

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

**МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ ТА
АНАЛІЗ ГЕОДАНИХ**

Конспект лекцій

Київ - 2025

УДК 528.4

Підготовлено відповідно до програми «Математичне опрацювання та аналіз геоданих», затвердженою для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій». Наведено елементи теорії похибок вимірювань, розглянуто метод найменших квадратів (параметричний спосіб вирівнювання) та корелатний спосіб вирівнювання геодезичних мереж.

*Рекомендовано до друку Вченою радою факультету землепорядкування
НУБіП України
(протокол №2 від 17 квітня 2025 року)*

*Укладачі: доц. **Кривов'яз Є.В.**, доц **Жук О.П.***

Рецензенти: професор кафедри геодезії та картографії НУБіП України, д.е.н.
Опенько І.А.
доцент кафедри вищої та прикладної математики НУБіП України,
к.ф.-м.н. Арнаута Н.В.

Навчальне видання

Методичні рекомендації з дисципліни "Математичне опрацювання та аналіз геоданих" для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій»

Укладачі: **Кривов'яз Євгенія Вікторівна,**
Жук Олексій Павлович

Відповідальний за випуск доц. **Є.В. Кривов'яз**

Підписано до друку _____ Формат 60×84¹/₁₆.

Ум. друк. арк. 5,5. Обл. вид. арк. 5,9

Тираж 100 Зам. №32925

ЦП «Компринт»

ПЕРЕДМОВА

Метою вивчення дисципліни «Математичне опрацювання та аналіз геоданих» студентами факультету землевпорядкування, які навчаються за освітнім ступенем «Бакалавр» за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій», є одержання необхідних знань та навиків, що з успіхом можуть бути застосовані при виконанні геодезичних вимірів та їх математичної обробки, які виконуються при проведенні геодезичних робіт у землеустрої.

Вивчення цієї дисципліни є необхідною передумовою підготовки високваліфікованого фахівця із землеустрою, оскільки вона належить до числа дисциплін професійної та практичної підготовки. За своїм змістом конспект лекцій відповідає робочій програмі курсу.

У навчальному виданні висвітлено питання теорії похибок вимірювань (предмет, задачі, суть, критерії точності рівноточних вимірювань, нерівноточні вимірювання) та математичної статистики. Окремо подано вирівнювальні обчислення в геодезичних мережах та їх суть, детально розкрито параметричний спосіб вирівнювання та висвітлено порядок вирівнювання параметричним способом мережі триангуляції. В завершенні висвітлюються питання вирівнювання геодезичних мереж корелатним способом. Також наведено приклади вирівнювання цими методами.

Конспект лекцій містить головні теоретичні положення дисципліни. Для поглибленого її вивчення доцільно застосовувати напрацювання вітчизняних та зарубіжних вчених. Колектив авторів наголошує на необхідності використання сучасного програмного забезпечення та комп'ютерної техніки при розв'язанні задач вирівнювання геодезичних мереж, що у свою чергу дозволить вийти на вищий рівень вирішення поставлених перед майбутніми фахівцями завдань.

Лекція 1. Загальні відомості про дисципліну.

1. Мета та завдання вивчення дисципліни

Навчальна дисципліна «Математичне опрацювання та аналіз геоданих» є логічним продовженням опрацювання студентами всього циклу геодезичних дисциплін. Найбільша увага буде приділятися питанням застосування математичних механізмів, які застосовуються для опрацювання одержаних при виконанні геодезичних завдань результатів вимірювання певних величин, що пов'язують точки земної поверхні, з метою одержання їх найбільш точних або найімовірніших значень.

Для належного опрацювання тем і завдань дисципліни студенти повинні здобути попередню підготовку з таких дисциплін, як математика, фізика, топографія та геодезія, а також одержати практичні навички щодо розв'язання основних розрахункових завдань між точками земної поверхні для визначення їх місця розташування та побудови графічних матеріалів відображення земної поверхні.

Найбільш важливим для математичної обробки вимірювань є те, що між виміряними величинами існують математичні співвідношення, які повинні бути задоволені. Ці співвідношення між виміряними величинами, враховуючи при цьому вихідні дані, зазвичай можна виразити різноманітними рівняннями, залежними між собою. Із цих рівнянь можна створити декілька систем, які складаються з незалежних рівнянь.

Методи строгого (високоточного) математичного опрацювання геодезичних вимірів є обов'язковими при виконанні таких надважливих геодезичних завдань, як створення та розвиток опорних геодезичних мереж державного та спеціального призначення, згущення планових і висотних геодезичних мереж на великій території, побудова високоточних інженерно-геодезичних мереж як геодезичної основи при виконанні землевпорядних і кадастрових робіт, здійсненні територіального планування та інженерного оснащення територій, виконанні будівельних робіт при спорудженні промислових, цивільних будівель або об'єктів транспортної інфраструктури.

Методики математичного опрацювання геодезичних вимірів обумовлюють виконання основних етапів розв'язання наукових і науково-практичних задач геодезії в цілому та споріднених з ними завдань астрономії, навігації, геології, геофізики, екології, архітектури та інших галузей діяльності людини, які потребують використання в своїх цілях даних про високоточне визначення місцеположення об'єктів на поверхні Землі або в просторі.

Основними складовими частинами, яким буде приділятися увага при опрацюванні даної дисципліни є такі:

- теорія похибок вимірювань та її компоненти;
- теорія методу найменших квадратів;
- застосування параметричного та корелатного методів вирівнювання вимірянних величин при створенні та розвитку геодезичних побудов.

2. Предмет та задачі теорії похибок вимірювань. Суть та види вимірювань

В геодезії вивчення форми та розмірів поверхні Землі або окремих її частин виконується шляхом вимірювань певних величин (кутів, довжин ліній, перевищень між точками, площ ділянок, координат точок) та їх обчислювальної обробки. У результаті процесу вимірювання знаходять число та визначають одиницю виміру (градусну міру, метри чи сантиметри, гектари тощо), яку порівнюють з однорідною їй еталонною величиною. Сам процес вимірювання супроводжується деякими погрішностями, від яких залежить точність одержуваних результатів, тобто у результаті вимірювань одержати абсолютно точне значення шуканих величин неможливо. Питання застосування до результатів вимірювань математичних методів для виявлення уточнених значень шуканих величин, оцінки їх точності та встановлення меж можливого використання результатів вимірювань розглядається в *теорії похибок вимірювань*.

Основними задачами теорії похибок вимірювань є:

1. Вивчення закономірностей, яким підпорядковуються похибки вимірювань.
2. Знаходження найбільш надійного значення визначуваної величини.
3. Оцінка точності результатів вимірювань та їх функцій.
4. Попередній розрахунок точності вимірювань та встановлення допусків, які обмежують використання результатів спостережень у заданих межах точності.

Одноразове вимірювання величини є необхідним вимірюванням, наступні виміри – є надлишковими; вони використовуються для перевірки правильності отриманих результатів вимірювань або для підвищення їх точності.

Вимірювання бувають *безпосередні (прямі)* та *непрямі*. Безпосереднім є вимірювання, в якому вимірювальний прилад є одиницею виміру та співставляється з вимірюваним об'єктом (вимірювання довжини лінії мірною стрічкою чи далекоміром, кута – теодолітом чи транспортиром, площі – планіметром тощо). До непрямих відносять такі вимірювання, результати яких необхідні для визначення нової величини, що обчислюється за цими вимірами (наприклад, при визначенні недоступної відстані в трикутнику вимірюється інша лінія та кути при ній; визначенні горизонтального прокладення лінії за її довжиною на місцевості та кутом нахилу; обчисленні площі простих фігур за результатами безпосередніх чи графічних вимірювань лінійних елементів).

3. Похибки вимірювань, їх види

Процес вимірювання супроводжується впливом різних факторів: самого об'єкту вимірювання, одиниці вимірювання, технічних засобів, методу вимірювання, навколишнього середовища, власних особливостей виконавця. Якщо ці фактори залишаються при виконанні різних вимірювань незмінними, то такі виміри називають *рівноточними*, в іншому разі – *нерівноточними*. Одержати абсолютно точне значення величини неможливо внаслідок впливу цих факторів на процес вимірювання. При багаторазових вимірюваннях однієї й

тієї ж величини результати не збігаються між собою з-за того, що містять в собі різні помилки. Відхилення результату вимірювання від його точного значення називають *істинною похибкою вимірювання*:

$$\Delta = x - a,$$

де Δ – похибка вимірювання, x – результат виміру, a – теоретичне значення величини.

Похибки, які залежать від впливу окремого фактору, називають *елементарними*. Таким чином, похибки результату вимірювання є сумою елементарних похибок. Весь надалі викладений матеріал стосується як елементарних, так і сумарних похибок.

Похибки вимірювань розділяють за характером їх дії та за джерелом виникнення (походження).

За джерелом походження розрізняють *похибки приладів, зовнішні та особистісні*. Похибки приладів обумовлені недосконалістю конструкцій приладів та їх неточною юстировкою. Зовнішні похибки виникають з-за впливу зовнішнього середовища (наприклад, рефракції при читанні відліків по рейці чи дії вітру на візирні знаки), особистісні – обумовлені власними особливостями спостерігача.

За характером дії розрізняють *грубі, систематичні та випадкові* похибки.

Грубими називають похибки, які за своєю величиною перевищують встановлену для даного виміру при заданих умовах межу відхилення від точного значення. Ці *промахи* виникають внаслідок неухважного ставлення до роботи. Для виявлення грубих похибок виконують повторні надлишкові вимірювання. Результати, що містять ці похибки вибраковуються та замінюються новими. Але не слід забувати, що в геодезії результати не знищують (втирають, замальовують або зрізають), а акуратно перекреслюють, щоб у разі необхідності їх можна було б відновити. При подальшій обчислювальній обробці результати, що містять грубі похибки, не враховують.

Якщо вплив конкретного фактору в процесі вимірювань стає переважаючим, то часто має місце виникнення систематичних похибок – таких, які при багаторазових вимірюваннях залишаються незмінними або змінюються за якимось певним законом (наприклад, похибка в довжині лінії з-за неточного її компарування, колімаційна похибка теодоліта при вимірюванні горизонтальних кутів одним напівприйомом, відхилення місця нуля від нуля при вимірюванні вертикальних кутів, нерівність п'ятки нівелірної рейки при геометричному нівелюванні і т. ін.). Вивчивши закон дії цього фактору, процес вимірювань будують так, щоб послабити його вплив, у результаті чого вносять відповідні поправки: щодо температури, нахилу лінії, проводять перевірки та юстировки приладів, дотримуються методики вимірювань.

Похибки, які не залежать від результатів вимірювань, в послідовності появи яких не простежується закономірність, але взагалі підпорядковані закону ймовірності, називають випадковими. Причини виникнення випадкових

похибок різні: обмежена точність приладу, вплив середовища, неможливість точно взяти відлік на око по шкалі приладу та ін.

Вплив випадкових похибок можна послабити, підвищив якість та кількість вимірювань, а також належною математичною обробкою результатів вимірювань. Не слід забувати, що найточніші вимірювання можна спотворити їх неякісною математичною обробкою.

При подальшому викладенні теорії похибок вимірювань буде враховуватись, що результати вимірів вільні від грубих та систематичних похибок. Окремо можуть бути розглянуті випадки, коли вимірювання містять систематичні похибки, та проведена оцінка їх точності.

Лекція 2. Критерії точності геодезичних вимірювань.

1. Властивості випадкових похибок. Оцінка результатів безпосередніх вимірювань

Математичною основою теорії випадкових похибок вимірювань є теорія ймовірностей і математична статистика. Теорія ймовірностей – наука, що вивчає закономірності масових випадкових явищ, які мають статистичну стійкість. Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи збору, систематизації та обробки результатів спостережень з метою виявлення існуючих закономірностей.

Випадкові похибки є яскравим прикладом випадкової величини. *Випадковою величиною* називається величина, яка в результаті досліду або виміру приймає тільки одне з можливих значень, наперед невідоме та залежне від випадкових причин, врахувати які завчасно неможливо. Їх закономірності знаходяться тільки у загальному масовому прояві та не можуть бути ліквідовані з одиничного виміру. Випадкову величину недостатньо охарактеризувати числом: необхідно кожному з можливих числових значень приписувати ймовірність його прояву. Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливим значенням випадкової величини та ймовірністю його прояву, називають *законом розподілу випадкової величини*.

У теорії похибок приймаються два постулати:

1. Похибки вимірювань Δ_i підпорядковані нормальному закону розподілу.
2. Математичне очікування випадкової похибки $M[\Delta_i]$ дорівнює нулю, що означає відсутність систематичних похибок.

Нормальним називають розподіл неперервної випадкової величини X , заданий функцією (функція Гауса):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a та σ – параметри нормального розподілу; e – основа натурального логарифму.

Користуючись поняттям середньої квадратичної похибки m , закон розподілу випадкових похибок Δ може бути записаний у вигляді:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}.$$

Графік нормального розподілу випадкових похибок (крива Гауса) має вигляд:

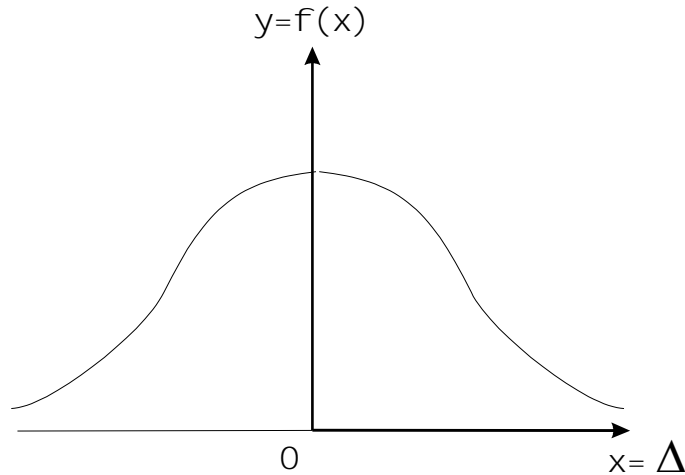


Рис. 1 Крива нормального розподілу

У багатьох практичних питаннях немає необхідності характеризувати випадкову величину законом розподілу, достатньо знати тільки окремі числові параметри, що його характеризують: середнє значення (центр розподілу), навколо якого групуються можливі значення випадкової величини, та якесь число, яке характеризує ступінь розкидання цих значень відносно середнього, і т. ін.

Характеристикою центру розподілу є *математичне очікування* випадкової величини ($M[x]$), яке визначається за формулою:

$$M[x] = \sum_{i=1}^n p_i x_i,$$

де p_i – ваги випадкових величин.

Прийнявши до уваги другий постулат теорії похибок вимірювань можна зазначити, що математичне очікування випадкової величини виміру $M[x_i]$ приймається за істинне значення цієї величини X .

Дослідження великих рядів вимірювань дозволило встановити наступні властивості випадкових похибок:

1. За абсолютною величиною похибки із заданою ймовірністю K не перевищують певної межі.
2. Додатні та від'ємні похибки, рівні за абсолютною величиною, зустрічаються приблизно однаково часто.
3. Чим більша похибка за абсолютною величиною, тим менше вона зустрічається.
4. Чим більша кількість вимірів, тим менше за абсолютною величиною середнє арифметичне значення похибок.

Точність вимірів виражає ступінь близькості результатів вимірів до дійсного значення величини та характеризується середньою величиною випадкових помилок. Найчастіше на практиці для цього використовується середню квадратичну похибку m , величину якої знаходять за результатами вимірювань по обчисленим відхиленням:

$$m = \frac{\sqrt{[\Delta^2]}}{n}.$$

Надійність середньої квадратичної похибки характеризується середньою квадратичною похибкою самої середньої квадратичної похибки, одержаної з експерименту, яка визначається за формулою:

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}.$$

Теоретичною характеристикою точності вимірювань, яка служить для визначення допустимості отриманих похибок, служить також гранична похибка Δ_{gp} , більше якої похибки відносять до грубих. Величину граничної похибки визначають за формулою:

$$\Delta_{gp} = K \cdot m,$$

де K – коефіцієнт, значення якого приймається таким, щоб вірогідність появи похибки із величиною, більше граничної, була мала.

При $K = 3$ в інтервал $3m$ потрапляє 99,7% результатів вимірювань, при $K = 2,5$ в інтервал $2,5m$ – 98,8%, при $K = 2$ в межі подвійної середньої квадратичної похибки ($2m$) – 95,4%.

Точність геодезичних вимірів характеризують *абсолютним* та *відносним* значенням похибок. До абсолютних відносять похибки істинні Δ , середні квадратичні m та граничні Δ_{gp} . Відносною похибкою ε_m називають відношення відповідної абсолютної похибки до значення вимірюваної величини χ :

$$\varepsilon_m = \frac{m}{\chi} = \frac{1}{\chi'}.$$

Відносну похибку виражають у вигляді аліквотного дроби – дроби, чисельник якого дорівнює одиниці. Для цього потрібно величину чисельника та знаменника розділити на величину чисельника.

Якщо для отримання значення певної величини виконано декілька вимірювань, то здійснюють їх математичну обробку, яка включає визначення:

- 1) середнього арифметичного значення;
- 2) середньої квадратичної похибки одного виміру;
- 3) середню квадратичну похибку середнього арифметичного.

2. Середнє арифметичне значення та його точність

За результатами вимірювань $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ визначається середнє арифметичне значення \bar{x} за формулою:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n},$$

де n – кількість значень.

Для спрощення обчислення середнього арифметичного значення вводять наближене значення величини x_0 (часто за наближене значення обирають менше в ряду значень). Потім знаходять різниці між результатом виміру x_i та наближеним значенням:

$$\varepsilon = x_i - x_0.$$

У цьому випадку формула знаходження для середнього арифметичного значення приймає вигляд:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum \varepsilon_i}{n}.$$

Оцінка точності визначення середнього значення виконується шляхом обчислення середньої квадратичної похибки M середнього арифметичного значення:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

яка характеризується своєю середньою квадратичною похибкою

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}.$$

На практиці при вимірюванні заданої величини, коли точне значення невідоме, використовують наступну властивість середнього арифметичного значення – при достатньо великій кількості вимірів значення середнього арифметичного наближається до теоретичного значення, тому його прийнято вважати *найімовірнішим*. Для того, щоб підвищити точність середнього арифметичного значення, яке буде результатом вимірювань, потрібно збільшити кількість вимірів.

3. Визначення середньої квадратичної похибки одного виміру

Коли відомий ряд результатів рівноточних вимірювань та визначено з них остаточне значення, то поправкою v називають різницю між середнім арифметичним та результатом кожного виміру:

$$v_i = \bar{x} - x_i.$$

Властивостями таких найімовірніших поправок є:

- 1) $\sum v = 0$
- 2) $\sum v^2 \rightarrow \min$

Оскільки при математичній обробці результатів вимірювань середнє арифметичне знаходять із заокругленням до відповідного знаку, тобто коли:

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = \bar{x} + \omega,$$

то перша умова приймає вигляд:

$$[v] = n \cdot \omega,$$

де ω – похибка заокруглення

При відомій арифметичній середині та обчисленим найімовірнішим поправкам точність вимірювань оцінюють середньою квадратичною похибкою (СКП), визначеною за формулою Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Якщо кожна з величин даного ряду виміряна двічі і всі виміри рівноточні (вимірювання перевищень при горизонтальному нівелюванні по чорній та червоній сторонах рейок, вимірювання горизонтального чи вертикального кутів при двох положеннях вертикального круга КП та КЛ та ін.), то середню квадратичну похибку одного виміру можна визначити за різницями, отриманими для кожної пари вимірів:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}},$$

де d – різниця по кожній парі вимірів, n – кількість подвійних вимірів.

У тих випадках, коли подвійні вимірювання містять систематичні похибки, визначають їх наближене значення Θ як середнє арифметичне з різниць подвійних вимірів:

$$\Theta = \frac{[d]}{n}.$$

Виключивши значення Θ з різниць d , отримують остаточні різниці δ , в яких вплив систематичної похибки мінімальний:

$$\delta = d_i - \Theta.$$

Середня квадратична похибка за різницями подвійних вимірювань, позбавлених систематичної похибки, обчислюється за такою формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2(n-1)}}.$$

4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Похибки, які допускаються при отриманні результатів одних вимірювань, за певними математичними законами впливають на значення інших величин, залежних від них. Усі непрямі вимірювання являють собою залежності від вимірювань безпосередніх, тобто є їх функціями.

Якщо відомі середні квадратичні похибки величин, то можна за ними визначити середню квадратичну похибку будь-якої функції цих величин. Для цього потрібно спочатку визначити математичну залежність між змінними

(функцію), а вже потім приступати до її обробки. Наприклад, коли відомі середні квадратичні похибки горизонтального прокладення лінії s та кута нахилу α , можна визначити середню квадратичну похибку перевищення h , одержаного за результатами тригонометричного нівелювання (нівелювання похилим візирним променем) за формулою:

$$h = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Для вирішення задач в геодезії по оцінці точності функцій вимірних величин використовують відомі формули, які виводяться на основі положень теорії ймовірностей:

1. Лінійна функція вигляду $u = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n = [\pm x]$:

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2.$$

Якщо вимірювання рівноточні, тобто коли $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, формула приймає вигляд:

$$m_u = m_x \sqrt{n}.$$

2. Лінійна функція вигляду $u = kx$:

$$m_u = k \cdot m_x.$$

3. Лінійна функція вигляду $u = [kx]$:

$$m_u^2 = [k_x^2 m_x^2].$$

4. Функція загального вигляду $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_1, x_2 \dots x_n$ – вимірні величини:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot m_i^2 \right].$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – часткові похідні даної функції по кожній змінній, яка входить до її складу.

5. Ваги результатів вимірювань

Вимірювання, які виконуються в різних умовах, характеризуються різними середніми квадратичними похибками. Такі вимірювання називаються *нерівноточними*. Сутність математичної обробки нерівноточних вимірів полягає у тому, щоб при визначенні найбільш надійного значення вимірної величини більш точні виміри мали й більший вплив на остаточний результат. Для цього вводиться додаткова числова характеристика – вага виміру. Вага результату виміру p визначається за формулою:

$$p = \frac{k}{m^2},$$

де k – довільно обране число.

При спільній обробці результатів нерівноточних вимірювань для того, щоб отримати їх об'єктивну оцінку, число k має бути однакове при визначенні ваг всіх вимірювань. Але, оскільки k обирається довільним числом, то вага служить лише відносною характеристикою точності, тобто дає уяву про точність результату вимірювання лише при порівнянні його ваги з вагами інших результатів.

Властивостями ваг є:

1) відношення ваг не змінюється, якщо всі ваги збільшити або зменшити в одне й те ж число разів;

2) відношення ваг двох вимірювань обернено пропорційні квадратам їх середніх квадратичних похибок:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

У тих випадках, коли результатами нерівноточних вимірювань є середні значення з декількох елементарних рівноточних вимірів, для визначення ваг не обов'язково знати середні квадратичні похибки. Достатньо визначити залежність похибки нерівноточного вимірювання від кількості рівноточних вимірювань. У цих випадках результат розглядається як лінійна функція $m_u = m_x \sqrt{n}$, де m_x є результатом елементарного рівноточного виміру. Підставивши значення m_u в формулу визначення ваги отримують рівність:

$$p = \frac{k}{m_x^2 \cdot n}.$$

Оскільки величина m_x є результатом рівноточних вимірювань, то вона є рівною в складі всіх результатів нерівноточних вимірювань. Тоді при визначенні ваг цих вимірювань вираз $\frac{k}{m_x^2}$ є сталою величиною і його можна

замінити одним значенням k' , яке за першою властивістю ваг є довільним числом і може бути змінено до будь-якого значення.

У загальному виразі формула прийме вигляд:

$$p = \frac{k}{n}.$$

У тих випадках, коли на похибку вимірювання впливає довжина лінії чи ходу, кількість вимірів n буде дорівнювати:

$$n = \frac{L}{d},$$

де L – сумарна довжина ходу, d – відстань при одноразовому вимірюванні (довжина мірної стрічки, відстань між пікетами, середня відстань від нівеліра до рейки).

Тоді похибка нерівноточного вимірювання буде дорівнювати:

$$m_u^2 = m_x^2 \cdot \frac{L}{d}.$$

Із врахуванням значення m_u формула прийме вигляд:

$$p = \frac{k}{m_x^2 \cdot \frac{L}{d}} = \frac{k \cdot d}{m_x^2 L}.$$

Замінивши в цій формулі вираз $\frac{k \cdot d}{m_x^2}$ одним числом k' та враховуючи

першу властивість ваг, отримують наступне рівняння для визначення ваг нерівноточних вимірювань:

$$p = \frac{k}{L}.$$

Якщо відомі ваги аргументів, то можна за ними визначити вагу будь-якої функції з них. Щоб вивести формули для визначення ваг функцій приймається $k = 1$. Тоді:

$$p = \frac{1}{m^2},$$

звідки випливає, що

$$m^2 = \frac{1}{p}.$$

Величину $\frac{1}{p}$ називають *оберненою вагою* та використовують при визначенні ваг функцій.

Ваги функцій визначаються за формулами:

1. Лінійна функція вигляду $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n = [\pm x]$:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{1}{p_i} \right],$$

де p_i – ваги нерівноточних вимірювань.

2. Лінійна функція вигляду $u = kx$:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{k^2}{p_x}.$$

3. Лінійна функція вигляду $u = [kx]$:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{k_i^2}{p_i} \right].$$

4. Функція загального вигляду $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 \cdot \frac{1}{p_i} \right].$$

Контрольні запитання.

1. Як називають вимірювання, результати яких необхідні для визначення нової величини, що обчислюється за цими вимірами?
2. Випадкова похибка – це?
3. Відносною похибкою називають?
4. Визначити с.к.п. за формулою Бесселя, якщо $n=2$; $[V^2]=169$?
5. Формула для визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги?
6. Властивістю ваг є?
7. Що дозволяє виконувати контроль вимірювань і їх оцінку точності?
8. Як у теорії ймовірностей, математичній статистиці та у споріднених дисциплінах називають окреме спостереження?
9. Що є головними завданнями вирівнювальних обчислень?
10. Основними задачами теорії похибок вимірювань є?
11. Які величини визначаються при оцінці ряду нерівноточних вимірів?
12. Похибки геодезичних вимірювань поділяють?
13. Скільки відсотків результатів вимірів потрапляють у К-кратний інтервал при визначенні граничного значення випадкових похибок?
14. Наведіть порядок обчислень при обробці ряду рівноточних вимірювань?
15. Відхилення результату вимірювання від його точного значення називають?
16. Похибки, які не залежать від результатів вимірювань, в послідовності появи яких не простежується закономірність, але взагалі підпорядковані закону ймовірності, називають
17. Обчислювальний процес знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин при наявності надлишкових вимірювань називають...
18. Середнє значення вимірюваних величин, визначене шляхом ділення суми вимірюваних значень на їх кількість, називають
19. Середнє значення вимірюваних величин, визначене шляхом ділення суми добутків вимірюваних значень та їх ваг на загальну суму ваг, називають...
20. Яким дробом виражається відносна похибка?
21. Наведіть порядок обчислень при обробці ряду нерівноточних вимірювань.

Лекція 3. Метод найменших квадратів.

1. Сутність вирівнювальних обчислень

У теорії похибок геодезичних вимірювань розглядалась математична обробка багаторазових вимірювань однієї тієї ж величини. У практиці геодезичних обчислень виникає і більш загальна задача сумісної обробки результатів вимірювань, виконаних для визначення багатьох невідомих величин. Одержання найбільш надійних значень цих величин та їх оцінка точності становлять завдання *вирівнювальних обчислень*. Обчислювальний процес знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин при наявності надлишкових вимірювань називають *вирівнюванням*. Остаточні значення виміряних величин характеризують відповідною оцінкою їх точності.

Найбільш важливим для математичної обробки вимірювань є те, що між виміряними величинами існують математичні співвідношення, які повинні бути задоволені. Ці співвідношення між виміряними величинами, враховуючи при цьому вихідні дані, зазвичай можна виразити різноманітними рівняннями, залежними між собою. Із цих рівнянь можна створити декілька систем, які складаються з незалежних рівнянь.

Задача вирівнювання виникає тому, що кількість вимірювань n у геодезичних побудовах завжди більша кількості необхідних невідомих k , для визначення яких і виконуються роботи. Мережі, які мають тільки необхідні та достатні вихідні дані, називають *вільними*; мережі, в яких крім необхідних мають місце надлишкові вихідні дані, – *невільні*. Наявність надлишкових вимірів, кількість яких $r = n - k$, дозволяє виконати контроль вимірювань, оцінити їх точність та підвищити точність вирівняних невідомих та їх функцій.

При наявності надлишкових величин результати вимірювань, які неодмінно містять у собі випадкові похибки, не будуть задовольняти тим геометричним умовам, що виникають у мережі. У мережі виникають *нев'язки*, які повинні бути виключені в процесі вирівнювальних обчислень шляхом введення поправок у виміряні величини. У цьому і полягає, власне, сутність задачі вирівнювання.

Згідно теорії ймовірностей випадкові похибки, які одержують при виконанні вимірювань, можна віднести до *випадкових явищ*. Кожне окреме спостереження є *подією*. Із кожною подією пов'язують поняття *ймовірності* – кількісної характеристики можливості появи події. Ймовірність появи того чи іншого результату події підпорядковується нормальному закону розподілу. Ймовірність появи випадкової похибки $P(\Delta_i)$ визначається формулою:

$$P(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}.$$

Для вирішення поставленої вище задачі вирівнювання потрібно з'ясувати імовірнісні властивості абсолютних значень похибок вимірювань, які можна використати при знаходженні системи шуканих поправок.

Імовірність деякої сукупності похибок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, згідно теореми множення ймовірностей, буде дорівнювати:

$$P(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_1^2}{m_1^2} + \dots + \frac{\Delta_n^2}{m_n^2} \right)} \frac{d\Delta_1}{m_1}, \dots, \frac{d\Delta_n}{m_n}.$$

2. Метод найменших квадратів. Основні способи його реалізації

Із наведеного рівняння стає зрозумілим, що найбільшому значенню ймовірностей $P(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ відповідає найменше абсолютне значення показника ступеня, тобто дотримання умови:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i^2}{m_i^2} \right) = \min.$$

Якщо для поправок υ висунути умову

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\upsilon_i^2}{m_i^2} \right) = \min,$$

то можна очікувати, що сукупність абсолютних значень поправок υ_i у імовірнісному відношенні буде найкращим чином наближатись до сукупності абсолютних значень похибок. Оскільки поправки повинні ліквідувати нев'язки, які є істинними похибками функцій виміряних величин, то можна очікувати, що по знаку поправки повинні бути протилежними істинним похибкам відповідних результатів вимірювань.

Умову можна подати у наступному вигляді, помножив всі величини $\frac{\upsilon_i^2}{m_i^2}$

на μ^2 , оскільки множення функції на постійну величину не змінює координат точки мінімуму:

$$\left[\frac{\upsilon^2}{m^2} \mu^2 \right] = [p\upsilon^2] = \min.$$

Величини $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ є вагами виміряних величин. Умова є

математичним виразом принципу найменших квадратів.

Вирівнювання виконують за методом найменших квадратів, згідно якого виміряні величини одержують поправки υ_i , які задовольняють умові мінімальності суми їх квадратів $[\upsilon^2] = \min$ (для нерівноточних вимірів $[p\upsilon^2] = \min$, де p – ваги вимірів). Теоретично німецьким вченим К.Ф.Гауссом було доведено, що цей принцип призводить до найкращих оцінок для визначуваних невідомих. Це твердження справедливе і для будь-яких функцій

вирівняних невідомих. При цьому не вимагається, щоб результати вимірювань підпорядковувались нормальному закону розподілу, однак останній найбільш часто має місце у геодезичній практиці, тому при вирівнюванні за методом найменших квадратів зменшується ризик того, що знайдені оцінки у своїй сукупності будуть істотно відхилятися від істинних значень. У такому випадку вирівнювальні обчислення називають *строгими*.

Строге вирівнювання мереж пов'язано з великими обсягами обчислень, тому на практиці при розв'язанні деяких спеціальних задач часто застосовують нестрогі спрощені способи вирівнювання.

При вирівнюванні геодезичних побудов використовують два основних способи вирівнювання: *параметричний* та *корелатний*. При корелатному способі поправки (у вигляді невизначених множників – *корелат*) відшуковують безпосередньо до вимірних величин, а потім визначають невідомі як функції вимірних (вирівняних) величин. У параметричному способі рішення зводиться до безпосереднього одержання вирівняних невідомих (*параметрів*) як функцій вимірних величин.

Обидва способи відносять до строгих, і вони призводять до одних і тих же результатів, але відрізняються трудомісткістю. Вибір способу вирівнювання геодезичних мереж визначається кількістю виникаючих нормальних рівнянь. Орієнтовно можна вважати, що корелатний спосіб рекомендується застосовувати при великій кількості визначуваних величин і при малій кількості вихідних даних та надлишкових вимірювань, а параметричний спосіб доцільно використовувати при вирівнюванні мереж з великою кількістю вихідних даних та надлишкових вимірювань і при малій кількості визначуваних величин.

При використанні ПК для вирівнювання геодезичних мереж кількість нормальних рівнянь не є визначальним фактором при виборі способу вирівнювання. Більша увага повинна приділятися найбільш вдалому алгоритму вирішення задачі. Більш ефективним у такому випадку є параметричний спосіб вирівнювання геодезичних (особливо триангуляційних) мереж.

3. Оцінка точності результатів нерівноточних вимірювань та середнього вагового

При оцінці точності результатів нерівноточних вимірювань у якості одиниці міри точності приймають середню квадратичну похибку μ вимірювання, вагу якого прийнято за одиницю – *середню квадратичну похибку одиниці ваги*, яка є добутком середньої квадратичної похибки результату на його вагу:

$$\mu = m\sqrt{p}.$$

У ряду однорідних нерівноточних вимірювань, коли відомі ваги та середні квадратичні похибки, для кожного результату визначається похибка одиниці ваги за формулою, яка наведена вище. Середню квадратичну похибку одиниці ваги, яка характеризує всі вимірювання, визначають за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pm^2]}{n}}.$$

Коли значення величин отримані як безпосередні результати нерівноточних вимірювань, то середнє значення визначається із врахуванням довіри до них, тобто ваг. Це середнє називають *загальною арифметичною серединою*:

$$L_{\epsilon} = \frac{[p_i \times l_i]}{[p_i]},$$

де L_{ϵ} – середнє вагове з результатів нерівно точних вимірювань; p_i – ваги результатів вимірювань; l_i – результати кожного вимірювання.

Для спрощення обчислень використовують наближене значення l_0 , яке обирають таким же чином, як і для обчислення середнього арифметичного. У такому випадку формула для визначення середнього вагового приймає вигляд:

$$L_{\epsilon} = l_0 + \frac{[p_i \epsilon_i]}{[p_i]},$$

де $\epsilon = l - l_0$ – відхилення результату вимірювання від наближеного значення.

Вага середнього вагового P дорівнює сумі ваг вимірювань, за якими воно визначено:

$$P = [p_i].$$

Середня квадратична похибка середнього вагового M_{ϵ} дорівнює:

$$M_{\epsilon} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

Коли відомі істинні похибки вимірювань, середня квадратична похибка одиниці ваги дорівнює:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}.$$

Але, як і у випадках із рівноточними вимірюваннями, точне значення величини невідоме, а тому неможливо визначити істинні похибки. Найбільш близьким до теоретичного значення є загальна арифметична середина, яка визначається за результатами нерівноточних вимірювань.

Поправкою до результату вимірювань є різниця між середнім ваговим L_{ϵ} та результатом вимірювання l_i :

$$v_i = L_{\epsilon} - l_i.$$

Властивостями поправок є:

$$1) [pv] = 0$$

$$2) [pv^2] \rightarrow \min$$

Як правило, значення L_e визначають із заокругленням, тому, враховуючи похибку заокруглення ω , рівняння, що виражає першу властивість, буде мати вигляд:

$$[p\upsilon] = [p] \cdot \omega.$$

За поправками до вимірювань визначається середня квадратична похибка одиниці ваги:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{n-1}}.$$

Серед подвійних нерівноточних вимірювань похибкою вважається різниця між результатами виміру:

$$d = l_i - l'_i,$$

а вага різниці двох вимірів буде дорівнювати:

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2},$$

де p_{d_i} – вага різниці в подвійному вимірі, p_i – вага самого виміру.

Підставивши значення p_{d_i} у формулу та враховуючи, що похибкою вимірювання є значення d , отримують вираз для визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за різницями подвійних вимірювань:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_i d_i^2]}{2n}}.$$

Для результатів подвійних лінійних вимірювань вага виміру залежить від довжини лінії:

$$p_i = \frac{1}{s_i}.$$

Підставивши це значення в формулу отримують:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{d_i^2}{s} \right]}{2n}}.$$

Якщо вимірювання мають задовольняти якій-небудь геометричній умові, то точність вимірювань можна визначити за нев'язками, які одержують у результаті похибок у вимірюваннях. Це доцільно робити, коли відоме деяке теоретичне значення: в зімкнутих полігонах або по ходах, які спираються на реперні точки. У цих випадках нев'язки відображають похибки у вимірюваннях.

Як було зазначено раніше вага суми вимірних кутів залежать від їх кількості. Приймавши $k = 1$ ваги дорівнюють:

$$p = \frac{1}{n}.$$

Згідно формули середня квадратична похибка вимірювання одного кута, яку приймають за похибку одиниці ваги, визначена за кутовими нев'язками f_{β} у декількох полігонах, дорівнює:

$$m = \mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_{\beta}^2}{n} \right]}{N}},$$

де n – кількість кутів в кожному полігоні; N – кількість полігонів.

Для контролю правильності обчислення μ використовують наближене рівняння:

$$\mu = \sqrt{\frac{[f_{\beta}^2]}{[n]}}.$$

Для вимірювань, в яких вага результату залежить від довжини ходу (при визначенні перевищень, довжин ліній, приростів координат тощо), визначають середню квадратичну похибку на 1 км ходу:

$$m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_i^2}{L} \right]}{N}},$$

де f – висотна (лінійна) нев'язка в полігоні або ході; N – кількість полігонів (ходів); L – периметр полігону (довжина ходу).

Контрольне рівняння має вигляд

$$m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{[f_i^2]}{[L]}}.$$

Лекція 4. Вирівнювальні обчислення в геодезичних мережах.

1. Види нестрогих методів зрівнювання геодезичних мереж

Зйомочні геодезичні мережі (планові, висотні та комбіновані) створюються шляхом побудови окремих систем геодезичних ходів. Ходи, що спираються на пункти вихідної мережі (мережі згущення, державна геодезична мережа) називають невольними. Замкнуті ходи можуть утворювати вільні мережі полігонів.

При врівноваженні невольної мережі повинні бути відомі вихідні дані для опорних пунктів – координати або відмітки точок, напрямки базисної сторони.

Розглянемо різні способи вирівнювання зйомочних геодезичних мереж: середнього вагового, послідовних наближень, метод “червоних чисел”.

Кожен з цих способів зручно використовувати для різних систем у різних умовах.

Спосіб середнього вагового

Спосіб середнього вагового застосовують для вирівнювання невеликих невільних систем ходів місцевого значення. До цих систем відносять системи ходів з однією або двома спільними (вузловими) точками. Суть способу полягає у визначенні остаточного значення величини вузлової точки або лінії як середнього вагового з результатів вимірювань та вирівнювання до цього значення вимірних величин по кожному ходу.

Спосіб послідовних наближень

Цей спосіб застосовується переважно в тих випадках, коли вихідні пункти знаходяться всередині мережі або коли кількість ходів або полігонів перевищує кількість вузлових точок. Методика вирівнювання полягає в послідовному обчисленні величин, які належать до вузлових точок (відміток, координат вузлових точок, дирекційних кутів вузлових ліній), як середніх вагових їх значень, одержаних по ходах, які сходяться у вузол. При цьому враховують як і ті ходи, що починаються з опорної точки, так і ті, що починаються з іншої вузлової точки.

Вирівнювання системи полігонів способом “червоних чисел”

Цей спосіб використовують для вирівнювання як вільної, так і невільної мережі полігонів. Вирівнювання невільної мережі зводиться до вирівнювання вільної мережі шляхом введення фіктивних ланок, які з'єднують вихідні пункти невільних ходів, у результаті чого одержують додаткові полігони. Додаткових полігонів має бути на одиницю менше, ніж вихідних пунктів. Фіктивні ланки вибирають так, щоб вони не перетинали дійсні ланки.

Методика вирівнювання зводиться до розподілу нев'язок у полігонах пропорційно до так званих “червоних чисел” окремих ходів (ланок), що утворюють цей полігон.

Червоним числом є відношення певного значення по окремій ланці до величини цього значення всього полігона. В тих випадках, коли величина похибки вимірювань залежить від довжини ходу (вирівнювання перевищень, вирівнювання приростів координат), за червоне число приймають відношення довжини ланки до довжини ходів всього полігона. Якщо ж похибка результату вимірювань залежить від кількості вимірів (вирівнювання нівелірних ходів з великою кількістю станцій на 1 км ходу, вирівнювання кутів), червоним числом є відношення кількості станцій у ланці до кількості станцій по всьому полігону. Даний спосіб можна використовувати також при вирівнювання площ контурів.

На відміну від мережі нівелірних ходів, де вирівнюють лише перевищення, в теодолітних ходах вирівнюванню підлягають кути та прирости координат. Вирівнювання цих величин проводиться окремо, незалежно одне від іншого.

В усіх полігонах (у тому числі і в додаткових) обчислюють нев'язки, дотримуючись правила про напрямки обходу полігона, як різницю фактичного та теоретичного сумарних значень відповідної величини (перевищень, приростів координат, кутів, площ). У додатковому полігоні теоретичне значення визначають як в розімкнутому ході.

2. Послідовність виконання вирівнювальних обчислень в геодезичних мережах

Математична обробка та вирівнювання результатів геодезичних вимірів повинні виконуватись із застосуванням спеціалізованого програмного забезпечення, що відповідає вимогам законодавства України щодо забезпечення метрологічної єдності результатів геодезичних вимірів.

Математична обробка та вирівнювання результатів геодезичних вимірів повинні виконуватись у такій послідовності:

- вирівнювання нівелірних мереж II, III і IV класів;
- вирівнювання технічних нівелірних мереж;
- вирівнювання супутникових геодезичних спостережень пунктів ДГМ
- сумісне вирівнювання супутникових геодезичних спостережень пунктів ДГМ та МГМ;
- побудова моделі квазігеоїда в межах об'єкту;
- вирівнювання лінійно-кутових вимірів геодезичних мереж МГМ згущення 4 класу, 1 і 2 розрядів та супутникових вимірів МГМ 4 класу.

Вирівнювання нівелірних мереж повинно виконуватись параметричним методом з урахуванням ваг вимірів.

Сумісне вирівнювання супутникових геодезичних спостережень пунктів ДГМ та МГМ повинно виконуватись параметричним методом з використанням результатів попереднього вирівнювання супутникових геодезичних спостережень. Вихідними пунктами для сумісного вирівнювання супутникових геодезичних спостережень пунктів ДГМ та МГМ повинні бути координати і середні квадратичні похибки пунктів УПМ ГНСС та ДГМ 1 класу в системі координат УСК-2000.

Вирівнювання лінійно-кутових мереж згущення МГМ повинно виконуватись з урахуванням їх точнісних характеристик та похибок вихідних даних.

За результатами сумісного вирівнювання геодезичних мереж об'єкту координати вихідних пунктів ДГМ можуть змінитись, тобто отримати поправки, що не перевищують середніх квадратичних похибок, які вони отримали при вирівнюванні ДГМ. У такому випадку вказані координати надаються у технічному звіті по об'єкту, але не враховуються як вихідні дані для інших об'єктів та робіт.

Вирівнювання лінійно-кутових вимірів, що визначають координати стінних знаків від тимчасових центрів геодезичних пунктів мереж згущення 4 класу, 1 і 2 розрядів, виконують після закінчення вирівнювання геодезичних мереж об'єкту одним із двох способів, а саме:

- вирівнюють результати вимірювань на тимчасових центрах геодезичних пунктів у звичайному порядку, а потім вирівнюють значення координат передають на центри стінних знаків;
- лінійно-кутові виміри, що виконані на тимчасових центрах, редукують на центри стінних знаків, стінних знаків потім виконують вирівнювання редукованої мережі у звичайному порядку.

Лекція 5. Параметричний спосіб вирівнювання.

1. Складання рівнянь поправок

При вирівнюванні геодезичних побудов використовують два основних способи вирівнювання: *параметричний* та *корелатний*. При корелатному способі поправки (у вигляді невизначних множників – *корелат*) відшукують безпосередньо до вимірних величин, а потім визначають невідомі як функції вимірних (вирівняних) величин. У параметричному способі рішення зводиться до безпосереднього одержання вирівняних невідомих (*параметрів*) як функцій вимірних величин.

Обидва способи відносять до строгих, і вони призводять до одних і тих же результатів, але відрізняються трудомісткістю. Вибір способу вирівнювання геодезичних мереж визначається кількістю виникаючих нормальних рівнянь. Орієнтовно можна вважати, що корелатний спосіб рекомендується застосовувати при великій кількості визначуваних величин і при малій кількості вихідних даних та надлишкових вимірювань, а параметричний спосіб доцільно використовувати при вирівнюванні мереж з великою кількістю вихідних даних та надлишкових вимірювань і при малій кількості визначуваних величин.

При зрівнюванні геодезичних побудов параметричним методом у якості параметрів обирають деяку кількість (k) необхідних невідомих величин T_j ($j = 1, 2, \dots, k$), не пов'язаних між собою математичними співвідношеннями. Такими параметрами можуть бути як вимірні, так і невимірні величини (наприклад, координати пунктів). Параметри слід обирати так, щоб всі вимірні величини x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (при чому $n > k$) можна було виразити як функції цих параметрів:

$$X_i = f_i(T_1, T_2, \dots, T_k),$$

де X_i – істинні (теоретичні) значення вимірних величин.

Одержана таким чином система з k рівнянь називають *вихідною системою зв'язку*. Вона є *невизначеною*: оскільки істинні значення вимірюваних величин X_i невідомі, то немає можливості визначити й значення параметрів T_j . Для однозначного розв'язання цієї системи замість теоретичних значень вимірюваних та параметричних величин використовують вирівняні значення цих величин:

$$X_i \rightarrow x_i + v_i, T_j \rightarrow t_j,$$

де t_1, t_2, \dots, t_k – вирівняні значення шуканих величин (параметрів).

Тоді можна скласти систему нелінійних рівнянь поправок:

$$v_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_k) - x_i.$$

Нелінійні рівняння поправок приводять до лінійного вигляду. З цією метою вводять наближені, але достатньо близькі до точних значення невідомих t_j^0 та відповідні їм поправки δt_j . Наближені значення t_j^0 звичайно

обчислюють за вимірними значеннями x_i . Тоді рівняння перепишемо у вигляді:

$$v_i = f_i(t_1^0 + \delta t_1, t_2^0 + \delta t_2, \dots, t_k^0 + \delta t_k) - x_i.$$

Розвинувши функцію у ряд Тейлора та обмежив лінійними членами розвинення (такими, що містять лише перші ступені) малих поправок δt_j , одержують:

$$v_i = f(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) + \frac{\partial f_i}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial f_i}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial t_k} \delta t_k - x_i.$$

Позначивши часткові похідні відповідно $\frac{\partial f_1}{\partial t_1} = a_i, \frac{\partial f_i}{\partial t_2} = b_i, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial t_k} = g_i$

та $f_i(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) - x_i = l_i$, де l_i – вільний член, запишемо систему параметричних лінійних рівнянь поправок у наступному вигляді:

$$v_i = a_i \delta t_1 + b_i \delta t_2 + \dots + g_i \delta t_k + l_i.$$

Таку систему називають *системою рівнянь поправок*. Вона включає n рівнянь, кількість яких менше кількості невідомих $n+k$ (n поправок v до вимірних величин і k поправок δx до невідомих), внаслідок чого вона також є невизначеною.

2. Складання системи нормальних рівнянь

Із множини систем значень для невідомих найкращою буде та система, при якій, у відповідності до принципу методу найменших квадратів $[v^2] = \min$ (для нерівноточних вимірювань $[pv^2] = \min$). Тоді має місце рівність:

$$\begin{aligned} \Phi(\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_k) &= [v^2] = \\ &= \sum (a_i \delta t_1 + b_i \delta t_2 + \dots + g_i \delta t_k + l_i)^2 = \min \end{aligned}$$

Для відшукування мінімуму функції візьмемо часткові похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta t_1} &= 2[av] = 0 \text{ та } [av] = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta t_2} &= 2[bv] = 0 \text{ та } [bv] = 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta t_k} &= 2[gv] = 0 \text{ та } [gv] = 0. \end{aligned} \right\}$$

Перемножив ліву та праву частини системи рівнянь поправок на a_i та

додавши потім результати, знаходять:

$$\left. \begin{aligned} a_1 v_1 &= a_1 a_1 \delta t_1 + a_1 b_1 \delta t_2 + \dots + a_1 g_1 \delta t_k + a_1 l_1, \\ a_2 v_2 &= a_2 a_2 \delta t_1 + a_2 b_2 \delta t_2 + \dots + a_2 g_2 \delta t_k + a_2 l_2, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n v_n &= a_n a_n \delta t_1 + a_n b_n \delta t_2 + \dots + a_n g_n \delta t_k + a_n l_n, \\ \hline [av] &= [aa] \delta t_1 + [ab] \delta t_2 + \dots + [ag] \delta t_k + [al]. \end{aligned} \right\}$$

Таким же чином, перемножив вихідні рівняння поступово на величини від b_i до g_i та додаючи їх, визначають систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} [av] &= [aa] \delta t_1 + [ab] \delta t_2 + \dots + [ag] \delta t_k + [al], \\ [bv] &= [ba] \delta t_1 + [bb] \delta t_2 + \dots + [bg] \delta t_k + [bl], \\ &\dots \dots \dots \\ [gv] &= [ga] \delta t_1 + [gb] \delta t_2 + \dots + [gg] \delta t_k + [gl]. \end{aligned} \right\}$$

Із цих рівнянь, прийнявши до уваги, що $[av] = [bv] = \dots [gv] = 0$, одержують наступну систему k рівнянь із k невідомими, яка є визначеною, оскільки кількість рівнянь у ній перевищує кількість невідомих:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \overset{D}{[aa]} \delta t_1 + [ab] \delta t_2 + \dots + [ag] \delta t_k + [al], \\ 0 &= [ba] \delta t_1 + \overset{D}{[bb]} \delta t_2 + \dots + [bg] \delta t_k + [bl], \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= [ga] \delta t_1 + [gb] \delta t_2 + \dots + \underset{D'}{[gg]} \delta t_k + [gl]. \end{aligned} \right\}$$

Рівняння такої системи називають *нормальними*. Подальша задача полягає у розв'язанні такої системи нормальних рівнянь.

3. Розв'язання системи нормальних рівнянь

По головній діагоналі DD' розташовані *квадратичні коефіцієнти* (які є завжди додатними). Решта неквадратичних коефіцієнтів розташовуються симетрично відносно головної діагоналі і вони попарно рівні між собою:

$$[ab] = [ba], [ac] = [ca] \text{ і т. д.}$$

У геодезичній практиці для рішення системи нормальних рівнянь широко застосовується спосіб Гауса, який є дуже ефективним. Перевагою цього способу є одноманітність послідовних дій, які супроводжуються постійним контролем обчислень і в кінці яких одержують вагу останнього невідомого.

Сутність способу зводиться до послідовного виключення невідомих δt із системи нормальних рівнянь. Для цього з першого рівняння виражають невідому δt_1 :

$$\delta t_1 = -\frac{[ab]}{[aa]} \delta t_2 - \frac{[ac]}{[aa]} \delta t_3 - \dots - \frac{[ag]}{[aa]} \delta t_k - \frac{[al]}{[aa]}.$$

Це значення підставляють у всі інші рівняння системи. Рівняння, які виражають невідомі величини, називають *елімінаційними* (від лат. “elimino” – “виключати”).

Після деяких нескладних перетворень ця система перетвориться на іншу, в якій виключені невідомі δt_1 , і вона прийме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} & [aa]\delta t_1 + [ab]\delta t_2 + [ac]\delta t_3 + \dots + [ag]\delta t_k + [al] = 0 \\ & \left([bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \right) \delta t_2 + \left([bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \right) \delta t_3 + \dots + \\ & + \left([bg] - \frac{[ab][ag]}{[aa]} \right) \delta t_k + \left([bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} \right) = 0, \\ & \left([cb] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \right) \delta t_2 + \left([cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} \right) \delta t_3 + \dots + \\ & + \left([cg] - \frac{[ac][ag]}{[aa]} \right) \delta t_k + \left([cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} \right) = 0, \\ & \dots\dots \\ & \left([gb] - \frac{[ab][ag]}{[aa]} \right) \delta t_2 + \left([gc] - \frac{[ac][ag]}{[aa]} \right) \delta t_3 + \dots + \\ & + \left([gg] - \frac{[ag][ag]}{[aa]} \right) \delta t_k + \left([gl] - \frac{[ag][al]}{[aa]} \right) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Після першого перетворення виключено перше невідоме. Введемо слідуєчі позначення, які називають *алгоритмом Гауса*:

$$\left. \begin{aligned} [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} &= [bb \cdot 1], \\ [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} &= [bc \cdot 1], \\ &\dots\dots\dots \\ [gl] - \frac{[ag][al]}{[aa]} &= [gl \cdot 1]. \end{aligned} \right\}$$

Правило розкриття алгоритму Гауса: права частина цих рівнянь є *перетвореним* алгоритмом. Перетворений алгоритм одержують шляхом віднімання від вихідного алгоритму (*неперетвореного*) дробів, кількість яких відповідає символу перетворення. Кожен дріб одержують наступним чином: знаменником дробу є перші коефіцієнти еквівалентних рівнянь, у чисельнику – добуток двох алгоритмів з тією ж цифрою, що і в алгоритмі знаменника. Перший множник одержують по першій літері знаменника та першій літері вихідного алгоритму, другий – за другими їх літерами.

Із врахуванням цього система прийме наступного вигляду:

$$\left. \begin{aligned} [aa]\delta t_1 + [ab]\delta t_2 + [ac]\delta t_3 + \dots + [ag]\delta t_k + [al] &= 0 \\ [bb \cdot 1]\delta t_2 + [bc \cdot 1]\delta t_3 + \dots + [bg \cdot 1]\delta t_k + [bl \cdot 1] &= 0, \\ [bc \cdot 1]\delta t_2 + [cc \cdot 1]\delta t_3 + \dots + [cg \cdot 1]\delta t_k + [cl \cdot 1] &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ [bg \cdot 1]\delta t_2 + [cg \cdot 1]\delta t_3 + \dots + [gg \cdot 1]\delta t_k + [gl \cdot 1] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Далі виражають невідоме δt_2 із другого рівняння:

$$\delta t_2 = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \delta t_3 - \dots - \frac{[bg \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \delta t_k - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}.$$

Використовуючи відповідні позначення, із різними порядковими символами (1, 2, 3 і т.д.) згідно з наведеним правилом алгоритм Гауса розкривається повністю до останнього невідомого. У результаті розв'язку одержують систему *еквівалентних* рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} [aa]\delta t_1 + [ab]\delta t_2 + [ac]\delta t_3 + \dots + [ag]\delta t_k + [al] &= 0, \\ [bb \cdot 1]\delta t_2 + [bc \cdot 1]\delta t_3 + \dots + [bg \cdot 1]\delta t_k + [bl \cdot 1] &= 0, \\ [cc \cdot 2]\delta t_3 + \dots + [cg \cdot 2]\delta t_k + [cl \cdot 2] &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ [gg \cdot (k - 1)]\delta t_k + [gl \cdot (k - 1)] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Виведення еквівалентної системи рівнянь, яка замінює систему нормальних рівнянь, називають *прямим ходом розв'язання системи*.

Контроль складання та розв'язання системи нормальних рівнянь виконується *методом сум*. Для цього знаходять суми коефіцієнтів та вільного члену у рівняннях поправок:

$$a_i + b_i + c_i \dots + g_i + l_i = s_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Правильність обчислень перевіряють по їх загальних сумах:

$$[a_i] + [b_i] + [c_i] \dots + [g_i] + [l_i] = [s_i].$$

Для контролю правильності обчислень коефіцієнтів нормальних рівнянь виконують наступні розрахунки:

$$\begin{aligned}
[aa] + [ab] + [ac] + \dots + [ag] + [al] &= [as], \\
[ba] + [bb] + [bc] + \dots + [bg] + [bl] &= [bs], \\
[ca] + [cb] + [cc] + \dots + [cg] + [cl] &= [cs], \\
&\dots\dots \\
[ga] + [gb] + [gc] + \dots + [gg] + [gl] &= [gs], \\
[la] + [lb] + [lc] + \dots + [lg] + [ll] &= [ls], \\
[sa] + [sb] + [sc] + \dots + [sg] + [sl] &= [ss].
\end{aligned}$$

Далі виконують розрахунки для рівнянь:

$$\left. \begin{aligned}
[aa] + [ab] + [ac] + \dots + [ag] + [al] &= [as], \\
[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \dots + [bg \cdot 1] + [bl \cdot 1] &= [bs \cdot 1], \\
[cc \cdot 2] + \dots + [cg \cdot 2] + [cl \cdot 2] &= [cs \cdot 2], \\
&\dots\dots \\
[gg \cdot (k-1)] + [gl \cdot (k-1)] &= [gs(k-1)].
\end{aligned} \right\}$$

Заключним контролем прямого ходу рішення нормальних рівнянь в алгоритмі Гауса є виконання рівностей:

$$[ll \cdot k] = [ls \cdot k] = [ss \cdot k].$$

У зворотному ході виконують обчислення невідомих δt_j . Контроль правильності обчислень невідомих здійснюється шляхом підстановки числових значень невідомих у систему еквівалентних рівнянь та дослідження рівності в її рівняннях.

Після визначення значень невідомих δt_j , їх використовують для обчислення поправок v_i у результати вимірів x_i . Контроль обчислення поправок здійснюють:

$$[av] = [bv] = [cv] = \dots = [gv] = 0.$$

Перевіряють також виконання контрольних рівнянь:

$$[v^2] = [ll \cdot k] = [ls \cdot k].$$

Остаточним контролем вирівнювальних обчислень є підтвердження справедливості рівнянь:

$$x_i + v_i = f_i(t_1^0 + \delta t_1, t_2^0 + \delta t_2, \dots, t_k^0 + \delta t_k).$$

Примітка: при вирівнюванні нерівноточних вимірів викладений вище порядок не змінюється, а змінюється вигляд рівнянь у зв'язку з введенням у них ваг результатів вимірювань.

4. Оцінка точності вирівняних невідомих та їх функцій

У результаті вирівнювання одержують остаточні значення невідомих, які є найбільш достовірними. Необхідно виконати оцінку їх точності, тобто

обчислити середні квадратичні похибки вимірювань та функцій вимірних величин після вирівнювання. Для цього використовують середню квадратичну похибку одиниці ваги:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}},$$

де $(n-k)$ – число надлишкових вимірних величин.

У загальному випадку середню квадратичну похибку величини m_i одержують за формулою:

$$m_i = \mu \sqrt{\frac{1}{p_i}},$$

де p_i – вага оцінюваної величини.

Для визначення ваг невідомих оцінювану величину u представляють у вигляді функцій результатів вимірювань $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, і вага функції обчислюється за відомою формулою теорії похибок вимірювань:

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_{x_i}}.$$

Величина, для якої знаходиться вага у відповідності до конкретної задачі, може бути виражена: а) через вирівняні значення невідомих; б) через зрівняні значення вимірних величин.

Оскільки в останньому випадку всі вимірні величини виражаються через необхідні невідомі у вигляді деяких функцій, то цей випадок може бути приведений до першого. Таким чином:

$$F = f(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Елементи t_j є невимірними величинами та визначаються як

$$t_j = t_j^0 + \delta t_j,$$

де t_j^0 – наближене значення величини T_j ; δt_j – невідома, одержана із вирівнювання.

Якщо невідому δt виразити через результати вимірювань, то величина F буде представлена у виді лінійної функції результатів вимірювань і задача відшукування ваг невідомого буде вирішена.

На практиці часто крім оцінки точності вирівняних невідомих застосовують оцінку точності їх функцій. Невідомі, одержані з розв'язання нормальних рівнянь, є залежними величинами, знайденими у результаті сумісної обробки всіх вимірювань, тому при оцінці точності функції $F = f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ вирівняних величин t_j необхідно враховувати ці залежності та виконати оцінку точності функції за формулою:

$$\frac{1}{p_F} = [f_k^2 Q_{kk}] + 2[f_i f_k Q_{ik}],$$

де $f_k = \left(\frac{\partial F}{\partial t_k} \right)$ – часткові похідні; Q_{kk}, Q_{ik} – вагові коефіцієнти.

Цю формулу рекомендується застосовувати при малій кількості невідомих та великій кількості оцінюваних функцій.

При великій кількості невідомих обернену вагу функції доцільно обчислювати у додатковому стовпці схеми розв'язання нормальних рівнянь. З ними виконують ті ж перетворення, як і у стовпці вільних членів. Після цього обернена вага функції знаходиться за формулою:

$$-\frac{1}{p_F} = \frac{f_1 f_1}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \dots + \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]},$$

де

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1,$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1],$$

$$[f_k \cdot (k-1)] = f_k - \frac{[ag]}{[aa]} f_1 - \frac{[bg \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} f_2 - \dots - \frac{[g(g-1) \cdot (k-1)]}{[gg \cdot (k-1)]} [f_{k-1} \cdot (k-2)]$$

Лекція 6. Вирівнювання мережі триангуляції.

1. Основні принципи побудови геодезичних мереж при зйомках великих територій

При проведенні різноманітних землевпорядних заходів на ділянках великої площі виникає необхідність у користуванні топографічними планами та картами, складеними на єдиній геодезичній основі: мережі геодезичних пунктів, планове положення яких визначено в єдиній системі координат, а висотне – в єдиній системі висот. Побудована в єдиній системі координат та висот геодезична сіть дає можливість проводити зйомку поетапно, незалежно в різних місцях, з наступним складанням загального плану або карти місцевості. Використання геодезичної мережі приводить до рівномірного розподілу впливу погрішностей вимірювань та забезпечує контроль зйомочних та обчислювальних робіт.

Геодезичні мережі будуються за загальним принципом: “Від загального до часткового”. Спочатку на великій території створюється зріджена мережа пунктів з дуже високою точністю, а потім ця мережа всередині поступово згущується пунктами, побудова яких виконується на кожному етапі з меншою точністю.

Планові геодезичні мережі будуються методами триангуляції, полігонометрії та трилатерації або їх поєднанням. Суть методу триангуляції

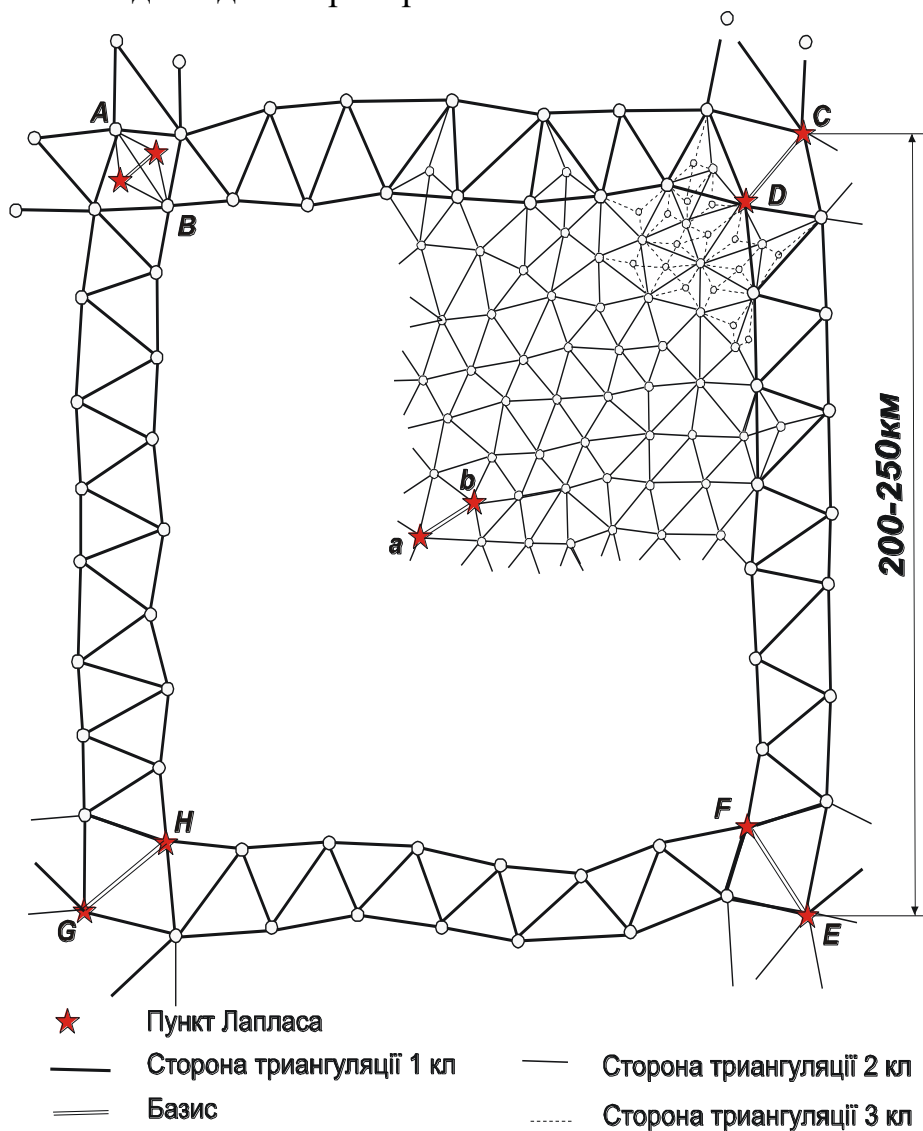
полягає в тому, що будується мережа трикутників, в яких вимірюються всі кути та дві сторони на різних кінцях ланцюга трикутників (друга сторона вимірюється для контролю). За довжиною базисної сторони та кутах трикутників обчислюються довжини всіх сторін.

Метод полігонометрії полягає в тому, що будується мережа ходів, в яких вимірюються всі кути та сторони. Полігонометричні ходи відрізняються від теодолітних більш вищим ступенем точності вимірювань кутів та ліній. Метод полігонометрії найчастіше використовується на закритій та рівнинній місцевості.

Метод трилатерації полягає у побудові мережі трикутників з послідовним вимірюванням довжин всіх сторін.

Планові геодезичні мережі поділяються на державну геодезичну мережу, мережі згущення 1 та 2 розрядів та зйомочне обґрунтування (зйомочну мережу, ходи та окремі пункти, з яких безпосередньо виконується зйомка).

Державна геодезична мережа 1 класу, а іноді й 2 класу призначена для наукових досліджень, пов'язаних з визначенням форми та розмірів Землі, а також для розповсюдження єдиної системи координат на великі території. Геодезичні пункти 2, 3, 4 класів будують з метою досягнення необхідної густоти пунктів на відповідній території.



Геодезичні мережі згущення 1, 2 розрядів розвивають в окремих районах при недостатній кількості пунктів державної мережі.

Зйомочні геодезичні мережі створюють для згущення планової та висотної основи до густоти, яка забезпечує безпосереднє виконання топографічної зйомки контурів та рельєфу місцевості.

Державна геодезична мережа є головною для проведення топографічних зйомок. Планова державна геодезична мережа ділиться на чотири класи (1, 2, 3 та 4), які відрізняються між собою загальним принципом розташування геодезичних пунктів, порядком їх розташування, точністю вимірювань кутів та довжин ліній, допустимою довжиною сторін. Основна частина існуючої геодезичної мережі побудована методом триангуляції, тому більше уваги приділяється саме цьому методу.

Мережа 1 класу служить вихідною опорою для побудови геодезичних мереж інших класів. Триангуляція 2 класу будується у вигляді суцільної мережі трикутників, які заповнюють собою полігони, утворені пунктами 1 класу. В середині мережі 2 класу вимірюється базисна сторона, на кінцях якої також визначаються широта, довгота та азимут шляхом астрономічних спостережень.

Мережі 1 та 2 класів згущуються локальними мережами 3 та 4 класів. Триангуляція цих класів створюється у вигляді окремих систем. Характеристики геодезичних мереж наводяться в таблиці 1.

Таблиця 1. Основні характеристики державної геодезичної мережі

Клас	Триангуляція				Полігонометрія		Трилатерація
	Довжина сторони, s, км	СКП вимірювання кута, mβ	допустима нев'язка в сумі кутів трикутника, fβ доп	відносна СКП вимірювання базисної сторони, m:s	СКП вимірювання кута, mβ	відносна СКП вимірювання базисної сторони, m:s	відносна СКП вимірювання базисної сторони, m:s
1	>20	0,7"	3"	1:400000	0,4"	1:400000	-
2	7-20	1,0"	4"	1:300000	1,0"	1:200000	-
3	5-8	1,5"	6"	1:200000	1,5"	1:100000	1:100000
4	2-5	2,0"	8"	1:200000	2,0"	1:40000	1:40000

Висотні геодезичні мережі створюються шляхом геометричного та тригонометричного нівелювання. Мережі геометричного нівелювання розподіляються на державну нівелірну мережу та мережу технічного нівелювання.

Державні нівелірні мережі діляться на чотири класи. Спочатку прокладаються на великі відстані одна від одної нівелірні мережі I класу, а потім пункти I класу послідовно згущуються пунктами II, III, IV класів шляхом прокладання нівелірних ходів відповідних класів. Лінії I класу прокладаються по напрямках, які з'єднують віддалені пункти та основні морські водомірні пости. Нівелірна мережа II класу спирається на пункти I класу. Лінії I та II класів прокладаються по місцях, найбільш зручних для нівелювання (вздовж залізничних, шосейних доріг, великих річок). Нівелірні мережі III класу опираються на пункти I та II класів та утворюють полігони з периметром 150 км. Для забезпечення зйомки в масштабі 1:5000 та крупніше периметр полігону не має перевищувати 60 км.

Нівелірні ходи IV класу прокладаються в одному напрямку між пунктами старших класів. Довжини цих ходів не мають перевищувати 50 км. Пункти IV класу є безпосередньою висотною основою для топографічних зйомок.

Точність державного нівелювання різних класів може бути охарактеризована граничною похибкою на 1 км ходу (табл. 2), яка входить в якості коефіцієнту в формулу допустимої нев'язки

$$f_{h \text{ доп}} = k\sqrt{L},$$

де k – похибка нівелювання даного класу точності, L – довжина ходу в кілометрах.

Таблиця 2. Допустимі нев'язки при висотному обґрунтуванні

Клас нівелювання	$f_{h \text{ доп}}, \text{ мм}$
I	$3\sqrt{L}$
II	$5\sqrt{L}$
III	$10\sqrt{L}$
IV	$20\sqrt{L}$

В залежності від масштабу зйомки пункти планової та висотної державної мережі мають бути доведені до визначеної густоти та розташовуватись на місцевості рівномірно (табл. 3).

Таблиця 3. Характеристика густоти пунктів державної планової та нівелірної мереж

Масштаб зйомки	Один пункт на площу, км ²	Один репер на площу, км ²
1:25000	50-60 (1, 2, 3 класів)	-
1:10000		
1:5000	20-30	10-15
1:2000	5-15	5-7

На основі державної геодезичної мережі будують мережі згущення, які використовують потім в якості вихідних при складанні зйомочного обґрунтування топографічних зйомок.

Таблиця 4. Основні характеристики планових геодезичних мереж згущення

Розряд	Триангуляція				Полігонометрія			
	s, км	m _β	f _{β доп}	m _{s:s}	Σs, км	m _β	f _{β доп}	(f _{s:s}) доп
1	≤ 5	5"	20"	1:50000	≤ 5	5"	10"√L	1:10000
2	≤ 3	10"	40"	1:20000	≤ 3	10"	20"√L	1:5000

Планові мережі згущення створюються в більшості тими ж методами, що державна мережа (триангуляція, полігонометрія та трилатерація або їх поєднанням).

Мережі згущення ділять на 1 та 2 розряди (табл. 4). Триангуляція 1 та 2 розрядів розвивається у вигляді сітей та окремих пунктів.

Висотна мережа згущення створюються здебільшого прокладанням ходів технічного нівелювання між пунктами державного нівелювання. Точність технічного нівелювання може характеризуватись граничною похибкою, яка має вигляд коефіцієнту в формулі допустимої нев'язки в сумі перевищень по ходу

$$f_{h \text{ доп}} = 50 \text{ мм} \sqrt{L},$$

де L – довжина ходу в км.

2. Попередні обчислення при вирівнюванні геодезичних (триангуляційних) мереж

Попередні обчислення в триангуляції мають за мету контроль та оцінку якості польових вимірів, підготовку результатів вимірювань до зрівнювання: одержання напрямків, приведених до центрів пунктів та редукованих на площину в проекції Гауса.

Попередні обчислення починають ще з перевірки польових журналів та зведення результатів вимірювань горизонтальних напрямків та кутів на станціях.

При встановленні приладу для вимірювання кутів або напрямків може виникнути похибка з-за неточного його встановлення над центром геодезичного пункту, закріпленого на місцевості. Це викликає необхідність внесення поправок за *центрування* у виміряні напрямки.

Крім того, візирні цілі, які встановлюють над відповідними геодезичними пунктами, можуть бути не розташовані на одній вертикальній прямій з центрами пунктів. Для виправлення цієї похибки необхідно внести поправки за *редукцію*.

Вирівнювання триангуляції, як і більшість геодезичних задач, зручніше виконувати на площині. З цією метою в нашій країні для зображення земної поверхні на площині у геодезичних цілях прийнята проекція Гауса-Крюгера. Тому приведені до центрів знаків напрямки виправляють поправками за *кривину зображення геодезичних ліній на площині* і переходять від криволінійних зображень геодезичних ліній до прямих ліній між точками на площині.

Крім того, в триангуляції 1-го та 2-го класів напрямки виправляють поправками за відхилення прямовисних ліній та за перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії.

Вимірні базиси та базисні сторони виправляють поправками за перехід з поверхні референц-еліпсоїда на площину в проекції Гауса-Крюгера.

Послідовність виконання попередніх обчислень наступна:

1. Попереднє розв'язання трикутників триангуляції з метою обчислення довжин сторін, необхідних для обчислення поправок за центрування та редукцію, сферичних надлишків та наближених координат пунктів.

2. Обчислення поправок за центрування та редукцію та приведення напрямків до центрів пунктів. Поправки обчислюють за відомими формулами:

$$c'' = \frac{e \times \sin(M + \Theta)}{s} \rho''$$

$$r'' = \frac{e_1 \times \sin(M + \Theta_1)}{s} \rho''$$

де e, e_1 – лінійні елементи за центрування та редукцію; Θ, Θ_1 – кутові елементи за центрування та редукцію; M – вимірний напрямок; s – довжина лінії; ρ'' – величина для переведення радіанної міри в градусну ($\rho'' = 206265''$).

3. Обчислення поправок у напрямки за кривину зображення геодезичної лінії на площині. У триангуляції 2 – 4 класів ці поправки обчислюють за формулами:

$$\delta_{1-2} = \frac{f}{3} (x_1 - x_2)(2y_1 + y_2);$$

$$\delta_{2-1} = -\frac{f}{3} (x_1 - x_2)(2y_2 + y_1),$$

де $f = \rho'' / 2R^2$; x_1, y_1, x_2, y_2 – наближені координати початкового та кінцевого пунктів лінії.

4. Обчислення поправок у напрямок за відхилення прямовисної лінії, за висоту спостережуваного пункту та за перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії (у триангуляції 1-го та 2-го класів).

Складання каталогу напрямків, приведених до центрів пунктів та редукованих на площину. Цю таблицю використовують надалі для подальшого вирівнювання мережі.

3. *Вирівнювальні обчислення триангуляційних мереж параметричним способом*

При вирівнюванні триангуляційних мереж параметричним способом у якості невідомих величин (параметрів) приймають координати визначуваних пунктів або поправки до попередньо визначених координат. Для цього складають рівняння поправок безпосередніх вимірювань, у яких виражають ці поправки через поправки до наближених значень координат та через значення вимірних величин. Ці рівняння називають *параметричними рівняннями*

поправок. У геодезичних мережах вимірними величинами можуть бути напрямки, дирекційні кути, довжини ліній, кути.

Якщо вимірюваними величинами є довжини ліній, то рівняння зв'язку, що виражає довжину ліній через координати пунктів, будуть мати вигляд:

$$D_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2.$$

Для складання рівнянь поправок вигляду визначають часткові похідні функції D_{ik} за аргументами x_i, y_i, x_k, y_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{2(x_k - x_i)}{2D_{ik}} = \cos \alpha_{ik}; & \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_i} &= -\cos \alpha_{ik}; \\ \frac{\partial D_{ik}}{\partial y_k} &= \frac{2(y_k - y_i)}{2D_{ik}} = \sin \alpha_{ik}; & \frac{\partial D_{ik}}{\partial y_i} &= -\sin \alpha_{ik}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння поправок для вимірних сторін має вигляд:

$$\begin{aligned} v_{ik} &= -\cos \alpha_{ik} \delta x_i - \sin \alpha_{ik} \delta y_i + \cos \alpha_{ik} \delta x_k + \\ &+ \sin \alpha_{ik} \delta y_k + l_{ik}, \end{aligned}$$

де $l_{ik} = \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2} - d_{ik}$; d_{ik} – результат вимірювання довжини лінії.

Якщо вимірними величинами є дирекційні кути, рівняння зв'язку має вигляд:

$$\alpha_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}}.$$

Часткові похідні від функції за аргументами дорівнюють:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{ik}''}{\partial x_i} &= \rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{D_{ik}}; & \frac{\partial \alpha_{ik}''}{\partial x_k} &= -\rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{D_{ik}}; \\ \frac{\partial \alpha_{ik}''}{\partial y_i} &= -\rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{D_{ik}}; & \frac{\partial \alpha_{ik}''}{\partial y_k} &= \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{D_{ik}}; \end{aligned}$$

Рівняння поправок для кутів складають на основі приведених до центрів пунктів напрямків, попередньо обчислених координат визначуваних пунктів та дирекційних кутів.

Будь-який кут мережі (рис. 2) одержують як різницю дирекційних кутів:

$$\beta = \alpha_{km} - \alpha_{ki}.$$

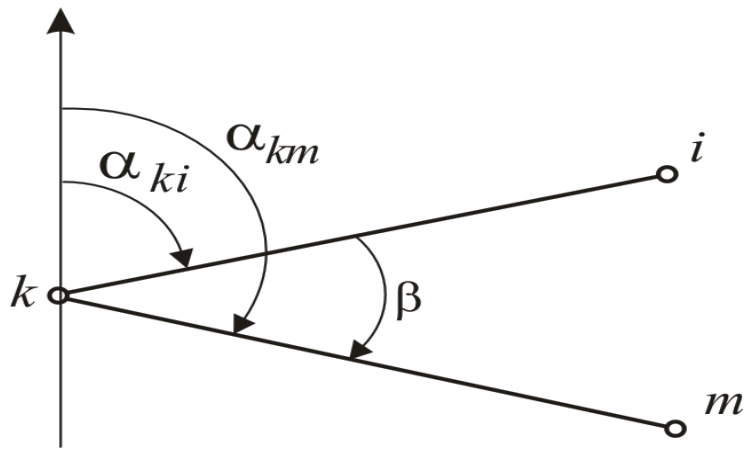


Рис. 2 До складання рівнянь поправок

Рівняння поправок для кута, який утворений напрямками ki та km , буде мати вигляд:

$$v_{\beta}^k = (a_{km} - a_{ki})\delta x_k + (b_{km} - b_{ki})\delta y_k - a_{km}\delta x_m - b_{km}\delta y_m + a_{ki}\delta x_i + b_{ki}\delta y_i + l_{\beta}^k,$$

де $l_{\beta}^k = (\alpha'_{km} - \alpha'_{ki}) - \beta_{вим}^k$; $\alpha'_{km}, \alpha'_{ki}$ – наближені значення дирекційних кутів; $\beta_{вим}^k$ – вимірне значення кута на точці k .

Примітка: при складанні рівнянь поправок слід прийняти до уваги, що поправки координат вихідних пунктів дорівнюють нулю.

На практиці при вирівнюванні мереж часто застосовують вирівнювання по кутах, хоча на пункті можуть бути виміряні напрямки. Це веде до зменшення обсягів та спрощення обчислень, а незначним зниженням точності визначення елементів мережі можна знехтувати.

Контрольні запитання.

1. Для контролю при складанні та розв'язанні нормальних рівнянь використовують...
2. Що дозволяє виконувати контроль вимірювань і їх оцінку точності?
3. Що покладено в основу спільної математичної обробки геодезичних вимірів?
4. Як у теорії ймовірностей, математичній статистиці та у споріднених дисциплінах називають окреме спостереження?
5. Що є кількісною характеристикою появи події?
6. За яким принципом визначаються поправки до вимірних величин при розв'язанні задачі вирівнювальних обчислень?
7. Як визначаються коефіцієнти лінійних рівнянь поправок при параметричному способі вирівнювання?
8. Як визначаються коефіцієнти нормальних рівнянь поправок при параметричному способі вирівнювання?
9. Як визначаються коефіцієнти елемінаційних рівнянь при параметричному способі вирівнювання?

10. Як визначаються вільні члени параметричних лінійних рівнянь поправок в мережі триангуляції?
11. Які поправки визначають при виконанні попередніх обчислень у мережі триангуляції?
12. Що є головними завданнями вирівнювальних обчислень?
13. Які величини можуть бути обрані в якості параметрів при математичній обробці результатів геодезичних вимірювань?
14. Обчислювальний процес знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин при наявності надлишкових вимірювань називають?
15. Як розташовані квадратичні коефіцієнти нормальних рівнянь у системі?
16. У чому полягає суть алгоритму Гаусса розв'язання системи рівнянь?
17. За якою формулою обчислюється за координатами відстань між точками?
18. На основі яких функціональних залежностей визначають коефіцієнти лінійних рівнянь поправок у напрямки в мережі триангуляції?
19. Як позначається коефіцієнт третього нормального рівняння, з якого виключено дві невідомих, при п'ятому параметрі?
20. Обчислювальний процес знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин при наявності надлишкових вимірювань називають?
21. Визначить порядок вирішення нормальних рівнянь поправок.
22. Який порядок обчислень при параметричному способі вирівнювання геодезичних вимірів?

Лекція 7. Корелатний спосіб вирівнювання геодезичних мереж (спосіб умов).

1. Сутність задачі вирівнювання

Корелатний спосіб вирівнювання геодезичних мереж доцільно використовувати при вирівнюванні нескладних фігур триангуляції, які включають невелику кількість визначуваних пунктів (геодезичний трикутник, центральна система, вставка в кут, ланцюг трикутників і т.п.). Корелатний спосіб вирівнювання може застосовуватись, як при вирівнюванні безпосередньо виміряних величин, так і при вирівнюванні величин, які є функціями.

Нехай безпосередньо виміряні n величин, істинні значення яких дорівнюють відповідно X_1, X_2, \dots, X_n , та одержані результати вимірів x_1, x_2, \dots, x_n . Між істинними значеннями виміряних величин існують залежності, які математично виражаються рівняннями, що відповідають геометричним умовам мережі. Такі рівняння вигляду

$$\varphi_j = (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

називають *умовними рівняннями*.

Задача вирівнювання виникає в тому випадку, коли в загальній кількості вимірювань n міститься r надлишкових.

Оскільки виміряні значення x_n неодмінно містять в собі похибки вимірювань, при підставленні вимірених значень x у ліву частину умовних рівнянь, у їх правій частині з'являється нев'язкі:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_j,$$

які є істинними похибками функцій та повинні бути усунуті шляхом введення поправок v у результати вимірювань. Невідомі істинні значення величин замінюють їх вирівняними значеннями $x_{zp} = x + v$ так, щоб дотриматись вимоги:

$$\varphi_j(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) = 0, (j = 1, 2, \dots, r).$$

Як відомо, згідно методу найменших квадратів, із множини рішень невизначеної системи обирають таке, при якому $[pv^2] = \min$. Слід нагадати, що у параметричному способі вирівнювання та ж задача на умовний екстремум вирішується за допомогою додаткових незалежних змінних, які дозволяють перейти від умовного екстремуму до абсолютного.

Математичні умови, задані в нелінійній формі, приводять до лінійного вигляду, розвинувши вираз в ряд Тейлора та обмежив першими ступенями поправок:

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} v_n = 0.$$

Позначив $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_j$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = a_i$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = b_i$, ..., $\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = g_i$,

одержують систему умовних рівнянь поправок у лінійній формі:

$$\left. \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_1 v_1 + g_2 v_2 + \dots + g_n v_n + w_r &= 0. \end{aligned} \right\}$$

У скороченому вигляді система умовних рівнянь записується:

$$\left. \begin{aligned} [av] + w_1 &= 0, \\ [bv] + w_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ [gv] + w_r &= 0. \end{aligned} \right\}$$

У системі умовних рівнянь поправок число незалежних рівнянь r менше числа n невідомих поправок v , тому вона є невизначеною і має багато рішень. Однозначність ці рішення одержують при дотриманні умови мінімуму суми квадратів поправок у результати вимірів.

Сутність вирівнювання корелатним способом полягає у тому, що задачу знаходження умовного мінімуму функції залежних змінних

$\Phi(v_1, v_2, \dots, v_n) = [pv^2] = \min$ вирішують, ввівши допоміжні множники k (корелати) незалежних умовних рівнянь (спосіб Лагранжа).

У відповідності до правила Лагранжа до функції Φ приєднують умовні рівняння помножені на відповідні сталі невизначені множники $2k_j$, і одержують:

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [v^2] - 2k_1([av] + w_1) - 2k_2([bv] + w_2) - \dots - 2k_r([gv] + w_r).$$

Знаходять часткові похідні та прирівнюють їх до нуля:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2v_i - 2k_1 a_i - 2k_2 b_i - \dots - 2k_r g_i = 0.$$

Звідки:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + g_i k_r.$$

Підставивши рівняння поправок у загальну систему одержують систему r нормальних рівнянь корелат:

$$\left. \begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + \dots + [ag]k_r + w_1 &= 0, \\ [ba]k_1 + [bb]k_2 + \dots + [bg]k_r + w_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ [ga]k_1 + [gb]k_2 + \dots + [gg]k_r + w_r &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вирішуючи систему нормальних рівнянь, знаходять корелати k_j , потім – поправки v_i у виміри, і, наприкінці, вирівняні значення результатів вимірювань та їх функцій.

2. Види умовних рівнянь, що виникають у триангуляційних мережах

Умови кутів

Кутовими називають умови лінійного вигляду, що виникають між кутами та напрямками. У триангуляції при вирівнюванні кутів враховують наступні види кутових умов:

1. Умова фігур

Умова фігури виникає, як правило, у трикутнику та відповідає наступному рівнянню:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = w,$$

де β_i – вимірні значення кутів; w – нев'язка в трикутнику.

Умова фігури має місце в будь-якій замкненій фігурі геодезичної мережі: трикутнику, геодезичному чотирикутнику, полігоні (багатокутнику). У загальному випадку теоретична сума кутів замкненої фігури визначається за відомою формулою:

$$\sum \beta_{теор} = 180^\circ(n - 2).$$

У результаті вирівнювання до вимірних значень кутів β_i одержують поправки υ_i , які приводять до рівностей суми кутів у трикутнику 180° :

$$\beta_1 + \upsilon_1 + \beta_2 + \upsilon_2 + \beta_3 + \upsilon_3 - 180^\circ = 0.$$

Із врахуванням рівняння вище одержують умовне рівняння поправок:

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + w = 0.$$

2. Умова горизонту

Ця умова виникає на пунктах, на яких при вирівнюванні включають всі кути, утворені сусідніми напрямками, що сходяться на цьому пункті. У цьому випадку сума кутів на такому пункті повинна дорівнювати 360° (повне коло).

Для умови горизонту можна записати:

$$\sum \beta_n - 360^\circ = w,$$

де n – кількість кутів на згаданому пункті.

Відповідне цій умові умовне рівняння поправок буде мати вигляд:

$$\sum \upsilon_n + w = 0.$$

При вирівнюванні напрямків умови горизонту не виникають, тому що після усунення нев'язок кутових умов дирекційний кут будь-якої лінії мережі визначається однозначно, незалежно від шляху його передавання від вихідних ліній.

3. Умова вихідних дирекційних кутів (азимутальна умова)

Такі умови виникають при наявності двох або більше базисних ліній із відомими дирекційними кутами у геодезичній мережі: вставка в кут, ланцюг трикутників між двома базисами та ін.

Умова вихідних дирекційних кутів полягає в тому, що сума вирівняних кутів повинна дорівнювати величині жорсткого кута, обчисленого за координатами вихідних пунктів.

Для ланцюга трикутників умова вихідних дирекційних кутів має вигляд:

$$\alpha_{AB} - \beta_i \pm 180^\circ + \beta_j \pm 180^\circ - \beta_k + \dots - \alpha_{CD} = w,$$

де α_{AB}, α_{CD} – початковий та кінцевий дирекційні кути базисів; $\beta_i, \beta_j, \beta_k, \dots$ – зв'язуючі кути, через які відбувається передача дирекційного кута на лінії по твірній лінії.

Умовне рівняння поправок для цих кутів має вигляд:

$$-\upsilon_i + \upsilon_j - \upsilon_k + w = 0.$$

Синусні умови

Синусними називають умовні рівняння нелінійного вигляду, в яких використані синуси зв'язуючих кутів. Синусні умови поділяють на *базисні*, *полюсні* та *координатні*. Врахування базисних і полюсних умов необхідно для однозначного одержання довжини будь-якої сторони мережі, незалежно від шляху її визначення від вихідних ліній. Координатні умови забезпечують однозначне одержання координат будь-якого пункту мережі.

1. Базисна умова

Умови вихідних сторін виникають у тих же випадках, що й умови вихідних дирекційних кутів: вставка в кут, ланцюг трикутників між двома базисами та ін.

Передача довжини лінії від одного базису на інший через сторони трикутників відбувається шляхом розв'язання цих трикутників за теоремою синусів. Для передачі довжин у кожному трикутнику використовують проміжні кути $\beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots$. Базисну умову можна задати у наступному вигляді:

$$D_{CD} \frac{\sin \beta_{i+1} \sin \beta_{j+1} \sin \beta_{k+1} \dots}{\sin \beta_{i-1} \sin \beta_{j-1} \sin \beta_{k-1} \dots} - D_{AB} = w,$$

де D_{AB}, D_{CD} – довжини початкової та кінцевої базисних ліній.

Підставивши значення вимірних кутів із відповідними поправками одержують:

$$D_{AB} \sin(\beta_{i-1} + \upsilon_{i-1}) \times \dots = D_{CD} \sin(\beta_{i+1} + \upsilon_{i+1}) \times \dots$$

Прологарифмував цей вираз та привівши до лінійного вигляду після розвинення в ряд Тейлора, обмежуючись першими ступенями поправок, для кожного додатку одержують:

$$\lg \sin(\beta + \upsilon) = \lg \sin \beta + \upsilon \cdot M \cdot \operatorname{ctg} \beta,$$

де $M = 0,4343$ – модуль десяткових логарифмів.

Виразив логарифм синусів кутів та поправочний член в одиницях n -го десяткового знаку логарифму (шостого або сьомого), а поправку υ у секундах, одержують:

$$\lg \sin(\beta + \upsilon) = \lg \sin \beta + \upsilon \frac{10^n M}{\rho''} \operatorname{ctg} \beta = \lg \sin \beta + \Delta_i \upsilon,$$

де $\Delta_i = \frac{10^n M}{\rho''} \operatorname{ctg} \beta$ являє собою зміну n -го десяткового знаку логарифму синуса кута при зміні кута на $1''$.

Використавши дане відношення одержують умовне рівняння поправок базисної умови:

$$-\Delta_{i-1} \upsilon_{i-1} + \Delta_{i+1} \upsilon_{i+1} - \Delta_{j-1} \upsilon_{j-1} + \Delta_{j+1} \upsilon_{j+1} - \dots + w = 0,$$

$$w = \lg D_{AB} + \lg \sin \beta_{i+1} + \lg \sin \beta_{j+1} + \dots - \lg \sin \beta_{i-1} - \lg \sin \beta_{j-1} - \dots - D_{CD}.$$

2. Полюсна умова

Полюсом називають точку, пов'язану сторонами з усіма вершинами багатокутника. Полюсна умова виникає в такій фігурі, в якій можна зобразити замкнений ланцюг трикутників, що починається та закінчується на одній і тій же стороні: центральна система, геодезичний чотирикутник.

У геодезичній мережі, що має вигляд центральної системи, умовне рівняння поправок полюсної умови у логарифмічній формі відповідає базисній умові, але за виключенням довжин базисних ліній:

$$w = (\lg \sin \beta_{i+1} + \lg \sin \beta_{j+1} + \dots) - (\lg \sin \beta_{i-1} + \lg \sin \beta_{j-1} + \dots).$$

У геодезичному чотирикутнику полюсом є фіктивна точка, яка знаходиться на перетині його діагоналей. У цьому випадку рівняння поправок полюсної умови має наступного вигляду:

$$w = (\Delta_2 v_2 + \Delta_4 v_4 + \Delta_6 v_6 + \Delta_8 v_8) - (\Delta_1 v_1 + \Delta_3 v_3 + \Delta_5 v_5 + \Delta_7 v_7),$$

тобто нев'язка буде дорівнювати різниці суми добутків зміни логарифмів синусів парних та непарних кутів на відповідні поправки. Нев'язка в цьому випадку визначається за формулою:

$$w = \lg \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_3 \sin \beta_5 \sin \beta_7}{\sin \beta_2 \sin \beta_4 \sin \beta_6 \sin \beta_8}.$$

3. Координатні умови

Координатні умови складаються окремо для кожної координати точки: абсциси x та ординати y . Виникають ці умови в складних мережах триангуляції, в яких є вихідні пункти, безпосередньо між собою не пов'язані. У такій мережі виникає умова координат, яка впливає з того, що необхідно одержати точні значення координат кінцевих опорних точок за відомими координатами вихідних опорних точок та вирівняними за всіма іншими умовами значеннями кутів.

3. Визначення кількості незалежних умов

У вільній мережі триангуляції число кутових умовних рівнянь R дорівнює числу надлишкових вимірювань кутів:

$$R = N - (m - 2) \cdot 2,$$

де N – число всіх виміряних у мережі кутів; m – число геодезичних пунктів у мережі.

У невірних мережах триангуляції число кутових рівнянь визначається за формулою:

$$R = N - (m - 2) \cdot 2 + q,$$

де q – число надлишкових величин.

Кількість та види незалежних умовних рівнянь визначаються у наступному порядку:

1. Число умов фігур трикутників дорівнює числу трикутників, що не перекриваються із усіма виміряними в них кутами, доданому до числа суцільних діагоналей. Визначається це значення за наступною формулою:

$$f = l - m + 1,$$

де f – число умов фігур; l – число суцільних ліній.

2. Число умов горизонту g дорівнює числу центральних систем у мережі r .

3. Число умов дирекційних кутів a дорівнює числу вихідних дирекційних кутів t без одного.

4. Число умов полюсів дорівнює числу центральних систем, доданого до числа діагоналей:

$$p = L - 2m + 3,$$

де p – число полюсних умов; L – число всіх ліній.

5. Число умов базисів b у триангуляції, не замкненій вихідними сторонами, дорівнює числу вихідних сторін (базисів) c без однієї. У триангуляції, замкненій вихідними сторонами, число умов базисів дорівнює числу вихідних сторін без трьох.

4. Визначення допустимості вільних членів умовних рівнянь та оцінка точності функцій

Під допустимими величинами вільних членів умовних рівнянь розуміють граничні похибки тих функцій, за якими обчислюють значення вільних членів.

В умовах фігур та горизонту одержана кутова нев'язка w є функцією вимірних кутів, яка в загальному вигляді дорівнює:

$$w = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n.$$

Для оцінки точності цієї функції визначається значення середньої квадратичної похибки (СКП):

$$m_w^2 = m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2 + \dots + m_{\beta_n}^2.$$

Враховуючи, що всі кути вимірювались з однаковою точністю, маємо:

$$m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \dots = m_{\beta_n} = \mu,$$

де μ – середня квадратична похибка виміряного кута, встановлена інструкцією для відповідного класу триангуляції.

Відповідно:

$$m_w = \mu\sqrt{n},$$

де n – кількість кутів.

Приймаючи допустиме значення вільного члену $w_{\text{дон}} = 2,5m_w$ остаточно будемо мати:

$$w_{\text{дон}} = 2,5\mu\sqrt{n}.$$

Вільний член умовного рівняння дирекційних кутів визначають за формулою:

$$w = \alpha_{\text{ноч}} \pm \beta_1 \pm \beta_2 \pm \dots \pm \beta_n - \alpha_{\text{кін}}.$$

Оцінив точність даної функції переходять до граничної похибки:

$$w_{\text{дон}} = 2,5\sqrt{n \cdot \mu^2 + 2m_\alpha^2},$$

де n – число кутів; $m_{\beta_i} = \mu$, ($i = 1, 2, \dots, n$); m_{α} – середня квадратична похибка вихідного дирекційного кута, яку можна визначити як похибку визначення кута у мережі вищого класу.

Величини вільних членів полюсних та базисних умовних рівнянь залежать від точності результатів вимірювань та від форми геодезичної мережі, для якої їх складають. У разі використання натуральних значень тригонометричних функцій для визначення допустимої величини вільного члену синусної умови визначають часткові похідні $\frac{\partial w}{\partial \beta_i}$ та потім переходять до

середніх квадратичних похибок. Для вільного члену базисної умови приймаємо:

$$\begin{aligned} m_{\beta_{i-1}} &= m_{\beta_{i+1}} = m_{\beta_{j-1}} = m_{\beta_{j+1}} = \dots = \mu; \\ m_{D_{AB}} &= m_{D_{CD}} = m_S; \\ \frac{D_{AB}}{D_{CD}} &\approx 1. \end{aligned}$$

Тоді середня квадратична похибка вільного члену буде дорівнювати:

$$m_w \approx \sqrt{[k^2] \mu^2 + 2m_S^2},$$

і, відповідно:

$$w_{\text{дон}} = 2,5m_w = 2,5\sqrt{[k^2] \mu^2 + 2m_S^2},$$

де

$$k_i = \frac{D_{AB} \cdot \text{ctg} \beta_i}{\rho''}.$$

Допустима величина вільного члену полюсної умови визначається за формулою:

$$w_{\text{пол.дон}} = 2,5\mu\sqrt{[k^2]}.$$

У корелатному способі обернені ваги функції обчислюються сумісно з рішенням нормальних рівнянь:

$$\frac{1}{p_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots - \frac{[qf \cdot (r-1)]^2}{[qq \cdot (r-1)]}.$$

Середню квадратичну похибку функції знаходять за формулою:

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{p_F}},$$

в якій $\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}$ (r – число надлишкових вимірювань).

Лекція 8. Вирівнювання мережі полігонометрії.

1. Строге вирівнювання окремого полігонометричного ходу

Полігонометричний метод побудови геодезичних мереж широко застосовується при розвитку мереж згущення та побудові зйомочного обґрунтування. Вирівнювання полігонометричних мереж найбільш високої точності виконується строгим способом за методом найменших квадратів (*строге вирівнювання*). Полігонометричні ходи вирівнюються переважно корелатним способом, оскільки кількість визначуваних пунктів у полігонометричних мережах, як правило, завжди більше кількості вихідних пунктів.

Планові геодезичні мережі 1-го і 2-го розрядів створюють відповідно до вимог «Інструкції по топографічних зніманнях в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 1:500», а висотні – «Інструкції по нівелюванню 1, 2, 3 та 4 класів».

Для цілей інвентаризації земельних ділянок, які перебувають у користуванні чи власності, складається проект згущення геодезичної опорної мережі.

Схема опорної мережі визначається наявністю вихідних геодезичних пунктів, топографічною та кадастровою ситуацією. Планова мережа створюється такими методами:

- прокладання ходів полігонометрії 1 і 2 розрядів;
- побудови мереж триангуляції і трилатерації 1 і 2 розрядів;
- побудовою аналітичних мереж;
- прокладанням теодолітних ходів.

Можливе також поєднання цих методів. Геодезична основа має відповідати вимогам точності зйомки масштабу 1:500. Середня квадратична помилка визначення координат поворотів меж і межових знаків не повинна перевищувати 0,1 м, що відповідає 0,2 мм в масштабі плану 1:500.

Виходячи з цих передумов, можна розрахувати точність кутових і лінійних вимірювань у ході полігонометрії, як найпоширенішого способу створення планової основи.

Середня квадратична помилка в ході полігонометрії довільної форми визначається за формулою:

$$M^2 = [m_s^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [D_{oi}^2]$$

і для витягнутого ходу

$$M^2 = m_s^2 \cdot n + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [S]^2 \cdot \frac{n+3}{12}$$

де M – очікувана середня квадратична помилка в положенні кінцевого пункту ходу відносно початкового після врівноваження за умову дирекційних кутів; m_s – середня квадратична помилка вимірювання ліній; m_β – середня квадратична помилка вимірювання кутів; D_{oi} – віддаль від кожної вершини до центру тяжіння ходу; n – кількість сторін у ході, S – довжини сторін ходу; $\rho = 206265''$.

Для розрахунку точності лінійних і кутових вимірювань формули представимо у вигляді

$$M^2 = m_t^2 + m_u^2$$

де m_t і m_u відповідно повздовжній і поперечний зсув ходу полігонометрії, які для ходу мають вигляд:

$$m_t = m_s \cdot \sqrt{n}$$

$$m_u = \frac{m_\beta}{\rho} [S] \cdot \sqrt{\frac{n+3}{12}}$$

Для визначення величин m_s і m_β прийємо принцип однакового впливу цих помилок на точність полігонометричного ходу. Таким чином:

$$m_t = m_u = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

Величини m_s і m_β будуть

$$m_s = \frac{m_t}{\sqrt{n}}$$

$$m_\beta = \frac{m_u \cdot \rho}{[S]} \cdot \sqrt{\frac{12}{n+3}}$$

Виходячи з формул вище, здійснюють вибір світловіддалеміра, тип теодоліта або тахеометра.

Висоти пунктів планової основи і межових знаків визначають із нівелювання IV класу або технічного нівелювання. Очікувані середні квадратичні помилки, які оцінюють для проекту висотних мереж, розраховують із формули:

$$m = m_{1km} \cdot \sqrt{L}$$

де m_{1km} - середня квадратична помилка ходу нівелювання завдовжки в 1 км (одиниці ваги), L - довжина ходу, в км.

В одиночному полігонометричному ході з відомими координатами вихідних пунктів x_n, y_n та x_k, y_k та дирекційними кутами базисних ліній α_n та α_k задача вирівнювання виникає тому, що для вирішення поставленої задачі (визначення координат його точок від 1 до n) достатньо виміряти кути на пунктах 1, 2, ..., $n-1$ та сторони s_1, s_2, \dots, s_{n-1} . Практично ж у ході вимірюють всі кути разом із прив'язочним β_{n+1} і всі сторони, у результаті чого одержують три надлишкові величини – кути β_n та β_{n+1} і сторону s_{n+1} , що дають змогу визначити три умовні рівняння.

Процедура вирівнювання виконується в наступному порядку:

- для трьох умовних рівнянь складають відповідні умовні рівняння поправок;

- формують три нормальних рівняння корелат, із рішення яких одержують корелати, та потім по них визначають поправки в кути та довжини ліній;

- користуючись зрівняними значеннями кутів та довжин ліній обчислюють прирости координат і знаходять зрівняні координати пунктів полігонометричного ходу.

2. Суть корелатного способу вирівнювання полігонометричного ходу

Надлишкові виміряні кути встановлюють умовне рівняння дирекційних кутів, яке виражає зв'язок між відомими дирекційними кутами вихідних ліній і кутами повороту β . Для виміряних лівих кутів повороту це рівняння можна записати у вигляді:

$$\alpha_k = \alpha_n - 180^\circ \cdot K + [\beta],$$

або

$$[\beta] - 180^\circ \cdot K + (\alpha_n - \alpha_k) = 0.$$

При підставленні у формулу вище виміряних значень кутів одержимо:

$$[\beta]_{вим} - 180^\circ \cdot K + (\alpha_n - \alpha_k) = f_\beta,$$

де f_β – кутова нев'язка; K – число виключень 180° (як правило $K = n + 1$).

Тоді умовне рівняння поправок запишеться у вигляді:

$$[a_i \nu_{\beta_i}] + f_\beta = 0,$$

де a_i – коефіцієнти при невідомих поправках у кути (дорівнюють +1 для всіх кутів $i = 1, 2, \dots, n$).

Координатні умовні рівняння (абсцис та ординат), що виникають у полігонометричному ході, знаходять із рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} x_n + [\Delta x] - x_k &= 0 \\ y_n + [\Delta y] - y_k &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

При підставленні в ці рівняння значень приростів координат Δx та Δy , обчислених за виміряними кутами та довжинами ліній ходу, права частина з нуля перетвориться на значення лінійних нев'язок ходу по осях координат f_x та f_y .

Ввівши у вирази умовних рівнянь координат відповідні поправки до виміряних величин, одержані рівняння приводять до лінійного вигляду шляхом розвинення в ряд Тейлора та одержують умовні рівняння поправок абсцис та ординат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} b_i v_{\beta_i}}{\rho''} + \sum_{i=1}^n b_{S_i} v_{S_i} + f_x &= 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n+1} c_{i+1} v_{\beta_{i+1}}}{\rho''} + \sum_{i=1}^n c_{S_i} v_{S_i} + f_y &= 0 \end{aligned} \right\},$$

де коефіцієнти при поправках кутів v_{β} та сторін v_S дорівнюють:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\partial f_x}{\partial \beta_i} = \frac{\partial [\sum \Delta x - (x_k - x_n)]}{\partial \beta_i} = - \sum_i^{n+1} \Delta y; \\ b_{S_i} &= \frac{\partial f_x}{\partial s_i} = \cos \alpha_i; \\ c_i &= \frac{\partial f_y}{\partial \beta_i} = \frac{\partial [\sum \Delta y - (y_k - y_n)]}{\partial \beta_i} = + \sum_i^{n+1} \Delta x; \\ c_{S_i} &= \frac{\partial f_y}{\partial s_i} = \sin \alpha_i. \end{aligned}$$

Прийнявши до уваги одержані значення коефіцієнтів $b_i, b_{S_i}, c_i, c_{S_i}$ та враховуючи залежність поправок у дирекційні кути ліній v_{α_i} від поправок у кути повороту ходу v_{β_i} за формулами:

$$\begin{aligned} v_{\alpha_1} &= v_{\beta_1}; \\ v_{\alpha_2} &= v_{\alpha_1} + v_{\beta_2} = v_{\beta_1} + v_{\beta_2}; \\ &\dots \\ v_{\alpha_n} &= v_{\alpha_{n-1}} + v_{\beta_n} = v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_n}, \end{aligned}$$

умовні рівняння поправок записують у наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} [v_{\beta}] + f_{\beta} &= 0; \\ [v_S \cdot \cos \alpha] - \frac{1}{\rho''} \left[\sum_i^{n+1} \Delta y \cdot v_{\beta} \right] + f_x &= 0; \\ [v_S \cdot \sin \alpha] + \frac{1}{\rho''} \left[\sum_i^{n+1} \Delta x \cdot v_{\beta} \right] + f_y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

У процесі обчислення поправок у виміряні кути та сторони повинні бути враховані їх ваги. Оскільки кутові виміри у полігонометричному ході рівноточні, то ваги p_{β_i} однакові для всіх кутів. Величини ж середніх квадратичних похибок та ваг виміряних довжин ліній можуть бути обчислені за

різними формулами, відомими з теорії похибок вимірювань, у залежності від методу лінійних вимірів (мірними стрічками або рулетками, оптичними віддалемірами, світло- або радіовіддалемірами та електронними тахеометрами).

3. Методика двогрупового способу вирівнювання

Для полегшення подальших обчислень використовують *спосіб двогрупового вирівнювання*. Сутність цього способу, розробленого Крюгером, полягає в тому, що всі умовні рівняння розподіляють на дві групи. Спочатку розв'язують рівняння тільки першої групи та у виміряні величини вводять первинні поправки v' . Потім за допомогою невизначених множників перетворюють коефіцієнти та вільні члени рівнянь другої групи. Сенс такого перетворення полягає в тому, щоб загальна система нормальних рівнянь корелат, відповідна до вихідної системи умовних рівнянь, була розподілена на дві незалежні системи, які розв'язуються окремо.

У результаті розв'язання другої системи рівнянь одержують вторинні поправки v'' . Остаточні поправки $v = v' + v''$ будуть такими ж, як і при сумісному вирішенні нормальних рівнянь корелат відповідно до методу найменших квадратів.

До першої групи рівнянь віднесемо умовне рівняння дирекційних кутів. *Первинні поправки* у виміряні кути полігонометричного ходу одержують шляхом рівномірного розподілу нев'язки в усі кути. Виконують попереднє виправлення кутів. Далі знаходять прирости координат між суміжними точками та визначають нев'язки f'_x та f'_y по осях координат.

Для знаходження вторинних поправок коефіцієнти другої групи перетворюють за наступним правилом: перетворений коефіцієнт дорівнює неперетвореному мінус середнє арифметичне з неперетворених коефіцієнтів:

$$\left. \begin{aligned} b' &= b - \frac{[b]}{n+1} = \left(- \sum_i^{n+1} \Delta y \right)' = - \sum_i^{n+1} \Delta y + \frac{\left[\sum_i^{n+1} \Delta y \right]}{n+1}; \\ c' &= c - \frac{[c]}{n+1} = \left(\sum_i^{n+1} \Delta x \right)' = \sum_i^{n+1} \Delta x - \frac{\left[\sum_i^{n+1} \Delta x \right]}{n+1}, \end{aligned} \right\}$$

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} \sum_i^{n+1} \Delta y &= y_{n+1} - y_i = y_{кін} - y_i; \\ \sum_i^{n+1} \Delta x &= x_{n+1} - x_i = x_{кін} - x_i, \end{aligned} \right\}$$

то вираз перетворюється на наступне рівняння:

$$\left. \begin{aligned} b' &= y_i - \frac{[y]}{n+1}; \\ c' &= -x_i + \frac{[x]}{n+1}. \end{aligned} \right\}$$

У цих формулах значення $\frac{[y]}{n+1} = y_u$ та $\frac{[x]}{n+1} = x_u$ є координатами центру ваги полігонометричного ходу.

Для спрощення вирівнювальних обчислень вводять систему центральних координат (ξ, η) , початок яких віднесено до центру ваги ходу:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_u - c'_i; \\ \eta_i &= y_i - y_u - b'_i. \end{aligned} \right\}$$

Умовні рівняння поправок другої групи з перетвореними коефіцієнтами приймуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho''} [\eta \cdot v''_{\beta}] + [v_s \cos \alpha] + f'_x &= 0; \\ -\frac{1}{\rho''} [\xi \cdot v''_{\beta}] + [v_s \sin \alpha] + f'_y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для обчислення вторинних поправок v'' складають нормальні рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{b'b'}{p} \right] k_2 + \left[\frac{b'c'}{p} \right] k_3 + f'_x &= 0; \\ \left[\frac{b'c'}{p} \right] k_2 + \left[\frac{c'c'}{p} \right] k_3 + f'_y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Із врахуванням ваг вимірних кутів та сторін, коефіцієнтів при поправках у кути та сторони та введених центральних координат коефіцієнти нормальних рівнянь обчислюють за формулами:

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[\frac{b'b'}{p} \right] = \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} [\eta^2] + [m_s^2 \cos^2 \alpha]; \\ B &= \left[\frac{c'c'}{p} \right] = \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} [\xi^2] + [m_s^2 \sin^2 \alpha]; \\ C &= \left[\frac{b'c'}{p} \right] = -\frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} [\xi \cdot \eta] + [m_s^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha]. \end{aligned} \right\}$$

Із нормальних рівнянь визначають корелати:

$$k_2 = \frac{C \cdot f'_y - B \cdot f'_x}{A \cdot B - C^2};$$

$$k_3 = \frac{C \cdot f'_x - A \cdot f'_y}{A \cdot B - C^2}.$$

Обчислення вторинних поправок у кути v''_{β} та сторони v''_S виконують за формулами:

$$v''_{\beta_i} = \frac{m_{\beta}^2}{\rho} (\eta_i k_2 - \xi_i k_3);$$

$$v''_{S_i} = m_{S_i}^2 (k_2 \cos \alpha_i + k_3 \sin \alpha_i).$$

Контроль обчислення поправок: $[v''_{\beta}] = 0$.

За знайденими поправками в кути v''_{β} обчислюють поправки в дирекційні кути, після чого визначають поправки до приростів координат:

$$\left. \begin{aligned} v_{\Delta x_i} &= v_{S_i} \cos \alpha_i - \frac{v''_{\alpha_i}}{\rho''} \Delta y_i; \\ v_{\Delta y_i} &= v_{S_i} \sin \alpha_i + \frac{v''_{\alpha_i}}{\rho''} \Delta x_i, \end{aligned} \right\}$$

виконуючи контроль обчислень:

$$\left. \begin{aligned} [v_{\Delta x}] &= -f'_x; \\ [v_{\Delta y}] &= -f'_y. \end{aligned} \right\}$$

Виправив прирости координат обчислюють остаточні координати пунктів полігонометричного ходу.

У полігонометричному ході може бути проведена оцінка точності будь-якого вирівняного кута, дирекційного кута сторони ходу, координати будь-якого пункту.

Середню квадратичну похибку одиниці ваги при вирівнюванні двохгруповим способом обчислюють за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{p_{\beta}[v'_{\beta}{}^2] + p_{\beta}[v''_{\beta}{}^2] + [p_s v_S^2]}{3}}.$$

Середня квадратична похибка функції зрівняних елементів та її вагу обчислюють:

$$M_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}};$$

$$\frac{1}{P_F} = \left[\frac{ff}{P} \right] - P_\beta \frac{\left[\frac{af}{P} \right]^2}{n+1} - \frac{\left[\frac{b'f}{P} \right]^2}{A} - \frac{\left\{ \left[\frac{c'f}{P} \right] - \frac{C}{A} \left[\frac{b'f}{P} \right] \right\}^2}{B - \frac{C^2}{A}}.$$

4. Спрощене зрівнювання мережі полігонометричних ходів

Вирівнювання полігонометричних ходів мережі згущення, теодолітних ходів зйомочного обґрунтування припускається виконувати спрощеним способом (*нестроге вирівнювання*), який зазвичай зводиться до роздільного вирішення трьох умовних рівнянь, що виникають при ув'язці кутів та координат. При цьому прирости координат розглядаються як незалежні величини з вагами, обернено пропорційними довжинам сторін.

Спрощене вирівнювання полігонометричного ходу виконується у наступній послідовності:

- обчислюють кутову нев'язку та у випадку її допустимості розподіляють порівну на всі кути з протилежним знаком;
- по виправлених кутах ходу знаходять дирекційні кути ліній;
- обчислюють прирости координат;
- визначають нев'язки по осях координат, абсолютну та відносну нев'язку, та, у випадку їх допустимості, вводять поправки у прирости координат, розподіливши нев'язки пропорційно довжинам ліній з протилежним знаком окремо по осях координат;
- виправляють прирости координат і обчислюють координати пунктів полігонометричного ходу.

Вирівнювання систем полігонометричних ходів 1-го та 2-го розрядів можна виконувати нестрогими способами роздільного вирівнювання. Для цього використовують метод «червоних чисел», метод послідовних наближень, метод середнього вагового та ін.

Контрольні запитання.

1. Що дозволяє виконувати контроль вимірювань і їх оцінку точності?
2. Які геометричні умови відносять до кутових?
3. Чому дорівнює теоретична сума кутів у полігоні, якій складається з 9 точок?
4. Яка з формул відповідає геометричній умові горизонту?
5. Яка з формул відповідає геометричній умові вихідних дирекційних кутів?
6. Яка з формул відповідає полюсній геометричній умові?
7. Яка з формул відповідає геометричній умові фігури в триангуляції?
8. Чому дорівнює кількість умовних рівнянь в мережі триангуляції?
9. Чому дорівнює число умов горизонту?
10. Чому дорівнює число умов полюсів?

11. Чому дорівнює число базисних умов у мережі, не замкненій вихідними сторонами?
12. Скільки умовних рівнянь виникає у розімкненому полігонометричному ході?
13. Скільки умовних рівнянь вихідних дирекційних кутів виникають у розімкненому полігонометричному ході?
14. Скільки координатних умовних рівнянь виникають у розімкненому полігонометричному ході?
15. Які способи вирівнювання мережі полігонометрії відносять до строгих?
16. На основі яких функціональних залежностей складають синусні умовні рівняння?
17. Як називають допоміжні множники незалежних умовних рівнянь?
18. Обчислювальний процес знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин при наявності надлишкових вимірювань називають...?
19. Для якої фігури в триангуляції складають умовні рівняння фігури в геодезичному чотирикутнику?
20. Яку умову встановлюють у полігонометричному ході надлишкові виміряні кути?
21. Скільки надлишкових сторін вимірюють у полігонометричному ході?
22. Скільки надлишкових кутів вимірюють у полігонометричному ході?

Список використаних джерел

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
2. Войтенко С.П., Шульц Р.В., Кузьмич О.Й., Кравченко Ю.В. Математичне оброблення геодезичних вимірів: підручник / за ред. С. П. Войтенка. – К.: Знання, 2015. – 654 с.
3. Жук О.П., Ковальов М.В., Бодак Є.В. Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт з дисципліни студентами факультету землевпорядкування. – НУБіП України. – 2012. – 46 с.
4. Жук О.П., Ковальов М.В., Кривов'яз Є.В. Конспект лекцій з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів». – НУБіП України. – 2013. – 56 с.
5. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник. Львів: Растр-7, 2007.
6. Метешкін К.О., Шаульський Д.В. Математична обробка геодезичних вимірів: навч. Посібник. Х.: ХНАМГ, 2012. 176 с.
7. Рижок З.Р., Полковська Л.Л., Ступень Р.М., Колодій П.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Навчальний посібник. Львів: «Галицька видавнича спілка», 2020. 180 с.
8. Боровий В.О. , Літнарівч Р.М. , Мардієва Л.П. Особливості зрівноваження лінійно-кутової мережі з недостатньою кількістю вимірів . Інженерна геодезія. Випуск 45, - К.: КНУБА, 2001.
9. Літнарівч Р.М. Геодезія. .Планові державні геодезичні мережі. Конспект лекцій. – Чернігів: ЧДІЕіУ, 2002.
10. Тадеєв О.А. Математична обробка геодезичних вимірів: конспект лекцій для студентів напряму 0801 «Геодезія , картографія та землеустрій». – Рівне: Вид. НУВГП., 2013 –146 с.
11. Чумаченко О.М., Математичні методи і моделі в землеустрої: підручник /О.М.Чумаченко, А.Г. Мартин, Є.В. Кривов'яз – К.: «ТОВ Компринт», 2016. – 630 с.
12. 2. Chumachenko O.,Mathematical methods and models in land management: Навчальний посібник / Martyn A., Chumachenko O., Kryvoviaz Ye., Kharchuk N., Dubovik O. К.: - К.: «ТОВ Компринт», 2018. - 632 с.

Зміст

ПЕРЕДМОВА	3
Лекція 1. Загальні відомості про дисципліну.	4
Лекція 2. Критерії точності геодезичних вимірювань.....	7
Лекція 3. Метод найменших квадратів.	16
Лекція 4. Вирівнювальні обчислення в геодезичних мережах.	21
Лекція 5. Параметричний спосіб вирівнювання.	24
Лекція 6. Вирівнювання мережі триангуляції.	31
Лекція 7. Корелатний спосіб вирівнювання геодезичних мереж (спосіб умов).	39
Лекція 8. Вирівнювання мережі полігонометрії.	47
Список використаних джерел	56