n}$ + + + + $a_{i1} \dots a_{i(j-1)} a_{ij} \dots a_{in}$ $\min_j \rightarrow B_{j-1}$	$j-1$	$a_{1(j-1)} \dots a_{i(j-1)} a_{(i+1)(j-1)} \dots a_{m(j-1)}$ + + + + $a_{1j} \dots a_{ij} a_{(i+1)j} \dots a_{mj}$ $\max_i \rightarrow A_i$	λ_B'	λ_{cp}'	λ_A'

Заповнення таблиці продовжується до тих пір, поки λ_A і λ_B не наблизяться один до одного. Вони можуть відрізнятись на заздалегідь задану величину. Після цього розіграш партії припиняється.

Змішана стратегія однієї партії кожного гравця визначається як ймовірності застосування кожної чистої стратегії при розіграші цієї партії. Результуюча змішана стратегія визначається за результатами проведення цілої послідовності з k партій. При цьому підраховується з таблиці число випадків застосування гравцем кожної стратегії $S_1, \dots, S_i, \dots, S_m$ для гравця A і $S_1, \dots, S_j, \dots, S_n$ для гравця B . Число цих стратегій ділиться на максимальне число ітерацій:

$$p_i = \frac{S_i}{k_{\max}} \rightarrow x_i \quad - \text{це буде ймовірність застосування } i\text{-ї стратегії,}$$

$$q_j = \frac{S_j}{k_{\max}} \rightarrow y_j \quad - \text{ймовірність застосування } j\text{-ї стратегії.}$$

При цьому середній виграш, який припадає на одну партію, буде прагнути до ціни гри λ , а частоти застосування стратегій будуть прагнути відповідно до ймовірностей, визначених для змішаної стратегії гравців.

У процесі заповнення таблиці може зустрітись випадок, коли значення накопичених виграшів для всіх стратегій одного гравця рівні (або мало відрізняються). Це означає, що будь-яка поведінка супротивника дає один і той же виграш, саме ціну гри λ . Таким чином, відлік λ_A або λ_B в той же момент дає найбільш точне значення ціни гри λ .

І, незважаючи на те, що процес ітерацій необхідно продовжувати, значення ціни гри дозволяє визначити момент, коли процес ітерацій можна припинити.

Приклад 7.1: підприємство планує до масового випуску нову модель одягу. Попит на цю модель точно визначити не можна. Однак можна припустити, що його величина характеризується трьома можливими станами (Н - низький, С - середній, В - високий). Враховуючи ці стани, аналізуються три можливих варіанта випуску даної моделі (1000 шт., 1500 шт., 2000 шт.). Кожен з цих варіантів вимагає власних витрат і забезпечує, в кінці кінців, різний ефект. Прибуток, який отримує підприємство при певному обсязі випуску продукції і відповідному стані попиту, визначається матрицею

	Н	С	В
1000 шт.	22	22	22
1500 шт.	21	23	23
2000 шт.	20	21	24

Знайти обсяг випуску моделі одягу, який забезпечує середню величину прибутку при будь-якому стані попиту.

Розв'язання.

1) знаходять мінімальні елементи рядків (22, 21, 20) і серед них обирають найбільший (22); число

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$$

називається *нижньою ціною гри* або *максиміном*, а відповідна йому стратегія(рядок) – *максимінною*;

2) знаходять максимальні елементи стовпчиків (22, 23, 24) і серед них обирають найменший (22); число

$$\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$$

називається *верхньою ціною гри* або *мінімаксом*, а відповідна йому стратегія (стовпчик) – *мінімаксною*.

Теорема Нижня ціна гри завжди не перевищує верхню ціну гри, тобто $\alpha \leq \beta$.

Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається *грою з сідловою точкою*.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називається *ціною гри*.

У даному прикладі гра має сідлову точку, яка відповідає I варіанту випуску моделі одягу – 1000 шт. Такий обсяг випуску моделі забезпечує прибуток у 22 тис. грн. при будь-якому стані попиту.

Для гри з сідловою точкою розв'язком є знаходження мінімаксної і максимінної стратегій, які є оптимальними.

Якщо гра не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язку використовують змішані стратегії.

Приклад 7.2: Фермер на додатковій ділянці може посадити капусту або картоплю. Ринковий попит на ці овочі наперед визначити не можна, але можна припустити, що він характеризуватиметься двома станами: А – попит на овочі більший за попит на м'ясо; В – попит на овочі менший за попит на м'ясо. Вирощена фермером капуста однозначно йде на продаж, а картопля може виступати як самостійний кінцевий продукт і використовуватись для відгодовування свиней. Отже, залежно від можливого стану ринкового попиту, прибуток фермера виражається матрицею:

	Стан ринкового попиту	
	А	В
Вирощування		
Капусти	2	5
Картоплі	6	4

Визначити оптимальну стратегію поведінки фермера.

Розв'язання.

Складемо матрицю платежів

	А	В	мін. рядків
Капуста	2	5	2
Картопля	6	4	4
макс. стовп.	6	5	

Максимін $\alpha = 4$, мінімакс $\beta = 5$. Так як ці величини нерівні між собою, то гра не має рішення в чистих стратегіях. В даному випадку ціна гри знаходиться в інтервалі $[4; 5]$.

Припустимо, що фермера стратегія поведінки задається вектором $U = (u_1, u_2)$. Тоді, на основі теореми, яким би не був ринковий попит, він отримає середній вигравш, який дорівнює ціні гри, тобто:

$$2u_1^* + 6u_2^* = v \quad \text{при стані ринкового попиту А;}$$

$$5u_1^* + 4u_2^* = v \quad \text{при стані ринкового попиту В.}$$

Окрім двох записаних рівнянь відносно u_1^* і u_2^* додавимо рівняння, що зв'язує частоти u_1^* і u_2^* :

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Отримаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v \\ 5u_1^* + 4u_2^* = v \\ u_1^* + u_2^* = 1 \end{cases}.$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо: $u_1^* = 2/5$, $u_2^* = 3/5$, $v = 22/5$.

Отже, з точки зору фермера, для отримання максимально можливого середнього прибутку у розмірі $22/5$ тис. грн. необхідно $2/5$ додаткової площі засадити капустою, а $3/5$ - картоплею.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію для гравця В (оптимальний стан ринкового попиту). Нехай його стратегія задається вектором $Z = (z_1, z_2)$. Тоді

$$2z_1^* + 5z_2^* = 22/5$$

$$6z_1^* + 4z_2^* = 22/5$$

$$z_1^* + z_2^* = 1$$

Розв'язуючи систему з двох будь-яких рівнянь, взятих з останньої системи, отримуємо $z_1^* = 1/5$, $z_2^* = 4/5$.

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = (2/5; 3/5)$ і $Z^* = (1/5; 4/5)$, а ціна гри $v = 22/5$.

Приклад 7.3. Фермерське господарство може відправити продукцію рослинництва на три переробних підприємства. На кожному підприємстві з отриманої сировини можуть виготовляти три види продукції. Залежно від цього, можливий прибуток фермерського господарства задано матрицею (у тис. грн.):

	Вид продукції		
	I	II	III
I завод	1	2	1
II завод	1	2	2
III завод	2	1	0

Знайти оптимальну лінію поведінки фермерського господарства.

Розв'язання.

Складемо пару двоїстих задач лінійного програмування.

Пряма задача: знайти максимальне значення функції $F = x_1 + x_2 + x_3$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Двоїста задача: знайти мінімум функції $F^* = y_1 + y_2 + y_3$ за умов

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

З останньої симплексної таблиці розв'язку прямої задачі знайдемо оптимальні плани прямої і двоїстої задач

№	Базис	C ₆	P ₀	1	1	1	0	0	0
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
1	X ₄	0	¼	0	3/4	0	1	-1/2	0
2	X ₃	1	¼	0	3/4	1	0	½	-1/4
3	X ₁	1	½	1	1/2	0	0	0	1/2
			¾	0	1/4	0	0	½	1/4

З останньої симплексної таблиці видно, що вихідна задача має оптимальний план $X^*=(1/2; 0; 1/4)$, а двоїста задача - оптимальний план $Y^*=(0;$

$$v = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$1/2; 1/4)$. За формулами (5.8)-(5.10) ціна гри стратегії гравців $U^*=(0; 2/3; 1/3)$; $Z^*=(2/3; 0; 1/3)$.

Розтлумачимо отриманий розв'язок. Для отримання максимально можливого середнього прибутку у розмірі $4/3$ тис. грн. фермерське господарство має $2/3$ частини продукції рослинництва відправити на II переробне підприємство і $1/3$ частини продукції рослинництва – на III переробне підприємство. Співпраця з I переробним підприємством економічно невігідна.

З точки зору переробних підприємств у загальній структурі їх готової продукції $2/3$ частини має займати продукція I виду і $1/3$ – продукція III виду. Продукцію II виду випускати економічно невігідно.

Запитання та завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачу теорії ігор шляхом зведення її до задач лінійного програмування. Вхідні дані взяти згідно варіанту з таблиці 7.1.

Сільськогосподарське підприємство може засіяти дослідні поля пшеницею трьох сортів A1, A2, A3. Їх врожайність залежить від багатьох факторів, у тому числі і від погодних умов. Погодні умови характеризуються трьома станами: B1 (засушливе літо), B2 (нормальна кількість опадів), B3 (дощове літо). Для отримання максимального врожаю визначити оптимальні пропорції посівних площ пшениці по видах, якщо відома матриця середньої врожайності:

	B1	B2	B3
A1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
A2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
A3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Таблиця 7.1.

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	38	40	42	34	35	30	40	48	26
2	39	41	43	35	36	31	41	49	27
3	40	42	44	36	37	32	42	50	28
4	35	70	50	40	40	38	52	54	48
5	35	40	38	40	60	38	50	46	38
6	35	40	38	62	60	50	50	46	38
7	40	45	35	30	50	45	35	52	40
8	35	45	40	45	50	30	40	52	38
9	44	46	42	45	50	38	40	52	45

	a₁₁	a₁₂	a₁₃	a₂₁	a₂₂	a₂₃	a₃₁	a₃₂	a₃₃
10	42	46	44	38	50	45	45	52	40
11	42	46	44	44	50	46	45	52	40
12	40	46	44	48	58	44	48	57	42
13	50	64	42	40	52	50	53	58	50
14	51	65	43	39	51	49	54	57	49
15	49	63	40	40	52	50	52	50	47
16	48	60	42	42	50	52	54	55	52
17	47	55	40	42	52	52	50	58	48
18	48	56	41	41	50	51	51	58	49
19	44	54	46	41	50	51	50	52	48
20	43	53	45	42	51	52	49	51	47
21	42	52	44	41	50	48	48	50	46
22	45	51	43	39	49	44	42	50	48
23	44	50	42	40	50	45	43	51	49
24	46	52	44	38	48	43	44	52	50
25	43	49	41	40	50	45	41	39	37
26	42	49	41	40	46	44	36	39	47
27	42	48	44	40	46	44	44	47	39
28	43	49	45	39	45	43	45	48	40
29	43	49	45	39	45	43	45	48	44
30	45	49	42	39	45	43	45	48	41

Тестові завдання

1. З останньої симплексної таблиці розв'язку прямої задачі лінійного програмування знайти ціну гри за умов розмірності матриці гри (3x3):

№	Базис	C ₆	P ₀	1	1	1	0	0	0
				X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
1	X ₂	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
2	X ₃	1	1	1	0	1	0	1	0
3	X ₆	0	1/2	3/2	0	0	-1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

1. 2/3;
2. 3/2;
3. 2;
4. $\frac{1}{2}$.

2. Вибрати літеру

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

якщо правильні відповіді 1, 2 і 3	якщо правильні відповіді 1 і 2	якщо правильні відповіді 2 і 3	якщо правильні відповіді 2 і 4	якщо всі відповіді правильні
1. Задача теорії ігор – обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш 2. Конфліктна ситуація – це ситуація, учасники якої мають повністю або частково протилежні інтереси 3. Гра – це дійсний або формальний конфлікт, в якому беруть участь мінімум два учасники, кожен з яких прагне до досягнення особистих цілей 4. Правила гри – допустимі дії кожного гравця, спрямовані на досягнення деякої мети				

3. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильна відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
Оптимальна стратегія: 1. така, яка при багатократному повторенні гри забезпечує максимально можливий середній виграш 2. така, яка забезпечує максимально можливий середній виграш 3. така, яка при багатократному повторенні забезпечує мінімально можливий середній програш 4. така, яка забезпечує мінімально можливий середній програш				

4. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1, 2 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильні відповіді 2 і 4	Д якщо всі відповіді неправильні
1. Змішана стратегія – вектор, кожна з компонент якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії 2. Сума компонент змішаної стратегії дорівнює одиниці 3. Компоненти змішаної стратегії невід’ємні 4. Будь-яка гра з нульовою сумою може бути розв’язана у змішаних стратегіях				

5. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	Мінімакс	А.	Верхня ціна гри
2.	Максимін	Б.	Нижня ціна гри

6. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1, 2 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильні відповіді 2 і 4	Д якщо всі відповіді неправильні
1. мінімакс завжди не більший за максимін 2. максимін завжди не більший за мінімакс 3. у парній грі мінімакс завжди не більший за максимін 4. у парній грі завжди не більший за мінімакс				

7. Встановити відповідність у вигляді комбінації цифр і букв:

1.	Стратегія гравця	А.	Допустимі дії кожного гравця, спрямовані на досягнення деякої мети
2.	Платіж	Б.	Однозначний опис вибору гравцем кожної з можливих ситуацій, в якій він повинен зробити особистий хід
3.	Правила гри	В.	Кількісна оцінка ситуації
4.	Гра	Г.	Це дійсний або формальний конфлікт, в якому беруть участь мінімум два учасники, кожен з яких прагне до досягнення особистих цілей

У питаннях 8-15 вибрати правильну відповідь:

8. Гра – це:

- дійсний або формальний конфлікт;
- дійсний конфлікт;
- формальний конфлікт;
- формальний і неформальний конфлікт.

9. Гра – це:

- конфлікт, в якому беруть участь більше двох учасників;
- конфлікт, в якому беруть участь тільки два учасники;
- конфлікт, в якому беруть участь більше мінімум два учасники;
- конфлікт, в якому беруть участь скільки завгодно учасників, в тому числі і один.

10. Задача теорії ігор

- обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш;
- обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише збільшити його виграш;
- обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої не зменшить його виграш;
- обрати таку лінію поведінки даного гравця, відхилення від якої не впливає на його виграш.

11. Конфліктна ситуація:

1. ситуація, учасники якої мають частково протилежні інтереси;
2. ситуація, учасники якої мають повністю протилежні інтереси;
3. ситуація, учасники якої мають частково або повністю протилежні інтереси;
4. ситуація, учасники якої мають схожі інтереси.

12. У теорії ігор ситуація, учасники якої мають частково або повністю протилежні інтереси, називається:

1. конфліктною;
2. спірною;
3. змішаною;
4. забороненою.

13. Допустимі дії кожного гравця, спрямовані на досягнення особистих цілей, називають:

1. гра;
2. правила гри;
3. конфліктна ситуація;
4. задача теорії ігор.

14. Платіж:

1. кількісна оцінка ситуації;
2. якісна оцінка ситуація;
3. гра на гроші;
4. конфліктна ситуація.

15. Парна гра

1. гра, в якій беруть участь тільки дві сторони;
2. гра, в якій беруть участь не менше двох сторін;
3. гра, інтереси учасників якої протилежні;
4. гра, інтереси учасників якої схожі.

РОЗДІЛ 8. ПРИКЛАДНІ АГРАРНІ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

8.1. Природоохоронні аспекти природокористування

Взаємовідносини суспільства і природи полягають у тому, що фактори економічного зростання – трудові ресурси, засоби виробництва і природні ресурси – у комплексі використовуються суспільством для розвитку виробництва. Питання взаємовідносин суспільства і природи та використання природних ресурсів стають дедалі актуальнішими. І це зрозуміло, бо з розвитком виробництва вилучаються все нові багатства природи, зростає вартість сировини, збільшується кількість відходів, що викидаються у навколишнє середовище. Однак, і це очевидно, було б неправильно вирішувати проблеми збереження ресурсів і середовища шляхом припинення росту або навіть скорочення обсягів виробництва. Такі припущення суперечать закономірностям розвитку людського суспільства і практично нездійсненні. Взаємодія людини з природою у процесі виробництва та споживання для забезпечення існування людства загалом є об'єктивним явищем.

Отже, постають дві взаємопов'язані проблеми: перша – вплив обмеженості природних ресурсів на їх використання і розвиток суспільного виробництва, зростаюче забруднення середовища; друга – необхідність розробки комплексу заходів щодо ліквідації цієї небезпеки для подальшого розвитку суспільства.

Природокористування має загальний характер, оскільки будь-який вид діяльності людей викликає зміни природного середовища. Ускладнення взаємозв'язків у природних, виробничих і соціальних системах, зростання пріоритету природогосподарських зв'язків викликають необхідність їх регулювання. Людство протягом усієї своєї історії неодноразово вступало в протиборство з силами природи, що спричиняло кризові ситуації. Найтипівішими в минулому були продовольчі кризи.

Особливо гостро проблеми природокористування проявляються в умовах війни. Воєнні дії завдають довікіллю значної шкоди: руйнуються промислові та енергетичні об'єкти, зазнає пошкоджень транспортна інфраструктура, страждають сільськогосподарські угіддя, ліси, водні ресурси. Забруднення ґрунтів і води продуктами вибухів, паливно-мастильними матеріалами, токсичними речовинами та важкими металами має довготривалі наслідки і часто не є одразу помітним. Окремою проблемою стає мінування територій і масштабні пожежі, які не лише унеможливають господарське використання земель, а й створюють небезпеку для життя людей.

Під час війни пріоритети природокористування змінюються. На перший план виходять питання оборони та забезпечення базових потреб населення, що

нерідко призводить до відкладення екологічних заходів. Проте саме в таких умовах стає очевидною вразливість існуючих моделей господарювання, їхня надмірна залежність від ресурсів і недостатня здатність протистояти кризам. Війна фактично оголює ті проблеми, які в мирний час часто залишалися поза увагою.

Повоєнне відновлення неможливо звести лише до відбудови зруйнованих об'єктів. Воно має стати можливістю переглянути підходи до використання природних ресурсів і перейти до більш збалансованої моделі розвитку. Йдеться про очищення та рекультивацію забруднених земель, розмінування територій, відновлення лісів і водних екосистем, а також про модернізацію виробництва із застосуванням енергоощадних і екологічно безпечних технологій. Такі кроки є необхідними не лише з екологічної, а й з економічної та соціальної точки зору.

Важливу роль у цьому процесі відіграють державна політика та місцеві ініціативи. Чітке планування, системний екологічний моніторинг, контроль за використанням ресурсів і підтримка з боку міжнародних партнерів мають поєднуватися з відповідальністю бізнесу та свідомим ставленням громадян до навколишнього середовища. Без цього відновлення ризикує залишитися поверхневим і короткостроковим.

Отже, війна значно загострює екологічні проблеми, але водночас створює передумови для глибших змін. Переосмислення природокористування, формування екологічного світогляду та інтеграція екологічних пріоритетів у всі сфери життя можуть стати основою не лише для повоєнної відбудови, а й для сталого розвитку суспільства в майбутньому.

Глобальною є і проблема відходів. У широкому розумінні відходи – це все те, що людина викидає на планету в результаті господарювання, одержання енергії та всієї життєдіяльності. Це – вихлопні гази автомобілів, нечистоти промисловості і сільського господарства, побуту, дим та гази з труб. Необхідне пробудження громадських діячів, політиків, економістів, лікарів, технологів, зрештою – всіх людей. Усі життєві процеси в усіх державах повинні розглядатися насамперед з точки зору екології: потрібне не просто екологічне мислення, треба всіма доступними засобами формувати екологічний світогляд.

Природокористування включає об'єктивно зумовлений процес залучення людиною природних ресурсів до виробничої і невиробничої діяльності, їх відтворення та охорону. В сучасних умовах науково-технічного і соціального прогресу поняття природокористування стає дуже містким і не завжди однозначно, розуміється. Отже, термін «природокористування», адекватно відображаючи досить складний і багатогранний суспільно-природний процес в об'єктивній реальності, далеко не однозначний – він вживається, як мінімум, у п'яти основних значеннях:

1) людська діяльність щодо використання сил і ресурсів природи з метою виробництва матеріальних благ і різних послуг, тобто як всезагальний

процес праці. В такому розумінні природокористування рівнозначне поняттю «суспільне виробництво», а з урахуванням невиробничої сфери людської діяльності – навіть ширше за нього;

2) раціональне використання ресурсів і умов природного середовища, їх відтворення та охорона;

3) безпосереднє освоєння, експлуатація, відтворення та охорона природних ресурсів і умов конкретної території (району, окремої країни, групи країн, всього світу);

4) освоєння та експлуатація окремих видів природних ресурсів у локальному, регіональному і глобальному масштабах; У такому розумінні термін «природокористування» залежно від виду споживання природного ресурсу часто замінюється галузевими синонімами, без сумніву, вужчими за обсягом – водокористування, лісокористування, землекористування тощо;

5) синтетична прикладна наука, що розробляє загальні принципи будь-якої діяльності, пов'язаної з користуванням природою. Така диференціація досить відносна. В кожному окремому випадку вивчається один і той же об'єкт – процес використання людиною сил і ресурсів природи, але з різних боків і на різних рівнях галузевої, міжгалузевої і територіальної спільності. Серед перелічених значень терміну «природокористування» найширшим за обсягом є поняття, що відображає процес праці (суспільне виробництво), найвужчим – освоєння та експлуатація окремого виду природного ресурсу у вузькотериторіальному (локальному) масштабі. Класифікація основних видів природокористування можлива з позицій тісно взаємопов'язаних галузевого, компонентного, функціонального (комплексного) підходів. Принцип розвитку вимагає, щоб економічне дослідження велося за схемою: минуле–сучасне–майбутнє. Щоб зрозуміти суть економічного явища, треба знати його історію, без цього не можна побудувати теорію. Розглядаючи перспективи розвитку природокористування, слід орієнтуватися на виявлені під час дослідження зародки нового, передового, економічно та екологічно раціонального.

Економічні явища розвиваються відповідно до загального закону діалектики, перетворення кількісних змін в якісні, які є наслідком нагромадження кількісних змін. Кожна нова якість, що виникає, створює в своїх межах простір для нових кількісних змін. Ігнорування цього принципу в економіці природокористування може призвести до катастрофічних наслідків – переміщення окремих видів ресурсів із розряду відновлюваних у невідновлювані, невичерпних – у вичерпні. А невідповідність комплексу заходів щодо раціонального використання певного виду ресурсів відповідному їх розряду може спричинити їх безповоротне виснаження.

Важливою умовою наукового розуміння економічної дійсності в природокористуванні, прогнозуванні є знання причинно-наслідкових зв'язків, що існують в економіці природокористування, оскільки воно дає змогу передбачати і цілеспрямовано змінювати економічні явища. А висновки про причинно-наслідкові зв'язки в економіці та природокористуванні можуть

вважатися науковими, якщо вони обґрунтовані економічними факторами і базуються на масових статистичних даних. Саме такий методологічний підхід до економічних явищ і процесів дає змогу сформулювати і пояснити фундаментальні поняття і принципи економіки природокористування, а також правильно оцінити конкретні моменти розвитку цього процесу. Серед методів дослідження розрізняють загальнонаукові та конкретно-наукові, або спеціальні. Перші застосовуються ширше. Серед них центральне місце щодо застосування до економічних наук посідає метод наукової абстракції. Його схематично зображують як рух від конкретного (від явищ, які спостерігаються безпосередньо, від зовнішніх уявлень про них) до абстрактного, і потім сходження від абстрактного до конкретного. Наукове абстрагування полягає у відстороненні від зовнішніх, несуттєвих ознак явищ і виділенні в них загальних, суттєвих сторін (ознак), у пізнанні сутності явищ. Хоча абстрактне уявлення про явище є менш повним, воно дає змогу глибше зрозуміти в ньому головне, суттєве, дати наукове визначення явища. Абстрагування лежить в основі формування економічних понять, категорій. Значна частина, економічних категорій не може бути виявлена шляхом безпосереднього спостереження, а для проникнення в область цих явищ потрібне застосування наукового методу. У процесі наукового пізнання економічних явищ широко застосовуються аналіз і синтез. При аналізі відбувається розчленування економічних процесів і явищ на складові елементи, причому кожен елемент послідовно вивчається. Синтез полягає в уявному об'єднанні окремих елементів об'єкту. Прийоми аналізу і синтезу широко застосовують при вивченні структури явищ, які спостерігаються: витрат на природоохоронні заходи, виробничих фондів природокористувачів тощо. Своєрідним вираженням методу аналізу-синтезу є метод статистичних групувань – статистична сукупність поділяється на групи, а висновки формуються на підставі всієї сукупності. Експеримент є основним методом дослідження для природничих наук, однак в економічних науках він має допоміжне значення, причому не стільки через свою суть, як методу, скільки через складність і обмеженість застосування, адже експериментальний метод в економіці природокористування пов'язаний насамперед з небезпекою заподіяння непоправної шкоди природному середовищу, а можливо, і людям. Поряд із загальнонауковими методами, економіка природокористування, як наука, потребує своїх конкретних методів. З усієї сукупності конкретно-наукових методів, що використовуються в економічних науках, економіка природокористування застосовує наступні. Статистико-економічну обробку відомостей про явище, яке спостерігається. Ці відомості можуть бути одержані за допомогою спеціальних спостережень, документів, в яких фіксуються кількісні характеристики економічних явищ. Така обробка інформації включає складання зведених матеріалів, застосування простих і складних групувань, кореляційно-регресійного аналізу, виробничих функцій тощо.

Статистико-економічна обробка дає змогу: одержати матеріали, які характеризують розвиток або стан явища; виявити постійні зв'язки між явищами; з'ясувати кількісні зв'язки між факторами і результатами використання природних ресурсів за допомогою кореляційно-регресійного аналізу, визначити форми зв'язку. На цій підставі є змога розрахувати, наприклад, планові розміри природокористування за відомого рівня забезпеченості його факторами або потребу в факторах за планового рівня природокористування, також проводити наукове прогнозування та розв'язати інші завдання. Застосування виробничих функцій дає змогу прогнозувати перспективні варіанти використання того чи іншого виду природного ресурсу за тих чи інших значень факторних ознак. Методом порівняльних (варіантних) розрахунків може порівнюватись економічна ефективність різних природоохоронних заходів, екологобезпечних технологій виробництва. Порівняльні розрахунки можуть призначатися для порівняння нормативних і фактичних витрат з наступним з'ясуванням причин їх неспівпадання.

Для координації і взаємозв'язку складових досліджуваного явища, дотримання збалансованості кількісних пропорцій користуються балансовим методом дослідження. Цей метод відіграє важливу роль при складанні народногосподарських координаційних планів. В економіці природокористування математика застосовується через побудову економіко-математичних моделей – системи математичних символів і форм, яка має економічний зміст і покликана висвітлити найістотніші ознаки досліджуваного об'єкта, полегшити пізнання і визначити шляхи ефективного розвитку процесу. Математичне моделювання в економіці природокористування використовується тоді, коли на основі вихідної інформації за допомогою ПК визначають оптимальні кількісні виміри прогнозованих показників. Застосовуючи математику, слід пам'ятати, що йдеться не про заміну економічних методів дослідження математичними, а про вдосконалення математичного апарату і розширення матеріальної бази економічних методів. Крім того, слід мати на увазі, що економіка природокористування як наука має справу з нешкалованими явищами. В багатьох випадках зв'язок між явищами, хоч і є логічно безперервним, не отримує кількісного вираження. Теоретичний аналіз економіки природокористування є підставою формування вихідних умов і пояснення результатів математичного дослідження і без нього не можна з'ясувати, які саме величини і для чого слід обчислювати. Кількісно вимірювати можна величини лише однакової економічної якості. Достовірну фактичну базу для математичного аналізу економічної дійсності в природокористуванні може мати лише економічна наука.

8.2. Екологічні наслідки природокористування

Нова техніка і технологія, досягнення медицини, засоби масової інформації докорінно змінюють умови життя людей. Однак все частіше постає

питання про бажані, небажані та непередбачені наслідки науково-технічного прогресу. Особливо гострою є проблема співвідношення НТП і збереження природного середовища, яке є єдиною можливим середовищем життя людини. Забруднення природного середовища – це таке привнесення в геосистему різних речовин і сполук, за якого перевищуються граничні концентрації, а отже, і місткість геосистеми. Тут мова йтиме лише про технологічні процеси, хоч аналогічні наслідки можуть мати катастрофічні виверження вулканів, пилові бурі тощо. Отже, мають місце три проблеми: перша – відновленні після війни та додання екологічних наслідків, спричинених нею, друга – антропогенне безпосереднє забруднення навколишнього середовища; третя – збільшення масштабів водоспоживання. Багато технологій розроблено без урахування екологічного фактора, часто вони малоефективні щодо одержання кінцевого продукту, але завдають значної шкоди природі.

Війна в Україні стала не лише гуманітарною та економічною катастрофою, а й потужним чинником руйнування природного середовища. Унаслідок бойових дій різко зросло антропогенне навантаження на довкілля, що суттєво змінило характер і масштаби природокористування. Те, що в мирний час формувалося десятиліттями, за короткий період було зруйновано або поставлено під загрозу тривалого відновлення.

Одним із найсерйозніших наслідків є забруднення земельних ресурсів. Вибухи боєприпасів, руйнування військової та цивільної техніки, розливи пального призводять до накопичення у ґрунтах важких металів, токсичних сполук і залишків вибухових речовин. Значні площі сільськогосподарських угідь виявилися замінованими або фізично пошкодженими, що робить їх непридатними для обробітки і створює пряму загрозу для життя людей. У результаті порушується не лише землекористування, а й продовольча безпека країни.

Суттєвих втрат зазнають водні ресурси. Руйнування дамб, гідротехнічних споруд, систем водопостачання і каналізації призводить до забруднення річок і підземних вод. У водне середовище потрапляють нафтопродукти, хімічні речовини, промислові стоки, що погіршує якість питної води та завдає шкоди водним екосистемам. У прифронтових регіонах водокористування часто здійснюється в екстремальних умовах, без можливості дотримання екологічних норм.

Не менш відчутними є наслідки для лісових та природно-заповідних територій. Масштабні пожежі, спричинені обстрілами, знищують ліси, степи, унікальні природні ландшафти. Частина природоохоронних територій опинилася в зоні бойових дій або тимчасової окупації, що унеможливило їх належну охорону та моніторинг. Порушуються природні екосистеми, зникають місця існування диких тварин, зменшується біорізноманіття.

Війна також негативно вплинула на якість атмосферного повітря. Викиди від вибухів, пожеж, зруйнованих промислових об'єктів і пересування військової техніки спричиняють локальне й регіональне забруднення повітря.

У багатьох випадках ці викиди мають накопичувальний ефект, що становить небезпеку для здоров'я населення, особливо у містах і промислових регіонах.

Окремої уваги потребує проблема відходів війни. Руйнування будівель, інфраструктури, техніки призвело до утворення мільйонів тонн будівельного та небезпечного сміття. Такі відходи часто містять азбест, важкі метали, хімічні речовини й потребують спеціальних підходів до утилізації. Неврегульоване поводження з ними створює додаткові екологічні ризики у процесі повоєнного відновлення.

Таким чином, війна докорінно змінила умови природокористування в Україні, перетворивши екологічні проблеми на один із ключових викликів національної безпеки. Подолання її наслідків вимагатиме тривалих зусиль, науково обґрунтованих рішень і поєднання відновлення економіки з обов'язковим урахуванням екологічних пріоритетів. Лише за таких умов можливе відновлення природного потенціалу країни та створення передумов для сталого розвитку у повоєнний період.

Розширення масштабів виробництва без розв'язання завдань раціонального природокористування стає вже зараз технічно й економічно неможливим, оскільки погіршення природного середовища є також і погіршенням матеріальних умов виробництва. При цьому не менш важливий інший, зворотний зв'язок – вплив природного середовища на свідомість людей, що спонукає формування нових розумних запитів суспільства орієнтованих на ощадливе ставлення до природи.

8.3. Формалізація витрат на екологію

Відтворення ресурсів природи, її охорона вимагають суттєвих матеріальних витрат, економічна і соціальна ефективність яких повинна бути достатньо високою для того, щоб суспільство могло їх собі дозволити. В зв'язку з цим виникає проблема економічної та позаекономічної оцінки впливу людини на природу. Проблема ця досить багатогранна, оскільки включає область взаємного проникнення і взаємодії природи і суспільства, а методика оцінки результатів цієї взаємодії ще недостатньо розроблена. Важливою складовою частиною розробки оцінок впливу на природу є значення системи показників, причому розв'язання різнорідних соціально-економічних завдань вимагає застосування різних видів оцінок. Економічна оцінка – це оцінка змін в економіці, що виникають при певному впливі внаслідок порушення основних функцій природи, тобто вона відображає вартість заходів на підтримання оптимального стану природної, соціальної і господарської підсистем та вартість збитків від антропогенних впливів. Об'єктом економічних оцінок можуть бути всі види наслідків господарської діяльності (екологічні, соціальні, господарські), але тією мірою, якою вони здійснюють вплив на економічне життя суспільства. Серед різних видів економічних оцінок стану природного середовища частіше використовується оцінка екологічних витрат, викликаних з допущеним рівнем екологічних порушень.

Здійснення природоохоронних заходів, як і будь-яких інших соціальних заходів, вимагає витрат, але їх нездійснення також тягне за собою витрати. Ці витрати є двома важливими складовими екологічними витрат. Перша складова – витрати на природоохоронні заходи в місці потенційного виникнення екологічних порушень. До них належать витрати на попередження забруднень, ерозійні заходи, тощо. Друга складова – економічні збитки від екологічних порушень, що виникають внаслідок відмови від природоохоронних заходів (або недостатніх масштабів їх здійснення). Вони складаються з витрат на компенсацію сировинних витрат з газами, що відходять, твердими відходами, стічними водами, а також із витрат на попередження і ліквідацію несприятливого впливу на реципієнтів (об'єкти, яким завдаються збитки), і в цілому на природне середовище, що проявляється в зниженні цінності ландшафтів (рекреаційної, середовищезахисної), погіршенні умов роботи людей, підприємств, техніки, втратах робочого часу пов'язаних з підвищеною захворюваністю.

Тому економічна оцінка екологічних витрат E обчислюється за формулою:

$$E = B_z + 3b_{\phi},$$

де B_z – витрати на здійснення природоохоронних заходів; $3b_{\phi}$ – фактичні збитки, що завдаються господарству і населенню після проведення або в результаті не проведення природоохоронних заходів у вартісному вираженні. Якщо самі природоохоронні витрати (перша складова екологічних витрат), як правило, функціонально (детерміновано) залежать від масштабів і характеру попереджувальних екологічних порушень і тому визначаються з найбільшим ступенем достовірності, то економічні збитки не піддаються однозначному визначенню і розглядаються у вигляді діапазону можливих значень для різних комбінацій параметрів, що характеризують об'єкти, на які діють екологічні порушення (чисельність і віковий склад населення, характер його зайнятості, забезпеченості харчуванням, вартість основних фондів тощо). Ці витрати можуть не збігатися за місцем і часом, їх виникнення з екологічними порушеннями, що їх викликали. Тому економічні збитки є за своєю природою стохастичною величиною, яка піддається обчисленню лише з тим чи іншим ступенем ймовірності. В цьому полягає головна трудність визначення вказаної компоненти екологічних витрат. Складові економічної оцінки перебувають між собою у функціональній залежності (при збільшенні витрат за однією з цих складових можна добитися зниження витрат за іншою) і взаємно доповнюють одна одну. Залежно від стратегії виділяють наступні модифікації економічних оцінок. Якщо внаслідок природоохоронних заходів досягнуто нормативної якості середовища, тобто повністю забезпечується відтворення

середовищної і ресурсної функції природи, тоді $E = B_z$. У випадку, якщо природоохоронні заходи не проводяться, економічна оцінка збігається з

можливими економічними збитками і має вигляд $E = 3\phi_{\text{мож}}$, де $3\phi_{\text{мож}}$ – можливі економічні збитки. Якщо природоохоронні заходи є багатоцільовими, то в економічній оцінці враховується додатковий економічний ефект від їх проведення. До багатоцільових належать, наприклад, роботи по лісовідновленню, які не лише збільшують продуктивність лісів та забезпеченість лісовими ресурсами, а й дають змогу, попередити виникнення і розвиток прискореної ерозії. Запровадження маловідходної технології знижує масштаби забруднення середовища і забезпечує більш повну утилізацію матеріально-енергетичних ресурсів. У цьому випадку економічна

оцінка має вигляд $E = B_{\phi} + 3\phi_{\phi} - \Delta E$, де ΔE – додатковий економічний ефект від природоохоронних заходів, багатоцільових за своїм призначенням. Економічно оцінити господарські наслідки можна, як правило, лише частково. Так, при погіршенні умов праці і відпочинку через деградацію ландшафтів можна одержати економічне вираження на основі обліку його непрямого впливу на суспільну продуктивність праці. Втрати сільського господарства від забруднення природного середовища можуть проявлятися в зниженні урожайності, продуктивності худоби тощо. Збитків природному середовищу завдають не лише забруднення, а й вирубування лісів, організація судноплавства, інтенсивне ведення сільського господарства та інша виробнича діяльність. Отже, економічні збитки проявляються в багатьох формах на всіх рівнях народного господарства.

Є багато визначень і методик визначення збитків. Послугуючись ними, треба пам'ятати, що не можна соціально-економічні збитки зводити лише до матеріальних. Еколого-економічні збитки відображають можливі народногосподарські втрати від природокористування і є сумою додаткових витрат на відтворення і встановлення окремих видів ресурсів у певному регіоні до рівня, якого вони сягали перед здійсненням природоохоронних заходів. Слід мати на увазі, що збитки – це не реальні матеріальні блага, не створена вартість, а матеріальні блага і вартість, які могли б бути створені в процесі експлуатації навколишнього середовища. Тому збитки – це не частина сукупного суспільного продукту. Збитків зазнають передусім люди. Виходячи з цього, під еколого-економічними збитками слід розуміти різницю між сукупним суспільним продуктом, який міг би бути одержаний на основі раціонального використання природного середовища, і сукупним суспільним продуктом, одержаним при нераціональному його використанні. Саме недоодержаний сукупний суспільний продукт суспільство змушене компенсувати. А збитки на рівні госпрозрахункового підприємства можуть проявлятися у витраті ресурсів, збільшенні витрат, зменшенні чистого доходу, отже, слід розмежовувати збитки суспільству і збитки госпрозрахункового підприємства від нераціонального природокористування. Витрати, спрямовані на компенсацію збитків – непродуктивні, а спрямовані на попередження економіко-екологічних збитків – продуктивні. Перші – «пасивні» витрати.

Другі – «активні». Добре, якщо активні випереджають пасивні. Відношення збитків від нераціонального природокористування у вартісному виразі до всього створюваного суспільного продукту (ССП) – рівень розвитку охорони навколишнього середовища, а також ступінь негативного впливу виробничої

діяльності на природу (K).
$$K = \frac{3}{ССП}$$

При цьому K залежатиме від структури ССП. Чим менше екологічно небезпечної продукції виробляється суспільством, тим менше збитків, а отже,

і показник K . В ідеалі $K \rightarrow 0$. Це стане можливим, коли буде створена принципово нова екологічна технологія. Чим вищий рівень розвитку продуктивних сил, токсичніший забруднювач, вищий ступінь використання середовища, тим більше збитків буде завдано вибуттям природного ресурсу. Збитки залежать також від властивостей самого середовища і ступеня його використання. Чим триваліший період, протягом якого здійснюється несприятливий вплив на природне середовище, тим більше збитків завдається суспільству. Велике значення має встановлення конкретного розміру збитків. Методика розрахунку досить недосконала. Економічні збитки завжди є нижчими порівняно з реальними (неврахована частина становить 30–40%). Частина їх не враховується через неможливість при сучасному розвитку економічної науки у вартісній формі виразити всі види натуральних збитків з точки зору витрат майбутньої праці. Не узагальнена також методика визначення збитків, що завдаються земельним та водним ресурсам. В одних джерелах їх пропонують оцінювати за втратами валової продукції, в других – за приведеними витратами на ліквідацію наслідків забруднення і на відтворення втраченої продукції, в третіх – за зміною економічної оцінки забрудненого ресурсу.

Однак загальний розмір економічних збитків, його точний прогноз у майбутньому абсолютно необхідні, – для визначення коштів на заходи з охорони природного середовища в країні, а також для оцінки раціонального природного користування на госпрозрахунковому підприємстві. В основу методики визначення еколого-економічних збитків слід покласти оцінку природних ресурсів. Адже, по суті, збитки пов'язані з нераціональним використанням природних ресурсів, а часто і з їх незворотною втратою. Тому її оцінку слід визначати через ціну відтворення втраченого (або такого, що втрачається) ресурсу. Така оцінка може лягти в основу плати за нераціональне природокористування.

8.4. Моделювання еколого-економічних аспектів землекористування в рілльництві

В умовах земельної реформи, переходу на багаторівневу економіку ринкового типу, розвитку різних форм землеволодіння і землекористування, впровадження економічного механізму регулювання земельних відносин

суттєво зростають обсяги землевпорядних робіт і пред'являються підвищені вимоги. При цьому доводиться стикатися з такими завданнями, ефективне і оперативне вирішення яких практично неможливо без використання економіко-математичних методів і електронно-обчислювальних машин. Економіко-математичні методи і моделювання в землевпорядкуванні дозволяють вирішувати велике коло завдань, пов'язаних з оптимізацією територіальної організації сільськогосподарського виробництва з урахуванням агроекологічних властивостей землі, установленням раціональних розмірів і структури землеволодінь і землекористувань, оптимізацією трансформації і покращення угідь, розміщенням сівозмінь, підвищення родючості ґрунтів, проектуванням системи протиерозійних заходів.

Таким чином, землекористування як екологічна система – це територіальний комплекс оптимальних взаємозв'язків ґрунту, організму і атмосфери через склад і структуру угідь, систему землеробства, повітряне середовище.

Способів та методів, які дозволяють виявити зв'язки дійового управління з кінцевим результатом функціонування землекористування, може бути багато. Але найбільш прийнятними методами для вирішення цього завдання є активні і пасивні експерименти. Ці методи, в принципі, дозволяють вивчити всю різноманітність явищ і процесів, які проходять в землекористуванні "людина - земля - рослина - наземний шар атмосфери", встановити закономірності розвитку продуктивних сил суспільства, їх вплив на земельні ресурси, динаміку ґрунтової родючості, реакцію рослинних організмів на сукупність умов вирощування, факторів антропогенного характеру і т.п.

Проте, як активний експеримент, так і спостереження за тими чи іншими явищами в агроєкосистемах, неприйнятні, оскільки потрібно швидко і оперативно вмішуватися в виробничі процеси та земельні відносини, раціонально вибирати всю сукупність дій управління.

Метод математичного моделювання довів свою виключну ефективність при вирішенні різних, досить складних, науково-технічних і соціально-економічних проблем. Незвична складність взаємозв'язків природи, багатьох компонентів біологічного, технологічного, технічного, (економічного і соціального характеру в землекористуванні, змушують звернутись до математичного моделювання. При цьому математичне моделювання повинно поєднуватися з лабораторним (польовим) експериментом, спрямованим на одержання параметрів математичних моделей, а також поєднуватися з натурними спостереженнями.

Рівень територіальної організації агроєкосистеми залежить від умов експлуатації агроландшафтів як системи. Тому, в даний час основна увага повинна приділятися моделям, які орієнтовані на вирішення завдань

(оптимального управління, з врахуванням тієї ролі, яку може відігравати землекористування. Методологічною основою оптимізації взаємодії людини з землею як ресурсом є концепція економічного росту з одержанням оптимально можливого приросту продукції за умови мінімальних або нульових екологічних збитків, як прояву оптимального врегулювання еколого-економічних взаємовідносин. Основними принципами екологізації економіки повинні бути:

- екологічно-безпечна господарська діяльність;
- мінімальна дія на землю, відмова від необґрунтованих проектів перетворення ландшафтів з метою "освоєння нових або покращення існуючих угідь";
- допустимо обмежене вилучення цінних сільськогосподарських угідь;
- збереження й окультурення природних агроландшафтів, порушених людиною в процесі попередньої нерозумної діяльності;
- земельний моніторинг, контроль за використанням і охороною земель, економічна оцінка екологічних збитків;
- оптимізаційний прогноз і програмування будь-яких видів господарської діяльності і прогноз наслідків.

Основою оптимізації сільськогосподарського землекористування є раціональні для даного регіону їх розміри, організація раціонального складу земельних угідь і посівних площ (структури агроценозів), раціональна організація території з врахуванням екологічно безпечного господарювання на землі, забезпечення відтворення родючості ґрунтів, відновлення продуктивності еродованих земель, одержання необхідних обсягів сільськогосподарської продукції без пошкодження родючого шару землі. Отже, оптимізація землекористування - це така організація виробничого процесу, при якій земля використовується найбільш раціонально, її продуктивні властивості забезпечують хоча і не максимальний, але екологічно-стійкий ефект при збереженні родючості ґрунтів.

При вирішенні питань організації використання землі з екологічних позицій, визріла необхідність використати екосистемний підхід. При цьому територію, яка організовується, слід розглядати як складну агроєкосистему різних рівнів структурно-ландшафтової організації: від окремої ділянки (поля) до крупних територіальних одиниць, які включають агроландшафти та їх поєднання.

Фундаментальні дослідження в землекористуванні повинні вирішити складне завдання оптимізувати земельні відносини, встановити закономірності енерго- і масообміну в агроєкосистемах і спорити теоретичний фундамент для розробки прийомів і способів направленої регулювання цих процесів. Для вирішення цього завдання необхідно переглянути існуючі уявлення про землекористування родючість ґрунту та її відновлення, як об'єкт досліджень. Метою розробки моделей родючості ґрунту є впорядкування

знань про родючість, оцінка впливу на стан використання землі, а також можливість оптимального розміщення сільськогосподарських культур у межах господарств на ґрунтах різної родючості. Екологозабезпечуючий напрям ведення сучасного сільського виробництва потребує отримання високих врожаїв при дбайливому ставленні до землі, підтримці й поновленні родючості ґрунту. Моделі родючості є наближеним відображенням властивостей ґрунту задовольняти потреби сільськогосподарських рослин за певних екологічних і соціально-економічних умов. Розроблена схема системи моделей родючості ґрунту на основі моделі оптимізації розміщення сільськогосподарських культур дає можливість оптимізувати основні процеси родючості ґрунту (рис.8.1).

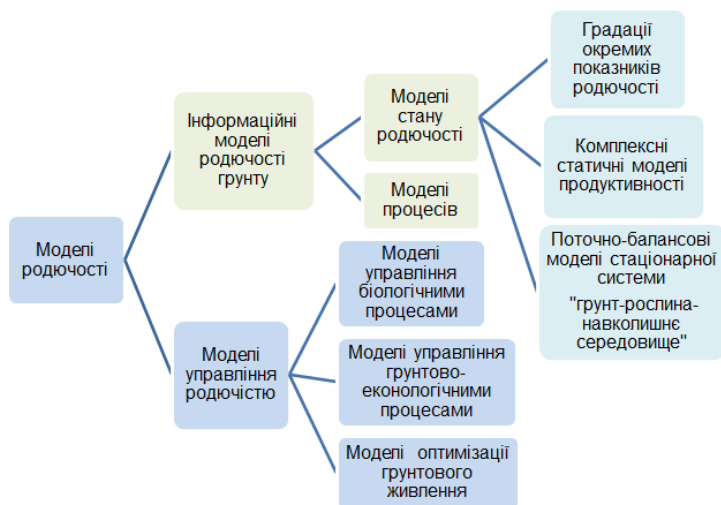


Рис.8.1. Схема варіантів моделей родючості ґрунту

Науковцями розроблено кілька класів економіко-математичних моделей розміщення культур, що мають спільну мету, але відрізняються підходами до деталізації проблеми та урахування індивідуальних умов моделей.

Цільова функція екологічної економіко-математичної моделі є лінійною формою ,яку треба максимізувати

$$Z = \sum_{i \in M_1} \sum_{j \in M_2} t_{ij} x_{ij} \rightarrow \max,$$

де M_1 – множина земельних ділянок;

M_2 – множина сільськогосподарських культур;

t_{ij} – економічна ефективність вирощування продукції j -ї сільськогосподарської культури на i -му полі.

Враховуючи всі особливості моделювання цього процесу і специфіку постановки нашої задачі, еколого-економічна модель оптимізації ґрунтового живлення сільськогосподарських культур матиме вигляд [4]:

Максимізуємо вихід валової продукції з одиниці площі:

$$Z = \sum \sum Y_{ij} X_{ij} \rightarrow \max$$

де $i \in M_1$ $j \in M_2$

M_1 – множина земельних ділянок ($i = n$);

M_2 – множина сільськогосподарських культур ($j = m$);

Y_{ij} – економічна ефективність вирощування продукції j -ї сільськогосподарської культури на i -му полі.

X_{ij} – шукана площа посіву j -ї сільськогосподарської культури на i -му полі;

S_i – площа кожної з n земельних ділянок;

S_j – площа кожної з m культур в структурі посівних площ;

ξ_{ij} – логічний коефіцієнт, що передбачає можливість розміщення j -ї культури на ґрунті i -ї ділянки;

Оптимальне розміщення сільськогосподарських культур має задовольняти такі умови:

1. По використанню ріллі:

$$\sum \xi_{ij} X_{ij} = S_i, \quad (i \in M_1)$$

$j \in M_2$

2. По структурі посівних площ:

$$\sum \xi_{ij} X_{ij} = S_j \quad (j \in M_2);$$

$i \in M_1$

3. По області допустимих значень змінних:

$$S_{ij}^{\min} \leq X_{ij} \leq S_{ij}^{\max};$$

де $S_{ij}^{\min}$, $S_{ij}^{\max}$ – допустимі мінімальне та максимальне значення змінних.

4. Природні умови невід'ємності змінних:

$$X_{ij} \geq 0, \quad (i \in M_1 \quad j \in M_2)$$

Розроблена методика дозволяє при визначенні урожайності Y_{ij} j -ї сільськогосподарської культури на i -му ґрунті враховувати складність мінерального складу ґрунту. При цьому урожайність яка забезпечена наявністю в ґрунті k -го компонента поживності розраховується за формулою:

$$Y_{kij} = \frac{\alpha_{ki} * E_i * f_{kij}}{\phi_{kj}}, \quad \begin{matrix} k \in M, \\ i \in M_1, \\ j \in M_2 \end{matrix}$$

де

M – множина компонентів поживності;

k – порядковий номер компонента поживності, $k \in M$;

M_1 – множина земельних ділянок;

M_2 – множина сільськогосподарських культур

i – порядковий номер земельної ділянки, $i \in M_1$;

j – порядковий номер сільськогосподарської культури, $j \in M_2$;

a_{ki} – вміст k -го компонента поживності в ґрунті i -ї земельної ділянки (мг/на 1 кг ґрунту).

E_i – коефіцієнт переводу в кг діючої речовини;

f_{kij} – коефіцієнт використання k -го компонента поживності на i -му ґрунті j -ю сільськогосподарською культурою.

g_{kij} – винос k -го компонента поживності одиницею врожаю сільськогосподарської культури.

У зв'язку з тим, що швидкість приросту біомаси того чи іншого виду рослин лімітується компонентом поживності, який є в екологічному мінімумі, а в залежності від споживання баланс між різними компонентами може змінюватись і в екологічному мінімумі будуть знаходитись різні хімічні речовини, Y_{ij} – урожайність j -ї сільськогосподарської культури на i -му ґрунті визначається за формулою:

$$Y_{ij} = \min Y_{kij} = \min \frac{d_{ki} E_i f_{ij}}{g_{kij}}$$

Величина Y_{ij} є коефіцієнтом ефективної родючості ґрунту і показує яка частина врожаю може бути сформована за рахунок доступних для рослин запасів поживних речовин ґрунту. Розроблена трансформаційна модель дає можливість представити її у вигляді транспортної задачі, бо культури виконують роль споживача, а ділянки різної родючості – джерела чи постачальника. При цьому виконується імітація, що кожна сільськогосподарська культура повинна спробувати “зростати” на кожній з ділянок ґрунту і при оптимальному плані розміститися певними окремими площами по полях так, щоб найбільш “задовольнити” кожную культуру щодо поживності і виконати низку обмежень задачі.

Розроблена економіко-математична модель порівняно з іншими екологічними моделями розміщення характеризується її компактністю, достатньо повно враховує всі агротехнічні умови та вимоги ґрунтів і сільськогосподарських культур.

Тепер повертаємося до постановки задачі. Розроблена трансформаційна імітаційна модель дає можливість представити її у вигляді транспортної задачі, бо культури виконують роль джерела чи постачальника, а ділянки різної родючості – споживача. Одержання оптимального плану розміщення сільськогосподарських культур відбувається в кілька етапів: на першому - досліджуються показники економічного та агрохімічного обстеження господарства; наступним важливим етапом реалізації економіко-

математичної моделі є розрахунок показників критерію оптимальності (t_{ij}); заключний етап – післяоптимізаційний аналіз отриманого плану розміщення сільськогосподарських культур на полях сівозмін господарства, а на його основі – висновок про можливість збільшення виходу валової продукції за рахунок оптимізації ґрунтового живлення та виконання екологічних вимог щодо використання орної землі.

Зростання продуктивності площі посіву є результатом дії багатьох факторів – підвищення культури землеробства і організації виробництва, зміцнення його матеріально-технічної бази, поліпшення технології використання мінеральних і органічних добрив тощо.

Визначення норм і співвідношень добрив під сільськогосподарські культури – складний багатоплановий процес, який повинен враховувати конкретні показники родючості ґрунтів, рівень запланованої урожайності сільськогосподарських культур, кліматичні й організаційно-економічні передумови вирощування сільськогосподарських культур тощо. Щоб забезпечити відновлення родючості ґрунтів та екологічної стійкості навколишнього середовища слід вносити мінеральні добрива на балансовій основі з метою зберегти рівновагу елементів живлення в агроценозах.

Оптимізація доз добрив під сільськогосподарські культури проводиться з урахуванням економічних показників та обов'язковим економічним ефектом. В основу запропонованого диференційованого методу розрахунку необхідної кількості добрив під сільськогосподарські культури покладено принцип нормування внесення добрив. Прогнозування показників урожайності конкретних культур враховує нелінійний характер причинно-наслідкових зв'язків у системі “родючість ґрунту - добрива - врожай”.

Методика розрахунків полягає в тому, що спочатку визначають ту частину врожаю, для якої буде достатньо поживних речовин, що є в ґрунті за спеціально розробленими виробничими функціями. Основними етапами вказаної роботи є вибір необхідної функціональної залежності між урожайністю сільськогосподарських культур, застосуванням добрив та іншими факторами. Критеріями вибору відповідних залежностей, які найоб'єктивніше характеризують вплив добрив на врожайність є коефіцієнт кореляції при прямолінійному типі зв'язку і кореляційне відношення – при криволінійному.

Інтенсивне землеробство передбачає не тільки одержання високих врожаїв, а й підтримання та підвищення родючості ґрунтів, чого можна досягти за позитивного балансу гумусу й поживних елементів.

Розроблено низку методів, які допомагають вирішувати дану проблему, проте дійсне значення добрив у процесі сільськогосподарського виробництва можна правильно зрозуміти лише у взаємозв'язку з іншими факторами, що формують рівень урожайності сільськогосподарських культур у межах одного і того ж періоду.

Поряд з цими дослідженнями встановлено, що при забезпеченні потенційних технологічних і організаційних економічних передумов в Україні реально існують можливості для збільшення формування валового і товарного виробництва окремих видів продукції.

При забезпеченні вимог технології, впровадженні прогресивних прийомів організації праці, раціональному регулюванні водного режиму аграрні сільськогосподарські підприємства мають реальні матеріальні передумови для збільшення виходу продукції з одиниці площі.

План використання органічних добрив повинен забезпечувати відновлення гумусу, як основного показника родючості ґрунту. Мінеральні добрива є чинником управління мінеральним живленням рослин, тобто доповнення недостатньої кількості в ґрунті NPK до оптимального рівня для конкретної сільськогосподарської культури.

Задача полягає в тому, щоб скласти план оптимального використання обмежених фондів органічних та мінеральних добрив, який би забезпечив найповніше відновлення гумусу та мінеральних поживних компонентів у ґрунтах господарства й отримання на цій основі високих урожаїв сільськогосподарських культур.

Для вирішення поставленого завдання необхідно побудувати економіко-математичну модель оптимізації використання фондів добрив і реалізувати її на ПЕОМ.

Всі ці умови враховані в динамічній економіко-математичній моделі оптимізації розподілу обмежених фондів органічних і мінеральних добрив під сільськогосподарські культури. Для формалізації умов економіко-математичної моделі використані такі позначення:

J – множина сільськогосподарських культур;

j – порядковий номер сільськогосподарської культури $j \in J$;

I – множина земельних ділянок (полів);

i – порядковий номер поля, $i \in I$;

L – множина видів органічних добрив ;

l – порядковий номер видів органічних добрив, $l \in L$;

R – множина видів мінеральних поживних речовин;

r – порядковий номер мінерального поживного елемента, $r \in R$;

μ_j – мінералізація гумусу врожаєм j -ої сільськогосподарської культури;

$P_j^{(1)}$ – кількість поверхневих залишків j -ої сільськогосподарської культури;

$P_j^{(2)}$ – кількість кореневих залишків j -ої сільськогосподарської культури;

P_j – кількість рослинних залишків j -ої сільськогосподарської культури,

$P_j = P_j^{(1)} + P_j^{(2)}$;

K – коефіцієнт гуміфікації рослинних залишків;

$K_{jr}^{(1)}, K_{jr}^{(2)}$ – вміст r -ої поживної речовини відповідно в поверхневих та кореневих залишках j -ої сільськогосподарської культури у відсотках на абсолютно суху речовину;

B_{rj} – винос r -ого поживного елемента j -ою культурою;

K_{jir} – коефіцієнт використання r -ої поживної речовини j -ою сільськогосподарською культурою з мінеральних добрив на i -тому полі;

K_{jir}^r – коефіцієнт використання r -ої поживної речовини j -ою сільськогосподарською культурою з ґрунту i -ого поля;

K_r – коефіцієнт використання r -ої поживної речовини з органічних добрив;

K_{rl} – кількість діючої речовини (д.р.) r -ого виду в одиниці маси органічних добрив l -ого виду;

K_l – вміст сухої органічної речовини в одиниці маси органічних добрив l -ого виду;

η_{ir} – вміст r -ого поживного елемента в ґрунті i -ого поля, кг/1кг ґрунту;

Π_i – коефіцієнт переведу (з кг/1 кг ґрунту в кг д.р.) для ґрунту i -ого поля;

Z_{ir} – запаси r -ої поживної речовини на 1 га i -ого поля;

S_i – площа i -ого поля;

F_l, F_r – фонди органічних добрив l -ого виду та мінеральних добрив r -ого виду;

W_j – плановий обсяг виробництва продукції j -ої сільськогосподарської культури;

$u_{ij}^{\min}, u_{ij}^{\max}$ – область допустимих значень зміни урожайності j -ої сільськогосподарської культури на i -му полі;

c_j – ціна 1 ц продукції j -ої сільськогосподарської культури;

d_l, d_r – ціни одиниці маси органічних добрив l -того виду та мінеральних добрив r -ого виду;

t – період часу.

Невідомі величини:

X_{ij} – урожайність j -ої сільськогосподарської культури на i -ому полі;

Z_{jir} – кількість мінеральних добрив r -ого виду, яку необхідно внести під j -у культуру на i -ому полі;

Y_{jil} – кількість органічних добрив l -ого виду, яку необхідно внести під j -у культуру на i -му полі.

Умови задачі економіко-математичної моделі

1. Умова поповнення запасів гумусу в ґрунті

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} K_{ij} y_{ijl} \geq \mu_j - K P_j$$

2. Умова відновлення запасів мінеральних елементів живлення у ґрунті

$$B_{ko} x_{ij} - K_{ijr} z_{ijr} - \sum_{l \in L} K_r K_{rl} y_{ijl} \leq Z_{ir} K_{ijr}^r, (i \in I, j \in J, r \in R).$$

3. Обмеження області допустимих значень змін урожайності, що мають лінійну інтерпретацію залежностей

$$u_{ij}^{\min} \leq x_{ij} \leq u_{ij}^{\max}, (i \in I, j \in J)$$

4. Вимоги виконання плану виробництва продукції

$$\sum_{i \in I} S_i x_{ij} \geq W_j, (j \in J).$$

5. Обмеження фондів органічних добрив

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} S_i y_{ijl} \leq F_l, (l \in L).$$

6. Обмеження фондів мінеральних добрив

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} S_i z_{ijr} \leq F_r, (r \in R).$$

7. Умови невід'ємності змінних

$$x_{ij} \geq 0, \quad z_{ijr} \geq 0, \quad y_{ijl} \geq 0.$$

При таких умовах необхідно знайти максимум лінійної форми

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_j S_i x_{ij} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} d_l S_i y_{ijl} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} d_r S_i z_{ijr}$$

Побудова динамічної моделі забезпечується переходом від запасів поживних елементів у ґрунті, що визначаються в рік взяття проб ґрунту 3_{i_0} і проведення їх аналізу за формулою

$$3_{i_0} = Z_{ir} = \eta_{ir} \Pi_i$$

До визначення запасів поживних елементів у ґрунті після циклу його господарського використання

$$3_{i_1} = 3_{i_0} - B_{ij} x_{ij} + K_{ijr} z_{ijr} + \sum_{l \in L} K_r K_{rl} y_{ijl} + K_{jr}^{(1)} P_j^{(1)} + K_{jr}^{(2)} P_j^{(2)}$$

Необхідність такого коректування запасів поживних речовин у ґрунті зумовлена тим, що хімічний аналіз ґрунтів проводиться агрохімічною лабораторією один раз у п'ять років.

При балансовому методі розрахунку потреби в поживних речовинах враховується надходження та використання поживних речовин, а також основна ідея відтворення родючості ґрунту.

Основна ідея балансового співвідношення – винос урожаєм сільськогосподарських культур поживних речовин задовольняється за рахунок вмісту поживних речовин у ґрунті з урахуванням коефіцієнту засвоєння та додаткового внесення поживних речовин до потреби у мінеральній формі.

Позначення: i - номер земельної ділянки; I - множина земельних ділянок; j - номер сільськогосподарської культури; J - множина сільськогосподарських культур; R - множина видів мінеральних поживних елементів; r - вид поживного елементу; b_{jr} - винос r - го поживного елементу j - ю культурою; k^g_{ijr} , k^z_{ijr} - коефіцієнт використання r - го виду поживної речовини j -ї культури по i - му полі із добрив чи ґрунту; η_{ir} - наявність r - ї поживної речовини в ґрунті i - го поля; E_i - перевідний коефіцієнт. Залежність E_i від питомої щільності ґрунту, від глибини орного шару; S_i - площа i - го поля; F_r - кількість добрив r - го виду; w_j - плановий обсяг виробництва j - ї продукції; $u_{ij}^{\min}$, $u_{ij}^{\max}$ - мінімальна та максимальна урожайність; c_i - вартість; x_{ij} - урожайність j - ї культури на i - му полі;**Обмеження:**

1. Баланс мінеральних поживних елементів

$$b_{jr} x_{ij} \leq E_i \eta_{ir} k^z_{ijr} + k^g_{ijr} Z_{ijr}$$

$$b_{jr} x_{ij} - k^g_{ijr} Z_{ijr} \leq E_i \eta_{ir} k^z_{ijr}$$

2. Обмеження урожайності

$$u_{ij}^{\min} \leq x_{ij} \leq u_{ij}^{\max}$$

3. Виконання плану по виробництву продукції

$$\sum_{i \in I} S_i x_{ij} \geq w_j$$

4. Обмеження кількості добрив

$$\sum_{i \in I} S_i x_{ij} \leq F_r$$

5. Невід'ємність змінних

$$x_{ij} \geq 0 \quad z_{ijr} \geq 0$$

6. Функція мети – максимум виробництва валової продукції рослинництва за відрахуванням затрат на добриво

$$Z = \sum_i \sum_j c_j s_i x_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_r s_i c_r r_{ijr} \rightarrow \max$$

Інформаційне забезпечення моделі

1. Площі полів і ділянок сівозмін (і поза сівозмінами), наявні в господарстві.
2. Закріплення сільськогосподарських культур по кожному полю, ділянці.
3. Базова врожайність сільськогосподарської культури, що може бути забезпечена на даному полі, ділянці з обліком агрохімічних й інших характеристик ґрунтів, а також з урахуванням застосування органічних добрив, наявних у господарстві, і інших факторів, що впливають на врожайність (сорт, агротехніка і т.д.).
4. Виробничі функції, що вказують на залежність ґрунт -добриво - врожай .
5. Загальне збільшення врожаю по культурі на даному ґрунті, що може бути забезпечена в межах дії встановленої за рахунок (виробничої функції).
6. По деяких культурах можуть бути передбачені на одному полі різні дози й схема внесення добрив, що забезпечують приріст одиниці врожаю.

8.5. Доцільність використання економіко-математичних моделей в сільському господарстві

Наукове обґрунтування пріоритетів розвитку сільського господарства, як елемента внутрішньо- та зовнішньоекономічної політики неможливе без побудови економіко-математичних моделей і реалізації їх засобами програмного забезпечення, що дозволяє розробити та проаналізувати сценарії розвитку галузі.

Економічна ситуація, що невинно змінюється, вимагає від управлінців, котрим доводиться приймати рішення як в приватному секторі, так і за його межами, системного бачення майбутнього, розуміння процесів, які відбуваються в аграрній галузі. Вірогідний рівень попиту на продукцію, ступінь зайнятості населення, очікуваний рівень цін і доходів регіону - ці та багато інших чинників є актуальними питаннями сталого розвитку. Тому економіко-математичні методи та моделі використовуються як один із напрямів наукового пізнання реальності. Саме за допомогою застосування економіко-математичних методів та моделей надаються такі можливості як формально описані зв'язки між економічними змінними, відображаючи

специфіку виробничих процесів – розв’язувати задачі оптимізації планування та управління, виявлення залежності між параметрами та адекватне коректування планів й управлінських рішень, своєчасне реагування на зміни поставлених цілей.

Отже, сьогодні український аграрний сектор знаходиться на роздоріжжі економічного розвитку, маючи перед собою цілу низку варіантів вибору. І тому, саме економіко-математичні моделі можуть бути важливим інструментом в руках менеджерів аграрної сфери для передбачення можливих наслідків будь-яких здійснених заходів.

Представимо агреговану систему моделей для дослідження технологій в сільському господарстві в розрізі галузей. Слід зазначити, що система моделей будуються за принципом цілеспрямованого розвитку галузей та має на меті оптимізувати виробничу програму на рівні аграрного підприємства.



Рис. 8.2. Система економіко-математичних моделей оптимізації виробничих процесів аграрної сфери

Повоєнне відновлення аграрного сектору України відбуватиметься в умовах значної невизначеності, обмеженості ресурсів і підвищених ризиків. Руїнування виробничої інфраструктури, забруднення та мінування сільськогосподарських земель, дефіцит трудових і фінансових ресурсів, порушення логістичних ланцюгів істотно ускладнюють прийняття управлінських рішень. У таких умовах традиційні підходи до планування та прогнозування розвитку сільського господарства виявляються недостатніми, що зумовлює потребу у використанні економіко-математичних моделей як інструменту обґрунтованого вибору управлінських рішень.

Економіко-математичні моделі дають змогу формалізувати складні економічні процеси, які відбуваються в аграрному виробництві, та врахувати взаємозв'язки між ресурсами, технологіями, результатами виробництва і зовнішніми обмеженнями. Це особливо важливо в повоєнний період, коли необхідно одночасно вирішувати завдання відновлення виробничого потенціалу, підвищення ефективності використання ресурсів і забезпечення продовольчої безпеки країни.

Застосування економіко-математичних моделей дозволяє оцінювати різні сценарії розвитку аграрного сектору з урахуванням можливих темпів розмінування земель, відновлення зрошувальних систем, доступності кредитних ресурсів та державної підтримки. Такий підхід сприяє зниженню ризиків помилкових рішень і дає можливість обрати оптимальні напрями інвестування в аграрне виробництво та інфраструктуру.

Важливою перевагою економіко-математичного моделювання є можливість оптимізації структури виробництва. За допомогою моделей можна визначити раціональне співвідношення між культурами, обсягами тваринницької продукції, використанням земельних, матеріально-технічних і трудових ресурсів. Це особливо актуально з огляду на втрати сільськогосподарських угідь і необхідність їх поступового повернення до господарського обігу після очищення та рекультиватії.

Крім того, економіко-математичні моделі створюють основу для прогнозування економічних результатів аграрної діяльності, таких як обсяги виробництва, собівартість продукції, рівень прибутковості та потреба в інвестиціях. Це дозволяє органам державної влади та аграрним підприємствам узгоджувати свої дії, формувати обґрунтовані програми підтримки та відновлення сільського господарства на національному й регіональному рівнях.

Не менш важливою є роль моделей у забезпеченні екологічної збалансованості розвитку аграрного виробництва. В умовах повоєнного відновлення особливого значення набуває необхідність поєднання економічної ефективності з вимогами охорони довкілля. Моделі дозволяють оцінювати вплив різних варіантів господарювання на стан ґрунтів, водних ресурсів і екосистем, що сприяє формуванню сталих підходів до природокористування.

Отже, використання економіко-математичних моделей у сільському господарстві є доцільним і необхідним інструментом повоєнного відновлення України. Вони забезпечують наукове обґрунтування управлінських рішень, сприяють раціональному використанню ресурсів, зниженню ризиків і формуванню передумов для сталого розвитку аграрного сектору в довгостроковій перспективі.

РОЗДІЛ 9. ПРИКЛАДНІ СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ ПОБУДОВИ ТА РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

9.1. Основні інструменти для побудови та розв'язку задач ЗЛП

Одним з важливих етапів дослідження операцій є побудова та реалізація економіко-математичної моделі.

За умови побудови концептуальної та числової моделі важливу роль грає вибір апарату розв'язку задачі, де першим варіантом можуть бути готові прикладні засоби, наприклад, табличний редактор MS Excel, інтегрований комплекс продуктів, що охоплюють весь процес аналізу, від планування до збору даних, аналізу, складання звітів і розгортання IBM SSPS, програмний пакет для статистичного аналізу, який реалізує функції аналізу даних, управління даних, видобутку даних, візуалізації даних з залученням статистичних методів, Statistica, пакет статистики для базових та просунутих статистичних функцій StatGraphics, пакет моделювання систем масового обслуговування GPSS, пакети для моделювання економічної динаміки IThink або Poversim, пакет прикладних програм для вирішення задач технічних обчислень і однойменний мову програмування, що використовується в цьому пакеті MatLab, що використовується для моделювання математичних та технічних систем, графічне середовище імітаційного моделювання, що дозволяє за допомогою блок-діаграм у вигляді направлених графів, будувати динамічні моделі, включаючи дискретні, безперервні і гібридні, нелінійні і розривні системи Simulink та багато іншого.

Другим варіантом є застосування універсальних мов програмування типу Pascal, C++, C#, Java, Python, R, але іноді трудомісткість програмування інтерфейсу перевищує трудомісткість програмування самої моделі в 5-10 разів.

Іноді, навіть в *MS Excel* доводиться програмувати процедури, яких не вистачає. Для цього спеціалізовані пакети мають вбудовані мови програмування, зокрема, в MS Office - це Visual Basic for Application (VBA), в MatLab – мова m-файлів.

Зупинимося на специфіці програмних засобів залежно від класифікації задач. При розв'язуванні задач лінійної оптимізації можна використовувати такі програмні продукти як Gran1, Gran-2D, Excel, Simplex, QSB (Quantitative System for Business), Optimall_4 тощо.

При розв'язуванні задач цілочисельного програмування можна скористатися програмними пакетами QSB, MS Excel, IBM SSPS, Statistica, StatGraphics тощо.

Для задач динамічного програмування можна застосувати зручний і простий MS Excel.

Для розрахунку параметрів і оптимізації мережевих графіків використовуються інформаційні технології пакету QSB (PERT- програма розрахунку проектів методами мережевого планування; CPM – програма «Мережеве планування»).

Для знаходження оптимальних стратегій в іграх з природою можна використати MS Excel. Ця ж програма допоможе у розв'язуванні задач нелінійного програмування та векторної оптимізації.

Широке застосування має MS Excel до розв'язування задач стохастичного програмування, зокрема, для визначення кількісних характеристик і функцій розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини, побудови графіків для нормального розподілу; формування початкових даних для детермінованого еквіваленту задачі в Е-постановці; розв'язування стохастичних задач в Р- постановці; розв'язування стохастичної транспортної задачі.

9.2.Застосування Power BI для вирішення задач дослідження операцій

У сучасних умовах цифрової трансформації бізнес-процесів зростає потреба в інтеграції класичних економіко-математичних методів (ЕММ) з інструментами бізнес-аналітики. Традиційно задачі лінійного програмування розв'язувалися в спеціалізованих математичних пакетах (MATLAB, Mathematica, R, Python), що створювало розрив між етапом оптимізації та етапом візуалізації результатів для прийняття управлінських рішень.

Power BI, як провідна платформа бізнес-аналітики від Microsoft, надає можливість об'єднання цих етапів завдяки застосуванню інструментарю Power Query, DAX, а також вбудованій підтримці скриптів Python та R. Це дозволяє створювати інтегровані рішення, де оптимізаційні моделі не лише розв'язуються, але й автоматично візуалізуються в інтерактивному режимі, забезпечуючи безперервний цикл "дані → оптимізація → візуалізація → рішення".

Microsoft Power BI являє собою екосистему засобів бізнес-аналітики, що включає Power BI Desktop (настільний додаток для розробки звітів), Power BI Service (хмарна платформа для публікації та колаборації) та Power BI Mobile (мобільні додатки). Ключовою перевагою платформи є інтеграція з різноманітними джерелами даних та наявність потужного аналітичного механізму на основі мови формул DAX (Data Analysis Expressions).

Важливо зазначити, що стандартні можливості Power BI обмежені дескриптивною та діагностичною аналітикою. Для реалізації прескриптивної аналітики, зокрема методів математичної оптимізації, платформа пропонує механізми інтеграції зі скриптовими мовами:

- Python Script Visual — візуальний елемент, що виконує Python-код з використанням бібліотек pandas, matplotlib, seaborn, та інших, встановлених у локальному середовищі Python.
- R Script Visual — аналогічний компонент для виконання R-скриптів з доступом до пакетів CRAN.
- Power Query M-формули — функціональна мова для трансформації даних, що підтримує виклик Python та R-скриптів на етапі підготовки даних.

Для роботи з Power Query (Редактора запитів) достатньо скористатися функцією «Перетворити дані», яка знаходиться на вкладці «Основне».

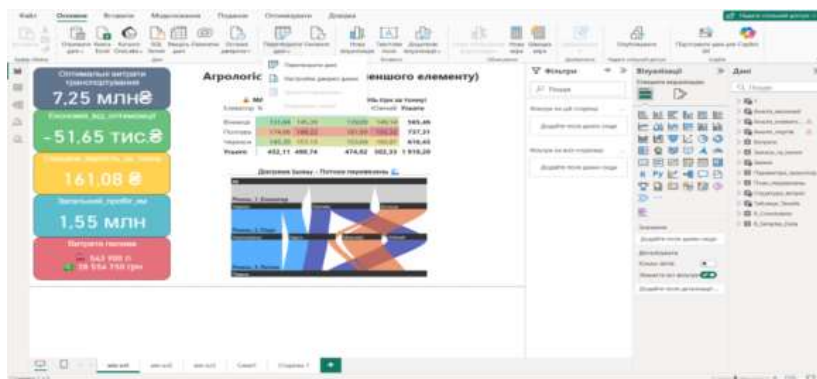


Рис. 9.1. Ввімкнення редактора запитів в Power BI

Для налаштування роботи з Python Script Visual та R Script Visual необхідно встановити на ПК відповідні дистрибутиви та бібліотеки. Одним із зручних варіантів інсталяції є перехід через меню Файл-Параметри та налаштування – Параметри. В новому вікні обираємо функції інсталяції. Для Python 3.x + бібліотеки pulp, pandas. Встановить бібліотеки, використавши код: `pip install pulp pandas numpy`

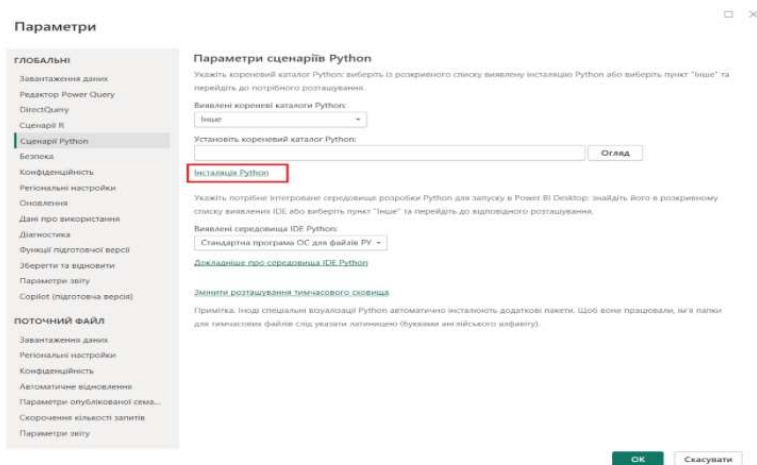


Рис. 9.2. Налаштування Python Script в Power BI

Для R Script Visual завантажте та встановіть R з ресурсу <https://cran.r-project.org/> . Оберіть версію для Windows. Відкрийте **R Console** і вставте код для завантаження потрібних бібліотек:

```
install.packages("lpSolve") # Для симплекс-методу
install.packages("lpSolveAPI") # Додаткові функції
install.packages("dplyr") # Обробка даних
install.packages("ggplot2") # Візуалізація
install.packages("gridExtra") # Компонування графіків
install.packages("scales") # Форматування
```

Для налаштування R в Power BI здійснюємо аналогічно перехід через меню Файл-Параметри та налаштування – Параметри. Встановлюємо шлях до виявлених домашніх каталоги R та натискаємо ОК.

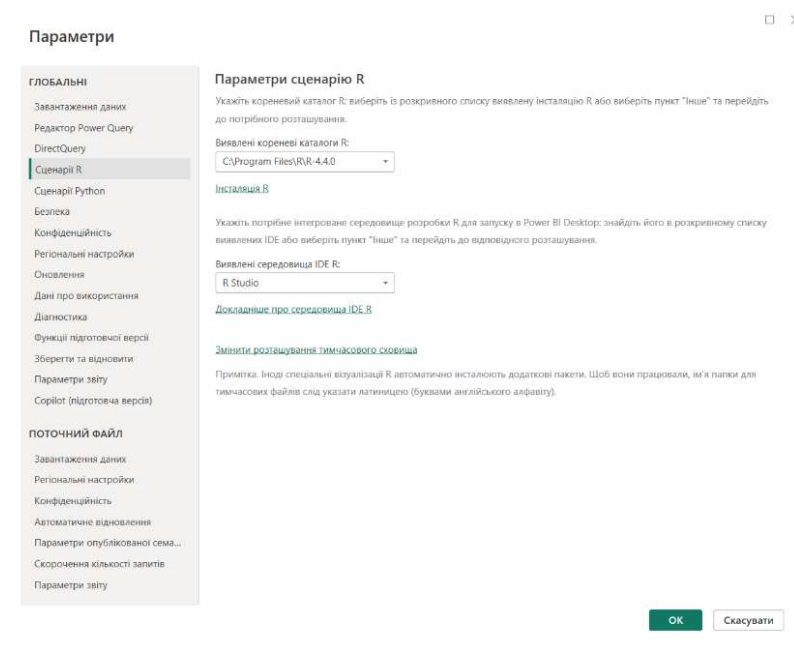


Рис. 9.3. Налаштування R Script в Power BI

Виконання скрипту Power BI поєднує декілька операцій: підготовка вхідних даних у форматі DataFrame (для Python) або data.frame (для R) -> передача даних до зовнішнього інтерпретатора через IPC (Inter-Process Communication) -> виконання скрипту в ізольованому процесі-> отримання результатів у вигляді текстового виводу, графічних об'єктів або таблиць даних -> відображення результатів у відповідному візуальному елементі.

Існують ряд обмежень у використанні Power BI для EMM. Power BI Desktop виконує скрипти на локальній машині, що може бути недостатньо для великорозмірних задач (понад 1000 змінних). Python та R візуалізації не функціонують в повній мірі у хмарній версії Power BI, що обмежує можливості публікації інтерактивних звітів з оптимізацією. Необхідність встановлення та конфігурації Python/R інтерпретаторів та бібліотек може викликати труднощі у користувачів без технічних навичок.

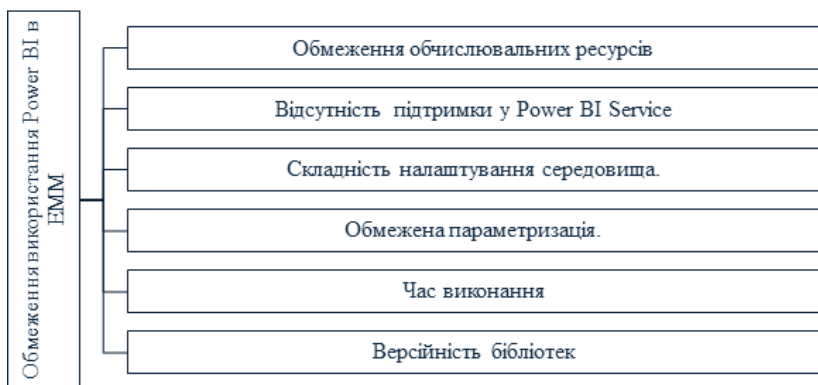


Рис. 9.4. Перелік типових обмежень щодо використання Power BI для ЕММ

Важливо зазначити і про інші особливості. Передача параметрів до скриптів можлива лише через вхідний DataFrame, що ускладнює створення повністю інтерактивних інтерфейсів оптимізації. Кожне оновлення візуального елемента потребує повторного виконання скрипту, що може призводити до затримок при великих обсягах даних. Потенційні конфлікти між версіями бібліотек, встановлених користувачем, та вимогами Power BI.

Поряд з тим Power BI вже інтегрований у корпоративну інфраструктуру багатьох організацій, що знижує бар'єр впровадження економіко-математичних методів та моделей. Потужні інструменти візуалізації дозволяють представити результати у зрозумілій формі для осіб, що приймають рішення (матриці, теплові карти, графіки збіжності), а можливість фільтрації, деталізації та параметризації моделей безпосередньо через інтерфейс користувача доступні без необхідності редагування коду. Стає доступною можливість одночасної реалізації декількох методів (евристичних та точних) та їх порівняння у єдиному середовищі. Користувачі з обмеженими знаннями програмування можуть використовувати готові рішення, змінюючи лише вхідні дані, а налаштування регламентних завантажень даних дозволяє автоматично перераховувати оптимальні плани при зміні вхідних параметрів.

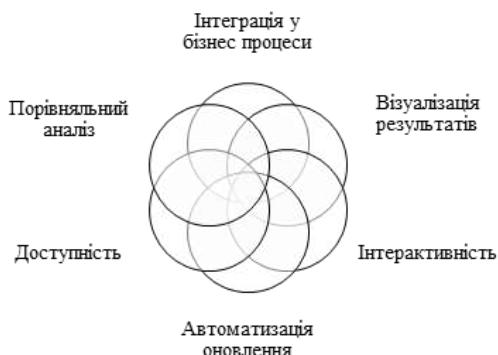


Рис. 9.5. Переваги використання Power BI для ЕММ

В умовах цифрової трансформації зростає потреба підприємств у швидкому прийнятті оптимальних рішень на основі великих обсягів даних, що оновлюються в режимі реального часу. Таким чином поєднання обчислювальної потужності з візуальними можливостями Power BI створює синергетичний ефект, що підвищує якість управлінських рішень. Прикладні аспекти застосування DAX Power BI представимо при реалізації транспортних задач.

В наступному прикладі запропоновано систематизацію підходів до реалізації класичної транспортної задачі із застосуванням методу найменшої вартості (пошук опорного плану) симплекс-методу (пошук оптимального плану) в середовищі Power BI. Для реалізації пропонується використання мови DAX (Data Analysis Expressions), та інтеграція статистичних обчислень R. Вихідні дані: аграрний холдинг "АгроУкраїна" має 3 елеватори (Полтава, Вінниця, Черкаси) та потребує доставити зерно до 4 портів (Одеса, Миколаїв, Чорноморськ, Південний). Необхідно мінімізувати транспортні витрати при забезпеченні потреб портів та обмежень елеваторів. Дані про витрати враховують:

- витрати палива 35 л/100км (типова для вантажівки з повним навантаженням 25 тонн)
- ціна дизпалива: 52,50 грн/л (середня по Україні станом на жовтень 2024)
- вартість палива = (Відстань_км / 100) × Витрата_палива × Ціна_палива
- зарплата водія залежить від відстані (базова ставка + км)
- амортизація та інші витрати пропорційні відстані
- вантажопідйомність вантажівки: 25 тонн.

Таблиця 9.1

Запаси та потреби				
Локація	Тип	Обсяг_тонн	Місткість_тонн	Сорт зерна
Полтава	Елеватор	15000	18000	Пшениця 3 класу

Вінниця	Елеватор	12000	15000	Пшениця 3 класу
Черкаси	Елеватор	18000	20000	Пшениця 3 класу
Одеса	Порт	12000	15000	Експорт
Миколаїв	Порт	10000	12000	Експорт
Чорноморськ	Порт	13000	16000	Експорт
Південний	Порт	10000	13000	Експорт

Таблиця 9.2

Витрати за маршрутами Елеватор-Порт

Елеватор	Порт	Відстань, км	Витрата, палива, л на 100км	Ціна, палива, грн, л	Вартість, палива, грн	Зарплата, водія, грн	Амортизація, грн	Страховка, грн	Інші витрати, грн	Загальна, вартість, грн	Вартість, за тону, грн
Полтава	Одеса	520	35	52,5	955,5	2800	450	180	320	4705,5	188,22
Полтава	Миколаїв	480	35	52,5	882	2800	420	170	300	4372	174,88
Полтава	Чорноморськ	505	35	52,5	927,19	2700	435	175	310	4547,19	181,89
Полтава	Южний	530	35	52,5	982,88	2850	460	185	330	4807,88	192,32
Вінниця	Одеса	360	35	52,5	699,75	2200	350	145	240	3634,75	145,39
Вінниця	Миколаїв	340	35	52,5	625,95	2000	320	130	220	3285,95	131,84
Вінниця	Чорноморськ	365	35	52,5	672,19	2100	335	140	230	3477,19	139,09
Вінниця	Южний	390	35	52,5	718,43	2250	360	150	250	3728,43	149,14
Черкаси	Одеса	420	35	52,5	773,25	2350	380	155	270	3928,25	157,13
Черкаси	Миколаїв	380	35	52,5	699,75	2200	350	145	240	3634,75	145,39
Черкаси	Чорноморськ	405	35	52,5	745,99	2300	370	150	250	3825,99	153,04
Черкаси	Южний	430	35	52,5	791,63	2400	390	160	280	4021,63	160,87

Формалізація моделі має наступний узагальнений вигляд:

Не змінні параметри (не керовані) :

- c_{ij} — питома вартість транспортування від елеватора i до порту j (грн/т);
- a_i — запас зерна на елеваторі i (т);
- b_j — попит порту j (т).

Змінні параметри (керовані):

x_{ij} - кількість тонн з елеватора i до порту j

$i \in \{1, 2, 3\}$ — елеватори (1 - Полтава, 2 - Вінниця, 3 - Черкаси);

$j \in \{1, 2, 3, 4\}$ — порти (1 - Одеса, 2 - Миколаїв, 3 - Чорноморськ, 4 - Південний).

Таблиця 9.3

Змінні

Елеватор Порт	Одеса	Миколаїв	Чорноморськ	Южний
Полтава	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
Вінниця	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
Черкаси	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Таблиця 9.4

Витрати на перевезення

Елеватор Порт	Одеса	Миколаїв	Чорноморськ	Південний
Полтава	188,22	174,88	181,89	192,32
Вінниця	145,39	131,84	139,09	149,14
Черкаси	157,13	145,39	153,04	160,87

Цільова функція (мінімізація):

$$Z = 188,22 \cdot x_{11} + 174,88 \cdot x_{12} + 181,89 \cdot x_{13} + 192,32 \cdot x_{14} + 145,39 \cdot x_{21} + 131,84 \cdot x_{22} + 139,09 \cdot x_{23} + 149,14 \cdot x_{24} + 157,13 \cdot x_{31} + 145,39 \cdot x_{32} + 153,04 \cdot x_{33} + 160,87 \cdot x_{34} \rightarrow \min$$

Вектори запасів та попиту:

$a = (15000, 12000, 18000)^T$ — запаси елеваторів (т)

$b = (12000, 10000, 13000, 10000)^T$ — попит портів (т)

Обмеження:

Елеватори:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 15000 \text{ (Полтава)}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 12000 \text{ (Вінниця)}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 18000 \text{ (Черкаси)}$$

$$\text{Порти: } x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 12000 \text{ (Одеса)}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 10000 \text{ (Миколаїв)}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 13000 \text{ (Чорноморськ)}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 10000 \text{ (Південний)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для всіх } i, j$$

Таблиця 9.5

Матриця обмежень

Обмеження	Тип	RHS	x ₁₁	x ₁₂	x ₁₃	x ₁₄	x ₂₁	x ₂₂	x ₂₃	x ₂₄	x ₃₁	x ₃₂	x ₃₃	x ₃₄
Полтава	<=	15000	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Вінниця	<=	12000	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Черкаси	<=	18000	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Одеса	>=	12000	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Миколаїв	>=	10000	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Чорноморськ	>=	13000	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Південний	>=	10000	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Враховуючи умови запасів та попиту, визначасмо, що задача є збалансованою, а отже вся продукція на елеваторах має бути розподілена між портами.

$$\sum_i a_i = 15000 + 12000 + 18000 = 45000$$

$$\sum_j b_j = 12000 + 10000 + 13000 + 10000 = 45000$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \Rightarrow \text{задача збалансована}$$

Збалансованість задачі гарантує існування допустимого розв'язку та спрощує застосування спеціалізованих методів розв'язання транспортних задач.

На початковому етапі розв'язання задачі через Power BI варто зазначити про особливості внесення даних, а саме таблиця при внесенні має містити всі заповнені клітини, починатися із заголовків, кожен стовпець має містити дані однотипного формату. Враховуючи, зазначене, для розв'язання задачі не підходить класичний матричний вигляд задачі. Імпортовані дані мають наступний вигляд.

Локація	Тип	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат
Полтава	Сторг	520	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Міністерство	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Черкаський	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Сторг	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Черкаський	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Сторг	100	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Черкаський	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	

Рис. 9.6 Вихідні дані щодо витрат в Power BI

Локація	Тип	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат
Полтава	Сторг	520	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Міністерство	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Черкаський	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Сторг	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Черкаський	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Сторг	100	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Черкаський	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	

Рис. 9.7 Вихідні дані щодо попиту та запасів в Power BI

Локація	Тип	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат	Відомості про витрати	Сума витрат
Полтава	Сторг	520	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Міністерство	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Черкаський	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Полтава	Сторг	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Черкаський	200	20	520	950,1	2000	450	100	
Вінниця	Сторг	100	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Міністерство	300	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Черкаський	400	20	520	950,1	2000	450	100	
Черкаський	Сторг	400	20	520	950,1	2000	450	100	

Рис. 9.8 Вихідні дані щодо змінних в Power BI

Для формування таблиці змінних після завантаження даних додано нові стовпці:

$$\text{Елеватор} = \text{LEFT}(\text{План_перевезень}[\text{Маршрут}], \text{SEARCH}("-", \text{План_перевезень}[\text{Маршрут}]) - 1)$$

3	Використання запасів елеватора	1 - Параметри	Обмеження запасів
4	Відсоток використання запасів	1 - Параметри	% використання
5	Задоволення попиту порту	1 - Параметри	Обмеження попиту
6	Відсоток задоволення попиту	1 - Параметри	% задоволення
7	Оптимальний план	2 - РОЗВ'ЯЗОК	Головна міра - результат методу мін. елемента
8	Витрати оптимального плану	2 - РОЗВ'ЯЗОК	Значення ЦФ при оптимумі
9	Вартість маршруту опт	2 - РОЗВ'ЯЗОК	Деталізація плану
10	Рейсів на маршрут	2 - РОЗВ'ЯЗОК	Деталізація плану
11	Відстань маршруту	2 - РОЗВ'ЯЗОК	Деталізація плану
Гру.14	Перевірка Полтава/Вінниця/Черкаси	3 - Обмеження	Контроль запасів
15-18	Перевірка Одеса/Миколаїв/...	3 - Обмеження	Контроль попиту
19	Статус обмежень	3 - Обмеження	Зведений статус
20	Економія від оптимізації	4 - Аналіз	Економічний ефект
21	Процент економії	4 - Аналіз	% економії
22	Середня вартість за тонну	4 - Аналіз	KPI
23-28	Міри аналізу витрат	4 - Аналіз	Структура витрат
29-30	Міри порівняння	4 - Аналіз	Порівняльний аналіз

Для створення мір (обчислень) перейдіть до **Моделювання** → **Нова міра**.

Міра «Загальні витрати» відображає значення цільової функції.

Загальні_витрати =

SUMX(

'План_перевезень',

'План_перевезень'[Обсяг_тонн] *

CALCULATE(

MAX('Витрати'[Вартість_за_тонну_грн]),

FILTER('Витрати', 'Витрати'[Елеватор] & "-" & 'Витрати'[Порт] =

'План_перевезень'[Маршрут]

)

)

)

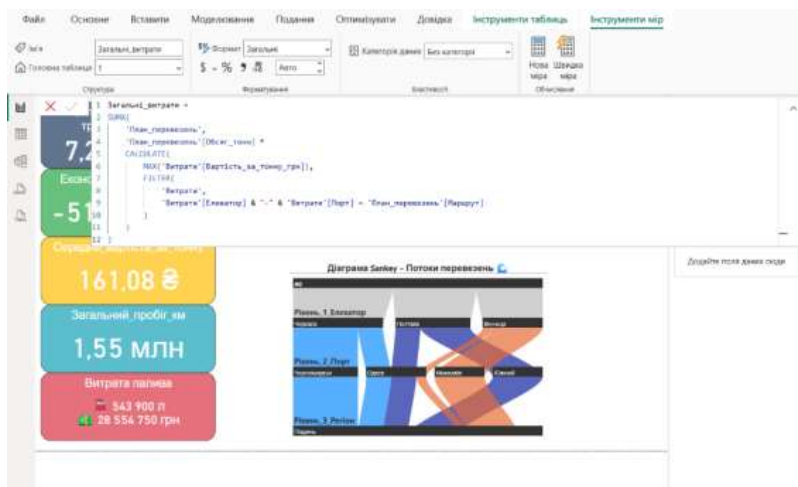


Рис. 9.10 Міра «Загальні витрати» в Power BI

Міра «Використання запасів елеватора (для обраного елеватора)» використовується в якості обмеження для розрахунку опорного плану перевезень.

Використання_запасів_елеватора =

```

CALCULATE(
    SUM('План_перевезень'[Обсяг_тонн]),
    FILTER(
        'План_перевезень',
        LEFT(
            'План_перевезень'[Маршрут],
            SEARCH("-", 'План_перевезень'[Маршрут]) - 1
        ) = SELECTEDVALUE('Запаси_та_попит'[Локація])
    )
)

```

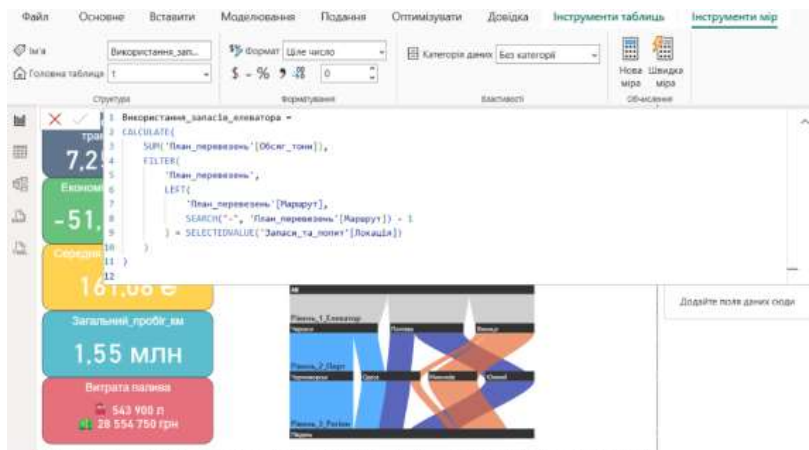



Рис.9.11 Міра «Використання запасів елеватора» в Power BI

Міра «Задоволення попиту порту (для обраного порту)» за аналогом з попередньою мірою використовується також в якості обмеження для розрахунку опорного плану перевезень.

Задоволення попиту порту =

```
CALCULATE(
    SUM('План_перевезень'[Обсяг_тонн]),
    FILTER(
        'План_перевезень',
        MID(
            'План_перевезень'[Маршрут],
            SEARCH("-", 'План_перевезень'[Маршрут]) + 1,
            50
        ) = SELECTEDVALUE('Запаси_та_попит'[Локація])
    )
)
```

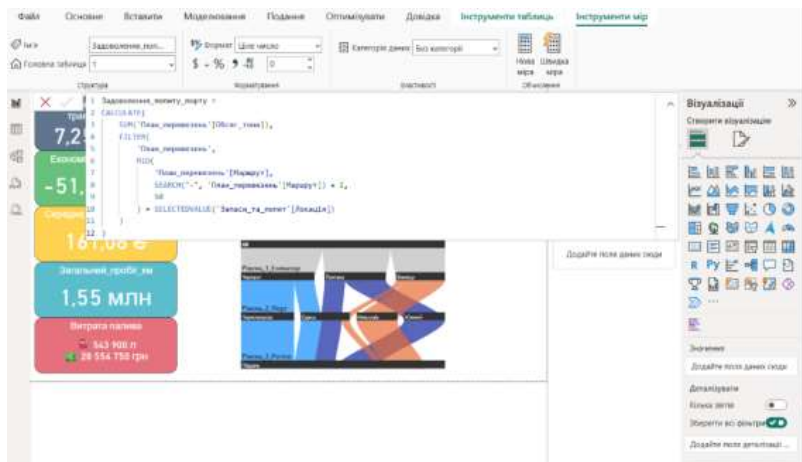


Рис. 9.11. Міра «Задоволення попиту порту» в Power BI

Також для формування оптимального плану перевезень було створено міру «Кількість_рейсів», що є в подальшому технічним внутрішнім обмежуючим параметром.

Кількість_рейсів =

SUMX(

'План_перевезень',

ROUNDUP(

DIVIDE(

'План_перевезень'[Обсяг_тонн],

CALCULATE(

MAX('Параметри_транспорт'[Значення]),

'Параметри_транспорт'[Параметр] = "Вантажопідйомність_вантажівки"

)

),

0

)

)

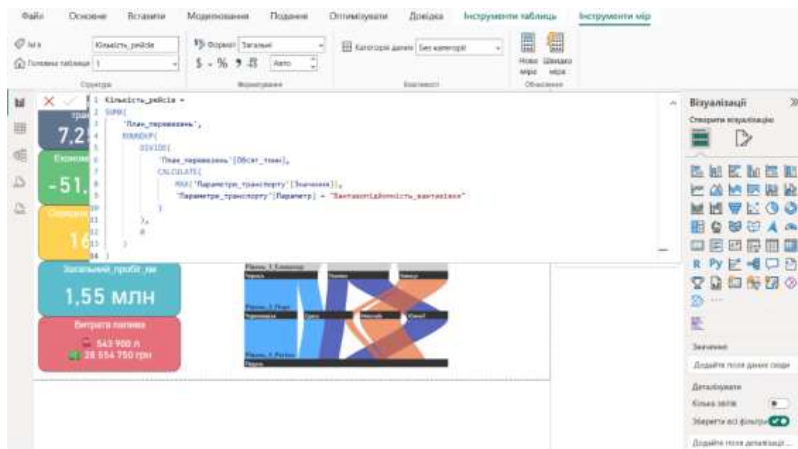


Рис. 9.12. Міра «Кількість рейсів» в Power BI

Міри «Відсоток використання запасів» та «Відсоток задоволення попиту» відображають дотримання балансу в задачі.

Відсоток_використання_запасів =
DIVIDE(
[Використання_запасів_елеватора],
MAX("Запаси_та_попит"[Обсяг_тонн]),
*0) * 100*

Відсоток_задоволення_попиту =
DIVIDE(
[Задоволення_попиту_порту],
MAX("Запаси_та_попит"[Обсяг_тонн]),
*0) * 100*

Міра «Оптимальний розподіл» (метод мінімальної вартості) містить результат застосування методу мінімального елемента. Значення жорстко закодовані на основі покрокових розрахунків, що виконані « в ручну» та демонструються для візуалізації в ПЗ.

Оптимальний_план =
SWITCH(
TRUE(),
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Вінниця-Миколаїв", 10000,
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Вінниця-Одеса", 2000,
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Черкаси-Чорноморськ", 13000,
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Черкаси-Одеса", 5000,
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Полтава-Одеса", 5000,
SELECTEDVALUE('План_перевезень'[Маршрут]) = "Полтава-Південний", 10000,
0
)

Рис. 9.14. Міра «Витрати при оптимальному плані» в Power BI

Категорія мір «Обмеження» (Перевірка_Полтава, Перевірка_Вінниця, Перевірка_Черкаси, Перевірка_Одеса, Перевірка_Миколаїв, Перевірка_Чорноморськ, Перевірка_Південний, Статус_обмежень) забезпечують перевірку запасів по елеваторах та задоволення попиту по портах.

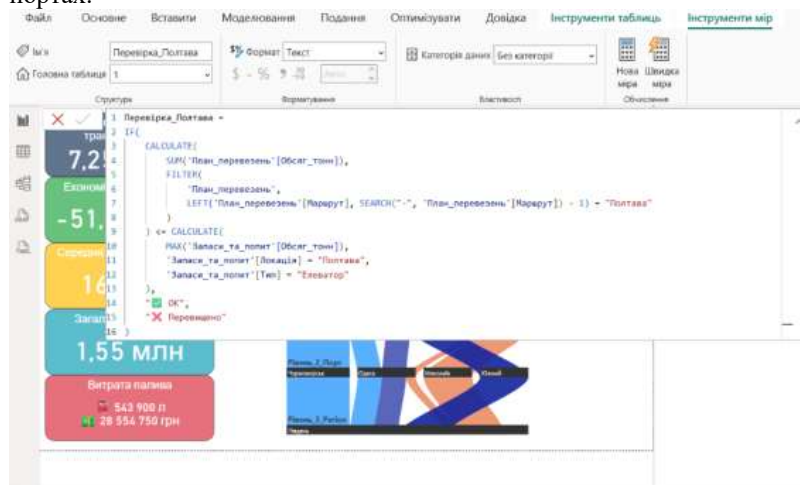


Рис. 9.15. Приклад міри щодо перевірки запасів «Перевірка_Полтава» в Power BI

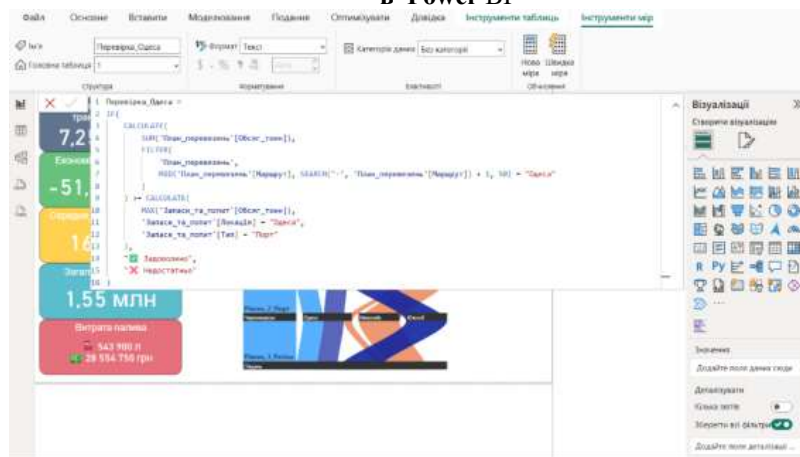


Рис. 9.16. Приклад міри щодо перевірки забезпечення попиту «Перевірка_Полтава» в Power BI

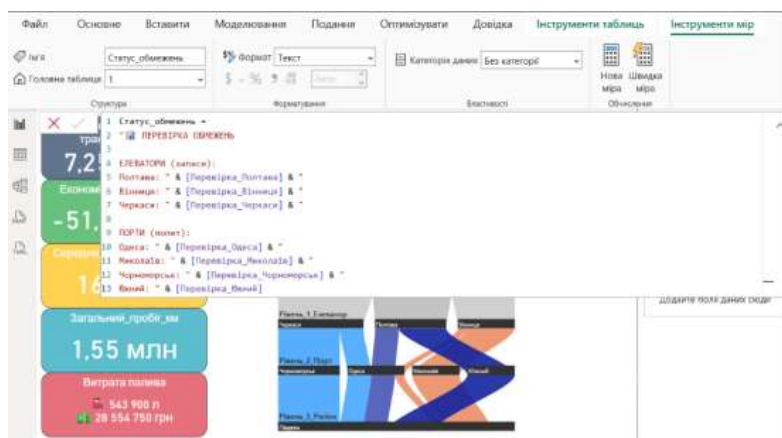


Рис. 9.17. Приклад міри щодо перевірки забезпечення попиту «Статус обмежень» в Power BI

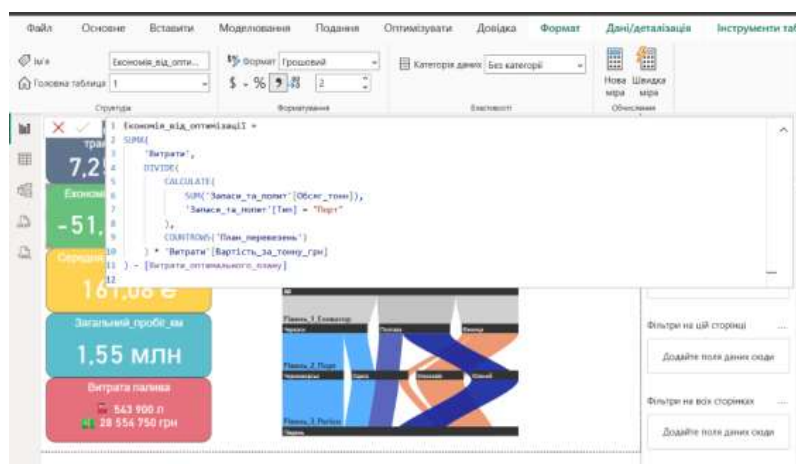


Рис.9.18 Приклад міри для виміру економічного ефекту в Power BI

Для аналізу економічну ефекту також були створені міри «Економія від оптимізації», «Процент_економії 4», «Середня_вартість_за_тонну».

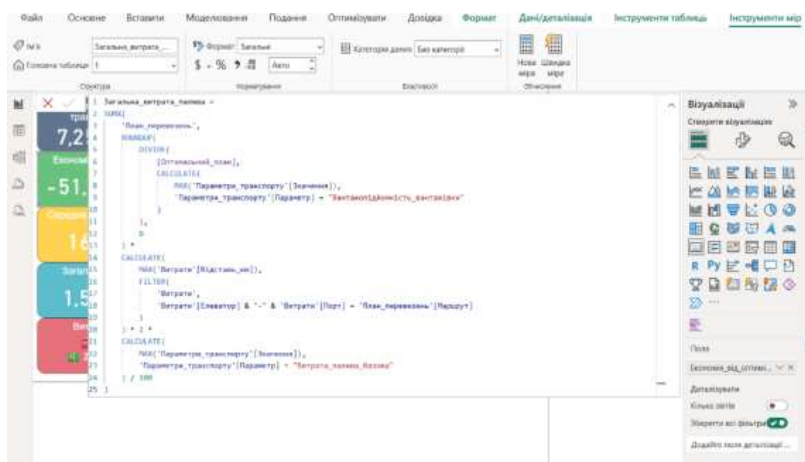


Рис. 9.19 Приклад міри для аналізу структури витрат в Power BI

Для аналізу структури витрат було також додано міри: Загальна витрата палива (літрів), Вартість палива, Загальний пробіг, Середня вартість перевезення 1 тону, Вартість маршруту (використовується в таблиці), Кількість рейсів для маршруту, Відстань маршруту, Частка витрат на паливо, Загальна зарплата водіїв, Загальна амортизація.

Узагальнений дашборд з показниками має наступний вигляд.

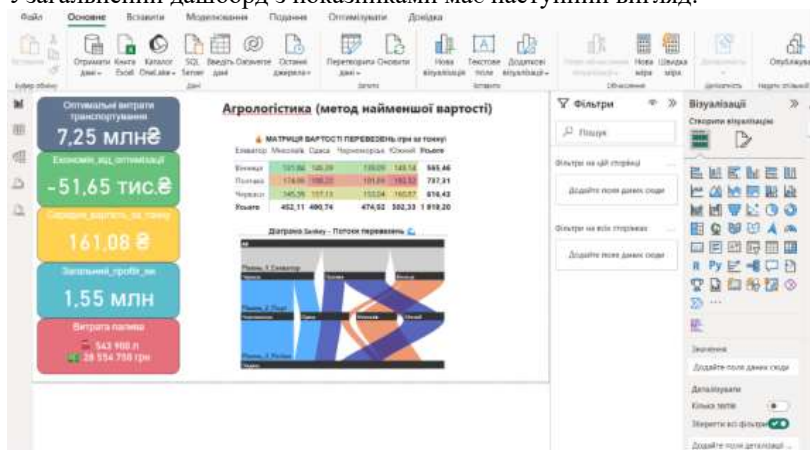


Рис. 9.20. Ключові показники опорного плану за методом найменшої вартості в Power BI (частина 1)

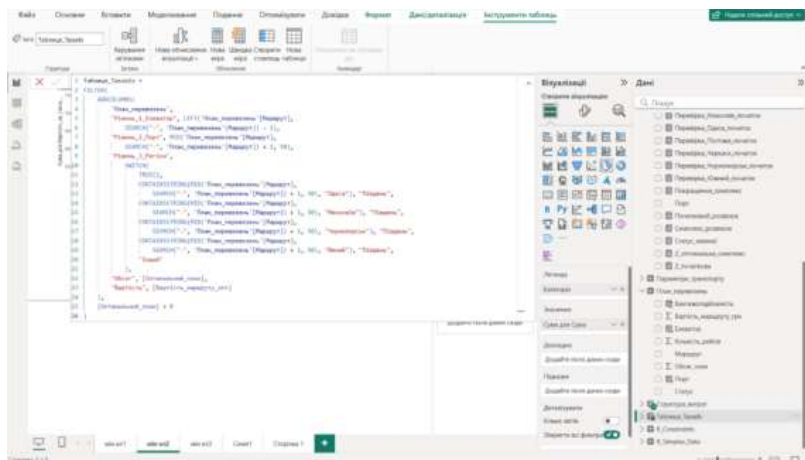


Рис. 9.23. Обчислення таблиці даних для побудови потоків перевезень в Power BI

Таким чином обчислення DAX необхідно застосовувати, якщо необхідна візуалізація попередньо знайдених оптимальних розв'язків, навчальні цілі, презентація результатів дослідження, адже це не потребує додаткового програмного забезпечення, можливе швидке виконання поставлених завдань (відсутність зовнішніх викликів); все буде працювати в Power BI Service, доступна повна контрольованість розрахунків. Поряд з тим при використанні DAX відсутня автоматична оптимізація (розв'язок можливо знайти поза Power BI, необхідне ручного оновлення формул при зміні структури задачі; неможлива адаптація до динамічних змін вхідних даних, підходить лише для демонстрації результатів, а не для фактичного розв'язання.

9.3. Прикладні аспекти застосування R Script Power BI в транспортних задачах

Важливо зазначити, що Power BI все ж дозволяє розв'язувати оптимізаційні задачі, до яких належить в тому числі і транспортна задача, проте це потребує встановлення додаткових скриптів, бібліотек та певного рівня володіння технічними навичками. Використання R Script Visual з пакетом lpSolve дозволяє розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом. Пакет lpSolve реалізує модифікований симплекс-алгоритм з підтримкою обмежень-рівностей та нерівностей.

Для внесення скрипту необхідно на поданні «Звіт» обрати візуалізацію з використанням сценарію R, внизу в редакторі внести необхідний код.

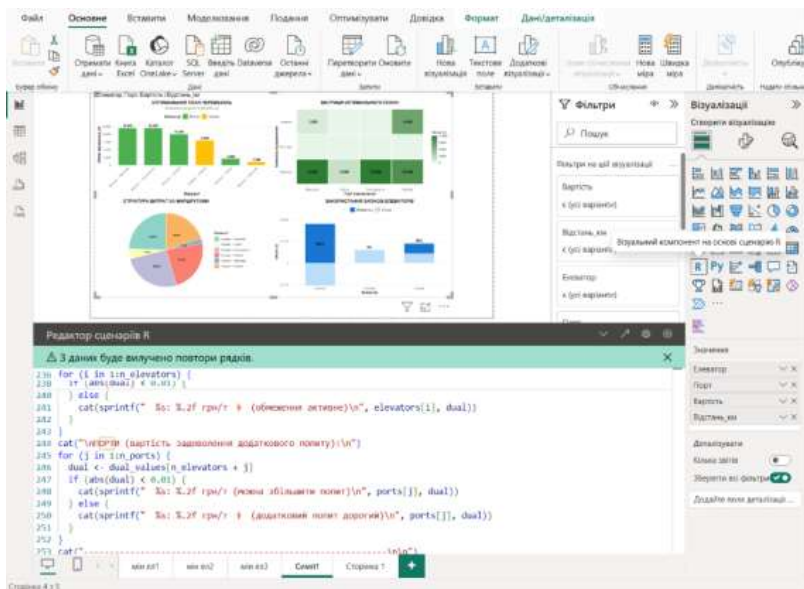


Рис. 9.24. Створення візуалізації з використанням R Script Power BI

Структура коду, що був використаний для розв'язку і візуалізації задачі да вихідними даними, що були розглянуті в попередньому пункті:

Цей код для створення об'єкта "dataframe" і вилучення повторів рядків виконується завжди та виступає преамбулою до вашого сценарію:

```
# dataset <- data.frame(Елеватор, Порт, Вартість, Відстань_км)
# dataset <- unique(dataset)
```

Вставте або введіть код сценарію сюди:

=====

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ СІМПЛЕКС-МЕТОДОМ В POWER BI

=====

Завантаження бібліотек

```
library(lpSolve)
```

```
library(dplyr)
```

```
library(ggplot2)
```

```
library(gridExtra)
```

```
library(scales)
```

Отримання даних з Power BI (автоматично передається як 'dataset')

```
df <- dataset
```

=====

1. ПІДГОТОВКА ДАНИХ

=====

Унікальні елеватори та порти

```
elevators <- unique(df$Елеватор)
```

```
ports <- unique(df$Порт)
```

```
n_elevators <- length(elevators) # 3
```

```

n_ports <- length(ports)      # 4
n_vars <- n_elevators * n_ports # 12

cat("=====\n")
cat("ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА: Оптимізація логістики\n")
cat("=====\n")
cat("Елеватори:", n_elevators, "\n")
cat("Порти:", n_ports, "\n")
cat("Змінних рішення:", n_vars, "\n\n")

# =====
# 2. МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ
# =====

# Створюємо матрицю вартості (грн/м)
cost_matrix <- matrix(0, nrow = n_elevators, ncol = n_ports)
rownames(cost_matrix) <- elevators
colnames(cost_matrix) <- ports

for (i in 1:nrow(df)) {
  elev <- df$Елеватор[i]
  port <- df$Порт[i]
  cost <- df$Вартість[i]

  elev_idx <- which(elevators == elev)
  port_idx <- which(ports == port)

  cost_matrix[elev_idx, port_idx] <- cost
}

cat("МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ (грн/м):\n")
print(round(cost_matrix, 2))
cat("\n")

# Вектор коефіцієнтів цільової функції (розгортаємо матрицю по стовпцях)
f.obj <- as.vector(cost_matrix)

# =====
# 3. ОБМЕЖЕННЯ
# =====

# Запаси елеваторів (м)
supply <- c(15000, 12000, 18000) # Полтава, Вінниця, Черкаси
names(supply) <- elevators

# Попит портів (м)
demand <- c(12000, 10000, 13000, 10000) # Одеса, Миколаїв, Чорноморськ, Південний
names(demand) <- ports

cat("ЗАПАСИ ЕЛЕВАТОРІВ (м):\n")
print(supply)
cat("\nПОПИТ ПОРТІВ (м):\n")
print(demand)
cat("\n")

# Перевірка збалансованості
total_supply <- sum(supply)
total_demand <- sum(demand)

cat("Загальна пропозиція:", format(total_supply, big.mark=",", "m\n"))
cat("Загальний попит: ", format(total_demand, big.mark=",", "m\n"))

```

```

if (total_supply >= total_demand) {
  cat("✓ Задача збалансована (пропозиція ≥ попит)\n\n")
} else {
  cat("X УВАГА: Недостатньо запасів!\n\n")
}

# =====
# 4. МАТРИЦЯ ОБМЕЖЕНЬ
# =====

# Кількість обмежень: 3 (запаси) + 4 (попити) = 7
n_constraints <- n_elevators + n_ports

# Ініціалізація матриці обмежень
f.con <- matrix(0, nrow = n_constraints, ncol = n_vars)

# Обмеження 1-3: Запаси елеваторів (≤)
# Кожен елеватор може відправити не більше свого запасу
row_idx <- 1
for (i in 1:n_elevators) {
  # Для елеватора i: x[i,1] + x[i,2] + x[i,3] + x[i,4] ≤ supply[i]
  for (j in 1:n_ports) {
    var_idx <- (i - 1) * n_ports + j
    f.con[row_idx, var_idx] <- 1
  }
  row_idx <- row_idx + 1
}

# Обмеження 4-7: Попит портів (≥)
# Кожен порт має отримати не менше свого попиту
for (j in 1:n_ports) {
  # Для порту j: x[1,j] + x[2,j] + x[3,j] ≥ demand[j]
  for (i in 1:n_elevators) {
    var_idx <- (i - 1) * n_ports + j
    f.con[row_idx, var_idx] <- 1
  }
  row_idx <- row_idx + 1
}

# Напрямки обмежень
f.dir <- c(rep("<=", n_elevators), rep(">=", n_ports))

# Праві частини обмежень
f.rhs <- c(supply, demand)

# =====
# 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ
# =====

cat("===== \n")
cat("РОЗВ'ЯЗАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ... \n")
cat("===== \n\n")

# Розв'язок задачі лінійного програмування
lp_solution <- lp(
  direction = "min",      # Мінімізація
  objective.in = f.obj,    # Цільова функція
  const.mat = f.con,       # Матриця обмежень
  const.dir = f.dir,       # Напрямки обмежень
  const.rhs = f.rhs,       # Праві частини

```

```

compute.sens = TRUE      # Аналіз чутливості
)

# Перевірка статусу розв'язку
if (lp_solution$status == 0) {
  cat("✓ Оптимальний розв'язок знайдено!\n\n")
} else {
  cat("✗ ПОМИЛКА: Розв'язок не знайдено (статус:", lp_solution$status, ")\n")
  stop("Не вдалося розв'язати задачу")
}

# =====
# 6. РЕЗУЛЬТАТИ
# =====

# Оптимальні значення змінних
optimal_values <- lp_solution$solution

# Переформатування у матрицю
solution_matrix <- matrix(optimal_values, nrow = n_elevators, ncol = n_ports, byrow = FALSE)
rownames(solution_matrix) <- elevators
colnames(solution_matrix) <- ports

cat("ОПТИМАЛЬНИЙ ПЛАН ПЕРЕВЕЗЕНЬ (m):\n")
print(round(solution_matrix, 0))
cat("\n")

# Мінімальні витрати
optimal_cost <- lp_solution$objval

cat("=====\n")
cat("МІНІМАЛЬНІ ВИТРАТИ:", format(round(optimal_cost, 2), big.mark=","), "грн\n")
cat("=====\n")

# =====
# 7. ДЕТАЛЬНА ТАБЛИЦЯ РЕЗУЛЬТАТІВ
# =====

results_list <- list()
idx <- 1

for (i in 1:n_elevators) {
  for (j in 1:n_ports) {
    volume <- solution_matrix[i, j]
    if (volume > 0.01) { # Показуємо тільки активні маршрути
      cost_per_ton <- cost_matrix[i, j]
      total_cost <- volume * cost_per_ton

      results_list[[idx]] <- data.frame(
        Елеватор = elevators[i],
        Порт = ports[j],
        Обсяг_m = round(volume, 0),
        Вартість_за_m = round(cost_per_ton, 2),
        Загальна_вартість = round(total_cost, 0)
      )
      idx <- idx + 1
    }
  }
}

results_df <- do.call(rbind, results_list)

```

```

cat("АКТИВНІ МАРШРУТИ:\n")
cat("-----\n")
for (i in 1:nrow(results_df)) {
  cat(sprintf("%s → %s: %s m × %s грн/m = %s грн\n",
    results_df$Елеватор[i],
    results_df$Порт[i],
    format(results_df$Обсяг_m[i], big.mark=""),
    format(results_df$Вартість_за_m[i], big.mark=""),
    format(results_df$Загальна_вартість[i], big.mark="")))
}
cat("-----\n")
cat("РАЗОМ: ", format(sum(results_df$Загальна_вартість), big.mark=""), " грн\n")

# =====
# 8. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ (ДВОЇСТІ ОЦІНКИ)
# =====

# Двоїсті змінні (shadow prices)
dual_values <- lp_solution$duals

cat("АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ (Двоїсті оцінки):\n")
cat("-----\n")
cat("ЕЛЕВАТОРИ (вартість додаткової тонни запасу):\n")
for (i in 1:n_elevators) {
  dual <- dual_values[i]
  if (abs(dual) < 0.01) {
    cat(sprintf(" %s: %2f грн/м (є резерв)\n", elevators[i], dual))
  } else {
    cat(sprintf(" %s: %2f грн/м < (обмеження активне)\n", elevators[i], dual))
  }
}
cat("\nПОРТИ (вартість задоволення додаткового попиту):\n")
for (j in 1:n_ports) {
  dual <- dual_values[n_elevators + j]
  if (abs(dual) < 0.01) {
    cat(sprintf(" %s: %2f грн/м (можна збільшити попит)\n", ports[j], dual))
  } else {
    cat(sprintf(" %s: %2f грн/м < (додатковий попит дорожчий)\n", ports[j], dual))
  }
}
cat("-----\n")

# =====
# 9. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ
# =====

# Підготовка даних для візуалізації
viz_data <- results_df
viz_data$Маршрут <- paste(viz_data$Елеватор, "→", viz_data$Порт)

# Графік 1: Розподіл обсягів по маршрутах
p1 <- ggplot(viz_data, aes(x = reorder(Маршрут, -Обсяг_m), y = Обсяг_m, fill = Елеватор)) +
  geom_bar(stat = "identity", width = 0.7) +
  geom_text(aes(label = format(Обсяг_m, big.mark="")),
    vjust = -0.5, size = 3.5, fontface = "bold") +
  scale_fill_manual(values = c("Полтава" = "#2196F3",
    "Вінниця" = "#4CAF50",
    "Черкаси" = "#FFC107")) +
  labs(title = "ОПТИМАЛЬНИЙ ПЛАН ПЕРЕВЕЗЕНЬ",
    subtitle = paste("Мінімальні витрати: ", format(round(optimal_cost, 0), big.mark=""), " грн"),

```

```

x = "Маршрут",
y = "Обсяг перевезень (м)" +
theme_minimal(base_size = 11) +
theme(
  plot.title = element_text(face = "bold", size = 14, hjust = 0.5),
  plot.subtitle = element_text(size = 11, hjust = 0.5, color = "#2E7D32"),
  axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1, size = 9),
  axis.title = element_text(face = "bold"),
  legend.position = "top",
  legend.title = element_text(face = "bold"),
  panel.grid.major.x = element_blank(),
  panel.grid.minor = element_blank()
) +
scale_y_continuous(labels = comma, expand = expansion(mult = c(0, 0.1)))

```

Графік 2: Матриця плану (теплова карта)

```

solution_df <- as.data.frame(as.table(solution_matrix))
colnames(solution_df) <- c("Елеватор", "Порт", "Обсяг")
solution_df$Обсяг <- round(solution_df$Обсяг, 0)

```

```

p2 <- ggplot(solution_df, aes(x = Порт, y = Елеватор, fill = Обсяг)) +
  geom_tile(color = "white", size = 1) +
  geom_text(aes(label = ifelse(Обсяг > 0, format(Обсяг, big.mark=","), "")),
    color = "black", fontface = "bold", size = 4) +
  scale_fill_gradient(low = "#E8F5E9", high = "#2E7D32",
    labels = comma, name = "Обсяг (м)") +
  labs(title = "МАТРИЦЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ",
    x = "Порт призначення",
    y = "Елеватор відправлення") +
  theme_minimal(base_size = 11) +
  theme(
    plot.title = element_text(face = "bold", size = 14, hjust = 0.5),
    axis.text = element_text(size = 10),
    axis.title = element_text(face = "bold"),
    legend.position = "right",
    panel.grid = element_blank()
  )

```

Графік 3: Структура витрат

```

p3 <- ggplot(viz_data, aes(x = "", y = Загальна_вартість, fill = Маршрут)) +
  geom_bar(stat = "identity", width = 1, color = "white") +
  coord_polar(theta = "y") +
  scale_fill_brewer(palette = "Set3") +
  labs(title = "СТРУКТУРА ВИТРАТ ЗА МАРШРУТАМИ",
    fill = "Маршрут") +
  theme_void(base_size = 11) +
  theme(
    plot.title = element_text(face = "bold", size = 14, hjust = 0.5),
    legend.position = "right",
    legend.text = element_text(size = 8)
  ) +
  geom_text(aes(label = paste0(round(Загальна_вартість/sum(Загальна_вартість)*100, 1), "%")),
    position = position_stack(vjust = 0.5), size = 3, fontface = "bold")

```

Графік 4: Порівняння використання ресурсів

```

supply_usage <- data.frame(
  Елеватор = elevators,
  Запас = supply,
  Використано = rowSums(solution_matrix)
)
supply_usage$Залишок <- supply_usage$Запас - supply_usage$Використано

```

```
supply_usage$Bidcomotok <- round(supply_usage$Використано / supply_usage$Занас * 100, 1)

supply_long <- reshape2::melt(supply_usage[, c("Елеватор", "Використано", "Залишок")],
                             id.vars = "Елеватор")

p4 <- ggplot(supply_long, aes(x = Елеватор, y = value, fill = variable)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = "stack", width = 0.6) +
  geom_text(data = supply_usage,
            aes(x = Елеватор, y = Занас, label = paste0(Bidcomotok, "%")),
            vjust = -0.5, fontface = "bold", size = 4, inherit.aes = FALSE) +
  scale_fill_manual(values = c("Використано" = "#1976D2", "Залишок" = "#BBDEFB"),
                    labels = c("Використано", "Резерв")) +
  labs(title = "ВИКОРИСТАННЯ ЗАПАСІВ ЕЛЕВАТОРІВ",
       x = "Елеватор",
       y = "Обсяг (т)",
       fill = "") +
  theme_minimal(base_size = 11) +
  theme(
    plot.title = element_text(face = "bold", size = 14, hjust = 0.5),
    axis.title = element_text(face = "bold"),
    legend.position = "top",
    panel.grid.major.x = element_blank()
  ) +
  scale_y_continuous(labels = comma, expand = expansion(mult = c(0, 0.1)))

# Компонування всіх графіків
grid.arrange(p1, p2, p3, p4, ncol = 2, nrow = 2)

cat("\n✓ Візуалізація завершена!\n")
```

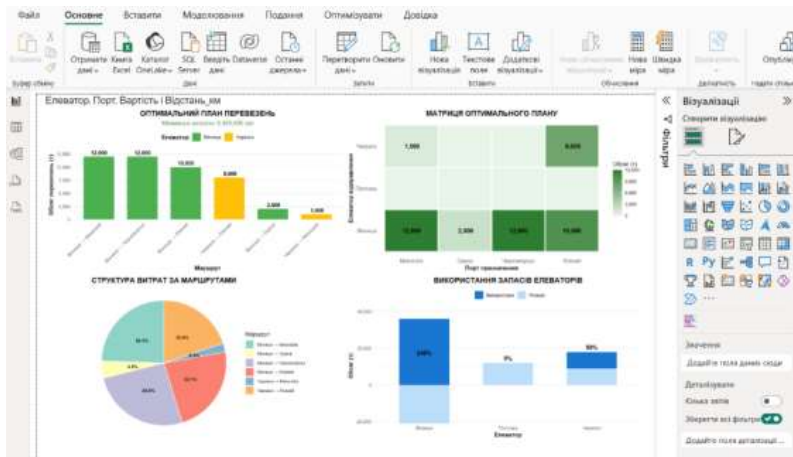


Рис.9.25. Створення візуалізації за даними оптимального плану перевезення з використанням R Script Power BI

R Script дозволяє виконати високопродуктивну реалізацію симплекс-метод та в тому числі вбудований аналіз чутливості (sensitivity analysis); доступ до двоїстих оцінок (shadow prices), інтеграцію з ggplot2 для

високоякісної візуалізації. Пакет є стабільним та надійним (існує з 1999 року). Поряд з тим необхідні знання R, все ж тут обмежена підтримка цілочисельного програмування, існують обмеження щодо налаштування в Power BI Service, не дуже порівняно інтуїтивний синтаксис порівняно з іншими мовами програмування.

Враховуючи вище описане, при виборі методу реалізації слід враховувати наступні фактори: складність впровадження, автоматизація оптимізації, розмір задачі, робота в Service, аналіз чутливості, швидкість виконання. Відповідно до критеріїв було охарактеризовано можливості застосування DAX, Python (PuLP), R (IpSolve) в Power BI.

Таблиця 9.7

Критерії вибору підходу в Power BI

Критерій	DAX	Python (PuLP)	R (IpSolve)
Складність впровадження	Низька	Середня	Середня
Автоматизація оптимізації	Відсутня	Повна	Повна
Розмір задачі	Малий	Великий	Середній
Робота в Service	Так	Ні	Ні
Аналіз чутливості	Ручний	Обмежений	Детальний
Швидкість виконання	Висока	Середня	Висока

Для презентаційних цілей та статичних звітів найкраще підходить **DAX**. Для регулярної автоматизованої оптимізації варто використовувати **Python скрипти**. Якщо необхідно проводити наукове дослідження та деталізований аналіз, для цього краще підійде **R скрипт** в Power BI.

9.4. Технологія розв'язку транспортної задачі в середовищі MS EXCEL

Двохіндексні (транспортні) задачі ЛП вводяться і розв'язуються в Excel аналогічно одноіндексним задачам. Специфіка введення умови двохіндексної задачі ЛП полягає лише в зручності матричної задання змінних задачі і коефіцієнтів ЦФ.

Розглянемо розв'язування двохіндексної задачі, суть якої полягає в оптимальній організації транспортних перевезень штучного товару зі складів в магазини:

Початкові дані транспортної задачі

Тарифи, грн./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запаси, штук
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35

4-й склад	2	3	6	75
Потреби, шт.	45	90	50	

Цільова функція і обмеження даної задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 L(X) = & 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\
 & + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min; \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\
 \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{цілі} \ (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).
 \end{array} \right. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Екранні форми, задання змінних, цільової функції, обмежень і граничних умов двох індексної (транспортної) задачі (5) і її розв'язування подані на рис. і в наступній таблиці.

Формули екранної форми задачі

Об'єкт математичної моделі	Вираз в Excel
Змінні задачі	C3:E6
Формула в цільовій комірці F15	=SUMPRODUCT(C3:E6;C12:E15)
Обмеження по рядках в комірках F3, F4, F5, F6	= SUM (C3:E3) = SUM (C4:E4) = SUM (C5:E5) = SUM (C6:E6)
Обмеження по стовпцях в комірках C7, D7, E7	= SUM (C3:C6) = SUM (D3:D6) = SUM (E3:E6)
Сумарні запаси і потреби в комірках H8, G9	= SUM (H3:H6) =SUM (C9:E9)

Задача1.xlsx - Excel

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ

Вставить Шрифт Выравнивание Число Условное форматирование Форматировать как таблицу Стили Ячейки Редактирование

Буфер обмена F14 значения

Задача1.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			ЗМІНИ			Обмеження			
2		цілі	x1	x2	x3	Ліва частина	знак	права частина	
3		x1]					0 =	25	
4		x2]					0 =	50	
5		x3]					0 =	35	
6		x4]					0 =	75	
7		Ліва частина	0	0	0				
8			=	=	=			БАЛАНС	
9		Права частина	45	90	50			185	
10									
11		ТАРИФИ	x1	x2	x3				
12		x1]	2	9	7				
13		x2]	1	0	5				
14		x3]	5	4	100	цФ			
15		x4]	2	3	6	значення	напрямок		
16						0 min			
17									
18									
19									
20									
21									
22									

задача1 задача2

ГОТОВО

Рис. 9.26. Екранна форма транспортної задачі

Solver Parameters

Set Objective: \$F\$15

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of: 0

By Changing Variable Cells: \$C\$3:\$E\$6

Subject to the Constraints:

\$C\$3:\$E\$6 = Integer
 \$C\$3:\$E\$7 = \$C\$8:\$E\$8
 \$F\$3:\$F\$6 = \$H\$3:\$H\$6

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method: Simplex LP

Solving Method
 Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Help Solve Close

Рис. 9.27. Обмеження і граничні умови задачі

E19								
Задачі.xlsx								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			ЗМІННІ			Обмеження		
2		цїлі	xi1	xi2	xi3	Ліва частина	знак	права частина
3		x1j	25	0	0	25 =		25
4		x2j	0	50	0	50 =		50
5		x3j	0	35	0	35 =		35
6		x4j	20	5	50	75 =		75
7		Ліва частина	45	90	50			
8		=	=	=				БАЛАНС
9		Права частина	45	90	50		185	
10								
11		ТАРИФИ	xi1	xi2	xi3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5			
14		x3j	5	4	100	ЦФ		
15		x4j	2	3	6	значення	напрямок	
16						545 min		
17								
18								
19								
20								
21								
22								
задача1			задача2					

Рис. 9.28. Екранна форма після отримання розв'язку задачі

Окремим випадком задач з цілочисловими змінними є задачі, в результаті розв'язування яких шукані змінні x_j можуть приймати тільки одне з двох значень: 0 або 1. Такі змінні названі на честь англійського математика Джорджа Буля, що запропонував їх називати булевими. На рис.9.29 подана екранна форма та на рис. 9.30 - розв'язок деякої двохіндексної задачі з булевими змінними.

змінними необхідно:

1. Для наочності сприйняття можна ввести в екранну форму слово “булеві” як характеристики змінних.
2. У вікні “Розв’язувач” додати граничні умови, що мають обмеження значень змінних за їх одиничною верхньою межею (рис.9.31).

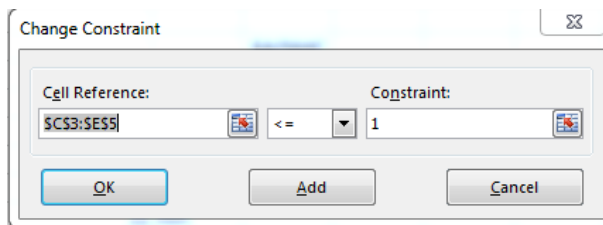


Рис. 9.31. Додання умови одиничної верхньої межі значень змінних двохіндексної задачі з булевими змінними

Вигляд вікна “Розв’язувач” для задачі з булевими змінними, поданої на рис.9.32.

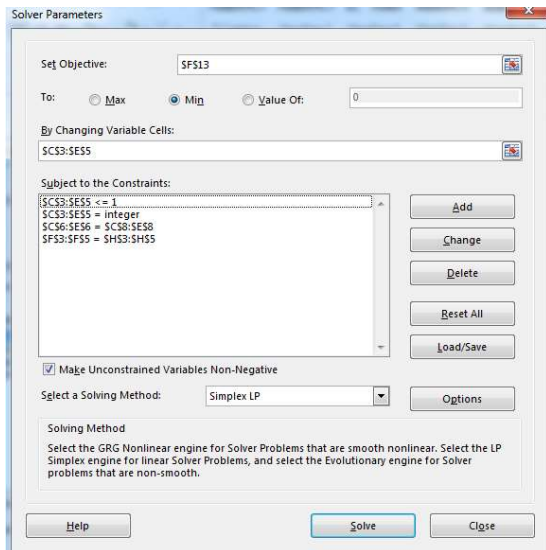


Рис. 9.32. Вікно “Розв’язувач” для задачі з булевими змінними

РОЗДІЛ 10. АНАЛІЗ ПРИКЛАДНИХ МОДЕЛЕЙ

10.1. Постоптимізаційний аналіз у середовищі MS EXCEL

В економіці оптимізаційні задачі виникають у зв'язку з багаточисельністю можливих варіантів функціонування конкретних економічних систем, коли постає ситуація вибору альтернативи, найкращої за деяким правилом, критерієм, вимогою.

Лінійні оптимізаційні задачі можуть бути реалізовані в середовищі EXCEL.

Знайомство технологією розв'язку задач лінійного програмування наведено в попередньому розділі

Якщо математична модель відповідає вимогам лінійної задачі математичного програмування – її можна реалізувати, провести модельні експерименти та здійснити глибокий економічний аналіз оптимального плану в середовищі EXCEL.

Надбудова «Solver» (або Розв'язувач) – додаткова надбудова табличного процесора MS Excel, яка призначена для вирішення певних систем рівнянь, лінійних та нелінійних завдань оптимізації, використовується з 1991 року. За допомогою неї можна знаходити оптимальне рішення задач з врахуванням заданих користувачем обмежень. Завдяки світовій популярності табличного процесора MS Excel вбудована в його середовище надбудова «Solver» є найбільш поширеним інструментом для пошуку оптимальних рішень у сфері сучасного бізнесу. Розробник програми «Solver» компанія «Frontline System» вже давно спеціалізується на розробці могутніх і зручних способів оптимізації, вбудованих в середу популярних табличних процесорів різноманітних фірм-виробників (MS Excel Solver, Adobe Quattro Pro, Lotus 1-2-3 тощо).

Розмір завдання, яке можна вирішити за допомогою базової версії цієї програми, обмежується такими граничними показниками:

- кількість невідомих (decision variable) – 200;
- кількість формульних обмежень (explicit constraint) на невідомих – 100;
- кількість граничних умов (simple constraint) на невідомих – 400.

Згадаємо алгоритм побудови та розв'язку задачі:

Для реалізації алгоритму задачі необхідно:

- 1) сформулювати формулу для вводу умов задачі
 - вказати адреси клітин, в які буде надсилатися результат розв'язку задачі (*Клітини змінних*);
 - ввести вихідні дані;
 - ввести формули для розв'язку цільової функції та визначення необхідних значень по обмеженнях;
 - ввести залежність для цільової функції;
 - вказати призначення цільової функції (**Оптимізувати**);

- ввести обмеження;
- ввести параметри для розв'язку ЗЛП.

2) побудувати модель

- вказати адресу клітини для цільової функції (***Set objective*** або ***Встановити цільову функцію***);

- визначити призначення цільової функції (***To*** або ***До***) за перемикачами Equal To (Рівною), задаючи значення цільового осередку, — Max (максимальному значенню), Min (мінімальному значенню) або Value of (значенню).ввести обмеження;

- визначити адреси змінних (***By Changing Variable Cells*** або ***Змінюючи клітини***)

- визначити обмеження моделі (***Subject to the Constrains*** або, ***У відповідності з обмеженнями***);

- ввести параметри для розв'язку ЗЛП.

Цільова функція - це значення, яке необхідно оптимізувати.

Метою оптимізації зазвичай може бути мінімізація, максимізація для досягнення деякого цільового значення.

Змінні – невідомі значення задачі, які впливають на цільову функцію.

Як бачимо в ПО Microsoft Excel також існує функція зазначення параметрів для розв'язку ЗЛП.

Параметри пошуку розв'язування, відповідні для більшості задач ЛП:

Максимальний час - слугує для обмеження часу, відпущеного на пошук рішення задачі. У цьому полі можна ввести час в секундах, що не перевищує 32 767 (приблизно дев'ять годин); 100 Значення, що використовується за умовчанням, цілком прийнятно для вирішення більшості простих завдань.

Граничне число ітерацій) – визначений час рішення задачі шляхом обмеження числа обчислювальних циклів (ітерацій).

Відносна похибка) - визначає точність обчислень. Чим менше значення цього параметра, тим вище точність обчислень.

Припустиме відхилення) - допустиме значення відхилення від оптимального рішення. Чим більше значення відхилення, тим менше часу потрібно на пошук рішення.

Збіжність) - застосовується тільки до нелінійних моделей. Коли відносна зміна значення в цільовій комірці за останні п'ять ітерацій стає меншою ніж це вказано в полі «Відповідність», пошук припиняється.

Лінійна модель) - служить для прискорення пошуку рішення шляхом застосування до задачі оптимізації лінійної моделі. Нелінійні моделі передбачають використання нелінійних функцій, фактору росту і експоненціального згладжування, що уповільнює обчислення.

Невід'ємні значення) - дозволяє встановити нульову нижню межу для змінних, для яких не було задано відповідне обмеження в діалоговому вікні «Додати обмеження».

Автоматичне масштабування) - використовується, коли числа в змінюваних осередках і в цільовій комірці істотно розрізняються.

Показувати результати ітерацій) - призупиняє пошук рішення для перегляду результатів окремих ітерацій.

Завантажити модель) - після клацання на цій кнопці відривається діалогове вікно, в якому можна ввести посилання на діапазон комірок, що містять модель оптимізації.

Зберегти модель) - служить для відображення на екрані однойменного діалогового вікна, в якому можна ввести посилання на діапазон комірок, призначений для зберігання моделі оптимізації.

Оцінка лінійна) - виберіть цей перемикач для роботи з лінійною моделлю.

Оцінка квадратична) - виберіть цей перемикач для роботи з нелінійної моделлю.

Різниці прямі) - використовується в більшості завдань, де швидкість зміни перебору значень обмежень відносно невисока.

Різниці центральні) - використовується для функцій, що мають частинну похідну. Даний спосіб вимагає більше обчислень, однак його застосування може бути виправданим, якщо виникло повідомлення про те, що отримати більш точне рішення не вдається.

Метод пошуку Ньютона) - вимагає більше пам'яті, але виконує менше ітерацій, ніж в методі сполучених градієнтів.

Метод пошуку сполучених градієнтів) - реалізує метод сполучених градієнтів, для якого потрібно менше пам'яті, але виконується більше ітерацій, ніж в методі Ньютона. Даний метод слід використовувати, якщо завдання досить велика і необхідно економити пам'ять або якщо ітерації дають занадто мале відмінність у послідовних наближень.

При подальшому аналізі, перше, на що варто звернути увагу - це напис «Рішення знайдено в межах допустимого відхилення. Якщо рішення знайдено, осередки робочої книги зміняться із запропонованим рішенням.»

Тепер є варіанти на вибір:

- Зберегти знайдене рішення
- Відновити вихідні значення
- Запустити звіти
- Зберегти сценарій

Можливий варіант при неправильній побудові моделі, коли рішення не можливо буде знайти, в цьому випадку слід шукати помилку зазвичай в параметрах пошуку рішення.

На практиці багато економічних параметрів (ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку, заробітна плата і т.д.) з часом змінюють свої значення. Тому оптимальне рішення лінійної моделі, отримане для конкретної економічної ситуації, після її зміни може виявитися

непридатним або неоптимальним. У зв'язку з цим виникає завдання аналізу чутливості плану ЛЗ, а саме того, як можливі зміни параметрів початкової моделі вплинуть на отриманий оптимальний план під час модельних експериментів.

Виділяють такі основні задачі аналізу:

1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:

- на скільки можна збільшити (обмеження типу $<$) або зменшити (обмеження типу $>$) запас дефіцитного ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
- на скільки можна зменшити (обмеження типу $<$) або збільшити (обмеження типу $>$) запас недефіцитних ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення ЦФ?
- Збільшення (зменшення) запасу якого з ресурсів найбільш вигідно?

2. Аналіз зміни цільових коефіцієнтів: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальне рішення?

Звіт містить відомості про чутливість рішень до малих змін формул чи клітин, що змінюються.

Ви можете створити звіт, вибравши доступні зі списку звітів. Буде створено новий лист.

10.2. Методика післяоптимізаційного аналізу плану виробничої системи

Постановка задачі. Нехай деякий умовний цех з переробки молока в своєму арсеналі має певну кількість ресурсів для ведення виробничої діяльності. Обмежимося трьома видами ресурсів (безумовно, для реального процесу виробництва їх необхідно значно більше): робоча сила, сировина та обладнання. Цех має 4 технологічні лінії і виробляє продукцію чотирьох видів. Інформація про наявність ресурсів, технологічні затрати та доходи виробництва наведена в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю виробництва продукції				Наявність ресурсу
	Морозиво	Сметана	Кефір	Йогурт	
Праця л-год	7	2	2	6	80
Сировина	5	8	4	3	480
Обладнання	2	4	1	8	130
Ціна, грош.од.	3	4	3	1	–

У задачі необхідно знайти такий план випуску продукції, при якому максимізуватиметься загальна виручка від виробництва.

Позначимо через X_1 , X_2 , X_3 , X_4 кількість продукції кожного виду.

Економіко-математична модель задачі матиме вигляд:

Цільова функція – це вираз, що формує виручку при заданих цінах;

$$F(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Обмеження по ресурсах:

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80$$

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480$$

$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 8x_4 \leq 130$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Для наведеної задачі підготуємо форму для вводу умов (рис.2.1).
У нашій задачі оптимальні значення вектора $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ після розв'язку задачі будуть розміщені в клітинках **B3:E3**, оптимальне значення цільової функції – в клітині **F5**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Змінні	Кефір	Йогурт					
2		Морозиво	Сметана	Кефір	Йогурт					
3	значення									
4	цільова ф-я	3	4	3	1	ліва частина	знак	права частина		
5	обмеження									
6	праця	7	2	2	6		<=	80		
7	сировина	5	8	4	3		<=	480		
8	обладнання	2	4	1	8		<=	130		
9										

Рис. 10.1. Форма для вводу даних

Введемо дані задачі у підготовлену форму, отримаємо результат, зображений на рис.

Введемо залежність для цільової функції:

- Робимо активною клітину **F5**.
- Курсор на **Мастер функцій**.
- На екрані з'являється діалогове вікно **Мастер функцій**.
- З вікна **Категорія** курсором вибираємо категорію **Математичні**.
- У вікні **Функції** обираємо SUMPRODUCT.
- У масив 1 ввести **B3:E3**.

- У масив 2 ввести **B4:E4**.*
- Установку цільової функції завершено. На екрані в **F5** цільова функція введена, як показано на рис. 10.2.

Введемо залежності для лівих частин обмежень: або аналогічно попередньому кроці вводимо функції для лівих частин, або з клітини **F5** копіюємо формулу в **F7, F8, F9**, коригуючи адреси клітинок (рис 10.3).

На цьому завершено введення залежностей.

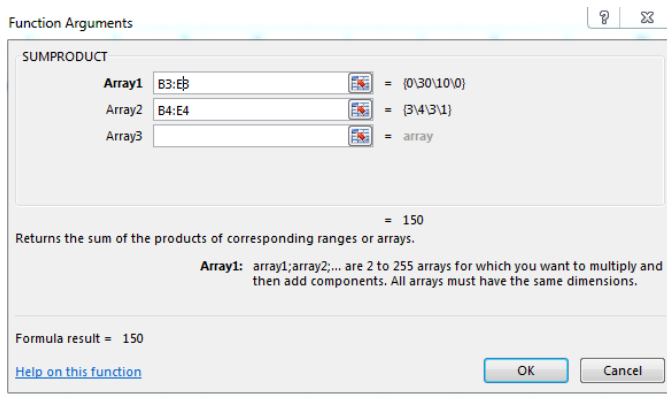


Рис.10.2. Формування цільової функції

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			ЗМІННІ					
2		x1	x2	x3	x4			
3	значення							
4	коефіцієнти ЦФ	3	4	3	1	ЦФ		
5			ОБМЕЖЕННЯ				0	
6	Вид ресурсу					ліва частина	знак	права частина
7	праця	7	2	2	6		0	80
8	сировина	5	8	4	3		0	480
9	обладнання	2	4	1	8		0	130
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								

Рис. 10.3. Формування обмежень задачі

У діалоговому вікні «Розв'язувач» є три основних параметра:

- **Оптимізувати цільову функцію**
- **Змінюючи клітини змінних**
- **Підлягає обмеженню**
- **Насамперед необхідно заповнити поле «Оптимізувати цільову функцію».**

У всіх задачах для засобу «Розв'язувач» оптимізується результат в одній з клітин робочого листа. Цільова функція зв'язана з іншими клітинами цього листа за допомогою формул.

Надбудова «Розв'язувач» дає можливість обрати пошук найменшого чи найбільшого значення для цільової функції, або встановити конкретне значення.

Другий важливий параметр засобу **Розв'язувач** – **«Змінюючи клітини змінних»**.

Клітини змінних – це клітини, значення в яких будуть змінюватися, для того щоб оптимізувати результат у цільовій клітині.

Для розв'язку задачі можна вказати до 200 таких клітин, але до них є дві основних умови: вони мають містити формули і зміна їх значень повинна впливати на зміну значення цільової функції, тому цільова клітина залежна від **Змінних клітин**.

Третій параметр, що необхідно встановити – **«Обмеження»**.

Призначення цільової функції.

- Навести курсор у поле «*Оптимізувати цільову функцію*».
- Ввести адресу клітини **F5**.
- Ввести напрямок цільової функції (у нас максимального значення).

Ввести адреси змінних:

- Навести курсор у поле «*Змінюючи клітини змінних*».
- Ввести адреси **B3:E3**.

Вводимо обмеження:

- Курсор у поле «*Додати*», з'являється діалогове вікно «*Додавання обмеження*» (рис. 10.4.)

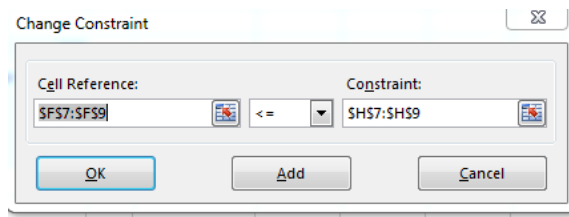
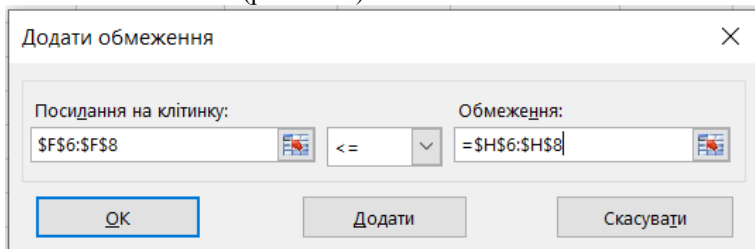


Рис. 10.4. Формування обмежень

- У полі «*Посилання на клітинку*» ввести адресу **F7**.
- Ввести знак обмеження та обсяг обмеження.
- «*Додати*». Аналогічно ввести решту обмежень.
- Після останнього обмеження ввести **ОК**.

На екрані з'являється діалогове вікно «*Розв'язувача*» з введеними умовами (рис10.5.)

Оптимізувати цільову функцію:

До: ☒ Максимум ☐ Мінімум ☐ Значення:

Змінюючі клітинки змінних:

Підлягає обмеженням:

\$F\$6:\$F\$8 <= \$H\$6:\$H\$8

☒ Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання

Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Solver Parameters

Set Objective:

To: ☒ Max ☐ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

\$F\$7:\$F\$9 <= \$H\$7:\$H\$9

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Рис. 10.5.Сформовані та введені всі умови для розв'язку задачі

- Відмітити позначку використання симплекс-методу, та позначити прапорцем **невід’ємність змінних**
- Розв’язати**. На екрані з’явиться діалогове вікно «**Результати** – рис. 10.6.

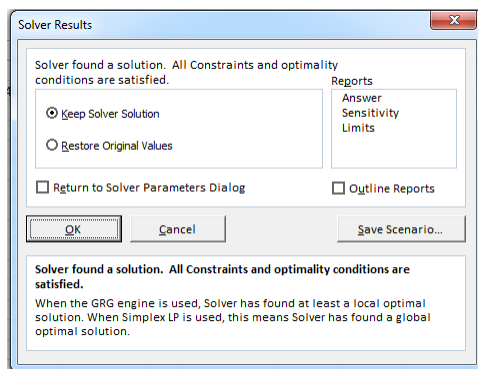


Рис. 10.6 Оптимальний розв’язок знайдено

Отриманий оптимальний розв’язок означає, що максимальний доход 150 у.о. цех зможе отримати при випуску 30 т продукції другого виду (сметана) і 10 т – третього (кефір). При цьому ресурси праці та обладнання будуть використані повністю, а з 480 т сировини у виробничій діяльності для оптимального плану виробництва за окреслених умов буде використано 280 т.

EXCEL дає можливість представити результати розв’язку задачі у вигляді конкретного звіту.

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$F\$5	ОБМЕЖЕННЯ ЦФ	150	150

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$B\$3	значення x1	0	0	Contin
\$C\$3	значення x2	30	30	Contin
\$D\$3	значення x3	10	10	Contin
\$E\$3	значення x4	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$F\$7	праця ліва частина	80	\$F\$7<=\$H\$7	Binding	0
\$F\$8	сировина ліва частина	280	\$F\$8<=\$H\$8	Not Binding	200
\$F\$9	обладнання ліва частина	130	\$F\$9<=\$H\$9	Binding	0

Рис. 10.7. Звіт (Answer)

У звіт включені початкові і кінцеві значення цільової функції та залежних клітин.

Звіт за результатами складається з трьох таблиць:

- таблиця «**Objective Cell**» містить інформацію про ЦФ;
- таблиця «**Variable Cells**» містить інформацію про значення отриманих в результаті рішення задачі;
- таблиця «**Constraints**» показує результати оптимального рішення обмежень і для граничних умов.

Таблиця «**Цільова клітина**» має наступні стовпчики:

- Cell – це адреса зазначеної клітинки для розрахунку оптимального значення.
- Name – це назва шуканого оптимального значення, що визначена вище на рядок від зазначеної цільової функції.
- Original Value - початкове значення клітинки.
- Final Value (Результат) – це шукане оптимальне значення цільової функції.

Таблиця «**Variable Cells**» має аналогічні стовпчики (графи), але містить характеристики для змінних (невідомих значень) задачі.

Таблиця «**Constraints**» має стовпчики:

- Cell – це адреса зазначеної клітинки для розрахунку значень обмеженнями.
- Name – це назва шуканих значень, що визначені назвами по рядку та стовпчику.
- Value – це знайдені значення, величини, що задовольняють умови (обмеження) та необхідні для оптимізації цільової функції. У графі «Значення» наведені величини використаного ресурсу.
- Formula (Формула) – це визначені користувачем обмеження в діалоговому вікні команди «Розв'язувача».
- Status (Статус) – визначення дефіцитності значень по умові (обмеженнях). Статус «Binding (пов'язане)» означає, що наявний ресурс за умовою використаний по максимуму.
- Статус «не пов'язане» означає, що наявний ресурс не використаний в повній мірі. Якщо ресурс використовується повністю (тобто ресурс дефіцитний), то в графі «Статус» відповідне обмеження вказується як «пов'язане»; при неповному використанні ресурсу (тобто ресурс недефіцитних) в цій графі вказується «не пов'язаний».
- Slack (Допуск) – відображена різниця між знайденими значеннями та заданими як граничні умови.

Звіт по стійкості складається з двох таблиць

Таблиця «**Adjustable Cells**» містить інформацію, що відноситься до змінних, та має наступні стовпчики (графи):

Cell – це адреса зазначених клітинок для розрахунку змінних (невідомих).
Name – це назва шуканих значень змінних (невідомих), що визначена вище на рядок від зазначеної цільової функції.

Final Value – це знайдені значення змінних (невідомих) командою «Розв'язувача».

Reduced cost (Зменшувана вартість) – це величина зміни цільової функції в разі примусового включення одиниці змінної (продукції) в оптимальне рішення;

Нормована вартість показує, на скільки зміниться значення ЦФ в разі примусового включення одиниці певного виду продукції в оптимальне рішення;

Objective Coefficient (Цільовий коефіцієнт) – це задані за умовою коефіцієнти при змінних у ЦФ (наприклад, ціна тощо).

Allowable increase(Припустиме збільшення), Allowable decrease (припустиме зменшення) – це допустимі граничні значення приросту цільових коефіцієнтів, при яких зберігається первісне оптимальне рішення ЦФ.

Таким чином у таблиці «**Клітини змінних**» можна знайти інформацію, що відноситься до змінних, а саме: результат розв'язання задачі, нормовану вартість, яка показує, на скільки зміниться значення ЦФ в разі примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальне рішення, коефіцієнти ЦФ та граничні значення приросту цільових коефіцієнтів, при яких зберігається первісне оптимальне рішення.

Примітка ! При виході за вказані в звіті по стійкості межі зміни цін оптимальне рішення може змінюватися як по номенклатурі продукції, що випускається, так і за обсягами випуску (без зміни номенклатури).

Таблиця «**Constraints (обмеження)**» містить інформацію, що відноситься до обмежень. В ній є наступні стовпчики (графи):

Cell– це адреса зазначених клітинок для розрахунку необхідних видів ресурсів в межах заданих обмежень.

Name– це назва шуканих значень за видами ресурсів.

Final Value– це знайдені значення шуканих необхідних видів ресурсів за обмеженнями; величина використаних ресурсів у колонці

Shadow price (Тінь ціна) - цінність додаткової одиниці i-го ресурсу (тіньова ціна), що розраховується тільки для дефіцитних ресурсів. Якщо (тіньова ціна) ресурсу рівна 0, це свідчить про не дефіцитність даного ресурсу виробництва; величина збільшення ЦФ від збільшення на одиницю i-го ресурсу, що є дефіцитним.

Величина (тіньової ціни) показує, на скільки збільшиться цільова функція при додатковому введенні кожної одиниці цього дефіцитного ресурсу в межах допустимого діапазону "Припустиме збільшення, зменшення".

Constraints Right part – це задані значення для обмежень по ресурсах (гранично задана умова).

Allowable increase(Припустиме збільшення), Allowable decrease (припустиме зменшення)– граничні значення приросту ресурсів, що показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімально необхідна вимога) ресурс, зберігши при цьому оптимальне рішення.

Таким чином в таблиці «Обмеження» можна знайти інформацію, що відноситься до обмежень, про:

1. Величину використаних ресурсів у колонці "Результат. Значення".
2. Граничні значення приросту ресурсів. У графі Allowable increase(Припустиме збільшення), Allowable decrease (припустиме зменшення" показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімально необхідна вимога) ресурс, зберігши при цьому оптимальне рішення.
3. Цінність додаткової одиниці і-го ресурсу (тіньова ціна) розраховується тільки для дефіцитних ресурсів. Якщо (тіньова ціна) ресурсу рівна 0, це свідчить про не дефіцитність даного ресурсу виробництва. Величина (тіньової ціни) показує, на скільки збільшиться цільова функція при додатковому введенні кожної одиниці цього дефіцитного ресурсу в межах допустимого діапазону «Припустиме збільшення, зменшення»

Variable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$3	значення x1	0	-7	3	7	1E+30
\$C\$3	значення x2	30	0	4	8	1
\$D\$3	значення x3	10	0	3	1	1,75
\$E\$3	значення x4	0	-9,666666667	1	9,666666667	1E+30

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$F\$7	праця ліва частина	80	1,333333333	80	150	15
\$F\$8	сировина ліва частина	280	0	480	1E+30	200
\$F\$9	обладнання ліва частина	130	0,333333333	130	30	90

Рис. 10.8. Звіт Стійкість (Sensitivity)

У Звіт (*Limits*) включена інформація про верхні та нижні границі значень, що можуть приймати змінювані клітини при виконанні умов обмежень (рис.10.9).

Objective		
Cell	Name	Value
\$F\$5	ОБМЕЖЕННЯ ЦФ	150

Variable			Lower	Objective	Upper	Objective
Cell	Name	Value	Limit	Result	Limit	Result
\$B\$3	значення x1	0	0	150	0	150
\$C\$3	значення x2	30	0	30	30	150
\$D\$3	значення x3	10	0	120	10	150
\$E\$3	значення x4	0	0	150	0	150

Рис. 10.9. Звіт (Limits).

Частина 1 стосується ЦФ:

Cell – це адреса зазначеної клітинки для розрахунку оптимального значення.

Target Name – це назва шуканого оптимального значення, що визначена вище на рядок від зазначеної цільової функції.

Value (Значення) - значення ЦФ (знайдене оптимальне значення).

Частина 2 стосується пошуку оптимального плану (змінних):

Перша таблиця зліва має аналогічні стовпчики, але для змінних, для оптимального плану.

Наступні таблиці мають характеристики:

Lower Limit - найменше значення, яке може прийняти змінна.

Target result - це значення, яке буде в цільовій комірці при зміні плану до нижньої межі;

Upper Limit - це найбільше значення, які можуть містити змінні (невідомі), щоб отримати максимальне значення ЦФ;

Target result - це значення, яке буде в цільовій комірці, якщо змінні досягнуть значення верхньої межі.

10.3. Розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

Задача багатокритеріальної оптимізації – така задача, що має декілька цільових функцій. При цьому обмеження можуть бути як присутні, так і відсутні. Задача багатокритеріальної оптимізації без обмежень є частинним випадком відповідної задачі з обмеженнями, тому у подальшому розглядатимемо останні.

У загальному вигляді математична постановка задачі багатокритеріальної оптимізації з однією змінною складається з визначення найбільшого або найменшого значення цільових функцій

$$f_k(x), (k = \overline{1:l}) \quad (10.1)$$

за умов

$$g_i(x) \leq b_i, i = \overline{1:m}, \quad (10.2)$$

де f_k і g_i - задані функції, а b_i - деякі дійсні числа.

При формулюванні та аналізі задач багатокритеріальної оптимізації поняття розв'язання у традиційному розумінні може бути відсутнім або не мати сенсу. У практичних задачах знаходження оптимального розв'язку за одним з критеріїв зазвичай не відповідає оптимальному розв'язку за іншими критеріями. Отже, на практиці має місце суперечливість критеріальних функцій, пов'язана з неможливістю знайти оптимально припустимий розв'язок початкової задачі одразу по всіх цільових функціях.

У загальному випадку поняття розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації тісно пов'язано з аналізом множини припустимих альтернатив. З цією метою на множині припустимих альтернатив вводять деяке спеціальне відношення, яке називають *відношення домінування за Парето*. Припустимі альтернативи, що домінують за Парето, можуть бути виключені з розгляду, оскільки для будь-якої з них завжди знайдеться припустима альтернатива із значеннями цільових функцій не меншими, ніж значення цих функцій для домінуючих альтернатив. Найбільш цікавими для розгляду є саме ті альтернативи, які не можна порівняти між собою за деяким даним відношенням. Множина цих альтернатив у множині припустимих альтернатив утворює власну підмножину – множину недомінуючих альтернатив.

Взагалі, всі недомінуючі за Парето альтернативи еквівалентні між собою з точки зору початкової постановки задачі багатокритеріальної оптимізації. Для вибору єдиної альтернативи, яка буде кінцевим розв'язком задачі, необхідно мати деякі додаткові припущення про властивості майбутнього розв'язку або про уподобання осіб та експертів, що прийматимуть остаточне рішення. В окремих випадках ці припущення можуть бути включені в початкову постановку задачі.

Поняття рішення задачі багатокритеріальної оптимізації, у загальному випадку, передбачає попереднє визначення множини недомінуючих альтернатив і наступний аналіз цієї множини з метою вибору кінцевої єдиної альтернативи. За базовий розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації обирають множину недомінуючих альтернатив. Таким чином, множина недомінуючих альтернатив може бути як кінцевим розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації у випадку відсутності додаткових припущень про властивості кінцевого рішення, так і основою для прийняття остаточного рішення за наявності таких припущень.

Відомо три підходи до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації - графічний, аналітичний і алгоритмічний, - кожен з яких має кілька методів (рис. 10.10).

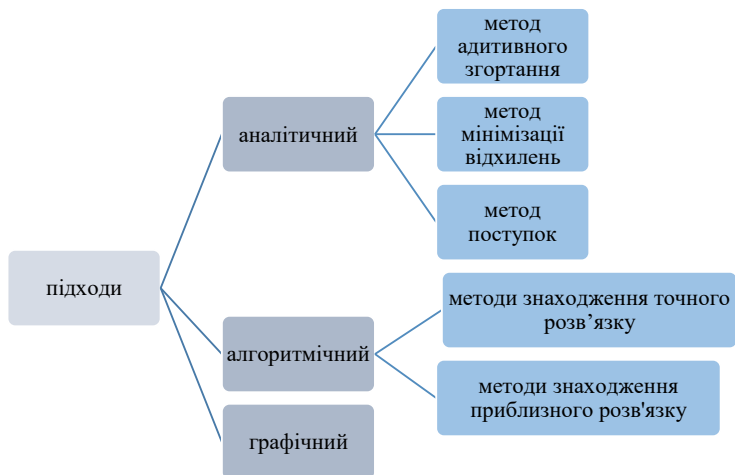


Рис. 10.10. Підходи і методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

Графічний підхід може бути застосований до найпростіших задач багатокритеріальної оптимізації. Він заснований на зображенні графіків цільових функцій і обмежень на площині або у тривимірному просторі з наступним візуальним знаходженням множини недомінуючих альтернатив або остаточного розв'язку. Найчастіше графічний спосіб розв'язання використовується для ілюстрації особливостей тих чи інших методів розв'язання задач багатокритеріального лінійного і цілочислового програмування.

Під *аналітичним* розв'язанням задач багатокритеріальної оптимізації розуміють встановлення деякої функціональної залежності між вихідними даними задачі і точним її розв'язанням у вигляді множини недомінуючих альтернатив або остаточного розв'язку, що припускає знаходження множини недомінуючих розв'язків або остаточного рішення по відомих значеннях аргументів.

Наприклад, базовим способом знаходження аналітичних рішень у вигляді множини недомінуючих альтернатив для задач багатокритеріальної оптимізації виду (10.1) - (10.2) є розв'язання задачі однокритеріальної оптимізації типу

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_l f_l(x) \rightarrow \max \quad (10.3)$$

за умов

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = \overline{1:m}. \quad (10.4)$$

Значення $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$, що називають *ваговими коефіцієнтами цільових функцій*, мають задовольняти умови:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in [0, 1], \quad (10.5)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = 1. \quad (10.6).$$

При цьому множину недомінуючих альтернатив для задачі багатокритеріальної оптимізації у загальній постановці (10.1) - (10.2) з неперервними і опуклими цільовими функціями, а також компактною і опуклою множиною припустимих альтернатив може бути отримано в результаті розв'язання задачі однокритеріальної оптимізації (10.3) - (10.4) для всіх можливих комбінацій вагових коефіцієнтів цільових функцій, тобто для всіх можливих дійсних значень $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in [0, 1]$, таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = 1$.

На жаль, даний спосіб знаходження недомінуючих альтернатив не знаходить практичного застосування, оскільки є доволі складним з точки зору виконання необхідних обчислень. Однак він є основою для *методу адитивного згортання цільових функцій*.

Серед інших методів аналітичного рішення задач багатокритеріальної оптимізації найбільше застосування отримали *метод поступок* і *метод мінімізації відхилення від ідеальної точки*, які за характером можуть бути застосовані для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації різних типів.

Однак, аналітичний підхід розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації застосовується тільки для найпростіших задач з додатковими припущеннями про характер цільової функції і обмежень. Альтернативою до нього є алгоритмічний (обчислювальний) метод.

Під *алгоритмічним розв'язанням* задачі багатокритеріальної оптимізації розуміють розробку або конструювання такої обчислювальної процедури, що дозволяє на основі відомих початкових даних задачі знаходити її розв'язання у вигляді множини недомінуючих альтернатив або остаточного рішення. Відповідна процедура може бути описана деяким формальним чином і зафіксована у вигляді алгоритму, тобто формальної вказівки виконати точно визначену певну послідовність дій, спрямованих на розв'язання поставленої задачі багатокритеріальної оптимізації. Сучасні методи алгоритмічного розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації передбачають використання ПЕОМ і відповідного програмного забезпечення.

Методи алгоритмічного розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації поділяють на дві категорії: методи знаходження точного рішення і методи знаходження наближеного рішення. Методи і алгоритми першої групи дозволяють за скінчений час знайти точний розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації. Методи і алгоритми наближеного розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації дозволяють знаходити деяку апроксимацію множини недомінуючих альтернатив, одне або кілька локально-оптимальних кінцевих рішень.

Знаходження точного розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації для будь-якого випадку є найкращим. Але, якщо точний розв'язок з яких-небудь причин знати неможливо, намагаються знати наближений розв'язок.

Так як у табличному процесорі MS Excel реалізовані наближені методи розв'язання задач однокритеріальної оптимізації з досить високим ступенем точності, то процес розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації у цьому програмному засобі може бути пов'язаний із застосуванням методів поступок і метода оптимізації відхилення від ідеальної точки. Для оцінювання точності знайдених розв'язків на базі порівняння аналітичних і алгоритмічних способів їх розв'язання необхідно застосовувати кілька різних методів і підходів. Але слід пам'ятати, що вибір адекватного методу розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації залежить не тільки від постанови вихідної задачі, але й від наявності додаткової інформації про властивості остаточного розв'язку.

Приклад 1. Розглянемо двокритеріальну задачу про вирощування тварин двох видів. Сформулюємо двокритеріальну задачу.

Фермер відгодовує два види тварин – А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину по видах наведено в таблиці 10.4. В ній також вказані запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини на внутрішньому та на зовнішньому ринках. Визначити, скільки тварин кожного виду слід відгодовувати фермеру для внутрішнього і для зовнішнього ринків, щоб максимальний прибуток від цієї діяльності був максимальним.

Таблиця 1

Вид корму	Витрати кормів на відгодівлю		Запаси кормів
	тварини виду А	тварини виду В	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини на внутрішньому ринку (в умовних гр. од.)	16	6	
Прибуток від реалізації однієї тварини на зовнішньому ринку (в євро)	8	12	

За основні змінні у даній задачі оберемо x_1 - кількість тварин виду А, x_2 - кількість тварин виду В. Математична модель двокритеріальної задачі про вирощування тварин двох видів матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 &16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\
 &8x_1 + 12x_2 \rightarrow \max \\
 &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 4x_1 + x_2 \leq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426 \end{cases} \\
 &x_1, x_2 \geq 0, \text{ цілі}
 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Метод поступок

Алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі про вирощування тварин двох видів засобами табличного процесору Excel методом поступок:

1 етап. Розв'язують поставлену задачу як однокритеріальну, обираючи за критерій оптимальності одну з двох цільових функцій (наприклад, першу). Вхідні дані для розв'язання даної задачі у режимі формул подано на рис. 10.11, результат розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин на першому етапі - на рис. 10.12.

	A	B	C	D	E	F	G
№ п/п		Обмеження	к-сть тварин виду А	к-сть тварин виду В		тип обмеження	розмір обмеження
1			x1	x2			
2							
3							
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C4:D4)	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C5:D5)	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C6:D6)	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C7:D7)	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C8:D8)	max	

Рис. 10.11. Вхідні дані у режимі формул при розв'язанні двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок (перший етап)

	A	B	C	D	E	F	G
№ п/п		Обмеження	к-сть тварин виду А	к-сть тварин виду В		тип обмеження	розмір обмеження
1			x1	x2			
2							
3			57	12			
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	150	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	240	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	426	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	984	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	600	max	

Рис. 10.12. Результат виконання першого етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок

Результатом розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин на першому етапі є знайдене значення першої цільової функції (розмір прибутку на внутрішньому ринку) $F_1^* = 984$. При цьому значення другої цільової функції (прибутку на зовнішньому ринку) $F_2^* = 600$. Припустимо, що можлива поступка за першою цільовою функцією, яка дорівнює 50 одиницям.

Примітка: якщо цільова функція спрямована на максимум, то поступка діє в сторону зменшення її значення, якщо цільова функція спрямована на мінімум – то у бік збільшення.

Отже, мінімально припустиме значення першої цільової функції з врахуванням поступки дорівнює $F_1^* - 50 = 984 - 50 = 934$. Ця умова оформлюється у вигляді додаткового обмеження:

$$16x_1 + 6x_2 \leq 934. \quad (10.8)$$

Примітка: додаткове обмеження має знак $\geq$, якщо цільова функція спрямована на максимум, додаткове обмеження має знак $\leq$, якщо цільова функція спрямована на мінімум.

Для остаточного розв'язання двокритеріальної задачі необхідно виконати 2 етап. Вхідні дані з врахуванням додаткового обмеження у режимі формул подано на рис. 10.13, результат другого етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин - на рис. 10.14. Опції діалогового вікна «Параметри» на першому і другому етапах розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок однакові.

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Обмеження				тип обмеження	розмір обмеження
2	п/п		x1	x2			
3							
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C4:D4)	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C5:D5)	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C6:D6)	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C7:D7)	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C8:D8)	max	
9		Додаткове обмеження			=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C7:D7)	>=	934

Рис. 10.13. Вхідні дані у режимі формул при розв'язанні двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок (другий етап)

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Обмеження				тип обмеження	розмір обмеження
2	п/п		x1	x2			
3							
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	151	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	227	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	423	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	938	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	604	max	
9		Додаткове обмеження			938	>=	934

Рис. 10.14. Результат другого етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок

Результатом розв'язання задачі про вирощування тварин є знайдені оптимальні значення змінних $x_1 = 53$, $x_2 = 15$ і цільових функцій $F_1^* = 938$, $F_2^* = 604$.

Аналіз знайденого розв'язку показує, що для отримання максимального прибутку необхідно вирощувати 53 тварини виду А і 15 тварин виду В. При цьому збут продукції на внутрішньому ринку принесе прибуток розміром 938 ум. гр. одиниць, а за умови реалізації цієї ж продукції на зовнішньому ринку максимальний прибуток складе 604 євро.

Метод мінімального відхилення від ідеальної точки

Алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі про вирощування тварин двох видів засобами табличного процесору Excel методом мінімального відхилення:

1 етап. Розв'язують поставлену задачу як однокритеріальну, обираючи за критерій оптимальності першу з двох цільових функцій.

2 етап. Розв'язують поставлену задачу як однокритеріальну, обираючи за критерій оптимальності другу цільову функцію. Послідовність дій аналогічна етапу 1, а результат 2 етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення подано на рис. 10.15.

	A	B	C	D	E	F	G
1	№ п/п	Обмеження	к-сть тварин виду А	к-сть тварин виду В		тип обмеження	розмір обмеження
2			x1	x2			
3			0	60			
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	180	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	60	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	420	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	360	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	720	max	

Рис. 10.15. Результат другого етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення

Результатом розв'язання однокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення відносно другої цільової функції є значення $F_2^* = 720$.

3 етап. Будують узагальнену цільову функцію, яка дорівнює сумі квадратів різниць між знайденими значеннями цільових функцій та їх можливими значеннями і розв'язують оптимізаційну задачу відносно неї. Вхідні дані з узагальненою цільовою функцією у режимі формул подано на рис. 10.16, результат розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення на третьому етапі - на рис. 10.17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	№ п/п	Обмеження	x1	x2		тип обмеження	розмір обмеження
2							
3							
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C4:D4)	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C5:D5)	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C6:D6)	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C7:D7)	max	984
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C8:D8)	max	720
9		Узагальнена цільова функція			=(G7-E7)*2+(G8-E8)*2		

Рис. 10.16. Вхідні дані у режимі формул при розв'язанні двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення (третій етап)

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Обмеження				тип	розмір
2	п/п		x1	x2		обме	обмеж
3			57	12			
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	150	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	240	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	426	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	984	max	984
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	600	max	720
9		Узагальнена цільова функція			14400		
10	п						

Рис. 10.17. Результат третього етапу розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом мінімального відхилення

Результатом розв'язання задачі про вирощування тварин є знайдені оптимальні значення змінних $x_1 = 57$, $x_2 = 12$ і цільових функцій $F_1^* = 984$, $F_2^* = 600$.

Аналіз знайденого розв'язку показує, що для отримання максимального прибутку необхідно вирощувати 57 тварини виду А і 12 тварин виду В. При цьому збут продукції на внутрішньому ринку принесе прибуток розміром 984 ум. гр. одиниці, а за умови реалізації цієї ж продукції на зовнішньому ринку максимальний прибуток складе 600 євро.

Як бачимо, результати розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом поступок і методом мінімального відхилення не співпадають. Це пов'язано з двома проблемами методу мінімального відхилення: проблемою співрозмірності абсолютних значень окремих цільових функцій і проблемою визначення фізичної розмірності узагальненої цільової функції. Однак, не дивлячись на перелічені недоліки, обидва методи можуть застосовуватись для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, залежно від вибору особи, що приймає управлінське рішення.

Метод адитивного згортання цільових функцій

Алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі про вирощування тварин двох видів засобами табличного процесору Excel методом адитивного згортання:

Метод адитивного згортання базується на заданих вагових коефіцієнтах окремих цільових функцій (формули (10.5) – (10.6)).

Нехай у прикладі 1 додатково, у вигляді вагових коефіцієнтів 0.3 і 0.7 двох цільових функцій відповідно, задано суб'єктивні уподобання особи, що приймає рішення.

При розв'язанні задач багатокритеріальної оптимізації методом адитивного згортання за формулою (10.3) будують так звану узагальнену функцію,

відносно якої і розв'язують поставлену задачу. У даному прикладі узагальнена цільова функція матиме вигляд $F_{\text{доц}} = 0.3F_1 + 0.7F_2$.

Вхідні дані з узагальненою цільовою функцією у режимі формул подано на рис. 10.18, результат розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом адитивного згортання можна побачити на рис. 10.19.

1	A	B	C	D	E	F	G
2	№	Обмеження	x1	x2		тип	розмір
3	п/п					обмеження	обмеження
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C4:D4)	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C5:D5)	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C6:D6)	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C7:D7)	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	=СУММПРОИЗВ(\$C\$3:\$D\$3;C8:D8)	max	
9		Узагальнена цільова функція			=0,3*E7+0,7*E8		

Рис. 10.18. Вхідні дані у режимі формул при розв'язанні двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом адитивного згортання

1	A	B	C	D	E	F	G
2	№	Обмеження	x1	x2		тип	розмір
3	п/п					обме	обмеж
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	150	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	240	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	426	<=	426
7	F ₁	Прибуток на внутрішньому ринку	16	6	984	max	
8	F ₂	Прибуток на зовнішньому ринку	8	12	600	max	
9		Узагальнена цільова функція			715,2		

Рис. 10.19. Результат розв'язання двокритеріальної задачі про вирощування тварин методом адитивного згортання

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.

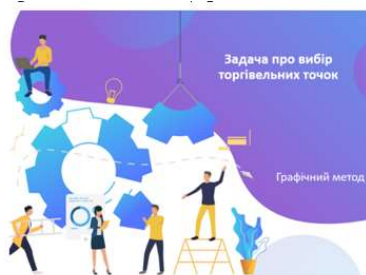
ЗНАЙТИ ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ :

ХІД РОБОТИ:

- ✓ Обрати економічну умову для формалізації та виконання
- ✓ Поетапно розв'язати ЗЛП графічним методом (вручну, за допомогою обраного on-line калькулятора в ЕНК).
- ✓ Надати висновки щодо розв'язку ЗЛП.



ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ



оцінка економічної ситуації (системи, процесу)

1. Є можливість відкрити такі пункти:
2. МАФ в спальному районі
3. Лоток на фермерському ринку
4. Затрати
5. Оренді площі під проект час на рекламу обслуговуючий персонал

Норми затрат для функціонування

затрати	Норми затрат		можливості затрат
	МАФ	Лоток на ринку	
Обслуговуючий персонал	1	3	9
Час на рекламу	2	1	6
Площа приміщення	2	4	8
Прибуток	1	3	

модель

• Функція мети $F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

• Обмеження $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \end{cases}$

Умови на знак змінних $x_1, x_2 \geq 0$

Змінні – цілі числа!



ВАРІАНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Задача 1. Іван- студент-першокурсник. Він вирішив, що щоденна гра в комп'ютерні ігри, погано впливає на його саморозвиток. Тому він вирішив розпочати працювати над своїм тайм-менеджментом: розподілити денний час – 10 годин між іграми та навчанням. Ігри йому здаються в 2 рази привабливішими, ніж навчання. Але із відчуття сумління, Іван вирішив, що час на ігри не може перевищувати час на навчання. Крім того, з досвіду, виконуючи всі навчальні завдання, на ігри залишається в день не більше ніж 4 години. Допоможіть Івану розподілити денний час таким чином, щоб він отримував максимальне задоволення від навчання та ігор.

Задача 2. Сергій, крім занять в університеті, для забезпечення свого фінансового стану, має підпрацьовувати не менше, ніж 20 год. в тиждень. У нього є можливість працювати в 2-х магазинах роздрібної торгівлі. В 1-му він може працювати 5-12 год на тиждень, в 2-му – 6-10 год на тиждень. В магазинах однакова почасова оплата. Сергію необхідно обрати в якому магазині йому працювати, враховуючи навантаженість роботи та можливі доходи. Виходячи з умов він оцінив навантаження пропозицій виходячи із складності роботи по 10-бальній шкалі: 1 – 8 балів, 2 – 6 балів. Сумарна навантаженість на тиждень пропорційна кількості відпрацьованих годин. Скільки необхідно і в яких магазинах працювати Сергію, щоб мінімізувати загальне навантаження на роботі?

Задача 3. Магазин швидкого харчування Супербургер продає бігмабургери та чізбургери. На порцію 1 –го бігмабургера 400 г м'яса, 1-го чізбургера – 200 г мяса. На початку робочого дня магазин має добовий запас 200 кг м'яса, за необхідності можна ще докупляти, але з націнкою 25 грн на 1 кг. Не використате м'ясо магазин віддає в кінці дня на благодійність. Бігмабургер (1 порція) коштує 20 грн, чізбургер – 15 грн. Визначено, що в

сукупності магазин не може продати більше 900 порцій продукції. Яка має бути частка кожного з видів продукції для максимізації доходу?

Задача 4. Фірмовий магазин Пуперкол реалізує 2 види безалкогольних напоїв В-кола та і колу власного виробництва. Чистий прибуток від реалізації 1 пляшки В-коли становить 5 грн, тоді як від власної – 7 грн. В середньому на день магазин продає до 500 пляшок напоїв. Попит на колу власного виробництва є більшим, внаслідок значно нижчої ціни. Середні об'єми продажу В-коли і коли власного виробництва співвідношення 2:1. Крім того, відомо, що в середньому об'єм продажу В-коли за день становить 100 пляшок.

Задача 5. Банк Максібанк протягом декількох місяців планує інвестувати кошти в розмірі 200 тис. дол. на кредитування фіз.осіб і купівлю авто. Комісія за річний кредит буде становити 14% для фіз осіб, 12%- для купівлі авто. Всі види кредитів повертається в кінці періоду. Відомо, що в середньому 3 % кредитів від фіз. осіб, 2% - для купівлі машин не повертаються. Об'єми виданих кредитів на купівлю авто зазвичай в 2 рази більші, ніж кредити для фіз осіб.

Задача 6. Маркетингова компанія Show and Sell рекламує продукцію через радіо та телебачення. Бюджет компанії обмежений 10 тис. дол. на місяць.1хв реклами на радіо коштує 15 дол, на телебаченні – 300 дол. Керівництво компанії прийняло рішення про те, що реклама на радіо по часу має мінімум в 2 рази перевищувати рекламу на телебаченні. Поряд з цим, маркетингові дослідження вказують на те, що нерационально використовувати більше, ніж 400 хв реклами на радіо за місяць, а також, що реклама на телебаченні в 25 раз ефективніше, ніж на радіо. Необхідно розробити оптимальний план вкладення коштів.

Задача 7. Компанія Reddy Mikks виробляє фарбу для внутрішніх і зовнішніх робіт із сировини двох типів M1 та M2.

Таблиця

Параметри задачі			
Показники	Витрати сировини (т) на 1 од. Фарби		Максимальні можливі денні витрати сировини
	Фарба (Для внут.робіт)	Фарба (Для зовн. робіт)	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Дохід на (в 1000 дол. на 1 тонн. фарби)	5	5	

Відділ маркетингу компанії обмежив денне виробництво фарби для внутрішніх робіт до 2 т. внаслідок відсутності достатнього попиту, а також представив як умову, щоб виробництво тієї ж фарби не повинне перевищувати більше ніж на тонну денне виробництво фарби для зовнішніх робіт. Компанія планує сформувати такий план виробництва фарби двох видів з метою максимізації доходу.

Задача 8. Завод Суперелектро виробляє 2 типи двигунів для авто, кожен з яких укомплектується на окремій лінії. Продуктивність 1 лінії складає 600 двигунів на день, 2 лінії – 750 двигунів на день. Для виробництва двигуна 1-го типу необхідно 10 одиниць комплектуючих, 2-го типу – 8 одиниць. Постачальник забезпечує 8000 одиниць комплектуючих. Дохідність двигунів 1-го типу – 60 дол., 2-го типу- 40 дол. Визначити оптимальну структуру денного виробництва двигунів.

Задача 9. Завод «Дикий Захід» виробляє 2 типи ковбойських капелюхів. Виробництво капелюхів 1-го типу займає в 2 рази більше часу, ніж 2-го. Якщо завод буде виробляти лише капелюхи 2-го типу, то можливо буде виробити лише 400 таких капелюхів. Попит на капелюхи складає - не більше 150 капелюхів 1-го типу та 200 капелюхів 2-го типу. Дохід від одиниці 8 доларів капелюхів 1-го типу та 5 доларів капелюхів 2-го типу. Визначити оптимальну структуру денного виробництва.

Задача 10. Факультет місцевого університету пропонує до вивчення 30 навчальних курсів підвищення кваліфікації в семестр. Всі їх можна умовно поділити на професійно орієнтовані та загальні навчальні. Щоб задовільнити запит студентів, в кожному семестрі повинно пропонуватися не менше 10 курсів кожного виду. Чистий прибуток від професійно орієнтованого курсу складає 1500 грн, а загального – 1000 грн. Необхідно визначити оптимальну структуру курсів для факультету.

Задача 11. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в табл.

Таблиця

ТРИВАЛІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ КНИЖКОВИХ ПОЛИЦЬ

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	

1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, що максимізують прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Задача 12. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважаємо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл.

ПОЖИВНІСТЬ ТА ВАРТІСТЬ КОРМІВ

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковини	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.

Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

Задача 13. Фірма виготовляє з одного виду сировини два продукти А та В, що продаються відповідно за 8 та 15 копійок за упаковку. Ринок збуту для кожного з них практично необмежений. Сировина для продукту А обробляється верстатом 1, а для продукту В — верстатом 2. Потім обидва продукти упаковуються на фабриці. Схему виробництва продуктів А та В зображено на рис.

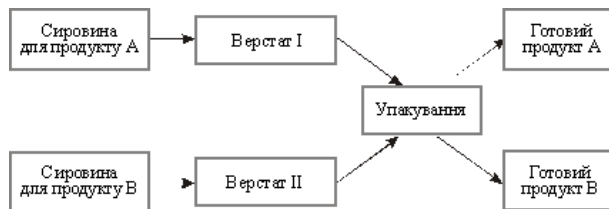


Рис. Схема виготовлення продуктів

Ціна 1 кг сировини — 6 копійок. Верстат 1 обробляє за годину 5 т сировини, а верстат 2—4 т сировини із втратами, що становлять відповідно 10 і 20%. Верстат 1 може працювати 6 год на день, причому його використання коштує 288 грн/год; верстат 2—5 год на день, що коштує 336 грн/год.

Маса продукту А в одній упаковці дорівнює $\frac{1}{4}$ кг, а продукту В — $\frac{1}{3}$ кг. Фабрика може працювати 10 год на день, щогодини упаковуючи 12 000 одиниць продукту А або 8000 одиниць продукту В. Вартість її роботи протягом 1 год становить 360 грн.

Необхідно відшукати такі значення x_1 та x_2 обсягів використання сировини для виготовлення продуктів А та В (у тоннах), які забезпечують найбільший щоденний прибуток фірми.

Задача 14. Деяке підприємство освоїло виробництво продукції двох видів А і В, використовуючи при цьому сировину чотирьох типів S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Запаси сировини й норма їхньої витрати на виробництво одиниці продукції зазначені в таблиці. Відомо, що прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції виду А становить 7 *ум.од.*, а від реалізації одиниці товару типу В — 5 *ум.од.* Визначити такий план випуску продукції, який би дозволив підприємству дістати максимальний прибуток.

Параметри задачі

Види подукції	А	В	Запаси сировини
Види сировини			
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	1	0	6
S_4	0	1	5
Прибуток	7	5	

Задача 15. Для виготовлення взуття двох моделей А та В на фабриці використовується два сорти шкіри. Тижневі ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці. Скласти план випуску взуття в асортименті, що максимізує щотижневий прибуток.

Таблиця

Параметри задачі

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний запас ресурсів
	А	В	
Шкіра І сорту (шмат.)	3	1	900
Шкіра ІІ сорту (шмат.)	0	3	1200
Робочий час (люд.-год)	1	2	900
Чистий прибуток від од. прод. (грн.)	50	70	

Задача 16. Банк Каваль працює над формуванням портфелю послуг по кредитуванню з можливостями інвестування 12 млн. дол. В таблиці представлені дані щодо портфелю.

Типи кредитування	Ставка	Вірогідність неповернення
Кредит для ФОП	0,14	0,1
Кредит на купівлю авто	0,13	0,07
Кредит на купівлю житла	0,12	0,03
Кредит на с.г.	0,125	0,05
Комерційний кредит	0,10	0,02

Кредити, що не повернуть вчасно, рахують як можливі втрати, вираховуючи з доходу. Конкурентна боротьба спонукає банк 40 % інвестицій розмішувати в надання комерційних кредитів та кредитів на с.г., на купівлю житла – 50% від загальної вартості кредитів для ФОП, купівлю авто та житла. Згідно державної політики для показника працездатності, вигідності банку необхідно, щоб співвідношення безнадійних (неповернених) кредитів до загальної суми кредитів не повинно перевищувати 0,04.

Задача 17. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в таблиці:

№ п/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукровий буряк	
1	Жива праця, людино-днів	5	25	270
2	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
3	Прибуток, тис.грн.	0,7	1	

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Задача 18. Фірма виготовляє деталі до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведено в таблиці:

Деталь	Тривалість обробки деталі, хв., за верстатами		
	1	2	3
A	10	6	8
B	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 грош.од.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми.

Задача 19. Підприємство виготовляє письмові столи типів А та В. Для одного столу типу А необхідно 2 м² деревної плити, а для столу типу В – 3 м². Підприємство може отримати до 1200 м² деревної плити за тиждень. Для виготовлення одного столу типу А потрібно 12 хв. роботи обладнання, а для моделі В – 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 год. на тиждень. Оцінено, що за тиждень може бути реалізовано до 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу А становить 30 грош. од., а типу В – 40 грош. од. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень?

Задача 20. Підприємство електронної промисловості виготовляє дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель складається на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії становить 60, а другої – 70 од. На один радіоприймач першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, а на радіоприймач другої моделі – 8. Максимальний добовий запас елементів, що використовуються у виробництві, становить 1000 од. Прибуток від реалізації одного радіоприймача першої та другої моделі дорівнює відповідно 35 та 25 грош. од. Визначити оптимальні обсяги виробництва радіоприймачів обох моделей.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ОПРАЦЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ СІМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ.

ХІД РОБОТИ:



Необхідно розв'язати ЗЛП симплексним методом.

Реалізувати задачу 3 ПОПЕРЕДНЬОЇ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ в надбудові. Надати висновки щодо розв'язку задачі, порівняти їх із розв'язком за допомогою графічного методу.

Дати відповідь на наступні питання:

- в чому основні переваги використання симплексного методу ЗЛП;
- описати алгоритм побудови за симплексним методом ЗЛП;
- дати визначення базисного, опорного та оптимального плану;
- описати алгоритм розв'язку ЗЛП симплексним методом за допомогою MS Excel.

MS Excel.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Загальна задача

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 18$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$$

У ліву частину кожного обмеження введемо невід'ємні додаткові змінні, які візьмемо зі знаком мінус ("−"), якщо обмеження типу "≥" і зі знаком плюс ("+"), якщо обмеження типу "≤".

$$Z - 3x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 18$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 18$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$$

Стандартну задачу переносимо у таблицю

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-2	-3	2	1	0	0	=18
x_5	2	1	1	0	1	0	=12
x_6	3	2	2	0	0	1	=18
Z	-3	1	-1	0	0	0	=0

$\uparrow$ (обрано) $\left(\begin{matrix} 18 \\ -3 \end{matrix} \right) \cdot \frac{12}{1} = \frac{18}{-3} = -6$

$X = (0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 6 \ 6) \quad Z = -6$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	$2/3$	1	$-1/3$	$-1/3$	0	0	6
	$1/3$	0	$5/3$	$1/3$	1	0	6
	$5/3$	0	$10/3$	$2/3$	0	1	6
Z	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	0	-6

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3.

ЗНАЙТИ ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ, ЯКЩО ВІДОМІ ВЕКТОР ЗАПАСУ ВАНТАЖУ (ПУНКТИ ВИРОБНИЦТВА) ($a_1, a_2, \dots, a_m$); ВЕКТОР ПОТРЕБ (ПУНКТИ СПОЖИВАННЯ) ($b_1, b_2, \dots, b_m$) ТА МАТРИЦЯ ВИТРАТ НА ПЕРЕВЕЗЕННЯ ВАНТАЖУ:

ХІД ВИКОНАННЯ РОБОТИ :

- ✓ Необхідно розв'язати транспортну задачу.
- ✓ Побудувати транспортну таблицю і знайти початковий план трьома методами (пн-зх кута, мінімальної вартості, подвійних відміток)
- ✓ Знайти оптимальний план методом потенціалів
- ✓ Реалізувати транспортну задачу в середовищі MS Excel
- ✓ Надати висновки щодо розв'язку завдання.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

The screenshot displays an Excel spreadsheet for a transportation problem. The data is organized as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a1=100, 200, 100							
2	b1=80, 140, 100, 80							
3				2	5	4	6	
4				8	4	3	8	
5				5	1	4	5	
6								
7								
8	Умова задачі							
9	2	5	4	6	100			
10	8	4	3	8	200			
11	5	1	4	5	100			
12	80	140	100	80	400			
13								
14								
15	Розв'язок задачі							
16	1	1	1	1	4			
17	1	1	1	1	4			
18	1	1	1	1	4			
19	3	3	3	3				

The formula bar shows the SUM function: `=СУММ(A16:D16)`. A dialog box for the SUM function is open, showing the range A16:D16 and the result 55.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	a1=100; 200; 100														
2	b1=80; 140; 100; 80														
3						2	5	4	6						
4						8	4	3	8						
5						5	1	4	5						
6															
7															
8	Умова задачі														
9	2	5	4	6		100									
10	8	4	3	8		200									
11	5	1	4	5		100									
12	80	140	100	80		400									
13															
14															
15	Розв'язок задачі														
16	1	1	1	1		4									
17	1	1	1	1		4									
18	1	1	1	1		4									
19	3	3	3	3											
20															
21						Цільова функція	16:D18)								
22															
23															
24															
25															

Аргументы функции

СУМПРОСВ

Массив1 A9:D11 = {2;5;4;6;8;4;3;8;5;1;4;5}

Массив2 A16:D18 = {1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1}

Массив3 = массив

= 55

Возвращает сумму произведений диагоналей или массивов.

Массив1: массив1; массив2;... от 2 до 255 массивов, соответствующие компоненты которых нужно сначала перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одинаковую

Значение: 55

Справка по этой функции

ОК Отмена

$$\sum A_i = 150 + 110 + 130 + 100 = 500$$

$$\sum b_i = 150 + 90 + 140 + 140 = 500$$

$\sum A_i = \sum b_i \Rightarrow$ модель задачи *закрыта*,
а также має *розв'язок*

Транспортна таблиця

① *Метод min вартості:*

A_i	b_j			
	$b_1=150$	$b_2=90$	$b_3=140$	$b_4=100$
$a_1=150$	6	4	9	5
$a_2=110$	4	5	8	4
$a_3=130$	9	3	3	3
$a_4=100$	5	5	4	7

min елемент

$$X_{11} = \min(a_1, b_1) = 150$$

$$a_1 = b_1 = 150 - 150 = 0$$

A_i	b_j			
	$b_1=0$	$b_2=90$	$b_3=140$	$b_4=100$
$a_1=0$			9	5
$a_2=0$			8	4
$a_3=0$			3	3
$a_4=100$			4	7

min елемент

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) = 100$$

$$a_1 = 100 - 100 = 0$$

$$b_3 = 140 - 100 = 40$$

A_i	b_j			
	$b_1=0$	$b_2=90$	$b_3=100$	$b_4=100$
$a_1=0$			9	5
$a_2=110$			8	4
$a_3=0$			3	3
$a_4=100$			4	7

min елемент

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) = 90$$

$$a_1 = 150 - 90 = 60$$

$$b_2 = 90 - 90 = 0$$

A_i	b_j			
	$b_1=0$	$b_2=0$	$b_3=100$	$b_4=100$
$a_1=60$			9	5
$a_2=0$			8	4
$a_3=0$			3	3
$a_4=0$			4	7

min елемент

$$X_{14} = \min(a_1, b_4) = 10$$

$$a_1 = 60 - 10 = 50$$

$$b_4 = 100 - 10 = 90$$

A_i	b_j			
	$b_1=0$	$b_2=0$	$b_3=100$	$b_4=90$
$a_1=0$			9	5
$a_2=110$			8	4
$a_3=0$			3	3
$a_4=100$			4	7

min елемент

$$X_{24} = \min(a_2, b_4) = 100$$

$$a_2 = 110 - 100 = 10$$

$$b_4 = 90 - 100 = 10$$

A_i	b_j			
	$b_1=0$	$b_2=0$	$b_3=100$	$b_4=0$
$a_1=0$			9	5
$a_2=10$			8	4
$a_3=0$			3	3
$a_4=0$			4	7

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) = 40$$

$$a_1 = b_3 = 0$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4.
МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧІВ
Оптимізація споживацьких переваг

ХІД РОБОТИ:

Побудувати модель добового меню харчування, забезпечуючи особисті споживацькі переваги шляхом модельних експериментів.

Модель формування добового меню споживання

- Змінні задачі (кількості продуктів кожного виду)
- Цільова функція (мінімізація вартості добового меню споживання)
- Обмеження (баланс меню по елементам поживності – науково обґрунтовані норми калорій, білків, жирів та вуглеводів)

Математична модель задачі

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_{10}x_{10} \rightarrow \min$$

обмеження по калоріях $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \dots + k_{10}x_{10} \geq \min K_{\text{кал}} \leq \max K_{\text{кал}}$

обмеження по білках $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_{10}x_{10} \geq \min B_{\text{білк}} \leq \max B_{\text{білк}}$

обмеження по вуглеводах $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + \dots + v_{10}x_{10} \geq \min V_{\text{вугл}} \leq \max V_{\text{вугл}}$

обмеження по жирах $j_1x_1 + j_2x_2 + j_3x_3 + \dots + j_{10}x_{10} \geq \min Ж_{\text{жир}} \leq \max Ж_{\text{жир}}$

Із обраних продуктів харчування сформувати раціональне добове меню харчування для обраної групи споживачів.

Задачу реалізувати в середовищі EXCEL та проаналізувати розв'язок.

Інформаційне забезпечення:

Добова потреба в білках, жирах, вуглеводах та енергії для дітей і дорослого населення

ВІК, роки	Енергія (калорій)	Білки (г)	Жири (г)	Вуглеводи (г)
1-3	1540	53	53	212
4-6	2000	65	58	305
7-10	2400	78	70	365
11-13 (хлопчики, дівчата)	2800-2550	91-83	75-82	425-386
14-17 (юнаки, дівчата)	3200-2650	104-86	94-77	485-403
18-29 (чоловіки)	2800-3300	77-91	78-92	448-528
18-29 (жінки)	2200-2600	61-72	62-73	352-416
30-39 (чоловіки)	2650-3150	73-87	74-83	424-504
30-39 (жінки)	2150-2550	59-70	60-71	344-408
40-59 (чоловіки)	2500-2950	69-81	69-82	400-472
40-59 (жінки)	2100-2500	58-69	59-70	336-400
Пенсіонери	2000-2700	65-80	70-80	300-382

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

ВАРІАНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Дані по технології виробництва наведені в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю товару					Ресурс сировини
	А	Б	В	Г	Д	
ВАРІАНТ 1						
1	1	2	1	3	2	18
2	1	1	2	1	2	30
3	1	3	3	2	2	40
Ціна товару	12	7	18	10	10	—
ВАРІАНТ 2						
1	1	2	2	3	2	180
2	2	2	2	5	4	210
3	4	4	4	2	1	800
Ціна товару	9	6	4	17	12	—
ВАРІАНТ 3						
1	2	1	6	2	1	180
2	2	5	2	8	2	210
3	1	6	7	3	2	255
Ціна товару	19	16	14	17	12	—
ВАРІАНТ 4						
1	5	7	4	6	4	200
2	8	5	2	5	4	290
3	6	6	12	2	4	400
Ціна товару	12	12	14	17	12	—
ВАРІАНТ 5						
1	1	2	2	2	2	120
2	1	2	2	5	2	310
3	4	4	8	2	2	200
Ціна товару	19	16	14	17	12	—
ВАРІАНТ 6						
1	7	2	2	5	2	380
2	2	7	2	5	4	555
3	4	4	5	2	5	458
Ціна товару	13	16	14	17	12	—
ВАРІАНТ 7						
1	1	2	1	6	2	28
2	1	1	2	1	2	50
3	1	3	3	2	2	60
Ціна товару	12	7	18	10	10	—
ВАРІАНТ 8						
1	1	2	1	5	2	48
2	1	4	8	2	4	90
3	5	3	3	2	2	80
Ціна товару	11	7	15	9	12	—
ВАРІАНТ 9						
1	8	5	3	2	2	118
2	3	1	2	1	2	310
3	9	3	9	7	2	480
Ціна товару	22	17	25	19	15	—
ВАРІАНТ 10						
1	1	2	1	6	2	18
2	2	3	2	1	2	30
3	1	3	3	5	2	40
Ціна товару	12	7	18	10	10	—
ВАРІАНТ 11						

1	4	2	1	3	2	258
2	1	1	1	4	3	430
3	2	6	3	2	4	560
Ціна товару	19	17	15	18	19	–
ВАРІАНТ 12						
1	2	2	2	5	2	245
2	1	4	6	1	2	367
3	5	7	3	9	2	125
Ціна товару	14	17	12	17	15	–
ВАРІАНТ 13						
1	8	5	3	3	6	120
2	3	1	2	1	1	310
3	2	4	2	1	2	680
Ціна товару	22	17	25	19	19	–
ВАРІАНТ 14						
1	1	2	1	6	2	19
2	4	4	2	1	5	30
3	1	3	6	5	12	60
Ціна товару	12	7	18	10	10	–
ВАРІАНТ 15						
1	1	2	1	3	2	25
2	2	4	2	4	2	30
3	1	3	2	2	2	40
Ціна товару	12	7	18	10	10	–
ВАРІАНТ 16						
1	8	5	3	2	3	125
2	3	4	2	2	3	320
3	9	3	2	7	2	450
Ціна товару	22	17	25	19	27	–
ВАРІАНТ 17						
1	2	5	3	9	4	250
2	8	5	2	7	3	250
3	6	4	12	2	7	450
Ціна товару	12	12	14	17	19	–
ВАРІАНТ 18						
1	2	7	4	4	2	200
2	8	2	2	5	7	290
3	6	6	12	9	3	400
Ціна товару	12	12	14	17	15	–
ВАРІАНТ 19						
1	2	1	6	2	1	150
2	2	4	4	2	2	210
3	4	6	2	3	2	205
Ціна товару	19	16	14	17	15	–
ВАРІАНТ 20						
1	2	2	3	7	2	255
2	1	4	6	1	5	307
3	5	9	3	9	2	150
Ціна товару	14	17	12	17	15	–

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

$\sigma_2 = \sqrt{0.4(0 - 50)^2 + 0.2(50 - 50)^2 + 0.4(100 - 50)^2} = \sqrt{1000 + 1000} = \sqrt{2000} = 44.72$ Бачимо, що другий проект більше ніж в 7 разів більш ризиковий.

Здається позиція об'єктивізму присутня, бо $m_1 = m_2$ а $\sigma_1 < \sigma_2$

За цими показниками вигідніший перший проект

3. Оцінимо максимальні межі надходжень по проектам за правилом трьох сігм: $m - 3\sigma < \text{надходження} < m + 3\sigma$

$50 - 3 \cdot 6.32 < I < 50 + 3 \cdot 6.32$ $31.04 < I < 68.96$ - бачимо, проект беззбитковий, не може принести збитку з ймовірністю 99,7, але й боргу у 80 одиниць ніколи не покрити

$50 - 3 \cdot 44.72 < II < 50 + 3 \cdot 44.72$ $-84.16 < II < 184.16$ – бачимо, проект може принести збиток, але, хто згоден на великий ризик – може і прибуток високий отримати

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Дані по проектах, наданих для інвестування								
Варіант	I проект (ймовірність/ надходження)				II проект (ймовірність/ надходження)			
ІІ	0,2/40	0,4/50	0,3/70	0,1/100	0,1/100	0,5/50	0,2/70	0,2/20
Розв'язок:								
1 project					2 project			
pi	xi	m	Σ		pi	xi	m	Σ
	0,2	40	72,2			0,1	100	220,9
	0,4	50	32,4			0,5	50	4,5
	0,3	70	36,3			0,2	70	57,8
	0,1	100	168,1			0,2	20	217,8
		m1	Σ1				m2	Σ2
		59	17,578396				53	22,38302928
ВІСНІЙ НАДХОДЖЕННЯ					ВІСНІЙ НАДХОДЖЕННЯ			
6,264812506 <=НАДХОДЖЕННЯ<= 111,75519					-14,1490879 <=НАДХОДЖЕННЯ<= 120,1490879			

ВАРІАНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Варіант	Дані по проектах, наданих для інвестування											
	I проект (ймовірність/ надходження)				II проект (ймовірність/ надходження)				III проект (ймовірність/ надходження)			
1	0.2/40	0.4/50	0.3/70	0.1/100	0.5/130	0.5/70				0.3/170	0.2/100	0.5/130
2	0.3/40	0.2/100	0.5/20		0.1/100	0.5/50	0.2/70	0.2/120		0.5/120	0.5/50	
3	0.1/100	0.1/20	0.3/50	0.5/70	0.1/20	0.2/40	0.4/50	0.2/110	0.1/100	0.3/60	0.5/70	0.2/120
4	0.5/120	0.5/70			0.3/20	0.2/150	0.4/10	0.1/70		0.7/160	0.3/20	
5	0.1/40	0.2/130	0.3/20	0.4/10	0.5/100	0.2/20	0.3/150			0.3/120	0.4/70	0.3/50
6	0.1/100	0.1/120	0.3/60	0.5/70	0.1/120	0.2/40	0.4/50	0.2/20	0.1/120	0.3/90	0.3/70	0.5/120
7	0.2/140	0.4/50	0.3/70	0.1/100	0.5/100	0.5/50				0.4/70	0.5/100	0.1/20
8	0.5/100	0.5/20			0.2/50	0.1/20	0.7/80			0.8/70	0.2/150	
9	0.1/100	0.3/130	0.5/20	0.1/10	0.5/100	0.2/20	0.3/150			0.5/20	0.3/80	0.2/100
10	0.2/40	0.5/50	0.3/100		0.3/50	0.3/110	0.2/70	0.2/20		0.6/100	0.4/50	
11	0.5/100	0.5/200			0.2/80	0.2/100	0.5/50	0.1/150		0.8/100	0.2/40	
12	0.4/60	0.4/140	0.2/100		0.1/120	0.2/40	0.4/150	0.2/20	0.1/10	0.2/50	0.8/120	
13	0.2/140	0.4/50	0.3/70	0.1/100	0.1/100	0.5/50	0.2/170	0.2/20		0.3/60	0.3/100	0.4/100
14	0.5/100	0.5/20			0.2/100	0.5/1150	0.3/70			0.7/60	0.3/100	
15	0.2/40	0.5/150	0.3/100		0.1/120	0.2/40	0.1/50	0.3/20	0.3/10	0.4/100	0.6/120	
16	0.2/110	0.4/25	0.4/100		0.5/100	0.5/140				0.4/100	0.6/150	
17	0.5/100	0.5/50			0.2/140	0.5/50	0.3/100			0.8/100	0.2/40	
18	0.3/50	0.3/10	0.2/170	0.2/20	0.2/10	0.4/125	0.4/100			0.2/70	0.2/90	0.6/10
19	0.5/50	0.5/80			0.2/100	0.5/50	0.2/25	0.1/150		0.6/70	0.4/100	
20	0.1/100	0.3/30	0.5/20	0.1/10	0.5/20	0.2/120	0.3/50			0.5/120	0.1/70	0.4/20
21	0.5/20	0.5/50			0.3/20	0.2/50	0.4/10	0.1/170		0.5/120	0.5/20	
22	0.2/30	0.4/25	0.4/100		0.3/50	0.3/45	0.2/170	0.2/25		0.4/100	0.6/50	
23	0.2/10	0.4/25	0.4/100		0.3/50	0.3/110	0.2/70	0.2/20		0.7/100	0.3/50	
24	0.5/50	0.5/180			0.5/100	0.5/130				0.5/100	0.5/110	
25	0.2/40	0.4/50	0.3/60	0.1/100	0.2/100	0.5/150	0.2/25	0.1/150		0.3/70	0.1/150	0.6/100
26	0.2/40	0.5/90	0.3/100		0.5/100	0.5/50				0.2/100	0.8/10	

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7.

ПОРТФЕЛЬНА ТЕОРІЯ ГАРРІ МАРКОВІЦА

ХІД РОБОТИ: Сформувані портфель цінних паперів. Побудувати інвестиційну стратегію, керуючись інформацією фондової біржі України. Таким чином, підхід Марковіца може бути розглянуто як дискретний підхід, при якому початок періоду позначається $t = 0$, а кінець періоду позначається $t = 1$. У момент $t = 0$ інвестор повинен прийняти рішення про покупку конкретних цінних паперів, які будуть перебувати в його портфелі до моменту $t = 1$. Оскільки портфель являє собою набір різних цінних паперів, це рішення еквівалентно вибору оптимального портфеля з набору можливих портфелів. Тому подібну проблему часто називають проблемою вибору інвестиційного портфеля.

Приймаючи рішення в момент $t = 0$, інвестор повинен мати на увазі, що прибутковість цінних паперів (і, таким чином, прибутковість портфеля) в майбутній період володіння невідома. Однак інвестор може оцінити очікувану (чи середню) дохідність різних цінних паперів, ґрунтуючись на деяких припущеннях, а потім інвестувати кошти в папір з найбільшою очікуваною прибутковістю.

ВАРІАНТИ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

ЗАВДАННЯ:

Сформувати портфель мінімального ризику з 2-х видів цінних паперів – А з ефективністю r_1 і ризиком σ_1 та В з ефективністю r_2 та ризиком σ_2 при умові, що забезпечується доходність портфеля не менше $R\%$. Коефіцієнт кореляції рівний ρ

Віріанти	r_1	r_2	σ_1	σ_2	R	ρ
1	45	15	13	9	25	0,5
2	13	20	2	10	15	0,7
3	75	50	4	2	60	0,14
4	22	75	12	28	55	0,75
5	12	20	7	9	14	0,2
6	125	90	45	20	100	0,7
7	48	38	12	9	45	0,2
8	54	75	45	60	60	0,3
9	125	60	25	10	90	0,8
10	75	45	12	10	65	0,2
11	13	9	25	18	10	0,18
12	48	57	12	27	55	0,25
13	180	150	14	12	170	0,45
14	47	25	18	9	38	0,1
15	189	250	27	48	200	0,58
16	65	45	16	10	50	0,47
17	14	45	10	27	35	0,78
18	48	68	35	45	50	0,5
19	145	200	15	20	185	0,8
20	25	65	12	40	45	0,5
21	17	10	45	25	15	0,4
22	44	55	12	15	50	0,2
23	17	35	7	17	28	0,9
24	54	24	14	10	35	0,3
25	158	250	45	65	200	0,28

Задачі для самостійного розв'язання

Формалізувати економічні умови, побудувати економіко-математичну модель, реалізувати її в середовищі excel та обґрунтувати власні висновки й практичні рекомендації

1. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в таблиці:

№ п/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукровий буряк	
1	Жива праця, людино-днів	5	25	270
2	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
3	Прибуток, тис.грн.	0,7	1	

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

2. Невелика птахоферма має розрахувати оптимальну кормову суміш для 1000 курчат, яких вирощують до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що тижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважаємо, що в середньому за 8 тижнів витрати кормів на 1 голову становитимуть 500 г. Кормова суміш має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, урахувавши лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів – зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість задано таблицею:

Корм	Вміст поживних речовин, %		Вартість 1 кг корму, у.о.
	Білок	Клітковина	
Зерно	10	2	0,40
Сосві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менш як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини. Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, задовольняючи вимоги до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

3. Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та запас добрив у господарстві наведено в таблиці:

Мінеральні добрива	Норма внесення добрив, кг діючої речовини /га		Запас добрив, кг діючої речовини
	Капуста	Томати	
Фосфорні	150	200	6000

Калійні	220	130	9000
---------	-----	-----	------

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 гр. од., а 1 ц томатів – 20 гр. од. Середня врожайність капусти в господарстві становить 300 ц/га, а томатів – 200 ц/га.

Визначити такий варіант поєднання культур, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують запасу.

4. Фірма виготовляє два види продукції А та В, використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої має не перевищувати відповідно 210 та 240 ум. од. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано таблицею:

Сировина	Норма витрат сировини, ум. од., для виготовлення продукції	
	А	В
1	2	5
2	3	4

Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції В має становити не більш як 65 % загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції А та В дорівнює відповідно 10 та 40 гр.од.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, який максимізує дохід фірми.

5. Фірма виготовляє деталі до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведено в таблиці:

Деталь	Тривалість обробки деталі, хв., за верстатами		
	1	2	3
А	10	6	8
В	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 гр.од.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми.

6. Підприємство виготовляє письмові столи типів А та В. Для одного столу типу А необхідно 2 м² деревної плити, а для столу типу В – 3 м². Підприємство може отримати до 1200 м² деревної плити за тиждень. Для виготовлення одного столу типу А потрібно 12 хв. роботи обладнання, а для моделі В – 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 год. на тиждень. Оцінено, що за тиждень може бути реалізовано до 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу А становить 30 гр. од., а типу В – 40 гр. од. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень?

7. Підприємство електронної промисловості виготовляє дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель складається на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії становить 60, а другої – 70 од. На один радіоприймач першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, а на радіоприймач другої моделі – 8. Максимальний добовий запас елементів, що використовуються у виробництві, становить 1000 од. Прибуток від реалізації одного радіоприймача першої та другої моделі дорівнює відповідно 35 та 25 гр. од. Визначити оптимальні обсяги виробництва радіоприймачів обох моделей.

8. Розв'язати задачу методами поступок, мінімального відхилення від ідеальної точки і адитивного згортання критеріїв. При цьому вагомість цільових функцій, конкретні значення поступок за однією з цільових функцій пропонується обрати самостійно в ході аналізу умови задачі.

Мінімальна добова потреба у поживних речовинах дорослої людини, що займається розумовою працею, складає 75г білків, 84 г жирів та 310 г вуглеводів. У таблиці 10.7 подано вміст поживних речовин у 100 г наявних продуктів, їх калорійність і вартість. З переліку продуктів, заданих за варіантом (таблиця 10.8), скласти такий раціон, який задовольнить добову потребу людини у поживних речовинах, матиме мінімальну калорійність та мінімальну вартість.

Таблиця 10.7

Назва продукту	Білки	Жири	Вуглеводи	кКалорії
Бринза	17,9	20,1	0	260
Йогурт 1,5%	5	1,5	3,5	51
Молоко	2,8	3,2	4,7	58
Сливки 10%	3	10	4	118
Сметана 20%	8	20	3,2	206

Продовження таблиці 10.7

Назва продукту	Білки	Жири	Вуглеводи	кКалорії
Сир російський	8	20	3,2	206
Сир нежирний	18	0,6	1,5	86
Майонез	3,1	67	2,6	627
Олія соняшникова	0	99,9	0	899
Масло вершкове	0,6	82,5	0,9	748
Хліб житній	4,7	0,7	49,8	214
Хліб пшеничний	7,7	2,4	53,4	254
Крупа гречана	12,6	2,6	68	329
Крупа рисова	7	0,6	73,7	323
Геркулес	13,1	6,2	65,7	355
Яловичина	18,9	12,4	0	187

Капуста білокачанна	1,8	0	5,4	28
Цибуля	1,7		9,5	43

Таблиця 10.8

№ варіанта	Перелік продуктів
1	Бринза, йогурт, молоко, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
2	Сир нежирний, йогурт, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
3	Бринза, йогурт, сир російський, крупа рисова, яловичина
4	Бринза, йогурт, сливки, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
5	Бринза, сливки, молоко, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
6	Сметана, йогурт, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
7	Бринза, йогурт, молоко, сир нежирний, крупа рисова, яловичина
8	Бринза, йогурт, молоко, сир російський, крупа рисова, яловичина
№ варіанта	Перелік продуктів
9	Бринза, йогурт, молоко, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
10	Бринза, йогурт, молоко, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
11	Бринза, майонез, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
12	Майонез, молоко, хліб житній, крупа рисова, яловичина
13	Бринза, йогурт, молоко, хліб пшеничний, крупа рисова, яловичина
14	Бринза, йогурт, молоко, хліб житній, крупа рисова, яловичина
15	Бринза, молоко, масло вершкове, крупа гречана, яловичина
16	Бринза, йогурт, молоко, масло вершкове, геркулес, яловичина
17	Йогурт, молоко, капуста білокачанна, крупа рисова, яловичина
18	Бринза, йогурт, капуста білокачанна, крупа рисова, яловичина
19	Бринза, молоко, масло вершкове, капуста білокачанна, яловичина
20	Капуста білокачанна, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
21	Бринза, йогурт, олія соняшникова, крупа рисова, яловичина
22	Бринза, йогурт, олія соняшникова, крупа гречана, яловичина
23	Бринза, олія соняшникова, геркулес, яловичина, цибуля
24	Бринза, йогурт, молоко, масло вершкове, крупа рисова
25	Молоко, масло вершкове, крупа рисова, яловичина
26	Олія, крупа гречана, яловичина, цибуля, капуста білокачанна

27	Сир російський, крупа рисова, яловичина, цибуля, масло вершкове
28	Сир нежирний, крупа рисова, яловичина, олія, цибуля
29	Йогурт, геркулес, капуста білокачанна, олія соняшникова
30	Капуста білокачанна, олія соняшникова, цибуля, яловичина

9. При плануванні будівництва нового мікрорайону необхідно визначити місце розташування продовольчого магазину. Він має бути рівновіддалений від 10 майбутніх будинків. Координати будинків обрати згідно варіанту з таблиці 10.9. Побудувати схему розташування будинків і продовольчого магазину.

Таблиця 10.9

Варі- ант	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)	(x_5, y_5)	(x_6, y_6)	(x_7, y_7)	(x_8, y_8)	(x_9, y_9)	(x_{10}, y_{10})
1.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
2.	(2,3)	(8,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
3.	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
4.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(11,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
5.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(1,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
6.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,13)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
7.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(9,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
8.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,5)	(6,1)	(11,4)
9.	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,9)	(11,4)
10	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(2,11)
11	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(7,4)
12	(2,3)	(8,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,11)	(11,4)
13	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(12,9)	(6,1)	(11,4)
14	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(11,7)	(10,3)	(6,4)	(7,4)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
15	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(1,3)	(1,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
16	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(8,3)	(6,13)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
17	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,5)	(10,3)	(6,4)	(9,15)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
18	(2,3)	(3,2)	(13,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,5)	(6,1)	(11,4)
19	(2,3)	(3,12)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,9)	(11,4)
20	(2,13)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(2,11)
21	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(9,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(2,11)
22	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(14,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(7,4)
23	(2,3)	(8,2)	(4,1)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(2,9)	(6,11)	(11,4)
24	(2,3)	(3,6)	(4,1)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,15)	(12,9)	(6,1)	(11,4)
25	(1,3)	(3,2)	(4,8)	(11,7)	(10,3)	(6,4)	(7,4)	(2,9)	(6,1)	(11,4)
26	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(1,3)	(1,4)	(7,15)	(2,9)	(6,1)	(11,9)
27	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,7)	(8,3)	(6,13)	(7,15)	(2,9)	(6,2)	(11,4)
28	(2,3)	(3,2)	(4,8)	(1,5)	(10,3)	(6,4)	(9,15)	(7,9)	(6,1)	(11,4)
29	(2,3)	(3,2)	(13,8)	(1,7)	(10,3)	(6,4)	(7,2)	(2,5)	(6,1)	(11,4)
30	(2,3)	(3,12)	(4,8)	(1,7)	(10,3)	(6,14)	(7,15)	(2,9)	(6,9)	(11,4)

Запитання для самоконтролю

- ✓ Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?
- ✓ Як визначити, що виробництво продукції є рентабельним (нерентабельним)?
- ✓ Які передумови та основні завдання аналізу оптимального рішення на чутливість?
- ✓ Що таке цінність додаткової одиниці i -го ресурсу?
- ✓ Яку інформацію про чутливість оптимального рішення задачі ЛП можна отримати зі звіту за результатами та звіту по стійкості?
- ✓ Які основні етапи розв'язування задач лінійного програмування в MS Excel?
- ✓ В чому сенс використання символу \$ у формулах MS Excel?
- ✓ Чому при введенні формул в комірки ЦФ і лівих частин обмежень в них відображаються нульові значення?
- ✓ Яким чином в MS Excel задається напрям оптимізації ЦФ?
- ✓ Які комірки екранної форми виконують ілюстративну функцію, а які необхідні для розв'язування задачі?

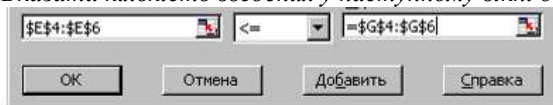
- ✓ Поясніть загальний порядок роботи з вікном “Поиск решения”.
- ✓ Яким чином можна змінювати, додавати, видаляти обмеження у вікні “Поиск решения”?
- ✓ Які повідомлення видаються в MS Excel у випадках: успішного розв’язування задачі ЛП; несумісності системи обмежень задачі; необмеженості ЦФ?
- ✓ Поясніть сенс параметрів, що задаються у вікні “Параметри поиска решения”.
- ✓ Які особливості розв’язування в MS Excel цілочислових задач лінійного програмування?
- ✓ Які особливості розв’язування в MS Excel двохіндексних задач лінійного програмування?
- ✓ Які особливості розв’язування в MS Excel задач лінійного програмування з булевими змінними?
- ✓ Яке практичне значення задач лінійного програмування?
- ✓ Навіщо треба ставити параметр “Допустимое отклонение”?
- ✓ Що таке граничні умови задачі?
- ✓ Розв’язки яких задач можуть приймати тільки одне з двох значень: 0 або 1?

Тестові завдання

1. Вибрати літеру

А якщо правильні відповіді 1 і 3	Б якщо правильні відповіді 1 і 2	В якщо правильні відповіді 2 і 3	Г якщо правильна відповідь 1	Д якщо всі відповіді правильні
1.				

2. Вказати кількість введених у наступному вікні обмежень:



3.

1. одне;
2. два;
3. три;
4. шість.

3. Якщо у табличну форму моделі необхідно внести обмеження:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 30$, то у відповідному рядку під змінними x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 записують:

1. 0 0 0 0 0;
2. 1 1 1 1 1;
3. 1 2 3 4 5;

4. 30 30 30 30 30.

4. Як в EXCEL при розв'язанні задачі лінійного програмування отримати цілочислову відповідь:

1. накласти додаткове обмеження на клітини, які будуть містити майбутнє рішення;
2. накласти додаткове обмеження на клітину, де знаходиться формула цільової функції;
3. Excel такої можливості не має;
4. округлити отримані значення за допомогою функції "ОКРУГЛ".

5. При розв'язанні задачі лінійного програмування в EXCEL можна знайти:

1. значення невідомих тільки для максимального значення цільової функції;
2. значення невідомих тільки для мінімального значення цільової функції;
3. значення невідомих тільки для деякого конкретного значення цільової функції;
4. значення невідомих для кожного з перелічених випадків.

6. При розв'язанні цілочислової задачі за допомогою табличного процесору Excel обмеження мають тип:

1. $\leq$;
2. $\geq$;
3. $=$;
4. будь-який з указаних типів.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Абстрактна модель	яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єктові в межах, визначених цілями дослідження. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, який відображає концепцію (погляд) дослідника на проблему.
Аграрна галузь	галузь народного господарства, направлена на забезпечення населення продовольством і отримання сировини для цілого ряду галузей промисловості. Галузь є однією з найважливіших, представлена практично у всіх країнах.
Адекватність	відповідність властивостей (функцій, характеристик і т.д.) моделі до відповідних властивостей об'єкта, що моделюється. подібність моделі модельованої системи у відношенні мети моделювання.
Адекватність моделі	відповідність моделі з певною мірою наближення системі чи процесу, що досліджується, оскільки повної відповідності моделі реальному об'єкту бути не може (в противному випадку це була б не модель, а сам об'єкт моделювання), то при моделюванні мається на увазі адекватність не взагалі, а адекватність за тими властивостями моделі, котрі з позицій мети дослідження є суттєвими.
Алгоритм	скінченний впорядкований набір точних правил, які вказують, які дії і в якому порядку необхідно виконувати, щоб за скінченну кількість кроків досягти поставленої мети або дістати розв'язок поставленої задачі.
Алгоритм розв'язування ЗЛП симплекс-методом	передбачає наступні кроки: Крок 1. Формулювання задачі ЗЛП в канонічній формі. Крок 2. Визначення початкового опорного плану.. Крок 3. Перевірка опорного плану на оптимальність. здійснюється в симплексних таблицях за допомогою критерію оптимальності. Крок 4. Перехід до іншого опорного плану робиться за допомогою симплексних перетворень (перетворень Жордана-Гаусса з використанням критерію оптимальності).
Аналіз	науковий підхід, який спрямований на послідовне розчленовування цілого на частини та дослідження властивостей цих частин.
Аналітична модель	один з класів <u>математичного моделювання</u> . Перевагою аналітичної моделі є те, що розв'язки можна аналізувати математичними методами. Недоліком аналітичних моделей є

спрощення реальних ситуацій з метою отримання аналітичних розв'язків.

Аналогія

це метод пізнання, заснований на перенесенні однієї чи ряду властивостей з відомого явища на невідоме.

Апроксимація

(від лат. *approximatio* — зближення) наближене зображення одних математичних об'єктів іншими у тому чи іншому значенні, близькому до вихідних, зокрема наближене подання складної функції однією або кількома більш простими функціями.

Багатокритеріальна задача

це процес одночасної оптимізації двох або більше конфліктуючих цільових функцій в заданій області визначення.

Базисний план

одне з допустимих рішень, що знаходяться у вершинах області допустимих рішень, або весь цей відрізок. Воно є рішенням системи лінійних обмежень, яке не можна представити у вигляді лінійної комбінації ніяких інших рішень.

Балансова умова

Умова за якою всі елементи системи є в повному і достатньому обсязі

Валідація

процес, спрямований на підтвердження об'єктивними доказами того, що кінцевий продукт (виріб або послуга) відповідає встановленим вимогам.

Валідація моделі

перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.

Вектор градієнт

вектор, який своїм напрямком вказує напрямок найшвидшого зростання деякої величини, значення якої змінюється від однієї точки простору до іншої (скалярного поля), а по величині (модулю) рівний швидкості росту цієї величини в цьому напрямку

Векторна оптимізація

комплекс методів вирішення задач математичного програмування, в яких критерій оптимальності являє собою вектор, компонентами якого є незведені один до одного скалярні критерії оптимальності підсистем, що входять в дану систему

Верифікація

логіко-методологічна процедура встановлення істинності [наукової гіпотези](#) (так само як і поодинокого, конкретно-наукового твердження) на підставі їхньої відповідності емпіричним даним (пряма або безпосередня верифікація) або теоретичним положенням, що відповідають емпіричним даним (непряма верифікація). У рамках [логічного позитивізму](#) принцип верифікованості розуміється критеріально-вичерпним способом апробації наукових тверджень, які розуміються у якості «протокольних припущень» як фіксацій даних безпосереднього досвіду:

твердження, котрі виходять за рамки «протокольних пропозицій» трактуються як такі, що не верифікуються, у випадку чого в дію вступає [принцип фальсифікації](#).

Верифікація моделі

перевірка правильності структури (логіки) моделі.

Виробнича функція

функція, що виражає стійкі кількісні співвідношення між входами економічної системи (витрати ресурсів) та її виходами (обсяг продукції).

Виходи системи — результат реакції системи на вплив зовнішнього середовища та функціонування системи для досягнення певної мети.

Відгук

ендогенна (зумовлена внутрішніми причинами) випадкова величина у, яка, за припущенням, залежить від факторів.

Вхід системи

характеризується сукупністю впливів на неї зовнішнього середовища.

Галузь

окрема частина, сторона фізичного або духовного життя, діяльності людини чи суспільства.

В економіці: означає сукупність підприємств і організацій, що характеризуються спільністю ознак виробничо-господарської діяльності.

Геометрична інтерпретація Гіпотези

графічний метод розв'язування задач лінійного програмування за допомогою побудови кривих на площині.

наукові припущення, висунуті для пояснення певних явищ дійсності. Вони замінюють невідомі закономірності розвитку системи і визначають постановку задачі. За відсутності інформації висувають гіпотезу щодо можливих результатів, вірогідність якої далі перевіряють експериментально. Доводячи правильність гіпотез, дістають повніше уявлення про розв'язання задачі.

Глобальний критерій оптимальності

має на увазі тенденцію вирівнювання індивідуальних норм прибутку і заощаджень приватних суб'єктів і формування рівнокорисності витрат.

Гомеостазис

підтримка істотних внутрішніх параметрів системи в певних (як правило, досить вузьких) межах для забезпечення оптимального режиму функціонування.

Гомоморфізм

відношення подібності двох систем у деякому структурному або функціональному аспекті, узагальнення поняття «ізоморфізм» на випадок однозначної відповідності в один бік.

Графічний математичний метод Дані

один з шляхів розв'язання задач суть якого полягає у зображенні і аналізі графіків функції інформація, подана в певних формах, адекватних можливим процесам її обробки.

Детермінована модель	<u>модель</u> , результати якої визначені через відомі відношення станів і подій, і в якій заданий вхід буде завжди видавати той же самий результат
Дефіцитні ресурси	ресурси які знаходяться в дефіциті і при включенні 1 одиниці в виробництво здатні значно збільшити значення цільової функції
Динамічна модель	<u>модель системи</u> , у якій відбуваються зміни через виникнення подій у часі або рух об'єктів у просторі
Динамічна система	система, в якій із часом відбуваються деякі зміни.
Динамічне програмування	сукупність прийомів, які дають змогу знаходити оптимальні рішення на основі обчислень наслідків кожного рішення і створення оптимальної стратегії для наступних рішень. Обчислювальна схема методу динамічного програмування заснована на передумовах, що критерій оптимальності адитивний стосовно змінних і що майбутні результати не залежать від передісторії того стану системи, при якому приймається рішення. Остання передумова відома як принцип оптимальності Беллмана.
Дисипативні структури	структури, що виникають спонтанно у відкритих нерівноважних системах.
Дискретна модель	<u>математична</u> чи <u>імітаційна модель</u> , змінні якої приймають тільки дискретні значення, тобто змінюються від одного значення до іншого і не приймають проміжних значень (наприклад, модель, що прогнозує рівні запасів організації, ґрунтуючись на відвантаженнях, які змінюються, і платежах).
Дослідження операцій	прикладне направлення математики, що розглядає практичну методику кількісного обґрунтування прийняття оптимальних рішень за змістовною ознакою економічних задач. З великої різноманітності практичних задач різних сфер економічної діяльності можна виділити наступні основні класи задач дослідження операцій: задачі сіткового планування та управління, задачі масового обслуговування, задачі управління запасами, задачі розподілу ресурсів, задачі ремонту та заміни обладнання, задачі складання розкладів (календарного планування), задачі планування та розміщення, задачі вибору маршруту, або задачі мереж, задачі теорії ігор тощо. Особливістю дослідження операцій вважається їх міждисциплінарний, комплексний характер, який передбачає системний підхід до прийняття рішення.
Дослідження систем	виявлення закономірностей розвитку системи й встановлення кількісних співвідношень між змінними величинами та параметрами, що описують функціонування системи.

Екзогенні змінні	величини, що характеризують середовище функціонування модельованої системи, умовно приймаються незалежними від невідомих моделі й за одноразового проведення розрахунків задаються як константи
Екологія	це наука про взаємини живих істот між собою і з навколишнім їх неорганічною природою, про зв'язки в надорганізмних системах, про структуру і функціонування цих систем.
Економіка	це наука, яка досліджує проблему такого використання обмежених ресурсів, при якому досягається максимальне задоволення безмежних потреб суспільства. Економіка вивчає шляхи "кращого використання того, що ми маємо". Оскільки наші потреби практично безмежні, а наші ресурси обмежені, ми не в змозі задовольнити всі матеріальні потреби суспільства. Єдине, що нам залишається, це добиватися максимального задоволення цих потреб. це наука про ефективність використання обмежених ресурсів.
Економіко-математична модель	модель економічних об'єктів або процесів, при описі яких використовуються математичні засоби. Цілі створення економіко-математичних моделей різноманітні: вони будуються для аналізу тих чи інших передумов і положень економічної теорії, логічного обґрунтування економічних закономірностей, обробки і приведення в систему емпіричних даних це концентрований вираз найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь, відношень формальної логіки тощо.
Економіко-математичний аналіз	розв'язання оптимізаційних задач [economic-mathematical analysis of optimal solutions] - полягає насамперед у виявленні умов, при яких отримане рішення задачі є стійким, тобто знайдений план залишається оптимальним при порівняно невеликих змінах початкових і інших зовнішніх умов. Для цього прораховується і порівнюється ряд більш-менш схожих варіантів завдання.
Економічна інформація	інформація, що виникає під час підготовки та у процесі виробничо-господарської діяльності й використовується для управління цією діяльністю.
Економічна кібернетика	напрямок кібернетики, що вивчає функціонування, розвиток та процеси управління економіки як цілеспрямованої цілісної системи, а передусім - інформаційні за своїм змістом механізми управління економічними процесами.
Економічна система	система, що здійснює виробництво, розподіл, обмін та споживання матеріальних благ.

Економічний ризик	це об'єктивно-суб'єктивна категорія у діяльності суб'єктів господарювання, що пов'язана з подоланням невизначеності та конфліктності в ситуації неминучого вибору. Вона відображає міру (ступінь) відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, міру невдачі (збитків) з урахуванням впливу керованих і некерованих чинників, прямих та зворотних зв'язків стосовно об'єкта керування.
Екстремум функції	точки, в яких функція досягає екстремальних значень максимуму або мінімуму
Елемент системи	частина системи, яка не підлягає подальшому поділу, є неподільною з погляду задачі, що розв'язується, та виконує специфічну функцію.
Емерджентність	це результат виникнення між елементами системи так званих синергетичних зв'язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому соціально-економічні системи потрібно досліджувати й моделювати зважаючи на синергізм. важлива властивість системи, яка полягає в тому, що сукупне функціонування взаємозв'язаних елементів системи породжує якісно нові функціональні властивості системи. Звідси випливає важливий висновок: система не зводиться до простої сукупності елементів; поділяючи систему на частини, досліджуючи кожен з них окремо, неможливо пізнати всі властивості системи в цілому.
Ендогенна величина	величина, зумовлена внутрішніми причинами системи, що моделюється, тому її змінювання відбувається в самій системі. Часто ендогенні величини виступають як характеристики (вихідні або результатні величини) систем при їх вивченні засобами імітаційного моделювання.
Ендогенні змінні	невідомі математичної моделі, її «внутрішні» змінні, що характеризують стан модельованої системи
Ентропія	кількісна міра невизначеності ситуації або події.
Етапи дослідження економічних процесів з допомогою ЕММ	Постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі. Розроблення математичних моделей Реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм (ППП) та проведення розрахунків Перевірка адекватності моделі. Аналіз числових результатів та прийняття відповідних рішень.

Ефективність	зіставлення засобів затрачених на досягнення цільової функції з отриманим результатом
Загальна задача ЛП	задача ЛП, яка полягає в знаходженні екстремумів функції
Задача цілочислового програмування	задача математичного програмування змінні якої приймають цілі значення. Цілочисельні задачі математичного програмування можуть бути лінійними, нелінійними та змішаними. Якщо цілочисельні умови накладаються тільки на частину змінних задачі, то її називають частково цілочисельною.
Задачі лінійного програмування	задачі дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які можна тлумачити як оптимальне використання обмежених ресурсів (задача оптимального плану виробництва, складання денного раціону годівлі худоби, розкрою тощо).
Задачі оптимізації	це такі задачі людської діяльності, де виникає проблема вибору, підпорядкована досягненню певної мети. Проблема пошуку оптимального розв'язку зводиться до того, щоб побудувати адекватну <u>модель</u> задачі та підібрати ефективний метод її розв'язування.
Зв'язки	спосіб, за допомогою якого елементи системи взаємодіють між собою. Зворотні зв'язки — складні механізми причинної залежності в системі, які полягає у тому, що вихід системи впливає на її вхід. Розрізняють негативні (послаблюють вплив вихідного сигналу) та позитивні (посилюють вплив вихідного сигналу) зворотні зв'язки.
Згладжування	це оцінка <u>трендової</u> компоненти разом із сезонною та циклічною компонентами.
Знакова модель	інформаційна модель, виражена спеціальними знаками, тобто засобами будь-якої формальної мови.
Зовнішнє середовище	це все те, що перебуває зовні системи, необхідні умови існування та розвитку системи.
Ієрархія системи	це розташування частин або елементів системи за певним порядком від вищого до нижчого.
Імітаційне моделювання (машинна імітація)	особлива форма проведення експериментів на ЕОМ з математичними моделями, які з певним ступенем імовірності описують закономірності функціонування реальних систем і об'єктів.
Імовірність	числова характеристика можливості того, що <u>випадкова подія</u> відбудеться в умовах, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів.
Інтерація	Одне з ряду повторень якої-небудь математичної операції, яка використовує результат попередньої аналогічної операції, приклад: Факторіал (!)

Інформаційна ситуація	певний ступінь градації невизначеності навколишнього середовища в одному із можливих станів заданої множини, якою володіє суб'єкт управління на момент прийняття рішення.
Інформаційна технологія	сукупність методів і способів збору, нагромадження, обробки, зберігання, передавання, подання та використання інформації.
Інформаційне суспільство	це громадянське суспільство з розвинутим інформаційним виробництвом і високим рівнем інформаційно-правової культури, в якому ефективність діяльності людей забезпечується розмаїттям послуг, заснованих на інтелектуальних інформаційних технологіях та технологіях зв'язку.
Інформація	повідомлення, відомості про якусь подію, чиюсь діяльність або розвиток якогось процесу, що зменшує нашу необізнаність про ці явища.
Канонічна форма ЗЛП	модель , яка має обмеження у вигляді системи рівнянь з невід'ємним вектором вільних членів і невід'ємними змінними.
Класифікаційні ознаки моделей	акценти дослідження системи; властивості областей зміни параметрів та змінних; спосіб опису невизначеності урахування інерційності спосіб задання відношень між параметрами та змінними; призначення представлення властивостей системи.
Компромісний план	альтернативний план задач оптимізації цільової функції.
Концептуальна модель	сприйняття чи система поглядів на певне явище (спосіб розуміння, тлумачення якихось явищ) являє собою принципову основу або ідейну структуру імітаційної моделі, яка згодом може бути реалізована математичними і технічними засобами.
Кореляція	латинське слово, що означає “відповідність”. Кореляційною залежністю (кореляцією) двох випадкових величин називається така їх ймовірнісна залежність, коли математичне сподівання однієї з них функціонально залежить від значення, прийнятого іншою випадковою величиною.
Критерій	це кількісна модель якісних цілей, що повинна точніше її відтворювати.
Критерій оптимальності	Основний показник якості роботи системи. Кількісна міра за допомогою якого визначають ступінь близості стану системи до оптимального стану системи
Лінійне програмування	метод що зводиться до оптимізації лінійної цільової функції на множині , яка описується лінійними рівняннями і нерівностями .

	область математики, що розроблює теорію та числові методи розв'язання задач пошуку екстремуму лінійної функції багатьох змінних, обумовлених множиною лінійних обмежень (рівнянь та нерівностей).
Лінія рівня	функції називають геометричне місце точок, у яких функція приймає екстремуми
Локальний критерій оптимальності	критерій використовується для вирішення завдань більш низького рівня ніж глобальний. Вимагається, щоб локальний критерій враховував основні положення глобального і не суперечив йому.
Математичне моделювання	побудова математичної моделі та дослідження її аналітичними, числовими (здебільшого на ЕОМ), графічними чи якісними методами для отримання певної характеристики (характеристик) досліджуваної реальної системи.
Математичне програмування	це прикладне направлення математики, яке займається вивченням задач оптимізації та розробкою теорії і методів їх розв'язання. В основу класифікації цих задач покладено вид математичних залежностей моделі. Наприклад, задачі лінійного програмування , задачі цілочисельного програмування, задачі динамічного програмування, задачі нелінійного програмування тощо.
Матриця задачі	математичний об'єкт , записаний у вигляді прямокутної таблиці чисел (чи елементів), він допускає операції (додавання , віднімання , множення та множення на скаляр). Зазвичай матриці представляються двовимірними (прямокутними) таблицями. Іноді розглядають багатовимірні матриці або матриці непрямокутної форми. В цій статті вони розглядатися не будуть.
Метод мінімального елемента	його суть полягає в зведенні до мінімуму побічних перерозподілів товарів між споживачами. алгоритм: З таблиці вартостей вибирають найменшу вартість і в клітку, яка їй відповідає, вписують більше з чисел. Перевіряються рядки постачальників на наявність рядки з витраченими запасами і стовпці споживачів на наявність стовпця, потреби якого повністю задоволені. Такі стовпці і рядки далі не розглядаються. Якщо не всі споживачі задоволені і не всі постачальники витратили товари, повернення до п. 1, в іншому випадку задача вирішена.
Метод північно-західного кута	ідея полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Метод штучного базису	застосовується в тих випадках, коли для канонічної форми задачі ЛП не означений початковий опорний план.
Методи оптимізації	це методи, що розроблюються різними розділами прикладної математики для кількісного обґрунтування прийняття рішень. Їх застосування в технології пошуку оптимальних розв'язків економічних проблем поєднує здібності людини розв'язувати складні, неформалізовані задачі з можливостями математики та комп'ютерного моделювання .
Моделювання	це метод дослідження явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об'єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю). це особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об'єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення. це процес створення та дослідження моделі, а модель — засіб, форма наукового пізнання.
Модель	речова, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує, відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи(та) характеристики об'єкта дослідження (оригіналу). це деякий матеріал чи подумки представлений об'єкт або явище , що є спрощеною версією модельованого об'єкта або явища (прототипу) і в достатній мірі повторює властивості , суттєві для цілей конкретного моделювання (опускаючи несуттєві властивості, в яких він може відрізнятися від прототипу). система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище
Модель «Чорна скринька»	модель , входи і виходи якої і функціональні експлуатаційні характеристики відомі, але її внутрішньо представлення невідоме або невивразне.
Натурна модель	це самі існуючі системи чи їх частини, на яких проводяться дослідження існуючих (в тому числі природніх) систем чи випробування (з метою удосконалення) проектів штучних систем (систем- артефактів).
Невизначеність	фундаментальна характеристика недостатньої забезпеченості процесу прийняття економічних рішень знаннями стосовно певної проблемної ситуації. Невизначеність можна трактувати та деталізувати як недостовірність (ефект «марева»), неоднозначність (ефект «нечіткості», «розпливчастості»).

Недефіцитні ресурси	ресурси які знаходяться в надлишку і не здатні збільшити значення цільової функції
Нелінійне програмування	випадок <u>математичного програмування</u> , у якому <u>цільовою функцією</u> чи <u>обмеженнями</u> є <u>нелінійна функція</u> . це математичний апарат для пошуку екстремуму нелінійних функцій, заданих з певними обмеженнями. До типових галузей його застосування можна віднести задачі планування і управління промисловим виробництвом, товарними ресурсами та інвестиціями, в яких передбачається, що ефективність виробництва або використання ресурсів змінюються не пропорційно до його обсягів. розділ математичного програмування, який вивчає методи розв'язання екстремальних задач з нелінійною цільовою функцією і (або) системою нелінійних обмежень. Розв'язок задачі нелінійного програмування (глобальний максимум чи мінімум) може перебувати або на границі, або у внутрішній частині допустимої множини.
Однокритеріальна задача	процес оптимізації цільової функції згідно одного з критеріїв, максимуму чи мінімуму
Опорний план	розв'язок системи лінійних обмежень в <u>задачі лінійного програмування</u> , який неможливо представити у вигляді <u>лінійної комбінації</u> будь яких інших розв'язків.
Оптимальний за Парето план	такий стан системи, при якому значення кожного окремого показника, що характеризує систему, не може бути покращено без погіршення інших.
Оптимальний план	це план, який дає максимізацію цільової функції згідно її напрямку (на максимум чи мінімум) при виконанні заданих обмежень .
Оптимізація систем	встановлення значень факторів, які забезпечують оптимальний режим функціонування системи.
Підсистема	сукупність елементів, об'єднаних спільним процесом функціонування, які, взаємодіючи, реалізують певну операцію, необхідну для досягнення поставленої перед системою в цілому мети.
План	являє собою поставлення чітко визначеної мети і передбачення конкретних подій розвитку досліджуваного об'єкта. У ньому фіксуються шляхи і засоби розвитку об'єкта згідно з поставленими завданнями, відстежуються прийняті управлінські рішення.
Планування експерименту	математико-статистична дисципліна, яка вивчає методи раціональної організації експериментальних досліджень, зокрема при проведенні машинної імітації як експериментального способу дослідження економічних та організаційно-виробничих систем.

Правила побудови двоїстої задачі

кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі - на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Припущення

твердження, яке тимчасово (доки не буде встановлено істину) вважається правильним, у контексті створення імітаційних моделей роблять у разі, коли деякі дані невідомі або їх не можна здобути. Водночас припущення можуть висуватися й щодо відомих даних, які не повністю відповідають сутності обраної задачі. Тому для відшукування необхідних результатів припустимі певні спрощення чи скорочення.

Регресійний аналіз

розділ математичної статистики, який об'єднує практичні методи дослідження регресивної залежності між величинами за даними статистичних спостережень. Він полягає у побудові рівняння регресії, за допомогою якого знаходиться середнє значення випадкової величини, якщо величина іншої (або інших у випадку багатофакторної регресії) відома.

Ризик

числова характеристика імовірності отримання небажаних результатів

Рівновага

здатність системи зберігати свій стан як найдовше за відсутності зовнішніх збурень чи за постійного впливу зовнішнього середовища.

Рослинництво	наука, що вивчає культурні рослини, різноманітність їх форм і сортів, особливості біології та найдоцільніші прийоми вирощування з метою отримання високих і стабільних урожаїв. це галузь сільського господарства, в якій проходить накопичення органічної речовини шляхом вирощування культурних рослин.
Самоорганізація	виникнення в системах певних просторових, часових або функціональних структур без специфічного впливу на систему з боку зовнішнього середовища, тобто поява чи зростання впорядкованості, виникнення порядку із хаосу.
Симплекс	алгоритм вирішення оптимізаційної задачі лінійного програмування шляхом перебору вершин опуклого багатогранника в багатовимірному просторі.
Симплексний метод	метод розв'язання <u>задачі лінійного програмування</u> , в якому здійснюється скерований рух по опорних планах до знаходження оптимального розв'язку; симплекс-метод також називають методом поступового покращення плану.
Синергетика	міждисциплінарна <u>наука</u> , що займається вивченням процесів <u>самоорганізації</u> і виникнення, підтримки стійкості і розпаду структур (систем) різної природи на основі методів <u>математичної фізики</u> («формальних технологій»).
Система	комплекс взаємопов'язаних елементів, які спільно реалізують певні цілі. Складність системи визначається кількістю елементів, які до неї входять, зв'язками між ними, а також взаємовідношеннями між системою і зовнішнім оточенням.
Система основних умов-обмежень	обмеження яку задаються функції мети при розв'язуванні задач лінійного програмування
Системний аналіз	методологія дослідження об'єктів довільної природи шляхом їх подання як систем з подальшим аналізом і синтезом цих систем.
Системотвірні елементи моделювання	суб'єкт дослідження (системний аналітик); об'єкт дослідження; модель, яка опосередковує відносини між об'єктом, який вивчається, та суб'єктом, який пізнає (системним аналітиком).
Сідлові точки	точки для яких виконується подвійна нерівність: $H(a, b^*) \leq H(a^*, b) \leq H(a, b)$ для всіх стратегій a гравця A , і для всіх стратегій b для гравця B
Сіткові методи	методи управління великими науково-технічними розробками, будівництвом та іншими комплексами робіт, заснованих на використанні ЕОМ і сіткових графіків. На базі використання сіткового графіка ЕОМ спроможна виконати аналіз стану

	системи в будь-який момент часу, визначити послідовність робіт (критичний шлях), які можуть затримати виконання всього плану робіт. Серед сіткових методів найбільшого розповсюдження дістали МКШ (метод критичного шляху) та ПЕРТ (метод оцінки та перегляду програм).
Статистична перевірка гіпотез	процедура використовується в математичній статистиці для обґрунтованого зіставлення певної гіпотези стосовно природи чи величини статистичних параметрів явища, що досліджується, з вибірковими даними, котрі є в розпорядженні експериментатора.
Стаціонарні точки	це такий аргумент <u>функції</u> при якому її <u>похідна</u> (градієнт для функції багатьох аргументів) дорівнює нулю.
Стійкість системи	точки в яких частинні похідні дорівнюють нулю здатність системи повертатися до стану рівноваги після виведення її з цього стану під впливом зовнішніх збурень.
Структура системи	стійка впорядкованість та зв'язок між елементами та підсистемами системи.
Теорема Куна – Таккера	пов'язує рішення ЗЛП з наявністю сідової точки у відповідній функції Лагранжа.
Техніко-економічні показники	система вимірів, що характеризує матеріально-виробничу базу підприємства і комплексне використання ресурсів. техніко-економічні показники (ТЕП) застосовуються для планування й аналізу організації виробництва і праці, рівня техніки, якості продукції, використання основних і оборотних фондів, трудових ресурсів
Транспортна задача	задача про оптимальний план перевезення продукту (-тів) із пунктів відправлення до пунктів споживання.
Транспортна задача відкритого типу	Задача в якій сумарний обсяг пропозицій (вантажів, наявних в пунктах відправки) дорівнює загальному обсягу попиту на товари (вантажі), які потрібні пунктам споживання
Транспортна задача закритого типу	Задача в якій сумарний обсяг пропозицій (вантажів, наявних в пунктах відправки) не дорівнює загальному обсягу попиту на товари (вантажі), які потрібні пунктам споживання
Тренд	це довгострокова компонента, яка показує зростання або спад значень часового ряду впродовж тривалого проміжку часу.
Управління (системою)	діяльність, яка має на меті забезпечити цілеспрямоване поведіння системи під час зміни умов зовнішнього середовища або умов її функціонування. Системи з управлінням називають кібернетичними системами.

Фактори	$X_1, X_2, \dots, X_n$ - змінні величини, які, за припущенням, впливають на результати експериментів.
Фізична модель	фізичне представлення <u>системи</u> , об'єкта, явища або <u>процесу</u> з метою їхнього дослідження, тобто представлення за допомогою іншого фізичного («реального») об'єкта, що має в тому чи іншому аспекті «аналогічну» динаміку «поведінки»
Функція Лагранжа	<u>функція узагальнених координат</u> $\varphi_i(s)$, що використовується для побудови через певний варіаційний принцип <u>рівнянь</u> , які описують еволюцію фізичної системи.
Функція відгуку	математична модель $y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, що являє собою залежність математичного сподівання від факторів.
Хаос	у синергетиці під хаосом розуміють нерегулярний рух, що описується детерміністичними рівняннями. Його ще називають динамічним хаосом.
Цілісність системи	властивість системи, яка полягає в тому, що остання, з одного боку, — це цілісне утворення, а з другого — в її складі чітко можна виділити окремі цілісні об'єкти (елементи). Але не компоненти становлять ціле (систему), а навпаки, ціле породжує під час свого поділу компоненти системи.
Цілочислове (дискретне) програмування	розділ математичного програмування, який вивчає екстремальні задачі, у яких на шукані змінні накладаються умови цілочисловості, а область допустимих рішень скінченна.
Цільова функція	функція, що зв'язує мету (змінну, що оптимізується) з керованими змінними в задачі оптимізації. <u>е математичний вираз</u> деякого критерію якості одного об'єкту (рішення, процесу і т. д.) в порівнянні з іншим.
Штучний базис	метод вирішення задач ЕММ який застосовується в тих випадках, коли система обмежень задачі лінійного програмування не містить одиничну матрицю порядку m .
Природокористування	комплексна наукова дисципліна, що досліджує загальні принципи раціонального використання природних ресурсів. теорія та практика раціонального використання людиною природних ресурсів.
Землекористування	порядок, умови і форми користування землею (у 5 знач.), яка належить державі, колективам чи окремим особам.
Екологія	зв'язок між організмом і довкіллям. наука, що вивчає закономірності формування і функціонування біологічних систем та їх взаємодію з навколишнім середовищем.

Data mining

(розробка, добування даних) — дослідження та виявлення «машиною» (алгоритмами, засобами штучного інтелекту) у «сирих» даних прихованих структур і залежностей, які раніше не були відомі, нетривіальні, мають практичну цінність, доступні для інтерпретації людиною тощо.

ТЕМАТИКА ДИСКУСІЙ НАУКОВОГО ГУРТКА

1. Математичне моделювання економіки та його роль у розвитку економічної теорії
2. Аналіз пакетів прикладних програм, які використовуються для моделювання економічних об'єктів і процесів
3. Математичні моделі в системах моніторингу економічних процесів
4. Комплекс економіко-математичних моделей маркетингових досліджень
5. Основні принципи аналізу та синтезу моделей економічних систем
6. Імітаційні моделі прийняття багатокритеріальних рішень в економіці та підприємстві
7. Математичні моделі комбінаторного морфологічного аналізу та синтезу раціональних систем управління в економіці та підприємстві
8. Математичні моделі аналізу проблем глобалістики
9. Математичні моделі адаптивних і раціональних очікувань в економіці та підприємстві
10. Економіко-математичне моделювання використання земельних ресурсів.
11. Імітаційне моделювання банківської діяльності.
12. Моделювання виробничих процесів в аграрному секторі на основі багатоцільової оптимізації.
13. Еколого-економічне моделювання розвитку аграрних територій.
14. Моделі ефективності регулювання внутрішнього продовольчого ринку в умовах СОТ .
15. Оцінка ризиків продовольчої безпеки в умовах відкритої економіки.
16. Моделювання і оптимізація господарської діяльності підприємств корпоративного типу.
17. Прогнозування змін номенклатури споживчого попиту населення України.
18. Моделювання процесів ґрунтового живлення.
19. Моделювання інвестиційної привабливості та ризиків окремих галузей аграрного сектору.
20. Моделювання системних характеристик банківської діяльності в умовах ризику.
21. Моделювання та менеджмент ринку сільськогосподарських культур.
22. Моделювання та оптимізація використання інвестицій в сільськогосподарських підприємствах.
23. Моделювання та оптимізація діяльності аграрних підприємств в умовах ризику.
24. Моделювання та оптимізація структури інвестиційних фондів.

25. Моделювання та оптимізація фінансової стійкості підприємства.
26. Моделювання ризиків кредитування аграрної сфери.
27. Обґрунтування оптимального плану розвитку підприємства на основі варіантних розрахунків.
28. Модель раціонального природокористування на рівні окремого господарства.
29. Оптимізація кормової бази сільськогосподарського підприємства в умовах трансформаційної економіки.
30. Побудова цільової функції аграрного підприємства з урахуванням екологічної складової.
31. Моделі конкурентоспроможності розвитку генно-модифікованих технологій.
32. Моделювання і оптимізація структурних змін сільськогосподарського виробництва (на різних рівнях управління).
33. Моделювання і оптимізація інноваційних і інвестиційних проєктів в галузях АПК (рослинництво, тваринництво, зернове господарство, цукробурякове виробництво, картоплярство і т.д.)
34. Моделювання адаптації сільськогосподарських підприємств до змін в умовах конкуренції і ризику.
35. Моделювання конкурентної стратегії сільськогосподарських підприємств (стратегії контролю над витратами, стратегії диференціації, стратегії фокусування тощо).
36. Моделювання ефективності розвитку господарських систем в умовах ризику.
37. Моделювання та оптимізація сільськогосподарського виробництва на основі системного підходу (витрати-обсяг виробництва-прибуток)
38. Моделювання і оптимізація структури витрат на виробництво сільськогосподарської продукції (зерно, цукор, м'ясо всіх видів і т.д.)
39. Застосування математичних методів для оптимізації посівних площ сільськогосподарських культур підприємств різних форм власності.
40. Моделювання та оптимізація виробничої діяльності сільськогосподарських підприємств АПК.
41. Застосування математичних методів до визначення обсягу капітальних вкладень у зерновому господарстві, цукробуряковому виробництві і т.д.
42. Застосування системного підходу до організації сільськогосподарського виробництва в АПК України.
43. Оптимізація структури витрат у виробництві продукції сільського господарства.
44. Методи кластерного аналізу для дослідження економічних систем (процесів).
45. Моделювання і оптимізація факторів економічного зростання.

46. Економіко-математичні моделі оптимізації сільськогосподарського виробництва в радіаційно забруднених зонах.
47. Економіко-математичне моделювання експертних систем у народному господарстві.
48. Динамічне моделювання економічних процесів у галузях народного господарства.
49. Особливості підвищення ефективності використання ґрунтів у радіаційно забруднених зонах.
50. Оптимізація використання виробничого потенціалу в АПК України.
51. Ефективність використання підсобних господарств у приміській зоні.
52. Моделювання та оптимізація розподілу та використання мінеральних добрив по полях сівозмін в аграрних підприємствах.
53. Планування потреби в добривах на основі динамічної моделі.
54. Моделювання та оптимізація використання виробничих ресурсів в аграрних, лісопереробних та інших підприємствах різних форм власності в ринкових умовах.
55. Економічні методи аналізу та прогнозування використання ресурсів виробництва в аграрних підприємствах різних форм власності.
56. Моделювання та оптимізація використання кормових ресурсів в умовах ризику.
57. Багатокритеріальні проблеми оптимізації галузевої структури аграрних підприємств.
58. Оптимізація та менеджмент експортного потенціалу галузей економіки України
59. Еколого-економічне моделювання використання ресурсів в агропромисловому виробництві
60. Методологічні аспекти побудови моделей довготермінового економічного прогнозування
61. Опорні плани задач лінійного програмування.
62. Аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування.
63. Зацикленість алгоритму симплексного методу.
64. Обґрунтування алгоритму знаходження оптимального плану лінійної задачі
65. Опуклі множини.
66. Двоетапна транспортна задача та її використання на практиці.
67. Транспортна задача за критерієм часу.
68. Оптимізація транспортування неоднорідних вантажів.
69. Оптимізація транспортування однорідних вантажів різними транспортними засобами.
70. Канонічні форми задач лінійного програмування.
71. Задачі нелінійного математичного програмування.

- 72. Труднощі нелінійного програмування.
- 73. Квадратичне і опукле програмування.
- 74. Нелінійні задачі з сепарабельними функціями. Методи лінеаризації.
- 75. Проблеми побудови концептуальної моделі управління економічними об'єктами та процесами з урахуванням взаємодії із суспільством і біологічним середовищем
- 76. Моделювання еколого-економічних процесів
- 77. Моделювання основних системних характеристик та їх роль при прийнятті рішень в економіці та підприємництві
- 78. Моделювання антикризового менеджменту
- 79. Математичні моделі дослідження хаотичної динаміки в економічних системах
- 80. Моделювання теорії катастроф та концептуальні засади її застосування в економіці
- 81. Методологічні аспекти та інструментарій моделювання процесів активної адаптації в економіці та підприємництві
- 82. Моделювання агропромислової політики
- 83. Односекторна модель оптимального економічного зростання
- 84. Моделі та методи управління підприємством
- 85. Моделювання стратегій організаційного розвитку.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барвінський А.Ф, Олексій І.Я, Крупка З.І. та ін. Математичне програмування. – Львів: “Інтелект – Захід”, 2004. – 446 с.
2. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. – К., 1996. – 199 с.
3. Вітлінський В.В. Аналіз моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц./ Вітлінський В.В., Верчено П.І – К.:КНЕУ, 2000. – 292с.
4. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / В.В.Вітлінський, П.І.Верченко, А.В.Сігал, Я.С. Наконечний; За ред. д-ра екон. наук, проф. В.В.Вітлінського. – К.:КНЕУ, 2002. – 446с.
5. Вітлінський В.В. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост.вивч. дисц. / Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. – К.: КНЕУ, 2001. – 248с.
6. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 408с.
7. Вітлінський В.В. та ін. Економічний ризик: ігрові моделі. Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2002. –446с.
8. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
9. Вовк В.М. Математичні методи дослідження операцій в економіко-виробничих системах: Монографія/ В.М. Вовк – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 584 с.
- 10.Вовк В.М. Оптимізаційні методи і моделі : навч. посібник / В.М. Вовк, Л.М. Зомчак. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. – 360 с.

11. Вступ до числових методів: Навч. посібник./ [Каленюк П.І., Бакалець В.А., Бакалець І.І. та ін.]– Львів: В-во Державного університету “Львівська політехніка”, 2000. – 146 с.
12. Дацко М.В. Оптимізаційні методи і моделі : Практикум. / В.Б. Антонів, М.В. Дацко. – Львів, Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2019. – 116 с.
13. Забуранна Л.В., Попрозман Н.В., Клименко Н.А., Попрозман О.І. Моделювання та управління інноваційними процесами Підручник- Київ: ДП «Компринт», 2014 – 379 с. –23,7у.д.а
14. Забуранна Л.В. Клименко Н.А., Попрозман Н.В., Попрозман О.І. Оптимізаційні методи та моделі: /Підручник, 2-е видання, доповнене-К.: Компринт, 2018, 419 с.
15. Каталог Національної бібліотеки України http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/EP/index.html
16. Каталог бібліотеки НУБІП України http://irb.nubip.edu.ua/cgi-bin/irbis64r_14/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=NUBIP&P21DBN=NUBIP&LNG
17. Клименко Н., Попрозман Н., Негрей М., Костенко І. Моделювання економіки [Навчальний посібник] -Київ: Редакційно-видавничий відділ НУБІП України, 2022-252 с.
18. Клименко Н., Зомчак Л., Негрей М., Комар М. Моделювання економіки. Ч.2.К.: Редакційно-видавничий відділ НУБІП України, 2024-252 с.
19. Костіна Н. І. Фінанси: системи моделей і прогнозів: Навч. посібник./ Костіна Н. І., Алексєєв А. А., Василик О. Д. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 304 с.
20. Лавінський Г.В. Моделювання економічної динаміки: Навчальний посібник. / Лавінський Г.В., Пшенишнюк О.С., Устинко С.В., Шарапов О.Д. - К.: Атака, 2006.- 276с.

21. Лук'яненко І.Г. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навч. посіб./ Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О. – К.: Літера ЛТД, 2002. – 352с.
22. Мазаракі А.А. Математичне програмування в Excel: Навч. посібник./ Мазаракі А.А., Толбатов Ю.А. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208с.
23. Математичне програмування: Навчальний посібник /[А.Ф. Барвінський, І.Я. Олексів, З.І. Крупка та ін.]– Львів: Національний університет “Львівська політехніка” (Інформаційно-видавничий центр “Інтелект+” Інститут післядипломної освіти) “Інтелект - Захід”, 2004. – 448 с.
24. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
25. Основи математичних методів дослідження операцій/ Лавров Є.А., Клименко Н.А., Перхун Л.П., Попрозман Н.А., Сергієнко В.А./ За ред Н.А. Клименко.-К.: ЦК "Компринт, 2015-452с.
<http://dspace.nubip.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/593>
26. Попрозман Н.В., Клименко Н.А., Забуранна Л.В., Попрозман О.І. Математичні методи і моделі в аграрній та природоохоронній галузях. Навчальний посібник-К:ТОВ «Аграр Медіа Груп»-2014, 292 с.
27. Попрозман Н.В. Навчальне видання. Проблеми оптимізації економічних систем. К.– ТОВ „Аграр Медіа Груп”.- 2011.-67с.
28. Прогнозування соціально-економічних процесів: навч. посібник./Скрипник А., Клименко Н., Стариченко Є., Волошина Т. – К : НУБІП України, 2019.- 237с.
29. Ризики інновацій в аграрному виробництві: [навчальний посібник]/ А. Скрипник, Е. Букін, Н. Клименко, І. Костенко.–К.: ТОВ «Прінтеко», 2019.–230с.

- 30.Шарапов О.Д. Економічна кібернетика: Навч. посіб. / Шарапов О.Д.,
Дербенцов В.Д., Семьонов Д.Є. – К.: КНЕУ, 2005. – 231с.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



Підписано до друку 14.07.2026 .
Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 27,50
Тираж 50 прим.

Віддруковано ФО-П Білецький Р.Г.,
Типографія Аграр Медіа Прінт.
Адреса потужностей: м. Київ, вул. В.Некрасова, 3
e-mail: info@agrarmedia.com
тел.: (067) 407 87 23

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців ДК №8116 від 21.06.2024р.
www.agrarmedia.com