

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан, І.Ю. Грищенко

**ОБВІДНІ ПОВЕРХНІ ОДНОПАРАМЕТИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН:
КОНСТРУЮВАННЯ, ВИРІЗАННЯ ВІДСІКІВ, ПОБУДОВА РОЗГОРТОК**

Монографія

**Київ
2017**

УДК 514.18
ББК 22.151
Б20

Автори:

С.Ф. Пилипака, доктор технічних наук
Т.А. Кресан, кандидат технічних наук
І.Ю. Грищенко, кандидат технічних наук

Рецензенти:

Н.М. Аушева – доктор техн. наук, професор кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів і систем Національного технічного університету «Київський політехнічний університет»
І.В. Головач – доктор техн. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету біоресурсів і природокористування України

Рекомендовано до друку на засіданні Вченої ради Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № від 2017 р.)

Пилипака С.Ф.

Б20 Обвідні поверхні однопараметричної множини площин: конструювання, вирізання відсіків, побудова розгортки / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан, І.Ю.Грищенко. – К.: ЦП «КОМПРИНТ», 2017. - 314 с.

Конструювання розгортних поверхонь здійснено на основі використання апарату диференціальної геометрії та теорії поверхонь. Розглянуто різні способи утворення поверхонь в залежності від способу формування однопараметричної множини площин. Приділено увагу конструюванню поверхонь за заданою напрямною кривою, яка є спеціальною лінією поверхні. Показано практичне застосування розроблених способів. Побудовано розгортки поверхонь на основі незмінності геодезичної кривини поверхні при її згинанні. Запропоновано аналітичний опис потрібного контуру відсіку поверхні за допомогою спеціальної інтерполяційної кривої, яка не схильна до осциляцій.

Для науковців та фахівців з комп'ютерного моделювання розгортних поверхонь за заданими умовами і побудови їх розгортки.

УДК 514.18
ББК 22.151

ISBN 978-617-7055-89-0

Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Грищенко І.Ю.
© НУБіП України, 2017

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД СПОСОБІВ КОНСТРУЮВАННЯ ОБВІДНИХ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ПОБУДОВИ ЇХ РОЗГОРТОК	7
1.1. Кінематичні способи конструювання торсів із застосуванням рухомої площини.....	7
1.2. Конструювання торсів однакового нахилу твірних.....	19
1.3. Елементи теорії аналітичного опису диференціальних характеристик торсових поверхонь.....	30
1.4. Неперервне згинання торсових поверхонь.....	43
1.5. Побудова розгорток відсіків торсів.....	58
РОЗДІЛ 2. КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЯК ОБВІДНИХ ПОВЕРХОНЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН, УТВОРЕНИХ РУХОМ ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ ЗА ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ	84
2.1. Дослідження розгортних та супутніх поверхонь, утворених однопараметричними сім'ями площин.....	84
2.2. Конструювання торсів, віднесених до ортогональної сітки ліній кривини, за заданою кривою.....///.....	103
2.3. Конструювання полярних торсів заданої напрямної кривої.....	132
2.4. Конструювання торсів за заданими іншими вихідними умовами.....	153
РОЗДІЛ 3. КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЯК ОБВІДНИХ ПОВЕРХОНЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН, УТВОРЕНИХ ДОДАВАННЯМ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ПЛОЩИНИ НАВКОЛО ОСІ І ПЕРЕМІЩЕННЯ ОСІ В ПРОСТОРІ ЗА ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ	176
3.1. Утворення однопараметричних множин площин додаванням обертального руху площини навколо осі та поступального переміщення цієї осі в просторі.....	176
3.2. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний прямолінійний рух.....	181
3.3. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний криволінійний рух.....	187
3.4. Конструювання обвідних поверхонь однопараметричної множини площин у сферичній системі координат.....	192
3.5. Утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертальних рухів та руху осі обертання вздовж однієї з осей координат.....	200

3.6. Застосування однопараметричної множини положень площини при створенні робочого органу агропостового комплексу.....202

РОЗДІЛ 4. КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЗА ЗАДАНОЮ НАПРЯМНОЮ КРИВОЮ, ЯКА Є ГЕОДЕЗИЧНОЮ ЛІНІЄЮ ПОВЕРХНІ.....211

4.1. Властивості геодезичних ліній розгортної поверхні.....211

4.2. Аналітичний опис торсів із геодезичною лінією на їх поверхні.....214

4.3. Проектування полиці плуга із розгортної поверхні за заданою геодезичною лінією – граничною траєкторією руху скиби.....229

РОЗДІЛ 5. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ КРИВІ ДЛЯ ОПИСУ ПОТРІБНОГО КОНТУРУ НА РОЗГОРТЦІ ТОРСА ЗА ЗАДАНИМ ТОЧКОВИМ РЯДОМ ТА В ІНШИХ ЗАДАЧАХ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ.....242

5.1. Дослідження і вибір складових функцій для побудови інтерполяційної кривої як суми їх графіків.....243

5.2. Управління інтерполяційною кривою на основі суми графіків гіперболічного секанса напрямом дотичних в заданих точках.....262

5.3. Інтерполяційні криві на основі суми функцій гіперболічного секанса для просторового точкового ряду та поєднання плоских і просторових ліній.....269

5.4. Побудова сітки із інтерполяційних ліній на поверхні ділянки реального поля.....282

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....312

ДОДАТОК А. ДАНІ ЕКСПЕРИМЕНТУ.....324

ДОДАТОК Б. ПРОГРАМА ПОБУДОВИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНИМИ 10 ТОЧКАМИ.....329

ВСТУП

Кожну поверхню можна розглядати як обвідну своїх дотичних площин. Рівняння сім'ї дотичних площин називається тангенціальним рівнянням поверхні. Множини дотичних площин та їх обвідні поверхні відіграють важливу роль в теорії інструментального формоутворення поверхонь деталей. Поверхня, яка утворюється при обробці деталі інструментом, є обвідною сім'ї формоутворюючих поверхонь інструмента. Типовим прикладом формування поверхні є нарізання косозубих коліс, профіль яких утворюється як обвідна різних положень поверхні інструмента. Якщо множина дотичних площин є однопараметричною, то обвідною поверхнею є розгортна поверхня (торс). Існують різні способи утворення однопараметричних множин площин, в тому числі відомі кінематичні способи. Досить широкого розвитку набув спосіб утворення алгебраїчних торсів обкочуванням площини по двох кривих другого порядку в працях проф. В.С. Обухової [93, 95, 96, 97, 99, 101, 102]. Розвиток сучасних засобів обчислювальної техніки дозволяє швидко і з великою точністю розв'язувати задачі геометричного конструювання поверхонь і отримувати їх якісну візуалізацію. Це дає можливість далі розвивати способи формоутворення торсів, як обвідних поверхонь однопараметричної множини площин. Один із таких способів, який не міг раніше бути реалізованим повною мірою із-за відсутності потужних обчислювальних машин – це спосіб утворення однопараметричної множини площин з допомогою супровідного тригранника напрямної кривої. Його суть полягає в тому, що в кожен момент часу положення окремої площини в просторі визначається результатом двох рухів: відносного руху площини в триграннику і переміщенням самого тригранника по напрямній кривій. Такий підхід розширює можливості конструювання торсів як обвідних поверхонь. Крім того, конструювання поверхні за заданою спеціальною лінією, якою має бути напрямна крива, вимагає саме такого підходу, адже площина в системі тригранника по мірі його переміщення по напрямній кривій має бути спеціально орієнтована. Наприклад, якщо стоїть задача побудувати таку розгортну поверхню, щоб напрямна крива була для неї геодезичною лінією, то площина має проходити через вершину тригранника і бути перпендикулярною до орта головної нормалі, тобто утворена однопараметрична множина площин має бути сім'єю спрямних площин тригранника.

При конструюванні технічних форм із розгортних поверхонь в нерухомій системі координат теж можуть бути поставлені вимоги до положення окремих площин однопараметричної сім'ї. Кожна площина сім'ї є дотичною до торса і лінією дотику є його прямолінійна твірна. Проф. Гячев Л.В. розглядав конструювання полиці плуга із розгортної поверхні і вказував на певну орієнтацію окремих дотичних площин на лемеші, в середній і кінцевій точках полиці [42], тобто аналітичний опис множини площин потрібно зробити таким чином, щоб три заданих площини увійшли до складу сім'ї.

Однопараметричну множину площин можна утворювати різними способами. Одні із них – поєднання обертального руху площини навколо осі і

одночасного переміщення цієї осі у просторі. Узгодженням цих рухів можна конструювати різні розгортці поверхні. Якщо обертання площини відбувається навколо нерухомої осі, то торс вироджується у пряму лінію – вісь обертання. Якщо вісь обертання переміщається у просторі, залишаючись паралельною самій собі, то утвореними торсами будуть циліндри, якщо вона міняє свій напрям у просторі, але проходить через фіксовану точку, то утвореними торсами будуть конічні поверхні. В роботі розглянуто різні способи утворення торсів за допомогою однопараметричних множин площин.

В умовах технічного прогресу, розвитку програмно-технічного забезпечення та комп'ютерних технологій до утворення і задання поверхонь висуваються вимоги, виконання яких забезпечує реалізацію технологічних, естетичних та економічних чинників. З таких позицій особливий клас поверхонь складають розгортні або торсові поверхні, оскільки процес конструювання технічних форм на їх основі значно спрощується через можливість побудови розгорток із заданим ступенем точності. Побудова розгорток ґрунтується на тому, що при згинанні торса на площину (тобто суміщення його із площиною), довжина ліній та величини кутів між ними на поверхні і її розгортці не змінюються. Але визначення довжин ліній веде до інтегрування виразів, які, як правило, не мають аналітичного опису. Через те побудова розгорток потребує застосування чисельних методів і тільки в окремих випадках можна обійтися без них. Під описом розгортки маються на увазі її параметричні рівняння, які ставлять у взаємну однозначність положення прямолінійних твірних на поверхні і на її розгортці та положення окремої точки на цих твірних. Якщо нам потрібно вирізати певний відсік із поверхні і побудувати його розгортку, то це означає, що потрібно знайти контури цього відсіку як на поверхні, так і на розгортці. Таким контуром на поверхні є просторова крива або дуги окремих кривих, а на розгортці – плоска крива або дуги окремих кривих. Для побудови плоского контуру (заготовки, яка потім буде зігнута у деталь потрібної форми) потрібно встановити однозначний зв'язок між цими кривими на поверхні і площині (розгортці). Встановлення такого взаємозв'язку теж пов'язано із певними труднощами, тому через окремі точки контуру інколи доцільно проводити інтерполяційну криву. В монографії приділено особливу увагу цьому питанню, оскільки за таку криву взято не поліном або сплайни, як зазвичай прийнято у всіх відомих математичних пакетах, а суму однотипних функцій, які не схильні до осциляцій незалежно від числа точок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СПОСОБІВ КОНСТРУЮВАННЯ ОБВІДНИХ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ПОБУДОВИ ЇХ РОЗГОРТОК

1.1. Кінематичні способи конструювання торсів із застосуванням рухомої площини

Класична теорія розгортних поверхонь була розроблена в працях видатних вчених: Л. Ейлера, який вперше записав загальне їх рівняння, виходячи із заданого ребра звороту і Г. Монжа, який розробив свою теорію поверхонь з точки зору їх форм та кривини, вивів рівняння торса, що проходить через дві просторові або плоскі криві та описав поверхні з ребром звороту, які використовуються при побудові насипів дорожнього полотна і дамб (поверхні однакового нахилу твірних). Дана теорія свій подальший розвиток отримала в працях [164 – 166]. На основі цих надзвичайно вагомих результатів вченими минулого століття велося прикладне вивчення торсових поверхонь [2, 4, 5, 9, 12, 14 – 19, 24, 28- 35,37, 41, 43, 44, 47 – 50, 51, 52, 58 – 61, 62, 63, 66, 69, 70, 75, 76, 81 – 83, 84, 86 – 102, 104, 107 – 127, 133, 137 - 144, 147, 149, 157, 158, 161].

Торсовою, або розгортною поверхнею називається обвідна поверхня однопараметричної множини площин. Дві нескінченно близькі площини множини перетинаються по прямій лінії, яка є прямолінійною твірною торса. Результатом перетину трьох нескінченно близьких площин є точка. Її також можна отримати, як результат перетину прямолінійної твірної торса, утвореної перетином двох суміжних нескінченно близьких площин, із третьою нескінченно близькою площиною. Неперервний ряд таких точок утворює просторову криву – ребро звороту. Всі прямолінійні твірні торса є дотичними до ребра звороту. Звідси можна дати друге визначення торса, як поверхні, утвореної множиною прямолінійних твірних до просторової кривої. Окремим випадком є конус, у якого ребро звороту вироджується в точку. Він є обвідною поверхнею однопараметричної множини площин, утвореної обертанням окремої площини навколо осі із сталим кутом нахилу до неї (рис. 1.1,а). Всі площини мають спільну точку – вершину конуса. Якщо вона віддалена в нескінченність, то будемо мати другий окремий випадок – циліндричну поверхню (рис. 1.1,б). Всі прямолінійні твірні циліндричних поверхонь паралельні між собою. Із способу утворення поверхонь випливає, що всі площини множини є дотичними до торса і лінією дотику є прямолінійна твірна. Це означає, що через будь-яку точку на поверхні торса можна провести дотичну площину, орієнтація якої не змінюється вздовж лінії дотику (на відміну від нерозгортних лінійчатих поверхонь).

Утворити торс можна згинанням листового матеріалу і навпаки, торс можна сумістити із площиною без розривів і складок. Згинання відбувається вздовж прямолінійних твірних. Від закономірності розташування твірних на плоскій заготовці (всі вони мають бути дотичними до певної лінії, яка

перетворюється у просторову криву – ребро звороту) і від інтенсивності згинання навколо кожної твірної залежить форма торса. Розглянемо сказане на найпростішому прикладі.

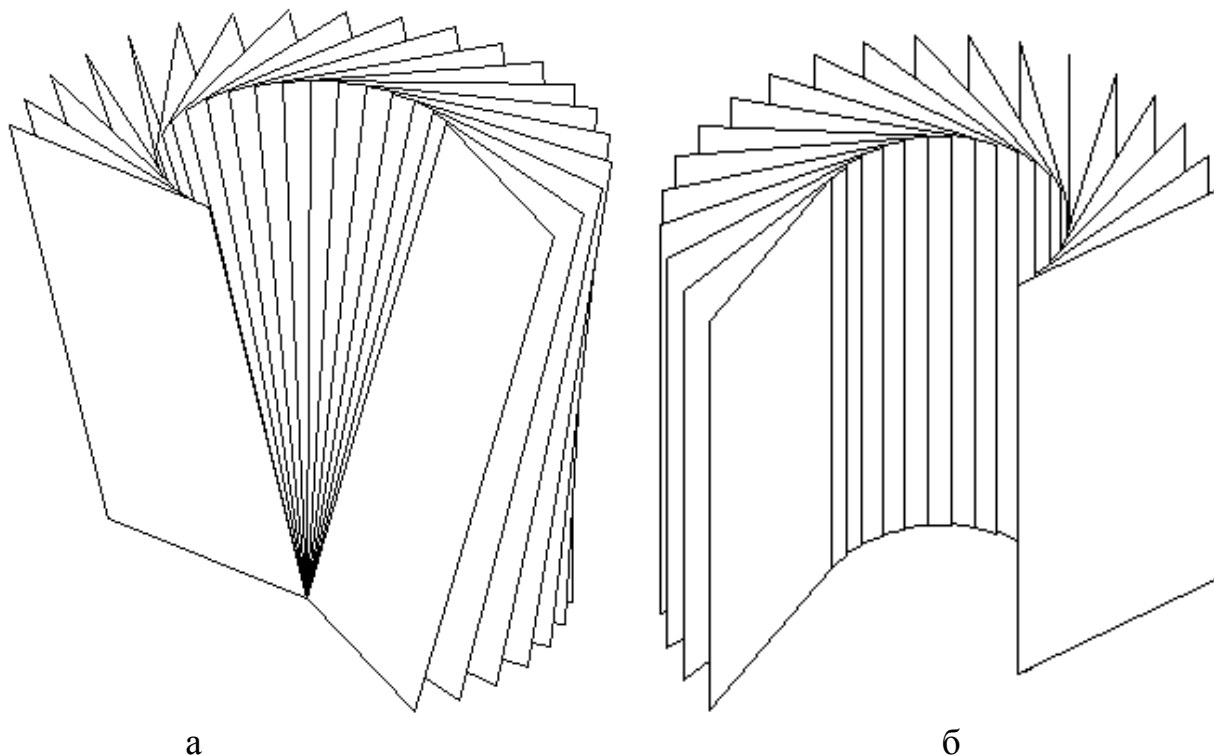
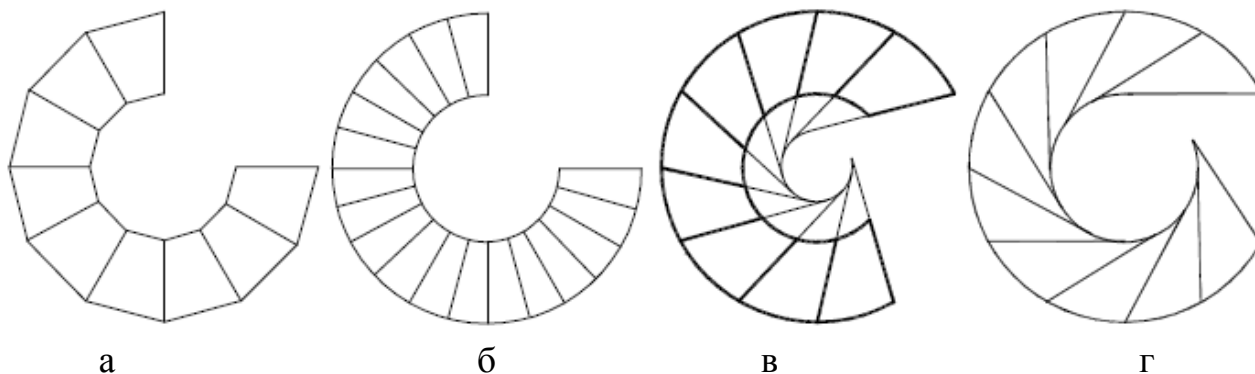


Рис. 1.1. Okремі випадки утворення розгортних поверхонь (торсів):
 а) конічна поверхня;
 б) циліндрична поверхня

Візьмемо плоске кільце і побудуємо в ньому декілька конгруентних трапецій (рис. 1.2,а). Вздовж зовнішніх ліній виріжемо контур із листового матеріалу (наприклад, цупкого паперу). Будемо згинати дану заготовку вздовж бічних ребер на однаковий кут, поки крайні ребра не збіжаться. Ми отримаємо правильну зрізану піраміду. Збільшенням числа бічних ребер можна отримати зрізану піраміду із більшим числом граней. Міркуючи таким чином можна довести число граней до такої кількості, коли окрему грань буде важко вирізнити серед інших, тобто зрізана піраміда перетвориться у зрізаний конус. Плоска заготовка для зрізаного конуса показана на рис. 1.2, б. Можна по іншому розташувати прямі лінії, вздовж яких відбуватиметься згинання заготовки, наприклад, так, як показано на рис. 1.2,в. Ці лінії є дотичними до кола, розташованого всередині плоского кільця. Згинаючи подібним чином заготовку вздовж накреслених прямих ліній ми отримаємо уже іншу розгортну поверхню – розгортний гелікоїд. Кола, які окреслюють кільце, перетворяться у гвинтові лінії, а прямолінійні твірні, продовжені далі, будуть дотичними до іншої гвинтової лінії, яка існує за межами відсіку гелікоїда – гвинтової лінії. Таке згинання кільця можна уявити його скручуванням і одночасним розтягуванням. Проте таке згинання має межі – воно можливе до тих пір, поки ребром звороту не стане внутрішня крайка заготовки (рис. 1.2,г). Проекції поверхні показані на рис. 1.3,а. Спроби збільшити крок поверхні призведуть до

розриву листового матеріалу. Таким чином, ребро звороту може бути розташоване на поверхні, як гранична крайка відсіку, або ж може бути розташоване за межами відсіку, як невидима крива.



а

б

в

г

Рис. 1.2. Приклади плоских заготовок для згинання у розгортну поверхню:

- а) заготовка для згинання її у правильну зрізану піраміду;
- б) заготовка для згинання її у зрізаний конус;
- в) заготовка для згинання її у розгортний гелікоїд із ребром звороту за межами відсіку;
- г) заготовка для згинання її у розгортний гелікоїд, ребро звороту для якого є крайкою відсіку

Розгортна поверхня може бути побудована тільки по одну сторону від ребра звороту, яке на розгортці перетворюється у плоску криву (рис. 1.2,в,г). На цих рисунках прямолінійні твірні, які є дотичними до ребра звороту, продовжені від точки дотику тільки в одну сторону. Якщо їх продовжити в протилежну сторону, то ми отримаємо другу порожнину торса (рис. 1.3,б). Фізичну модель двохпорожнинного торса із однієї плоскої заготовки отримати неможливо. Для цього потрібно дві конгруентні заготовки (плоскі кільця) зшити нитками по внутрішньому колу, яке перетвориться у ребро звороту, і тільки тоді згинати, але при цьому слідкувати, щоб порожнини не збігалися, а були розташовані так, як показано на рис. 1.3,б.

Побудована поверхня розгортного гелікоїда відноситься до окремого класу торсів однакового нахилу твірних. Кожна його прямолінійна твірна нахилена під сталим кутом до горизонтальної площини. Кожна площина однопараметричної множини, що огинають торс, теж нахилена до горизонтальної площини під цим кутом. Ребром звороту такого торса є лінія укусу, тобто така просторова крива, яка має сталий кут підйому. Якщо горизонтальну проекцію такої просторової кривої уявити проекцією циліндра, а саму криву вважати розташованою на цьому циліндрі, то на розгортці циліндра крива укусу перетвориться на пряму. Кут β підйому визначиться як кут між цією прямою і горизонтальною лінією. Для гвинтової лінії таким циліндром буде коловий циліндр (рис.1.4,а). Його розгорткою в межах одного кроку буде прямокутник з основою $2\pi r$ і висотою H (рис. 14,б), де r – радіус кола (основи проекцію вального циліндра). Гвинтова лінія на розгортці циліндра

відобразиться його діагоналлю. При утворенні гвинтової лінії в межах одного кроку точка рівномірно рухається навколо осі циліндра і одночасно рівномірно піднімається вгору вздовж його осі, тобто перебуває у двох рухах. Поточне положення точки на циліндрі і його розгортці залежить від кута повороту α . Наприклад, параметричні рівняння гвинтової лінії на розгортці (діагоналі циліндра) матимуть вигляд: $x=r\alpha$, $z=b\alpha$, де b – так званий гвинтовий параметр. При $\alpha=2\pi$, тобто при повороті точки гвинтової лінії на 360° вона переміститься по осі x на величину $x=2\pi r$, тобто на дожину кола на розгортці циліндра і підніметься вгору на величину $z=2\pi b=H$, тобто на крок гвинтової лінії. Звідси $b=H/2\pi$.

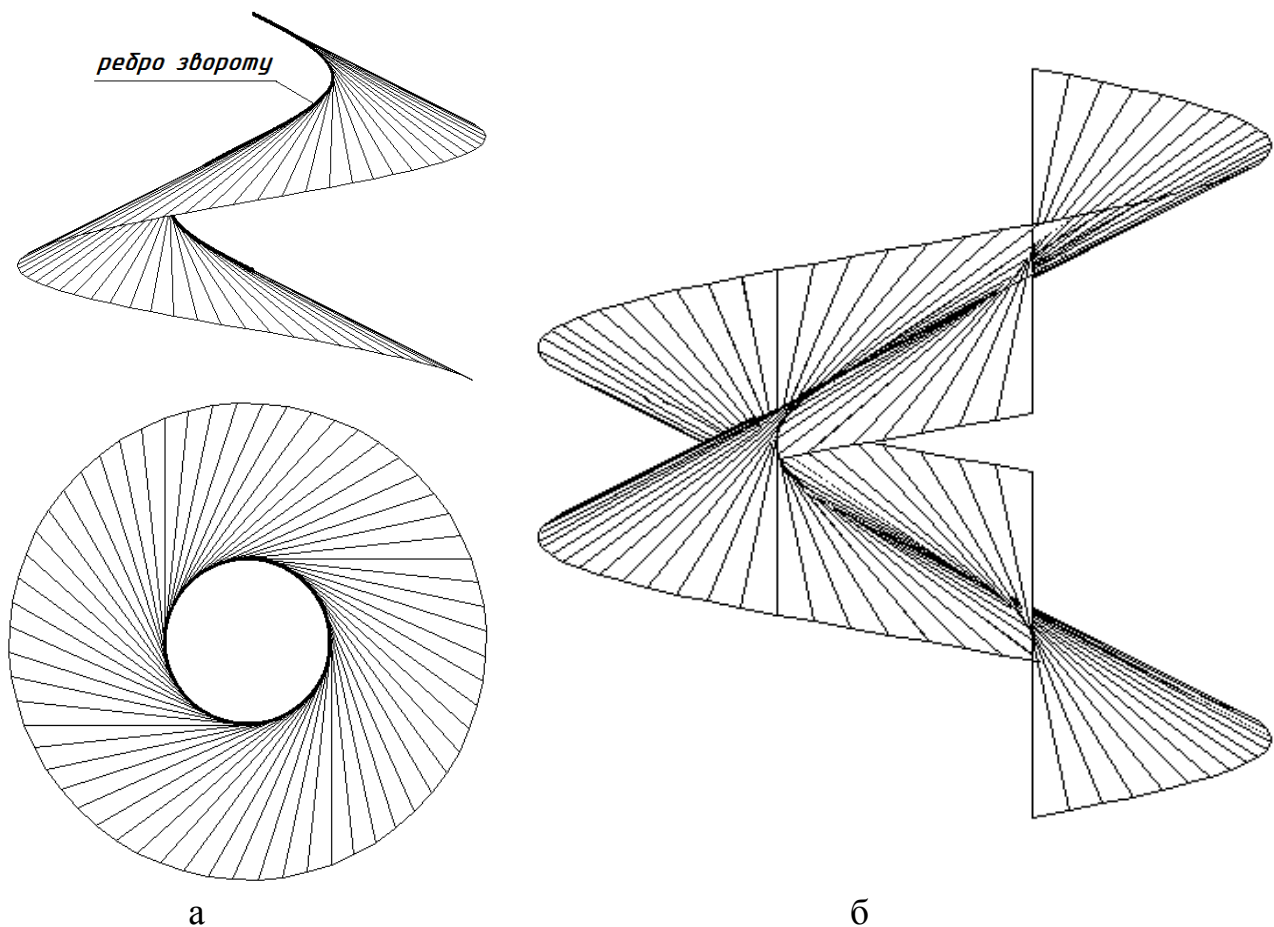


Рис. 1.3. Розгортний гелікоїд:

- а) фронтальна і горизонтальна проєкції однієї порожнини;
 б) фронтальна проєкція гелікоїда із двома порожнинами

Прикладом торса однакового нахилу твірних може бути поверхня земляного насипу залізничного полотна на його повороті. Якщо такий торс перетнути горизонтальною площиною, то всі його твірні складуть із кривою перерізу прямий кут. Оскільки величини кутів не змінюються при згинанні поверхні, то вони будуть прямими і на розгортці. Найпростішим прикладом такої поверхні є коловий конус, розгортка якого представлена на рис. 1,2,б.

Розглянемо аналітичну умову, за якої просторова крива буде лінією укосу. Запишемо її параметричні рівняння довільними залежностями у функції параметра t :

$$\begin{aligned}x &= x(t); \\y &= y(t); \\z &= z(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

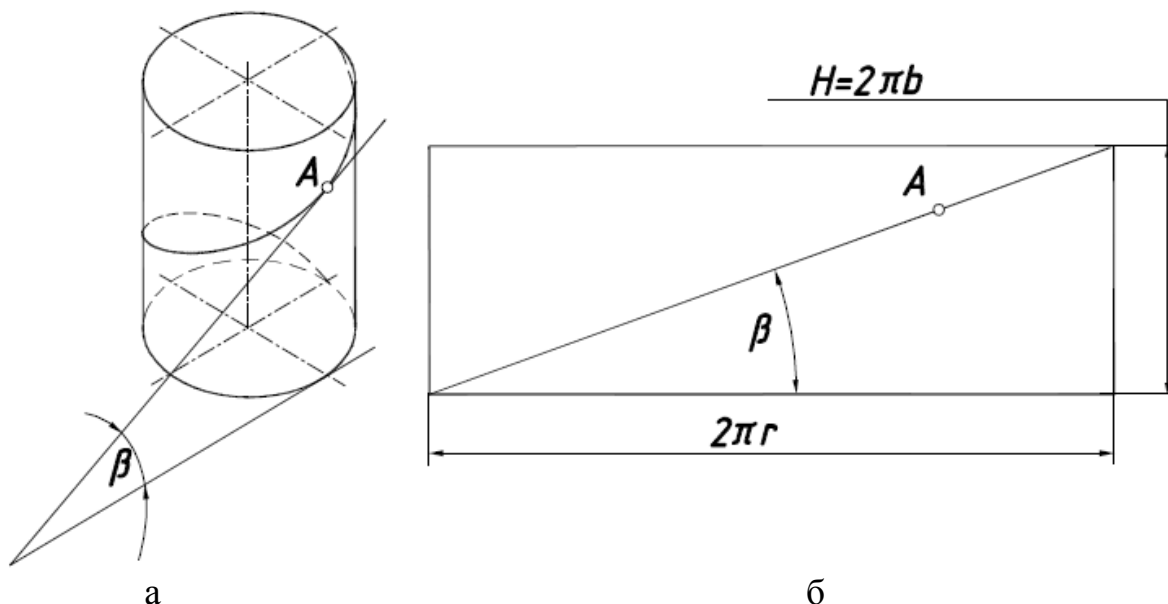


Рис. 1.4. До утворення одного кроку циліндричної гвинтової лінії:
а) гвинтова лінія на бічній поверхні циліндра;
б) перетворення гвинтової лінії в діагональ розгортки циліндра

Щоб знайти вектор \vec{T} дотичної до кривої (1.1), необхідно продиференціювати її параметричні рівняння по змінній t . На рис. 1.5 зображені складові вектора в проекціях на осі координат. Як видно із рис. 1.5, тангенс кута β можна визначити за формулою:

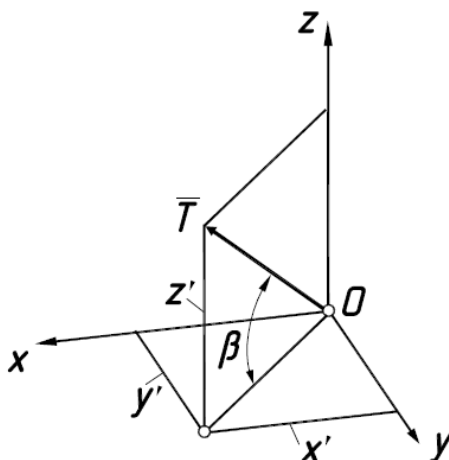


Рис. 1.5. Складові вектора \vec{T} , дотичного до просторової кривої, в проекціях на осі координат

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (1.2)$$

Варто зауважити, що маючи горизонтальну проекцію, задану рівняннями $x=x(t)$; $y=y(t)$, можна побудувати багато просторових кривих. Але якщо задати закономірність зміни кута $\beta=\beta(t)$, то координата $z=z(t)$ визначиться однозначно:

$$z = \int \operatorname{tg} \beta \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (1.3)$$

Для кривої укосу $\beta=\text{const}$, отже її параметричні рівняння запишуться:

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= \operatorname{tg} \beta \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Відомо, що довжину дуги s плоскої кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$ визначають за допомогою інтегралу $s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$. Якщо після інтегрування вдається знайти вираз $t=t(s)$, то параметричні рівняння кривої укосу запишуться:

$$\begin{aligned} x &= x(s); \\ y &= y(s); \\ z &= s \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Довжину дуги s кривої називають натуральним параметром, тому параметричні рівняння (1.5) є рівняннями у функції натурального параметра.

Різні автори використовували різні підходи до конструювання торсів за допомогою рухомої площини.

Алгебраїчні лінійчаті поверхні 4-го порядку достатньо вивчені як в аналітичній так і в синтетичній формі. Найбільш широко вивченням цього питання займалися Обухова В.С. [84 - 90, 92 – 95, 99, 101, 102] та її учні [14 – 17, 19, 23 – 34, 70, 81, 107 - 127]. В цих роботах торси 4-го порядку конструювалися обкаткою площини по двох напрямних алгебраїчних кривих 2-го порядку (рис. 1.6), які для зручності розташовані в координатних площинах.

Як окремий випадок розглянуто конструювання торса, при якому алгебраїчні крививі другого порядку розміщені в паралельних площинах. Однопараметрична множина дотичних площин утворюється при обкатці заданих кривих. Твірні такого торса проходять через відповідні точки кривих другого порядку, у яких дотичні прямі паралельні [94].

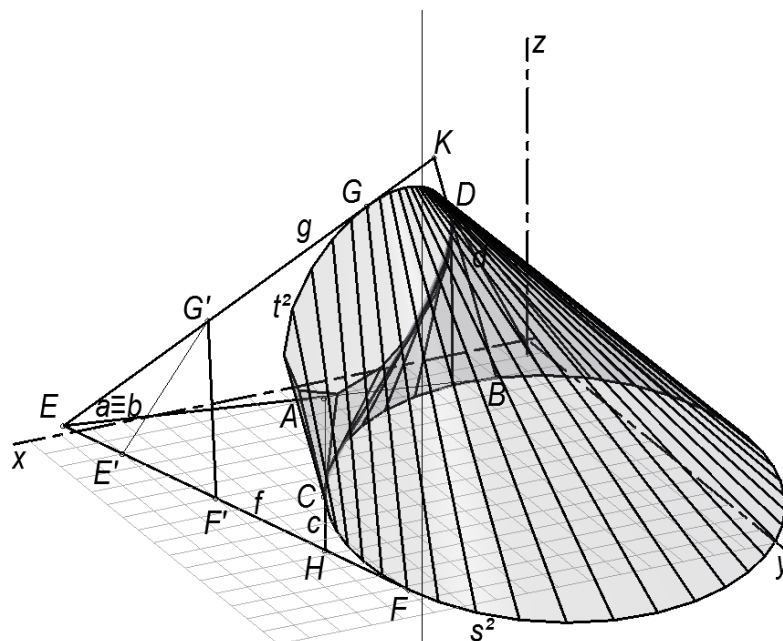


Рис. 1.6. До конструювання алгебраїчної лінійчатої поверхні 4-го класу.

Прикладом такого утворення алгебраїчного торса є обкатка площиною двох парабол, розташованих у паралельних площинах з непаралельними осями (рис. 1.7). Якщо осі парабол будуть паралельними, то ми отримаємо циліндричну поверхню.

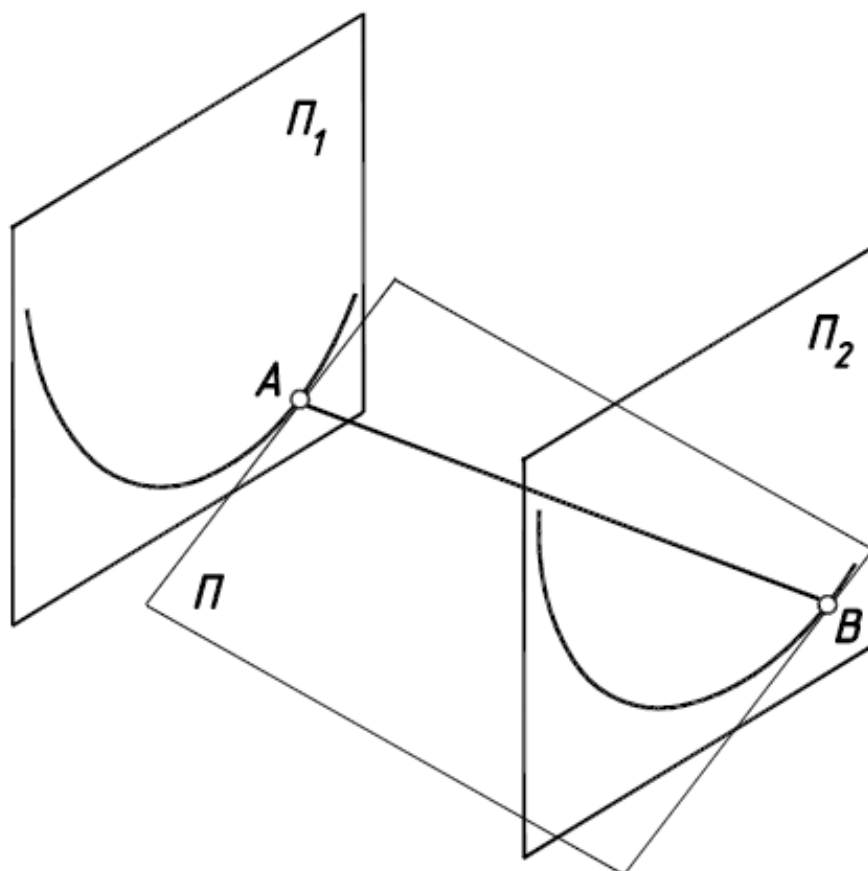


Рис. 1.7. До утворення алгебраїчного торса, у якого напрямними кривими є параболи в паралельних площинах

Конструювання торса зводиться до відшукування на параболах відповідних точок A і B , дотичні у яких до парабол є паралельними. Через ці точки проходить прямолінійна твірна поверхні.

Розвиток комп'ютерних технологій дав нові можливості дослідження алгебраїчних торсів 4-го класу вищих порядків. Вагомий внесок у вивчення них здійснив учень Обухової В.О. Несвідомін В.М.[81], який вперше синтетичні методи досліджень здійснив за допомогою комп'ютерних технологій.

Є випадки, коли процес конструювання поверхонь значно спрощується при використанні спеціальних систем відліку. Скідан І.А. розробив спосіб конструювання торсової поверхні, який полягає у відшуванні твірної торса у площині-носію Ω^n , що обертається за заданим законом навколо осі Oz в різних системах координат: узагальнених циліндричних (рис. 1.8,а) [137], гіперболічних (рис. 1.8, б) [138] та квазісферичних координатах (рис. 1.8,в) [140]. Функції залежності прямокутних декартових координат x, y, z від спеціальних координат t, u, v (або t, ρ, β для квазісферичних координат) задаються у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= x(t, u, v); \quad y = y(t, u, v); \quad z = z(t, u, v) \\ \text{або } x &= x(t, \rho, \beta); \quad y = y(t, \rho, \beta); \quad z = z(t, \rho, \beta). \end{aligned} \quad (1.6)$$

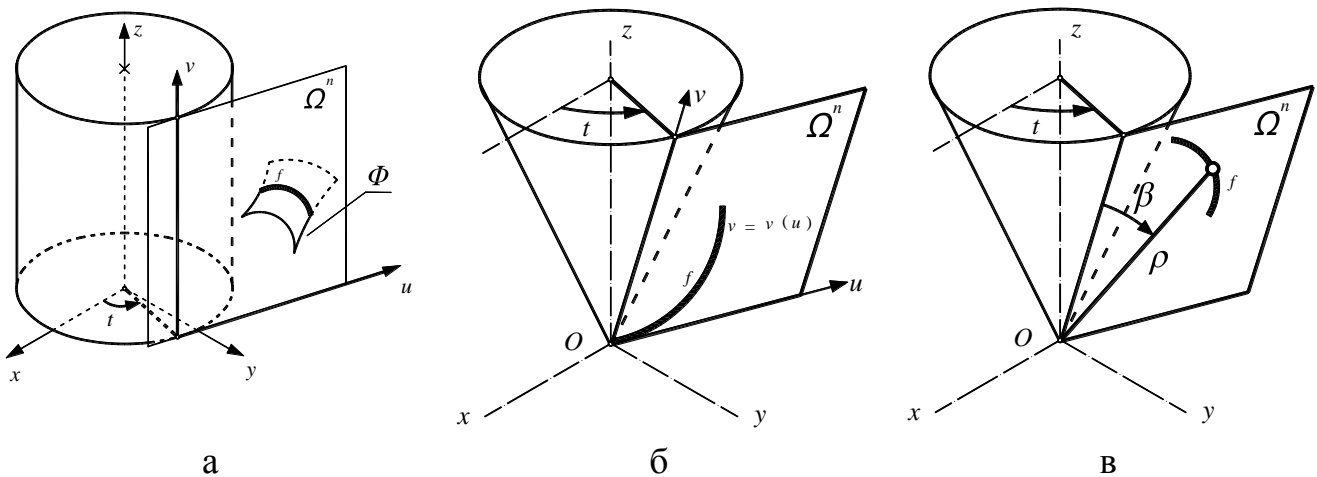


Рис.1.8. Знаходження твірної торса в площині, яка рухається за заданим законом:

- а) в узагальнених циліндричних координатах;
- б) у гіперболічних координатах;
- в) у квазісферичних координатах

В 1847 році при вивченні просторових кривих французький математик Жан Фредерік Френе, а в 1851 році незалежно від нього Жозеф Альфред Серре відкрили формули, які дають можливість вивчення геометричних об'єктів пов'язаних із заданою просторовою кривою. Розв'язання задач, які вимагають можливості управління наперед заданими диференціальними параметрами

поверхонь значно полегшується при використанні формул Серє-Френе, оскільки значно спрощуються вирази при аналітичних перетвореннях. Ці формули виражають похідні ортів супровідного тригранника Френе $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ через функції цих же векторів. Формули Френе відіграють виключно велику роль в диференціальній геометрії, особливо в теорії просторових кривих. Вони дають можливість швидко і просто розкласти похідні будь-якого порядку від одиничних ортів $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ рухомого натурального тригранника (або супровідного тригранника Френе) кривої на складові в проекціях на ці ж орти.

Із диференціальної геометрії відомо, що в кожній точці просторової кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями. Одиничні орти вздовж них (дотична $\bar{\tau}$, головна нормаль \bar{n} і бінормаль \bar{b}) утворюють супровідний (натуральний) тригранник кривої. Оскільки його положення в певній точці кривої визначається однозначно, то при переміщенні тригранника по кривій його рух теж буде цілком визначеним. Це означає, що якщо рухати тригранник по кривій із заданою швидкістю, то можна визначити швидкість і прискорення будь-якої точки тригранника, величина і напрям яких залежатимуть від диференціальних характеристик кривої. Швидкість точки тригранника складатиметься із швидкості полюса (початку координат) і швидкості цієї точки в обертальному русі тригранника відносно полюса. Щоб визначити швидкість в обертальному русі, необхідно в кожен момент руху знати положення і величину вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$. Відомо, що він знаходиться в спрямній площині і його проекціями на орти $\bar{\tau}$ і \bar{b} є відповідно скрут σ і кривина k кривої в даній точці (рис. 1.9).

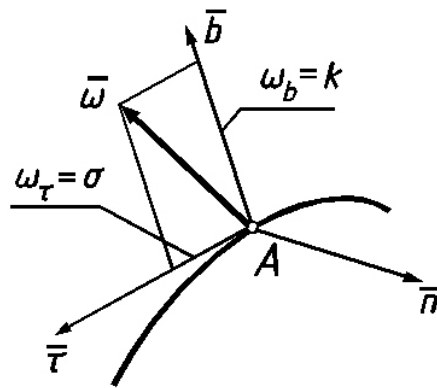


Рис. 1.9. Положення вектора $\bar{\omega}$ миттєвої осі обертання тригранника в його системі

Значення вектора кутової швидкості натурального тригранника (вектора Дарбу) визначається із формули:

$$\bar{\omega} = v_A (\bar{\tau} \sigma + \bar{b} k), \quad (1.7)$$

де V_A – величина швидкості руху вершини тригранника по кривій.

Використання натуральної системи координат (системи супровідного тригранника Френе) для кривої заданої у функції довжини дуги s при конструюванні поверхонь дає можливість застосування формул Серре-Френе для аналітичних перетворень [72, 151]:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}k; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = \bar{b}\sigma - \bar{\tau}k; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = \bar{n}\sigma, \quad (1.8)$$

де $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – орти дотичної, головної нормалі та бінормалі відповідно напрямної кривої;

$k=k(s)$ – кривина кривої у поточній точці;

$\sigma=\sigma(s)$ – скрут кривої у поточній точці.

Якщо просторову криву задано параметричними рівняннями (1.1), то кривину k і скрут σ кривої визначають із формул [72]:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}. \quad (1.10)$$

Довжина дуги s просторової кривої знаходиться за формулою:

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (1.11)$$

Якщо із (1.11) можливо виразити функцію $t = t(s)$, то параметричні рівняння кривої записуються у функції її довжини дуги:

$$\begin{aligned} x &= x(s); \\ y &= y(s); \\ z &= z(s). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Якщо просторова крива (1.12) задана параметричними рівняннями у функції натурального параметра s , то вирази кривини і скруту спрощуються:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \quad (1.13)$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \quad (1.14)$$

Вирази $k=k(s)$ (1.13) і $\sigma=\sigma(s)$ називаються натуральними рівняннями кривої. Вони не змінюються при зміні положення кривої у системі декартових координат. Саме вони використовуються при застосуванні формул Френе (1.8).

Засновником способу конструювання поверхонь технічних форм у системі супровідного тригранника Френе вважають російського геометра А.М. Якубовського. Подальший свій розвиток такий спосіб конструювання поверхонь дістав у працях В.А. Осипова.

Якщо геометричним образом, що конструює поверхню за допомогою тригранника Френе, буде площина, то утворена поверхня є обвідною однопараметричної сім'ї площин тобто торсом [163]. Методику знаходження ребра звороту торса, як обвідної поверхні однопараметричної сім'ї площин, можна знайти у [36, 72]. Але доцільним є знаходження параметричних рівнянь торса, як обвідної поверхні однопараметричної сім'ї площин, якщо аналітичне задання цієї сім'ї має геометричний зміст.

У роботі С.Ф. Пилипаки [123] був запропонований алгоритм утворення лінійчатих поверхонь у системі тригранника Френе напрямної кривої, коли параметри зміни положення прямолінійної твірної по відношенню до тригранника Френе визначалися двома кутами (рис. 1.10):

$\varepsilon=\varepsilon(s)$ - між площиною, утвореною напрямним вектором прямолінійної твірної і ортом дотичної тригранника та стичною площиною тригранника Френе;

$\gamma=\gamma(s)$ - між ортом дотичної і напрямним вектором прямолінійної твірної.

Задаючи закономірності зміни двох зазначених кутів, можна будувати множину прямолінійних твірних, яка утворить лінійчату поверхню. При цьому потрібно переходити від рухомої системи тригранника напрямної кривої до нерухомої системи координат $OXYZ$. Такий перехід здійснюється за допомогою дев'яти напрямних косинусів, які знаходяться через похідні напрямної кривої. Таким способом утворення лінійчатої поверхні можна користуватися і при параметричних рівняннях напрямної кривої у функції довільного параметра, однак тоді твірні поверхні будуть перетинати напрямну криву не через однакові проміжки, що погіршує наочність одержаних поверхонь. Якщо незалежною змінною є натуральний параметр напрямної кривої, то такий недолік усувається. Крім того, можна застосовувати формули Френе. В загальному

випадку отримана таким чином поверхня є нерозгортною. Для того, щоб вона була розгортною, потрібно забезпечити певний взаємозв'язок між кутами $\varepsilon = \varepsilon(s)$ і $\gamma = \gamma(s)$:

$$\operatorname{tg} \gamma \cdot (\sigma + \varepsilon') = k \sin \varepsilon . \quad (1.15)$$

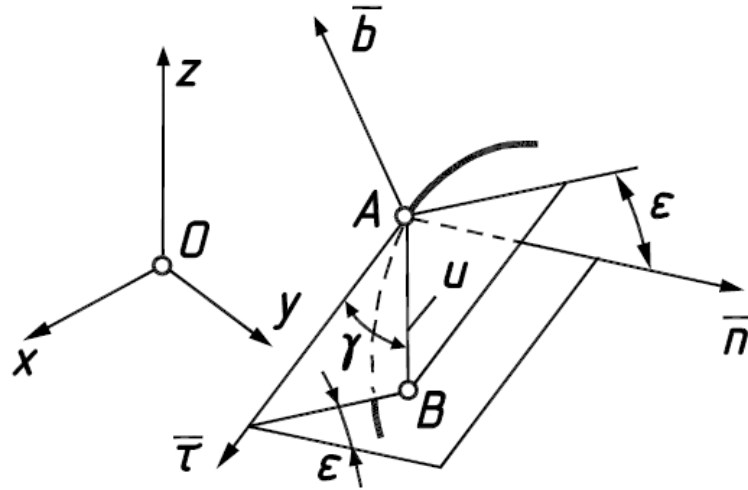


Рис.1.10. Супровідний тригранник Френе просторової напрямної кривої із прямолінійною твірною AB у його системі [74].

Муквич М.М. в праці [74] для утворення торса розташовував площину в системі тригранника нерухомо по відношенню до нього у відрізках на його ортах (рис. 1.11). При русі тригранника по напрямній кривій утворювалася однопараметрична множина площин, яка огинала певний торс.

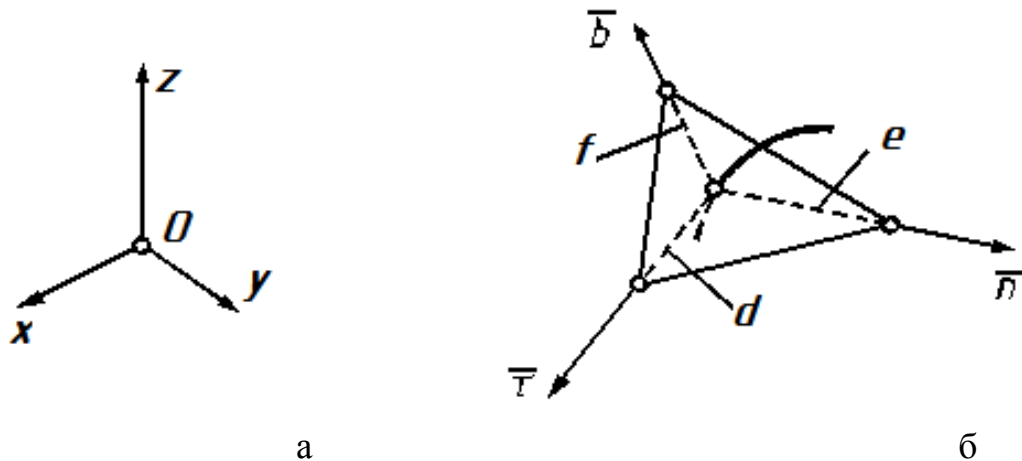


Рис. 1.11. Супровідний тригранник Френе в нерухомій системі координат:
а) нерухома система координат $Oxyz$
б) трикутний відсік, заданий в системі тригранника Френе відрізками e , d , f на його ортах

Управляючи параметрами розміщення площини у системі рухомого тригранника напрямної кривої (довільної чи кривої укосу), він конструював

торси, як обвідні поверхні однопараметричних множин площин. Автором зроблено аналітичний опис цих поверхонь та встановлені їх диференціальні характеристики [74]. Зокрема, при рівності одного із відрізків нулю площина збігалася із однією із координатних площин тригранника. На рис. 1.12 побудовано такі множини площин для замкненої просторової кривої.

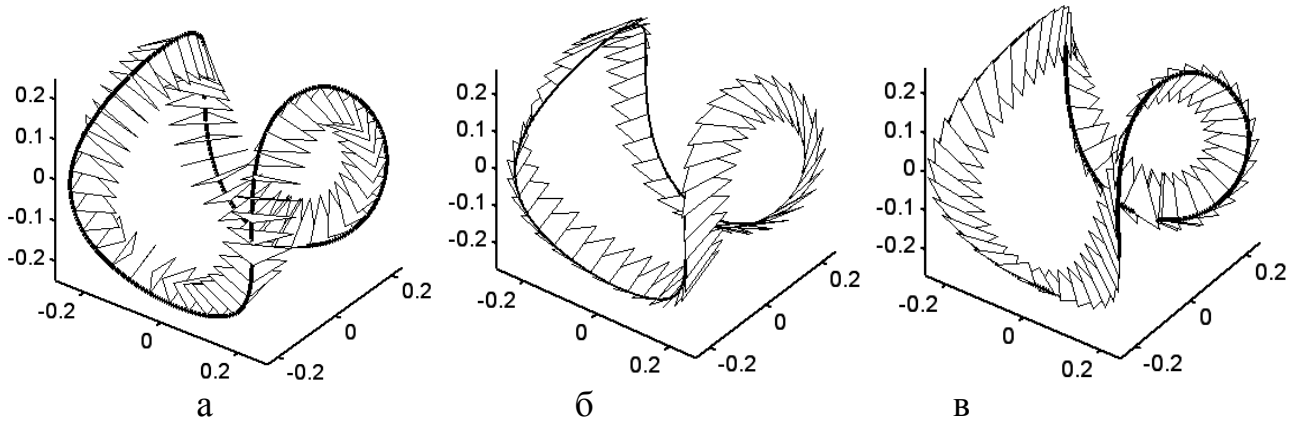


Рис. 1.12. Множина площин, закріплених нерухомо в системі супровідного тригранника просторової кривої:

- а) множина нормальних площин;
- б) множина спрямних площин;
- в) множина стичних площин

1.2. Конструювання торсів однакового нахилу твірних

Як відомо, торси однакового нахилу твірних застосовуються для побудови відкосів земляного полотна залізничних та шосейних доріг на кривих ділянках шляху та схилах [8, 73]. Відсіки торсів однакового нахилу твірних зручно використовувати при конструюванні гвинтових поверхонь [143] та робочих органів [42, 102, 121]. Так, Карташев А.І. розглядав такі поверхні, горизонтальними слідами яких є конічні перерізи та представив побудову твірних торса, напрямною кривою якого є лінія укусу [51]. Способи утворення алгебраїчних торсів однакового нахилу твірних були розроблені Обуховою В.С. [89]. Бубенніков А.В. та Громов М.Я. запропонували метод побудови кривої торса на розгортці за допомогою напрямного конуса і графіків площ, які визначаються із співвідношення довжин однойменних проєкцій парних твірних торса і його напрямного конуса [13], це отримало свій подальший розвиток для торсів однакового нахилу твірних в роботах їх учнів [63]. І.А. Скідан описав у спеціальних координатах торси однакового нахилу з ребром звороту, яке є лінією укусу на круговому циліндрі або конусі [139, 143]. Особливість таких торсів полягає в тому, що їх ребра звороту розв'язуються в квадратурах, що значно полегшує відшукання розгорток.

Ще один підхід у конструюванні торсів однакового нахилу твірних був запропонований Обуховою В.С. та Пилипакою С.Ф. [89]. Це поверхні, для яких напрямна крива є не ребром звороту, а кривою, через яку проходять твірні

торса. Спосіб полягає у знаходженні обвідної поверхні однопараметричної множини колових конусів із заданим кутом нахилу їх твірних до основи. Вершина конуса із вертикальною віссю неперервно рухається по заданій напрямній кривій і в результаті утворюється однопараметрична множина конусів (рис. 1.13).

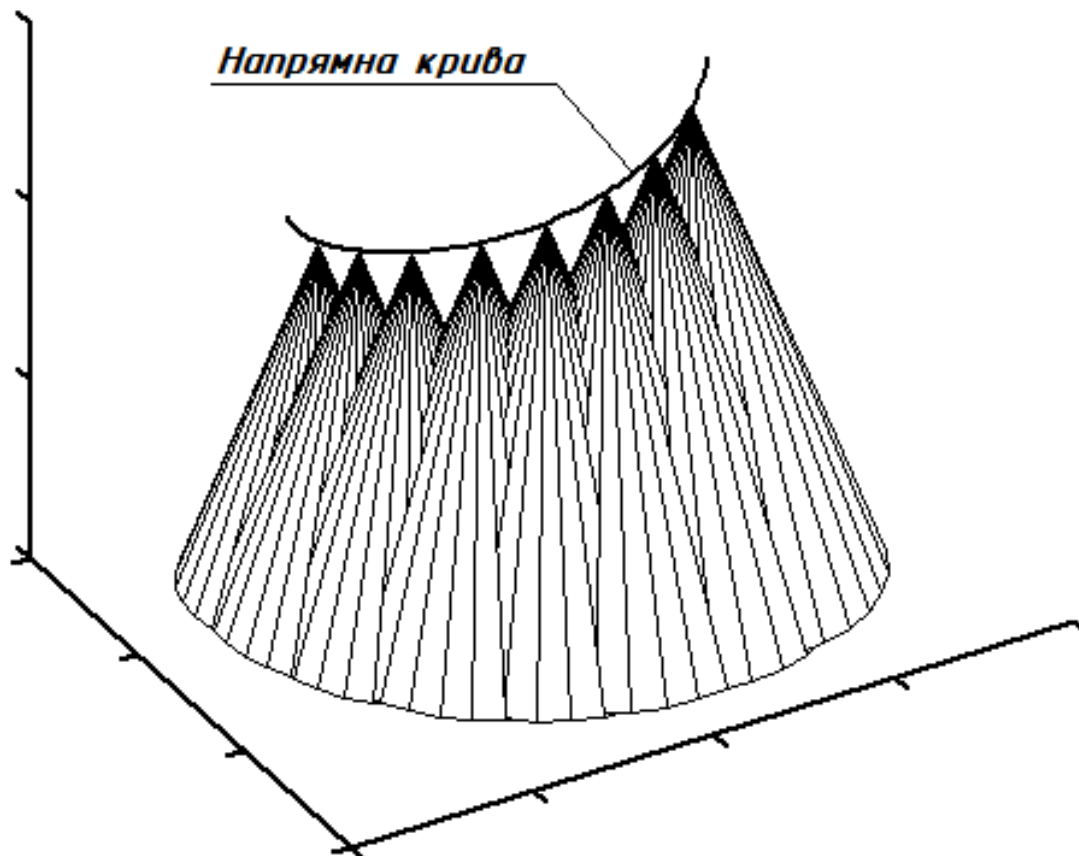


Рис. 1.13. Однопараметрична множина конусів із вершинами на заданій напрямній кривій

Оскільки для технічних форм часто не важливо знати форму ребра звороту, а важливо забезпечити проходження поверхні через задану плоску або просторову лінію, запропонований спосіб дозволяє таким чином конструювати торс однакового нахилу твірних. Твірні торса знаходять, як прямі, що з'єднують точки напрямної кривої з відповідними точками горизонтального сліду торса. Цей слід торса є його перерізом горизонтальною площиною і знаходиться, як обвідна крива множини кіл – перерізів конусів (рис. 1.14). Знайдемо його параметричні рівняння.

Напрямну криву, через яку має проходити торс, задамо рівняннями у вигляді (1.1):

$$\begin{aligned}x_n &= x_n(t); \\y_n &= y_n(t); \\z_n &= z_n(t).\end{aligned}\tag{1.16}$$

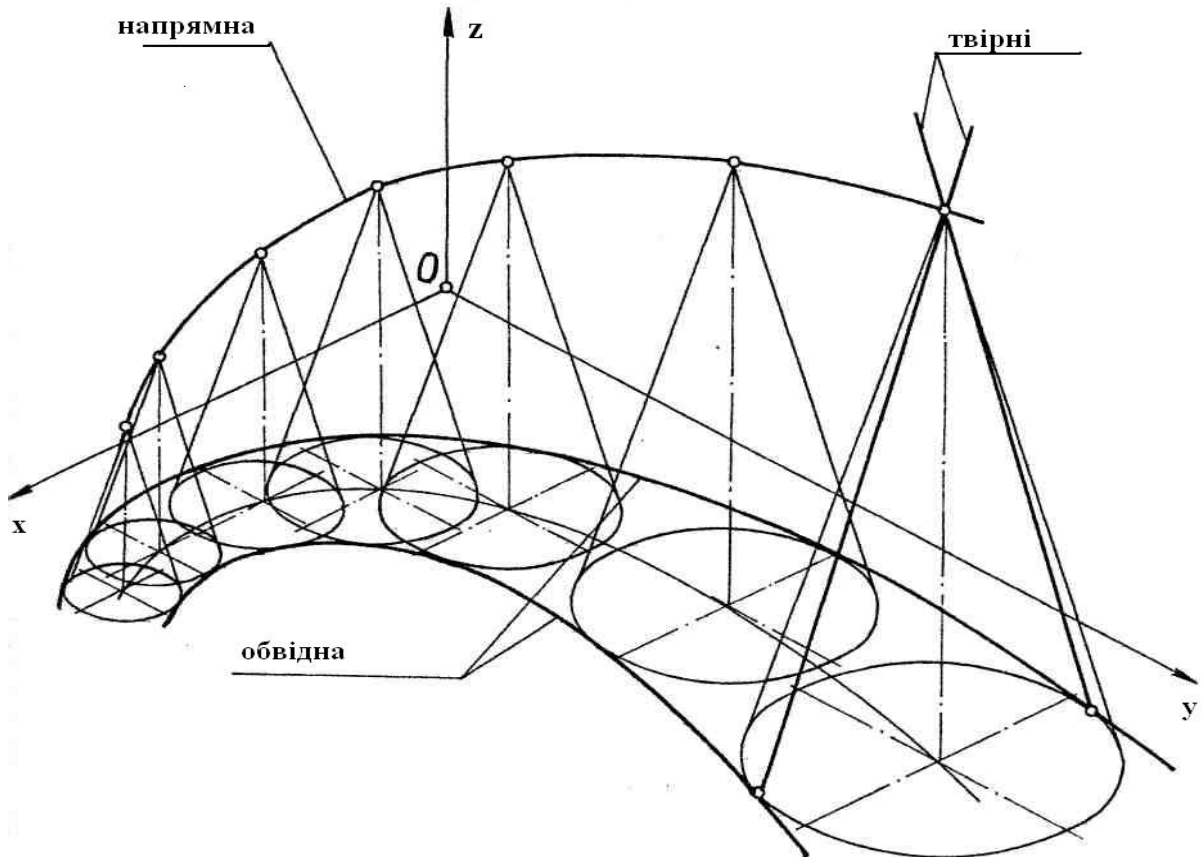


Рис. 1.14. Конструювання торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини конусів

В кожному положенні конус перерізається горизонтальною площиною по колу, радіус r основи якого залежить від відстані z_n між горизонтальною площиною Oxy і вершиною конуса. Зв'язок між ними описується залежністю:

$$r = z_n \operatorname{ctg} \beta ,\tag{1.17}$$

де β – кут нахилу твірних конуса до горизонтальної площини.

Оскільки центр кола в площині Oxy з координатами x_n , y_n міняє своє положення, а радіус самого кола змінюється згідно (1.17), то неявне рівняння однопараметричної кіл запишеться:

$$(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 = z_n^2 \operatorname{ctg}^2 \beta .\tag{1.18}$$

Щоб знайти обвідну криву сім'ї кіл (1.18), необхідно рівняння (1.18) продиференціювати по змінній t . Після цього отримаємо:

$$-2x'_n(x-x_n)^2 - 2y'_n(y-y_n)^2 = 2z_n z'_n \operatorname{ctg}^2 \beta. \quad (1.19)$$

Розв'яжемо систему двох рівнянь (1.18) і (1.19) відносно x і y . Оскільки рівняння квадратні, отримаємо вирази із різним знаками «+» і «-», які відповідають двом обвідним (рис. 1.14):

$$\begin{aligned} x_{об} &= x_n - \frac{z_n \operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(z_n' x_n' \operatorname{ctg} \beta \mp y_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right); \\ y_{об} &= y_n + \frac{z_n \operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(-z_n' y_n' \operatorname{ctg} \beta \mp x_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Це означає, що існує дві твірних конуса, які також є твірними торса і які проходять через одну точку напрямної кривої (вершину конуса), належать різним порожнинам торса і торкаються ребра звороту у різних точках. Зокрема, формули (1.20) можуть дати одну обвідну у випадку, коли вираз під коренем дорівнює нулю. Прирівнявши його до нуля і розв'язавши відносно z_n , отримаємо вираз, який точно збігається із останнім рівнянням у (1.4). Це означає, що одна обвідна буде у тому випадку, коли напрямна є лінією укосу, а кут її підйому буде рівним куту β при основі конуса. Але при цьому напрямна крива є ребром звороту і всі твірні торса дотичні до нього.

Запишемо рівняння твірної конуса, яка також належить торсу однакового нахилу і проходить через точку на напрямній кривій і через відповідну точку на обвідній:

$$\frac{x - x_{об}}{x_n - x_{об}} = \frac{y - y_{об}}{y_n - y_{об}} = \frac{z - z_{об}}{z_n - z_{об}} = u, \quad (1.21)$$

де x, y, z – поточні координати твірної;

u – параметр, пропорційний довжині твірної.

Вирази, що стоять в знаменниках формули (1.21), є координатами напрямного вектора прямолінійної твірної торса. Підставивши в них рівняння (1.20) обвідної кривої, отримаємо:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{z_n \operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(z_n' x_n' \operatorname{ctg} \beta \mp y_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right); \\
m &= - \frac{z_n \operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(- z_n' y_n' \operatorname{ctg} \beta \mp x_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right); \\
n &= z_n .
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Напрямок вектора (1.22) не зміниться, якщо ми кожен його складову розділимо на z_n . Після цього його проекції на осі декартової системи координат запишуться:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{\operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(z_n' x_n' \operatorname{ctg} \beta \mp y_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right); \\
m &= - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{x_n'^2 + y_n'^2} \left(- z_n' y_n' \operatorname{ctg} \beta \mp x_n' \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 - z_n'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \right); \\
n &= 1 .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

У вираз (1.21) в знаменники підставимо проекції вектора l, m, n , які відомі із (1.23), і прирівняємо кожен із трьох складових до u . Розв'язавши отримані рівняння відносно x, y, z , одержимо:

$$\begin{aligned}
X &= x_{об} + ul ; \\
Y &= y_{об} + um ; \\
Z &= u .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

У останньому рівнянні (1.24) відсутній вираз $z_{об}$, оскільки $z_{об}=0$. Ліві частини рівнянь позначені прописними літерами для того, щоб відрізнити параметричні рівняння лінії від параметричних рівнянь поверхні. Рівняння (1.22) є параметричними рівняннями поверхні, залежними від двох змінних – t і u , причому ми бачимо, що параметр u має фізичний зміст: він вказує на висоту точки поверхні від горизонтальної площини. Крім того, він пропорціональний довжині прямолінійної твірної торса, відлік якої починається від точки на обвідній кривій. Напрямокний вектор можна зробити одиничним, тоді параметр u буде дорівнювати довжині твірної від напрямної кривої (в нашому випадку обвідної) до поточної точки на цій твірній.

Рівняння (1.24) дозволяють будувати торс однакового нахилу твірних за будь-якою напрямною кривою, заданої у вигляді (1.16). Можна задати горизонтальну проекцію напрямної кривої у вигляді кола радіуса r , тоді напрямною кривою буде циліндрична лінія:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{н}} &= r \cos t; \\
 y_{\text{н}} &= r \sin t; \\
 z_{\text{н}} &= z_{\text{н}}(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

В залежності від функції $z_{\text{н}}=z_{\text{н}}(t)$ можна отримувати різні циліндричні лінії, які будуть лініями стику між торсом і циліндричним валом. Формули (1.20) і (1.23) відповідно запишуться:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{об}} &= r \cos t + \frac{z_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta}{r} \left[z'_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta \sin t \pm \sqrt{r^2 - z_{\text{н}}'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \cos t \right]; \\
 y_{\text{об}} &= r \sin t - \frac{z_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta}{r} \left[z'_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta \cos t \mp \sqrt{r^2 - z_{\text{н}}'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \sin t \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} \left[z'_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta \sin t \pm \sqrt{r^2 - z_{\text{н}}'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \cos t \right]; \\
 m &= \frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} \left[z'_{\text{н}} \operatorname{ctg} \beta \cos t \mp \sqrt{r^2 - z_{\text{н}}'^2 \operatorname{ctg}^2 \beta} \sin t \right]; \\
 n &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Розглянемо приклад. Побудувати відсік торса однакового нахилу твірних, який проходить через циліндричну напрямну криву, задану залежністю $z_{\text{н}}=r \operatorname{tg} \beta \sin t$.

Вихідними залежностями є $z_{\text{н}}$ і $z'_{\text{н}}$:

$$z_{\text{н}} = r \operatorname{tg} \beta \sin t; \quad z'_{\text{н}} = r \operatorname{tg} \beta \cos t.
 \tag{1.28}$$

Не важко переконатися, що напрямна лінія – еліпс, площина розташування якого нахилена під кутом β до горизонтальної площини (рис. 1.15,а, на фронтальній проекції – потовщена лінія). Підставивши (1.28) в (1.26), знаходимо рівняння обвідних:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{об}1} &= r \cos t (1 + 2 \sin^2 t); & y_{\text{об}1} &= 2 r \sin^3 t; \\
 x_{\text{об}2} &= r \cos t; & y_{\text{об}2} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Згідно (1.29) друга обвідна – пряма. Їй відповідає площина розташування прямого еліпса, на яку розпався торс. Цей випадок, якому відповідають нижні знаки у формулах (1.26), (1.27), не розглядаємо. Із (1.27) знаходимо проекції прямого вектора для першого випадку:

$$\begin{aligned}
 l &= -\operatorname{ctg} \beta \sin 2t; \\
 m &= \operatorname{ctg} \beta \cos 2t; \\
 n &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

Параметричні рівняння торса згідно формул (1.24) приймають вид:

$$\begin{aligned} X &= r \cos t(1 + 2 \sin^2 t) - u \operatorname{ctg} \beta \sin 2t; \\ Y &= 2r \sin^3 t + u \operatorname{ctg} \beta \cos 2t; \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Рівняння (1.31) є рівняннями торса однакового нахилу твірних для конкретної залежності z_H . Для побудови торсів комп'ютерними засобами зручно користуватися загальними рівняннями (1.24), до яких входять вирази (1.29) і (1.30). До складеної програми достатньо ввести залежність $z_H = z_H(t)$ і її похідну, щоб будувати торси для різних циліндричних ліній. На рис. 1.15 в проєкціях побудовано відсіки торса за рівняннями (1.31). На рис. 1.15,а побудовано відсік торса між обвідною і напрямною (еліпсом), який розташований над горизонтальною площиною, в якій знаходиться обвідна лінія. На рис. 1.15,б відсік торса побудовано під площиною, тобто при від'ємних значеннях параметра u . Зовнішня крайка торса на рис. 1.15,а є внутрішньою крайкою торса на рис. 1.15,б, тому що вона є спільною обвідною лінією в горизонтальній площині.

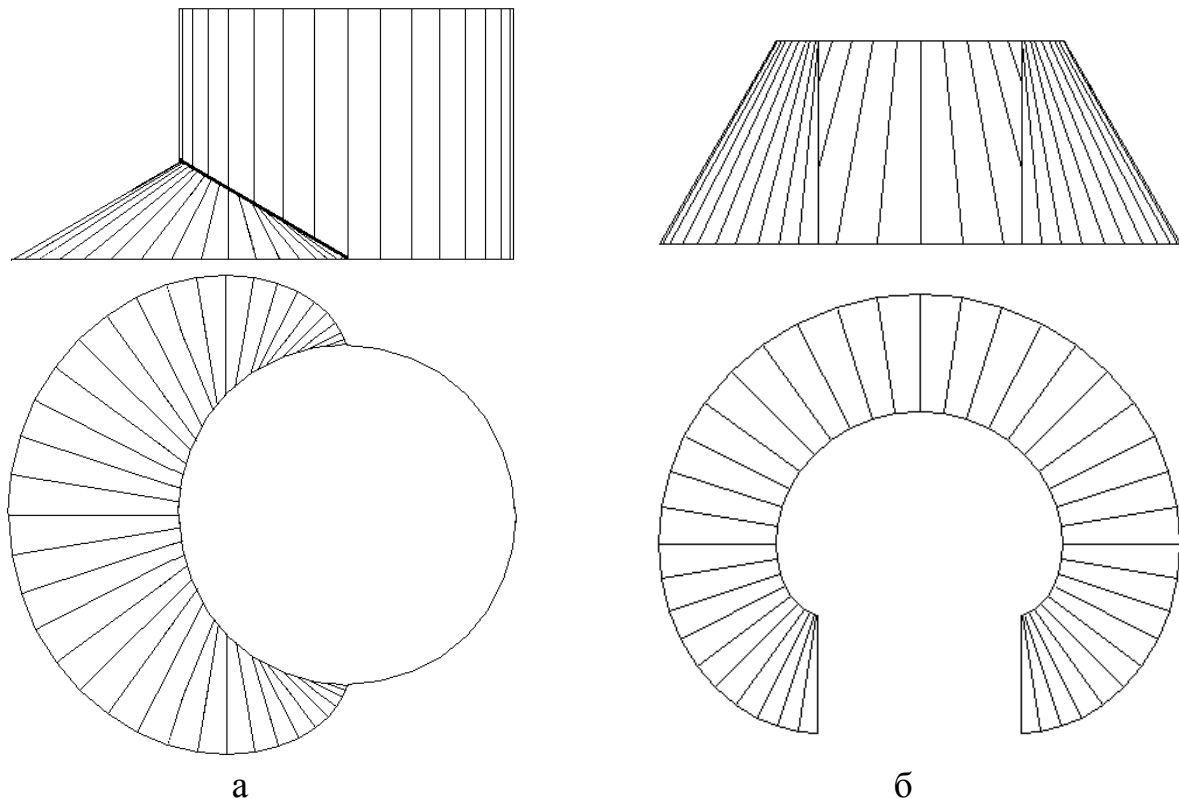


Рис. 1.15. Торс однакового нахилу твірних, побудований за рівняннями (1.31):

- а) відсік торса над площиною розташування обвідної кривої, кут $\beta = 30^\circ$;
 б) відсік торса під площиною розташування обвідної кривої, кут $\beta = 60^\circ$

Розглянемо застосування запропонованого способу побудови торсів однакового нахилу твірних до конструювання підпорної поверхні звужуючого шнека кормозбирального комбайна. Робочою поверхнею такого шнека є гвинтовий коноїд. У комбайнах старих конструкцій робочу поверхню витка зміцнювали приварюванням косинців із тильної сторони до витка і циліндричного вала. Проте такий прийом не вирішував проблему, особливо при зростанні продуктивності комбайнів. В сучасних потужних машинах робочу поверхню зміцнюють ще одним (підпорним) витком, який стикується із основним по гвинтовій лінії – зовнішній країці робочого витка. На рис. 1.16 зображено такий шнек із поверхнями змінного кроку, причому підпорним витком служить косий гелікоїд. Однак косий гелікоїд є нерозгортною поверхнею і її не можна виготовити простим згинанням заготовки. Проте можна сконструювати торсову гвинтову поверхню однакового нахилу твірних. Якби крок був сталим, то задача конструювання шнека була б простішою, оскільки розгорткою витка торса-гелікоїда є плоске кільце (рис. 1,2,г) із листового матеріалу, радіуси внутрішньої і зовнішньої крайок якого можна розрахувати.

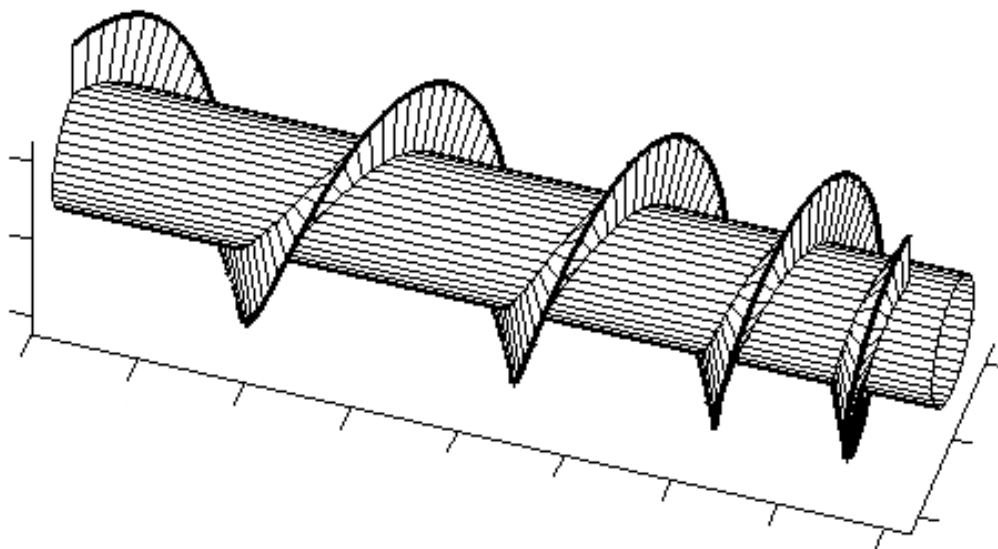


Рис. 1.16. Робочий і підпорний витки змінного кроку звужуючого шнека кормозбирального комбайна

Шнек постійного кроку надає стеблам однакову поперечну швидкість незалежно від віддалення їх від горловини. Поверхня змінного кроку призначена покращити процес переміщення рослинної маси до горловини. На комбайнах ставлять два шнеки, які створюють зустрічний потік зеленої маси. Зустрічаючись на великій швидкості, потоки стебел дезорієнтуються, тим самим погіршуючи умови подрібнення. Використання звужувальних шнеків змінного кроку дає можливість попереднього ущільнення зеленої маси перед горловиною та покращує орієнтацію стебел.

Для конструювання поверхні скористаємося запропонованим способом. Для цього потрібно задати напрямну криву, через яку будуть проходити прямолінійні твірні торса. Такою кривою буде зовнішня гвинтова лінія робочого витка поверхні. Для того, щоб швидкість поперечного переміщення

зеленої маси до горловини зменшувалася за лінійним законом, функція z_H повинна мати вигляд:

$$z_H = at - bt^2; \quad z'_H = a - 2bt, \quad (1.32)$$

де a і b – сталі ($a=102,6$; $b=1,6$), які розраховані для шнека із зовнішньою крайкою на циліндрі $r=250$ мм і внутрішньою (на валу) $R=125$ мм. На рис. 1.17 показана схема утворення розгортної поверхні, для якої напрямною є циліндрична гвинтова лінія змінного кроку, задана залежністю (1.32). Для конструювання поверхні будемо розглядати обвідну криву 1.

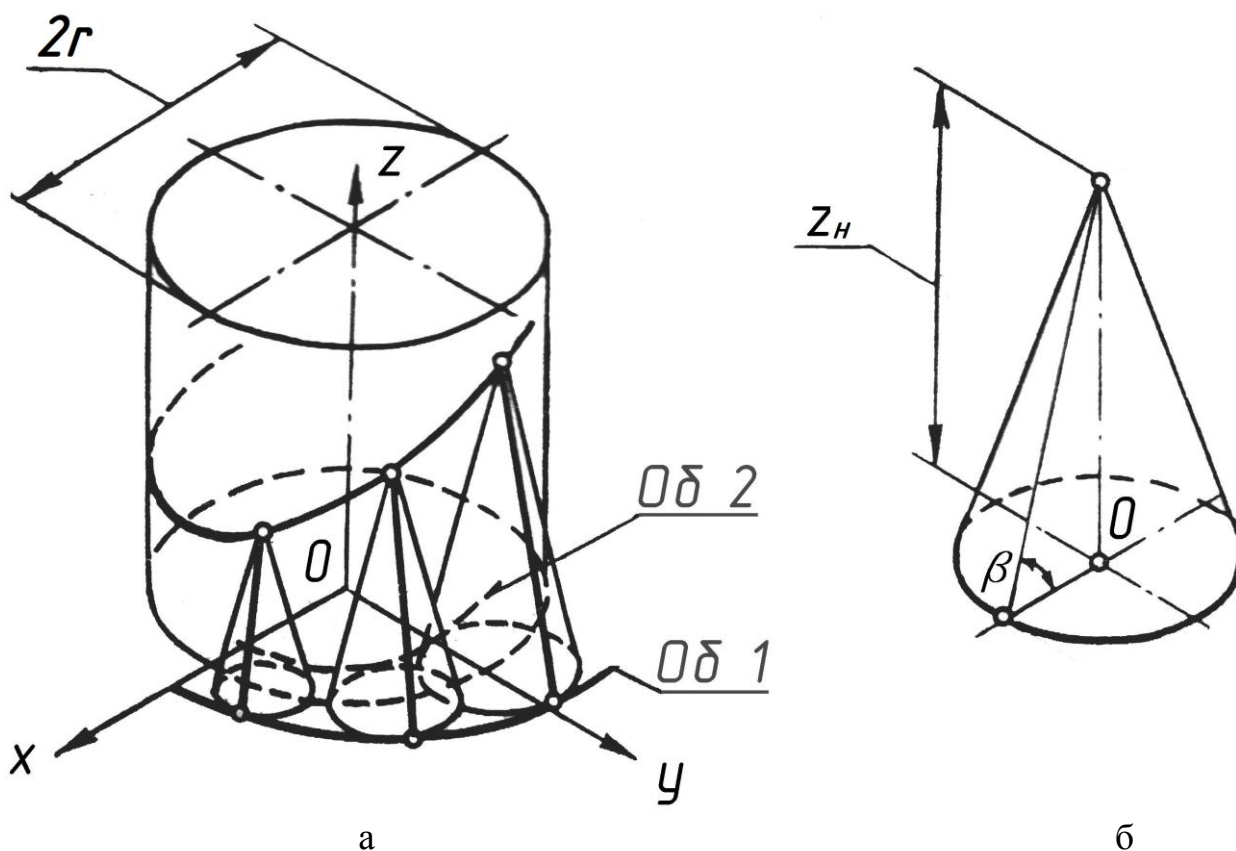


Рис. 1.17. До утворення розгортної поверхні, як обвідної однопараметричної сім'ї конусів:

- а) окремі положення конуса із однопараметричної сім'ї;
- б) окремий конус

При підстановці (1.32) у (1.26) і (1.27) ми одержимо рівняння обвідної кривої і вирази напрямного вектора, які після підстановки у (1.24) дадуть параметричні рівняння торса. На рис. 1.18 показана схема конструювання торса. Нас цікавить відсік поверхні, який знаходиться між двома циліндрами: радіуса R (вал шнека) і радіуса r (зовнішня крайка робочої поверхні шнека).

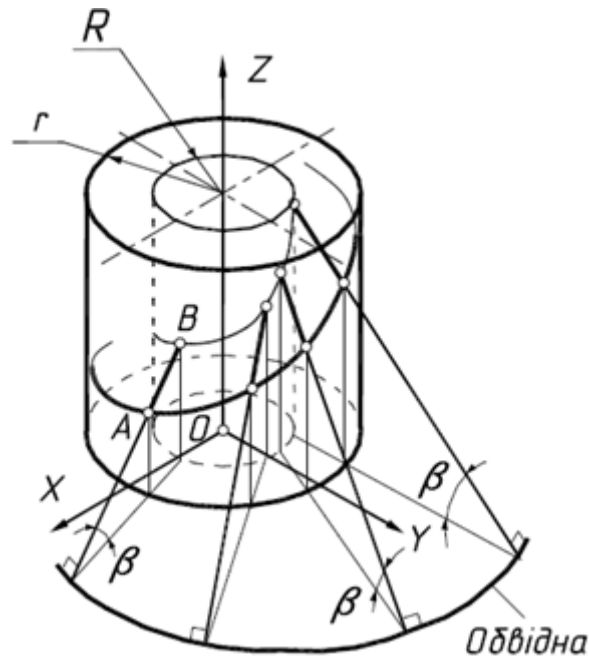


Рис. 1.18. Схема конструювання торса між співвісними циліндрами

В нашому випадку зручно перейти від параметра u (величина, пропорційна довжині твірної) до параметра ρ – відстані від осі шнека до точки на поверхні торса. Оскільки вісь шнека збігається із віссю Oz , можемо записати:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_{o\sigma} + ul)^2 + (y_{o\sigma} + um)^2}. \quad (1.33)$$

Розв'яжемо квадратне рівняння (1.33) відносно u :

$$u = -\frac{l x_{o\sigma} + m y_{o\sigma}}{l^2 + m^2} \sqrt{\rho^2 (l^2 + m^2) - (m x_{o\sigma} - l y_{o\sigma})^2}. \quad (1.34)$$

Підстановка виразу (1.34) в (1.24) дасть параметричні рівняння торса, у якому однією змінною є t , а другою – відстань ρ від осі до точки на його поверхні. При заданому значенні ρ на торсі буде описана лінія, як лінія перетину циліндра радіуса ρ із поверхнею торса. До виразу (1.34) двічі входить сума $l^2 + m^2$. Підставивши в неї вирази l і m із (1.27), отримаємо: $l^2 + m^2 = \text{ctg}^2 \beta$. Врахувавши це, остаточно отримаємо:

$$u = -\text{tg}^2 \beta \left[l x_{o\sigma} + m y_{o\sigma} - \sqrt{\rho^2 \text{ctg}^2 \beta - (m x_{o\sigma} - l y_{o\sigma})^2} \right] \quad (1.35)$$

Для побудови відсіку із чотирьох витків змінюємо параметри в межах: $t=0 \dots 8\pi$; $\rho = r \dots R$. На рис. 1.19 побудовано відсік торса між двома співвісними циліндрами з кутом $\beta=40^\circ$.

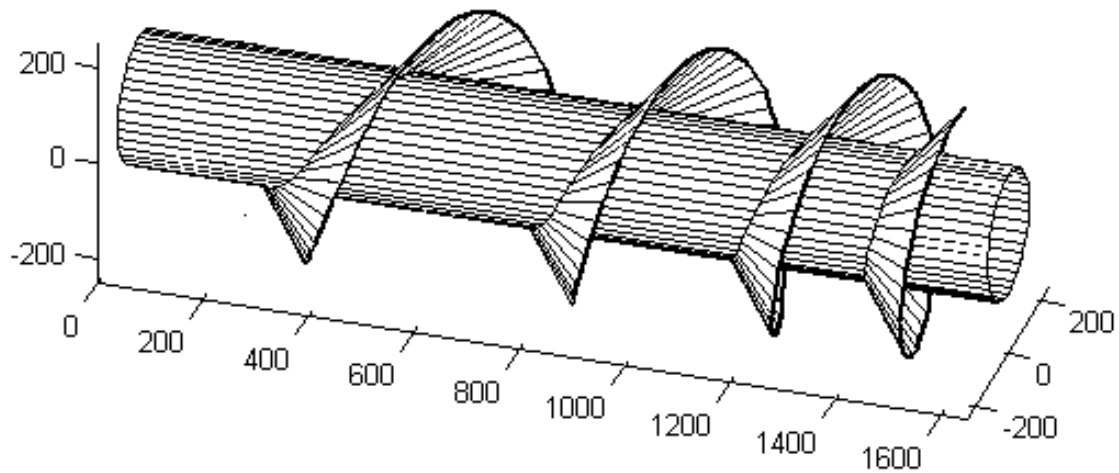


Рис. 1.19. Витки торса однакового нахилу твірних з кутом їх нахилу $\beta=40^\circ$

При поєднанні робочої поверхні коноїда із підпорною розгортною поверхнею, зображеною на рис. 1.19, одержимо конструкцію шнека із підпорним витком (рис. 1.20).

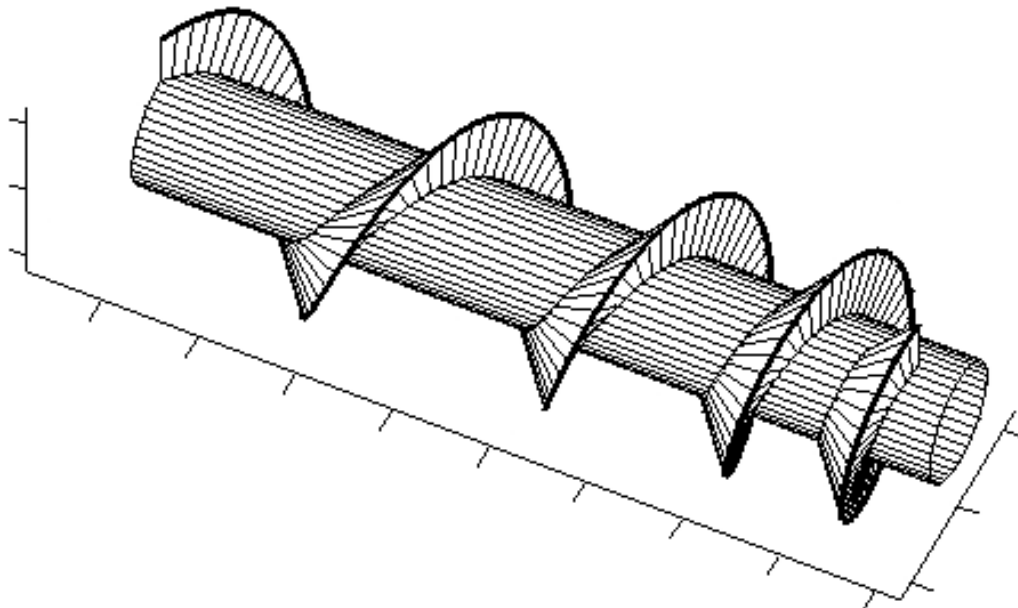


Рис. 1.20. Шнек із розгортною підпорною поверхнею

У підпорного витка із розгортної поверхні (рис. 1.20) є свої особливості в порівнянні із аналогічною поверхнею косою гелікоїда (рис. 1.16). Прямолінійні твірні торса не перетинають вісь шнека (вони до неї мимобіжні і дотичні до ребра звороту, яке знаходиться у просторі). В зв'язку з цим виникають певні обмеження на конструювання поверхні. На рис. 1.19 торс побудований при значенні кута $\beta=40^\circ$. При цьому відстань між зварними швами на циліндрі досить велика, що забирає корисний об'єм. Зменшити величину кута β не можна, оскільки ребро звороту увійде в межі витка і конструювання поверхні в цьому випадку стане неможливим. При побудові поверхні за рівняннях це відбувається тоді, коли підкореневі вирази набувають від'ємного значення.

В рамках неklasичних уявлень про кочення лінійчатих поверхонь одна по одній (рис. 1.21) Рачковською Г.С. аналітично описано побудову кінематичних лінійчатих поверхонь на основі конічних перетворень торсових поверхонь.

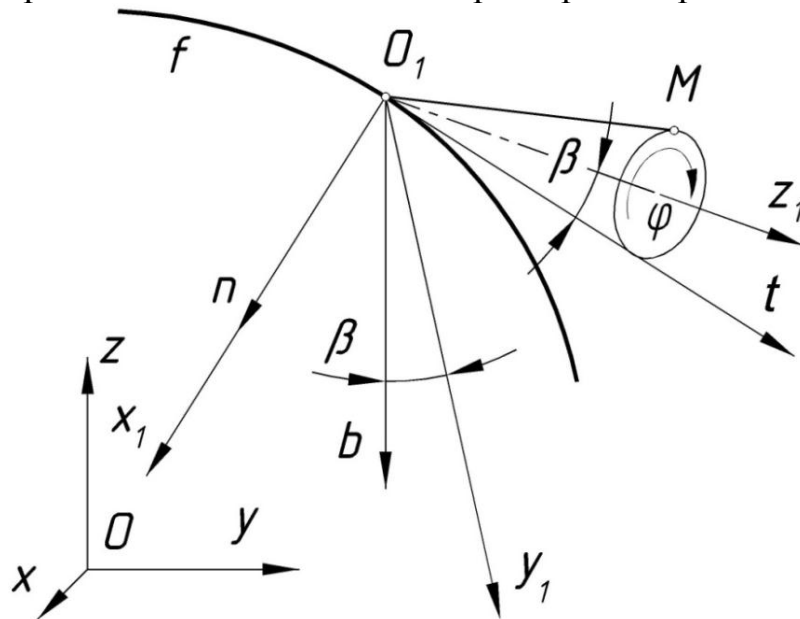


Рис. 1.21. Схема до конічних перетворень торсових поверхонь

Розглядаючи кочення лінійчатих поверхонь як послідовність переходів в ряду дискретних станів системи двох взаємодіючих між собою лінійчатих поверхонь, пов'язаних єдиною спільною твірною, кочення конічної поверхні по торсовій може бути представлене у вигляді суперпозиції двох узгоджених між собою рухів – поступального руху вершини конуса вздовж ребра звороту торса і обертального руху конуса навколо своєї осі [132].

1.3. Елементи теорії аналітичного опису диференціальних характеристик торсових поверхонь

Побудова розгортки торса базується на його згинанні. Під згинанням поверхні розуміють таку неперервну її деформацію, при якій довжини кривих на поверхні не змінюються. Наглядно продемонструвати згинання розгортної поверхні можна на прикладі листа паперу. Очевидно, що і кути між лініями та площа відсіку поверхні при її згинанні теж не змінюються. Згинання розгортних поверхонь є найбільш вивчене в теоретичному плані, тому що окремий випадок згинання таких поверхонь на площину, тобто одержання розгорток, носить прикладний характер. Саме з такого окремого випадку Ейлером починається історія дослідження проблеми згинання поверхонь. Він знайшов всі розгортні поверхні: циліндри, конуси і поверхні, утворені дотичними до просторової кривої.

Якщо є дві поверхні, віднесені до криволінійних координат таким чином, що їх перші квадратичні форми збігаються, то такі поверхні називаються накладаними. Це означає, що одну із них можна перевести в іншу. При цьому відбувається процес згинання поверхні - така неперервна її деформація, при

якій довжини кривих на поверхні не змінюються. Якщо між початковим і кінцевим положенням поверхні вдається знайти хоч одну проміжну поверхню з тим же лінійним елементом, то це означає, що в такому випадку можна знайти безліч проміжних положень і процес згинання буде описаний неперервно. В зв'язку із цим пошук можливості згинання поверхонь здійснювався на основі незмінності коефіцієнтів першої квадратичної форми. Відшукувалися такі нові параметричні рівняння поверхні шляхом введення певної постійної величини p , щоб коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні не змінилися, тобто були незалежними від p . Кожному конкретному значенню величини p відповідала конкретна поверхня, а ряду значень p – ряд ізометричних перетворень поверхні, тобто її згинань.

Загальну умову згинання одержав Л. Ейлер, виходячи із інваріантності довжини лінії на поверхні. Він вперше ввів лінійний елемент, через який визначається довжина лінії на поверхні.

Як відомо із курсу математики, диференціал довжини дуги визначається із виразу:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (1.36)$$

Якщо X , Y і Z є функціями однієї змінної, наприклад, t , то вони опишуть просторову криву. Вираз (1.36) в такому випадку прийме вигляд:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2, \quad (1.37)$$

звідки довжина дуги цієї кривої визначиться інтегруванням по змінній t :

$$S = \int \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} dt. \quad (1.38)$$

Параметричні рівняння поверхні описуються функціями двох змінних:

$$X = X(u, v); \quad Y = Y(u, v); \quad Z = Z(u, v). \quad (1.39)$$

В такому випадку кожна складова виразу (1.36) запишеться як повний диференціал двох змінних u і v :

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv; & dY &= \frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv; \\ dZ &= \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial v} dv, \end{aligned} \quad (1.40)$$

де $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$ - частинні похідні.

Підставивши (1.40) в (1.36), після піднесення до квадрату і групування, одержимо:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1.41)$$

де

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v}; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Вираз (1.41) називається диференціалом дуги або *лінійним елементом поверхні*. Права частина формули (1.41) називається також *першою квадратичною формою* поверхні, заданої у формі (1.39). Вирази E , F , G називаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні.

Коли між змінними u і v встановлено залежність (наприклад, через третю змінну t), то ці коефіцієнти стають функціями змінної t і довжина дуги визначається інтегруванням квадратного кореня із виразу (1.41) по змінній t . Довжина дуги будь-якої лінії на поверхні не змінюється при її згинанні, тому вираз (1.41) теж не змінюється, отже перша квадратична форма поверхні є інваріантом її згинання.

Ще одним інваріантом згинання є геодезична кривина лінії на поверхні. Якщо задана крива (плоска або просторова), то в кожній її точці можна знайти кривину, виходячи із параметричних рівнянь кривої. Кривину просторової кривої знаходять за рівнянням (1.9). Кривину лінії, яка розташована на поверхні, можна розкласти на геодезичну і нормальну складові. Геодезична складова є проекцією кривини на дотичну до поверхні площину в заданій точці.

На рис.1.22 показано порядок знаходження геодезичної і нормальної кривин кривої на поверхні в точці M . Через дотичну до кривої у вказаній точці проведено три площини: дотичну площину G , стичну площину P і площину Q через нормаль N до поверхні. Кривина k кривої знаходиться у стичній площині P і розташована на головній нормалі кривої. Її проекція на дотичну площину G є геодезичною складовою і позначена як k_g . Проекція на нормаль N до поверхні є нормальною складовою і позначена як k_n . Таким чином, щоб знайти величину геодезичної або нормальної кривини в заданій точці кривої на поверхні, коли кривина k відома, необхідно знати кут ε між головною нормаллю кривої і дотичною площиною до поверхні в заданій точці. Із рис. 1.22 запишемо:

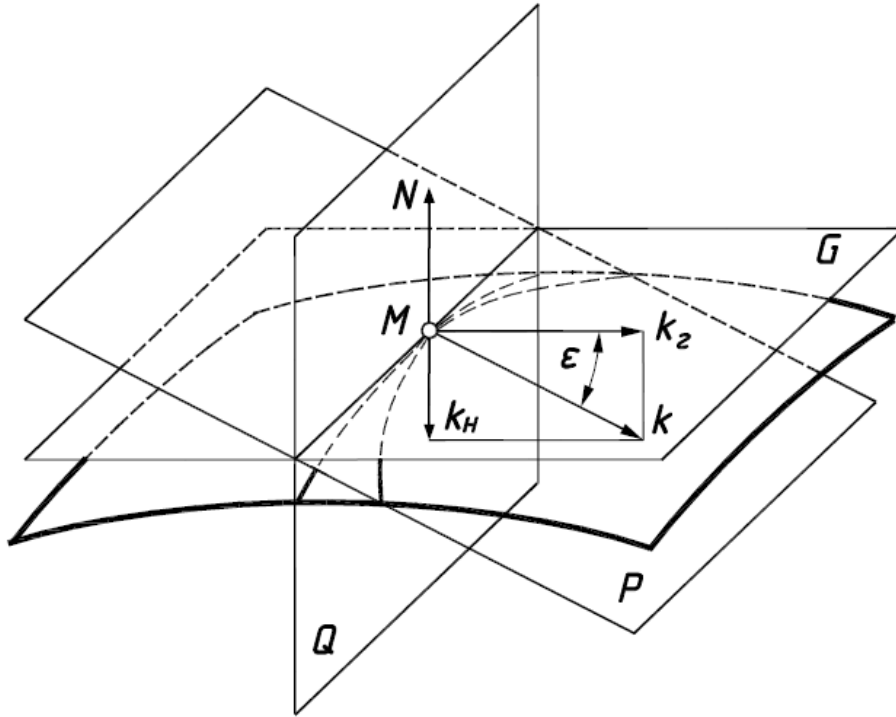


Рис. 1.22. Розкладання кривини k кривої на поверхні на геодезичну і нормальну складові

$$k_g = k \cos \varepsilon ; \quad k_n = k \sin \varepsilon . \quad (1.43)$$

Наприклад, знайдемо геодезичну кривину основи колового конуса. Його фронтальна проекція наведена на рис. 1.23.

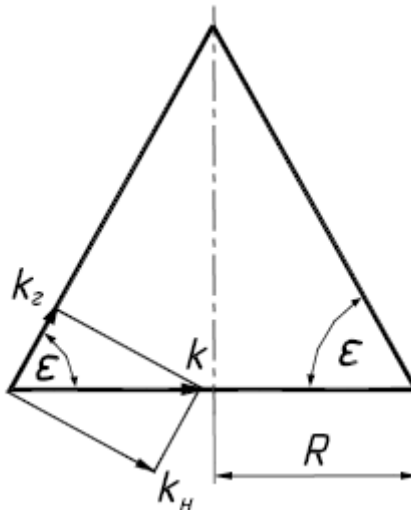


Рис. 1.23. До визначення геодезичної кривини основи конуса – кола радіуса R

Кривина є величина обернена до радіуса, тому $k=1/R$. Дотична площина до конуса у всіх точках кола має сталий кут нахилу ε . Отже, згідно (1.43) отримаємо:

$$k_z = \frac{\cos \varepsilon}{R}; \quad k_n = \frac{\sin \varepsilon}{R}. \quad (1.44)$$

Геодезична кривина основи конуса є сталою величиною. Оскільки вона не змінюється при згинанні, то на розгортці коло основи конуса теж перетвориться у коло радіуса R_p з кривиною рівною геодезичній кривині основи, тобто $k_p = \cos \varepsilon / R$ або $R_p = R / \cos \varepsilon$. Відомо, що розгорткою конуса є сектор, радіус дуги якого дорівнює довжині твірної конуса. Цей вираз для радіуса дуги ми і отримали, який можна також знайти через сторони прямокутного трикутника і кутом ε між ними (рис. 1.23). Можна змоделювати неперервне згинання конуса на площину. Для цього потрібно конус розрізати вздовж його бічної твірної і натискати на вершину. Радіус основи буде збільшуватися, тобто кривина зменшуватиметься, кут ε при основі зменшуватиметься, а геодезична кривина залишиться сталою. Нормальна кривина основи при цьому зменшуватиметься і на розгортці стане рівною нулю. Оскільки геодезична кривина не змінюється, то зміна кривини кривої на поверхні при її згинанні відбувається за рахунок зміни нормальної складової.

Для циліндра $\varepsilon=90^\circ$, отже геодезична кривина основи дорівнює нулю, а нормальна – рівна кривині основи. Отже на розгортці коло основи циліндра перетворюється в лінію нульової кривини, тобто в пряму лінію. Однак якщо взяти іншу криву на циліндрі (наприклад, його переріз у вигляді еліпса, рис. 1.24), то розрахунки ускладнюються, оскільки і кут ε , і кривина напрямної кривої (еліпса) є змінними. Якщо врахувати, що довжина дуги еліпса не має аналітичного виразу, то будувати розгортку циліндра на основі заданої напрямної кривої прийдеться за допомогою чисельних методів.

Якщо відомі параметричні рівняння кривої на поверхні, то геодезичну кривину можна знайти із виразу:

$$k_z = \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \begin{vmatrix} N_x & N_y & N_z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad (1.45)$$

де $\frac{dt}{ds} = 1 : \frac{ds}{dt}$; $\frac{ds}{dt}$ знаходять за формулою (1.11);

N_x, N_y, N_z - проекції одиничного вектора нормалі до поверхні на осі координат;

$x', y', z', x'', y'', z''$ - перші і другі похідні рівнянь кривої на поверхні.

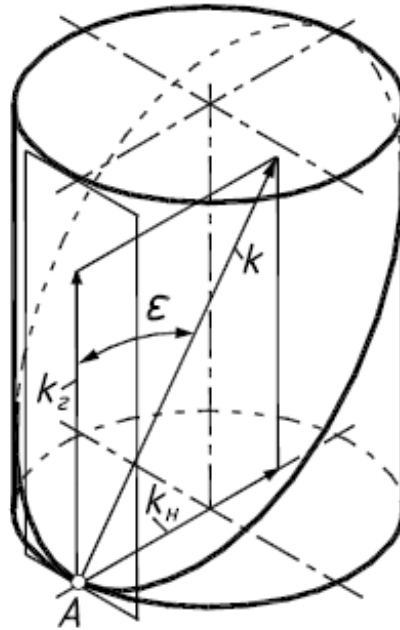


Рис. 1.24. До визначення геодезичної кривини похилого перерізу циліндра

Нормаль до поверхні знаходиться із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_u & Y_u & Z_u \end{vmatrix}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} N_x &= Y_v Z_u - Y_u Z_v; \\ N_y &= -X_v Z_u + X_u Z_v; \\ N_z &= X_v Y_u - X_u Y_v. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Нижні індекси у (1.46) вказують на те, що це є частинні похідні виразів по відповідних змінних.

Знайдемо геодезичну кривину еліпса на поверхні циліндра (рис. 1.24). Параметричні рівняння циліндра запишуться:

$$\begin{aligned} X &= r \cos v; \\ Y &= r \sin v; \\ Z &= u; \end{aligned} \quad (1.47)$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 1; \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= -r \sin v; & \frac{\partial Y}{\partial v} &= r \cos v; & \frac{\partial Z}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Проекції вектора нормалі до поверхні циліндра згідно(1.46) запишуться:

$$\{r \cos v; \quad r \sin v; \quad 0\} \quad (1.49)$$

Вектор (1.49) не є одиничним. Щоб він став одиничним, потрібно кожен його складову розділити на корінь квадратний із суми квадратів складових, тобто на його модуль. Після цього отримаємо:

$$\begin{aligned} N_x &= \cos v; \\ N_y &= \sin v; \\ N_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Принагідно знайдемо першу квадратичну форму циліндра (1.47). Її коефіцієнти знаходимо за формулами (1.42):

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = r^2. \quad (1.51)$$

Перша квадратична форма згідно (1.41) запишеться:

$$dS^2 = du^2 + r^2 dv^2. \quad (1.52)$$

Рівність нулю коефіцієнта F означає, що сітка координатних ліній циліндра ортогональна. Взагалі, для всіх поверхонь обертання, віднесених до координатних ліній, однією сім'єю яких є паралелі, а другою – меридіани, координатні сітки ортогональні.

Щоб знайти вираз довжини дуги кривої і її похідні для визначення геодезичної кривини цієї кривої за формулою (1.45), потрібно знайти її параметричні рівняння. Еліпс на циліндрі ми одержимо, якщо перетнемо його проекціовальною площиною, нахиленою під кутом β до горизонтальної площини. Якщо такою площиною буде профільно-проекціовальна, то її рівняння запишеться:

$$Z = Y \operatorname{tg} \beta. \quad (1.53)$$

Лінія на поверхні буде описана в тому випадку, коли поставимо у певну залежність змінні u і v у вигляді $u=u(v)$, $v=v(u)$ або ж зв'яжемо їх за допомогою третьої змінної t : $u=u(t)$, $v=v(t)$. Така залежність називається внутрішнім рівнянням лінії на поверхні, тому що вона задана криволінійними координатами поверхні. Щоб знайти внутрішнє рівняння еліпса, необхідно розв'язати рівняння циліндра (1.47) і січної площини (1.53) як систему. Прирівняємо координати Z : $u=Y \operatorname{tg} \beta$. Із (1.47) підставимо вираз Y і отримаємо: $u=r \operatorname{tg} \beta \sin v$. Це і є внутрішнє рівняння еліпса на циліндрі. Ми з ним уже зустрічалися у (1.28). Оскільки $\beta=90^\circ-\varepsilon$, параметричні рівняння еліпса запишуться (в рівняннях (1.54) символи зліва позначено строчними літерами, тому що вони є рівняннями лінії):

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos v; \\
 y &= r \sin v; \\
 z &= r \operatorname{ctg} \varepsilon \sin v.
 \end{aligned}
 \tag{1.54}$$

Перші і другі похідні рівнянь (1.54) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x' &= -r \sin v; \\
 y' &= r \cos v; \\
 z' &= r \operatorname{ctg} \varepsilon \cos v.
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}
 x'' &= -r \cos v; \\
 y'' &= -r \sin v; \\
 z'' &= -r \operatorname{ctg} \varepsilon \sin v.
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

Знаходимо похідну виразу довжини дуги еліпса:

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varepsilon \cos^2 v}.
 \tag{1.57}$$

Слід зазначити, що вираз для знаходження довжини дуги еліпса на поверхні циліндра можна знайти із формули (1.52). Нам уже відоме внутрішнє рівняння лінії у вигляді $u=u(v)$: $u=r \operatorname{ctg} \varepsilon \sin v$. Отже, незалежною змінною виступає v . Розділимо праву і ліву частини формули (1.52) на dv^2 і отримаємо:

$$\left(\frac{dS}{dv} \right)^2 = \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + r^2.
 \tag{1.58}$$

Підставимо у (1.58) $du/dv=r \operatorname{ctg} \varepsilon \cos v$ і отримаємо точно такий же результат, як у (1.57).

Знаходимо визначник мішаного добутку, що входить до формули (1.45):

$$\begin{vmatrix} N_x & N_y & N_z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -r \sin v & r \cos v & r \operatorname{ctg} \varepsilon \cos v \\ -r \cos v & -r \sin v & -r \operatorname{ctg} \varepsilon \sin v \end{vmatrix} = -r^2 \operatorname{ctg} \varepsilon \sin v.
 \tag{1.59}$$

Підставляємо в (1.45) вирази (1.57) і (1.59) і отримуємо формулу для визначення геодезичної кривини еліпса на поверхні циліндра:

$$k_{\varepsilon} = \frac{-\operatorname{ctg} \varepsilon \sin v}{r(1 + \operatorname{ctg}^2 \varepsilon \cos^2 v)^{3/2}}. \quad (1.60)$$

Оскільки геодезична кривина лінії на поверхні відноситься до внутрішніх властивостей поверхні, то її можна визначити через коефіцієнти першої квадратичної форми. Для поверхні, у якої коефіцієнт $E=1$ (до таких поверхонь відносяться торсові, якщо однією сім'єю координатних ліній є прямолінійні твірні), геодезичну кривину можна знайти за формулою (при умові, що $F=0$, тобто поверхня віднесена до ортогональної сітки координатних ліній):

$$k_{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{3/2}} \left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2} G_u v'^3 - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} u'v'^2 - \frac{G_u}{G} u'^2 v' \right), \quad (1.61)$$

де G_v, G_u - частинні похідні коефіцієнта G по відповідному параметру; u', v', u'', v'' - перші і другі похідні внутрішніх рівнянь кривої на поверхні.

Для нашого прикладу (еліпса на поверхні циліндра) маємо: $u'=r\operatorname{ctg}\varepsilon\cos v$, $u''=-r\operatorname{ctg}\varepsilon\sin v$, $v'=1$, $v''=0$, $G_v=0$, $G_u=0$. Підставивши ці вирази і вираз коефіцієнта G із (1.50) в (1.60), отримаємо результат (1.60).

Нормальна кривина кривої на поверхні визначається із відношення другої і першої квадратичних форм. Перша квадратична форма поверхні наведена в (1.41). Друга квадратична форма поверхні визначається через коефіцієнти L, M, N :

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \quad (1.62)$$

$$\text{де } L = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{uu} & Y_{uu} & Z_{uu} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}; \quad M = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{uv} & Y_{uv} & Z_{uv} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix};$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} X_{vv} & Y_{vv} & Z_{vv} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}.$$

Через $X_u, X_v, X_{uu}, X_{vv}, X_{uv}$ позначені перші і другі частинні та мішані похідні рівняння $X=X(u, v)$. Аналогічно позначені похідні рівнянь $Y=Y(u, v)$ та $Z=Z(u, v)$.

Нормальна кривина лінії на поверхні визначається із виразу:

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \quad (1.63)$$

При згинанні поверхні кривина лінії, що лежить на ній, змінюється. Оскільки геодезична кривина не змінюється, то зміна кривини кривої відбувається за рахунок зміни нормальної складової.

Дуже зручно знаходити першу і другу квадратичні форми у тому випадку, коли поверхня задана у векторним способом. Тоді три рівняння (1.39) замінюються одним векторним рівнянням. Для прикладу опишемо лінійчату поверхню, задану напрямною кривою, через кожену точку якої проходить прямолінійна твірна із заданим напрямом. При цьому зробимо наголос на тому, що напрямна крива має бути задана натуральними рівняннями; це ще раз підкреслює важливість описання кривих саме у такій формі. На рис. 1.25 показано просторову криву, описану натуральними рівняннями, в точці A якої побудовано супровідний тригранник Френе. При переміщенні тригранника по кривій (тобто при зміні її дуги s) орти тригранника мінятимуть свій напрям у просторі. Будемо конструювати поверхню таким чином, щоб прямолінійна твірна за напрямом збігалася із біномаллю в кожній точці кривої, тобто ми хочемо отримати лінійчату поверхню біномалей заданої просторової кривої.

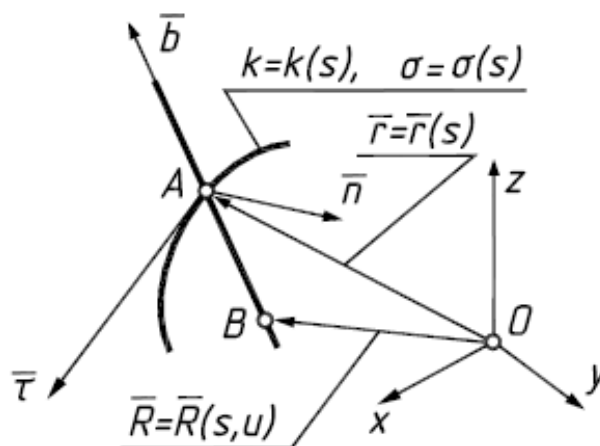


Рис. 1.25. Схема конструювання поверхні біномалей заданої просторової кривої в системі її супровідного тригранника.

Сполучимо початок координат нерухомої системи координат (точку O) із точкою A кривої, в якій знаходиться тригранник Френе (рис. 1.25). Одержаний відрізок OA є радіус-вектором \bar{r} кривої. Через вершину тригранника (точку A) проведемо прямолінійну твірну вздовж біномалі. Візьмемо на твірній точку B і сполучимо з нею початок координат нерухомої системи. Одержаний відрізок \bar{R} є радіус-вектором точки на поверхні і його напрям залежить від двох координат: дуги s на напрямній кривій і відрізка (параметра u) вздовж твірної, який на рис. 1.25 дорівнює AB ($u=AB$). Отже, рівняння поверхні біномалей у векторній формі можна записати:

$$\bar{R}(s, u) = \bar{r}(s) + \bar{b}u, \quad (1.64)$$

де \bar{b} - одиничний орт біномалі;

s, u – незалежні змінні поверхні (довжина дуги напрямної кривої і довжина відрізка прямолінійної твірної відповідно).

Знайдемо вирази для геодезичної та нормальної кривини лінії на поверхні (1.64). Спочатку знаходимо частинні похідні рівняння (1.64). Диференціюємо по змінній u :

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} = \bar{b}. \quad (1.65)$$

Диференціюємо (1.64) по змінній s :

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{r}' + \bar{b}'u. \quad (1.66)$$

Із диференціальної геометрії відомо, що якщо радіус-вектор кривої заданий у функції натурального параметра s , то його похідна по s дорівнює одиничному орту дотичної: $\bar{r}' = \bar{\tau}$. Похідна одиничного вектора біномалі \bar{b} знаходиться за відомими формулами Серре-Френе (1.8).

Після врахування цього частинна похідна (1.66) приймає вигляд:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{\tau} - \bar{n} \sigma u. \quad (1.67)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \right)^2 = (\bar{b})^2 = 1; \quad F = \frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{b}(\bar{\tau} - \bar{n} \sigma u) = 0; \quad (1.68)$$

$$G = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right)^2 = (\bar{\tau} - \bar{n} \sigma u)^2 = 1 + \sigma^2 u^2.$$

Множення і піднесення до степеня одиничних векторів в (1.68) відбувалося за правилами скалярного добутку: добуток паралельних ортів дорівнює одиниці, а перпендикулярних – нулю. Отже перша квадратична форма поверхні (1.64) буде мати вигляд:

$$I = dS^2 = du^2 + (1 + \sigma^2 u^2) ds^2. \quad (1.69)$$

Запишемо вираз геодезичної кривини лінії на поверхні, підставивши коефіцієнт G та його похідні ($G_u = 2\sigma^2 u$; $G_s = 2u^2 \sigma \sigma'$) в (1.61), маючи на увазі, що в ролі змінної v виступає довжина дуги напрямної кривої s :

$$k_s = \frac{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2}}{[u'^2 + (1 + \sigma^2 u^2) s'^2]^{3/2}} \left(u'' s' - s'' u' - \sigma^2 u s'^3 - \frac{u \sigma u' s' (u \sigma' s' + 2 \sigma u')}{1 + \sigma^2 u^2} \right). \quad (1.70)$$

Знаходимо другі частинні і мішану похідну поверхні (1.64), застосовуючи формули (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial u^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s^2} &= \bar{\tau}' - u(\bar{n}'\sigma + \bar{n}\sigma') = \bar{\tau} k \sigma u + \bar{n}(k - \sigma'u) - \bar{b}\sigma^2 u; \\ & & \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial u \partial s} &= -\bar{n}\sigma. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми шукаємо із виразів (1.62) враховуючи те, що радіус-вектор точки на поверхні спроекційований не на нерухому систему координат $OXYZ$, а на орти супровідного тригранника напрямної кривої і те, що в ролі змінної v виступає довжина дуги напрямної кривої s :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sigma u & 0 \end{vmatrix} = 0; & M &= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sigma u & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2}}; \\ N &= \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} k\sigma u & k - \sigma'u & -\sigma^2 u \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sigma u & 0 \end{vmatrix} = \frac{k(1 + \sigma^2 u^2) - \sigma'u}{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2}}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Підставляємо (1.72) в (1.62) і одержуємо вираз другої квадратичної форми поверхні:

$$II = \frac{-2\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2}} du ds + \frac{k(1 + \sigma^2 u^2) - \sigma'u}{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2}} ds^2. \quad (1.73)$$

Згідно (1.63) вираз для визначення нормальної кривини лінії на поверхні (1.64) запишеться:

$$k_u = \frac{-2\sigma du ds + [k(1 + \sigma^2 u^2) - \sigma'u] ds^2}{\sqrt{1 + \sigma^2 u^2} [du^2 + (1 + \sigma^2 u^2) ds^2]}. \quad (1.74)$$

Зокрема, при $\sigma=0$ (тобто коли напрямною лінією є плоска крива) поверхня біномалей стає циліндричною поверхнею, у якій ортогональним перерізом є напрямна крива, задана натуральним рівнянням $k=k(s)$. Вирази для геодезичної і нормальної кривин лінії на поверхні суттєво спрощуються:

$$k_{\epsilon} = \frac{u''s' - s''u'}{(u'^2 + s'^2)^{3/2}}; \quad k_n = \frac{k ds^2}{du^2 + ds^2}. \quad (1.75)$$

Перший вираз (1.75) не залежить від кривини $k=k(s)$ кривої поперечного перерізу циліндра. Це означає, що при його згинанні (в тому числі і на площину) геодезична крива кривої на циліндрі не змінюється. Взагалі цей вираз добре відомий: за ним знаходять кривину плоскої кривої, заданої параметричними рівняннями у декартовій системі координат із осями Ous . Саме такою системою стає криволінійна система координат циліндра на його розгортці. Нормальна кривина кривої на поверхні циліндра залежить від $k=k(s)$, тобто змінюється при згинанні циліндра. При $u=const$ (сім'я конгруентних кривих ортогонального перерізу циліндра, тому числі і напрямна крива при $u=0$) згідно (1.75) $k_{\epsilon}=0$ і $k_n=k$. Отже геодезична кривина ортогонального перерізу буд-якої циліндричної поверхні рівна нулю, а нормальна кривина рівна кривині цього перерізу. Це означає, що згинання циліндричної поверхні зводиться до плоскої задачі: згинання кривої поперечного перерізу.

Поверхня біномалей просторової кривої є лінійчатою нерозгортною поверхнею і тільки для плоскої кривої є циліндром. Розглянемо поверхню дотичних просторової кривої, тобто поверхню торса, для якого напрямна крива є ребром звороту. Її векторне рівняння запишеться:

$$\overline{R}(s, u) = \overline{r}(s) + \tau u. \quad (1.76)$$

Знаходимо перші, другі частинні і мішану похідну поверхні (1.76), застосовуючи формули (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{R}}{\partial s} &= \overline{\tau} + \overline{n} k u; & \frac{\partial \overline{R}}{\partial u} &= \overline{\tau}; \\ \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial s^2} &= \overline{\tau}' + u(\overline{n}'k + \overline{n}k') = \overline{n}k + u[(\overline{b}\sigma - \overline{\tau}k) + \overline{n}k'] = \\ &= \overline{n}k + \overline{b}\sigma u - \overline{\tau}ku + \overline{n}k'u = -\overline{\tau}ku + \overline{n}(k + k'u) + \overline{b}\sigma u; \\ \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u \partial s} &= \overline{n}k. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Коефіцієнти і перша квадратична форма поверхні (1.76) запишуться:

$$E = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \right)^2 = (\bar{\tau})^2 = 1; \quad F = \frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{\tau}(\bar{\tau} + \bar{n} k u) = 1;$$

$$G = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right)^2 = (\bar{\tau} + \bar{n} k u)^2 = 1 + k^2 u^2. \quad (1.78)$$

$$dS^2 = du^2 + 2 du ds + (1 + k^2 u^2) ds^2. \quad (1.79)$$

Шукаємо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & ku & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & ku & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{GE - F^2}} \begin{vmatrix} -ku & k + k'u & \sigma u \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & ku & 0 \end{vmatrix} = \sigma u. \quad (1.80)$$

Підставляємо (1.80) в (1.62) і одержуємо вираз другої квадратичної форми поверхні (1.76):

$$II = \sigma u ds^2. \quad (1.81)$$

За формулою (1.63) знаходимо вираз нормальної кривини лінії на торсі дотичних до просторової кривої, заданої натуральними рівняннями $k=k(s)$ і $\sigma=\sigma(s)$:

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{\sigma u ds^2}{du^2 + 2 du ds + (1 + k^2 u^2) ds^2}. \quad (1.82)$$

У випадку, коли $u=0$, тобто кривою на торсі є його ребро звороту, його нормальна кривина дорівнює нулю. Це означає, що кривина ребра звороту і його геодезична кривина рівні між собою. Отже, при згинанні торса зміною скруту його ребра звороту, залежність $k=k(s)$ залишається незмінною.

1.4. Неперервне згинання торсових поверхонь

Найпростішим прикладом неперервного згинання торсових поверхонь є згинання циліндрів. Розглянемо згинання циліндра з основою радіуса r . Для циліндра, заданого параметричними рівняннями (1.47), лінійний елемент наведено в (1.52). При згинанні циліндра він не повинен змінюватися.

Параметричні рівняння розгортки мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= rv; \\ Y &= u. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Частинні похідні, коефіцієнти E , F , G та лінійний елемент розгортки (1.83) запишуться:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 1; & \frac{\partial X}{\partial v} &= r; & \frac{\partial Y}{\partial v} &= 0; \\ E &= 1; & F &= 0; & G &= r^2; \\ dS^2 &= du^2 + r^2 dv^2. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Рівність лінійних елементів поверхонь (1.47) і (1.83) свідчить про те, що вони накладанні одна на одну. Змінюючи кривину основи циліндра від $k=1/r$ до $k=0$ можна здійснити неперервне згинання поверхні і отримати цілу множину ізометричних поверхонь. Рівність нулю середнього коефіцієнта F для поверхонь (1.47), (1.83) свідчить про те, що сітка координатних ліній ортогональна. Мішані похідні $X''_{uv} = Y''_{uv} = Z''_{uv} = 0$, тобто $M=0$, отже координатні лінії є лініями кривини. На рис. 1.26 побудовано циліндр за рівняннями (1.47) і його розгортку за рівняннями (1.83).

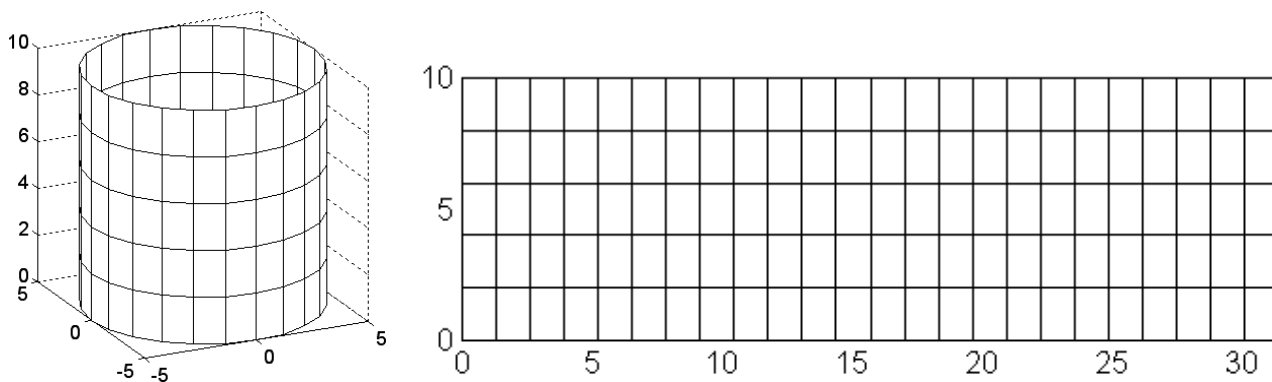


Рис. 1.26. Циліндр, віднесений до ортогональної сітки координатних ліній, і його розгортка

Згинати циліндр можна і на косокутній сітці. Для цього за напрямну лінію для нього візьмемо гвинтову. Параметричні рівняння циліндра запишуться:

$$\begin{aligned} X &= r \cos v; \\ Y &= r \sin v; \\ Z &= bv + u, \end{aligned} \quad (1.85)$$

де b – гвинтовий параметр, стала величина.

Частинні похідні, коефіцієнти E, F, G та лінійний елемент циліндра (1.85) запишуться:

$$X'_u = 0; \quad Y'_u = 0; \quad Z'_u = 1; \quad X'_v = -r \sin v; \quad Y'_v = r \cos v; \quad Z'_v = b;$$

$$E = 1; \quad F = b; \quad G = r^2 + b^2; \tag{1.86}$$

$$dS^2 = du^2 + 2bdudv + (r^2 + b^2)dv^2.$$

Параметричні рівняння розгортки циліндра (1.85) запишуться:

$$X = rv; \tag{1.87}$$

$$Y = bv + u.$$

Частинні похідні, коефіцієнти E, F, G та лінійний елемент розгортки циліндра (1.87) запишуться:

$$X'_u = 0; \quad Y'_u = 1; \quad X'_v = r; \quad Y'_v = b;$$

$$E = 1; \quad F = b; \quad G = r^2 + b^2; \tag{1.88}$$

$$dS^2 = du^2 + 2bdudv + (r^2 + b^2)dv^2.$$

В даному випадку $F \neq 0$, отже сітка координатних ліній косокутна. На рис. 1.27 побудовано відсік циліндра і його розгортку.

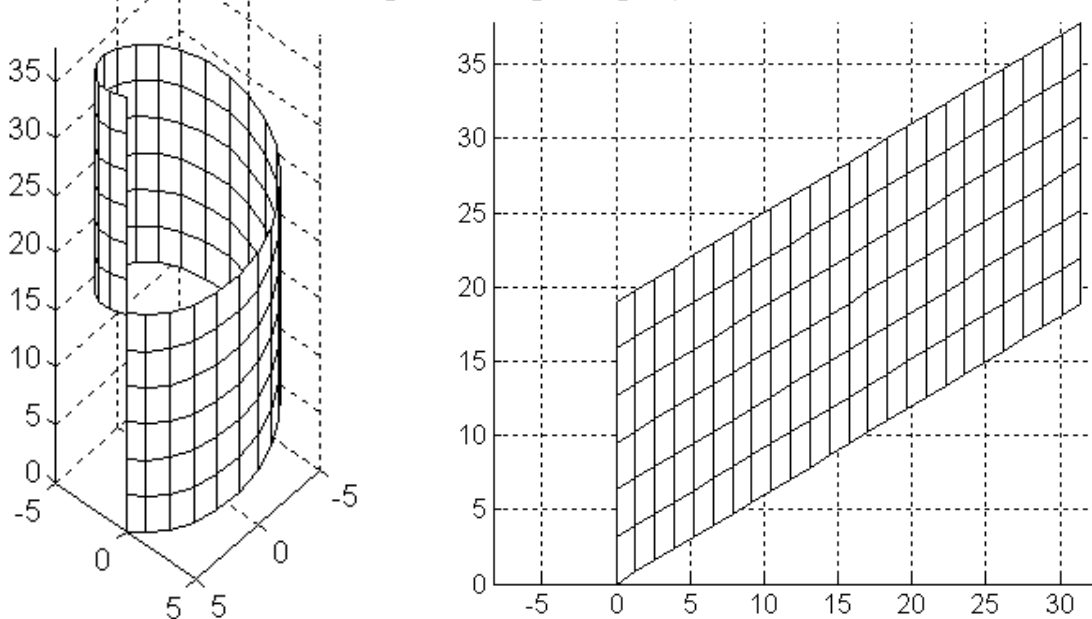


Рис. 1.27. Циліндр, віднесений до косокутної сітки координатних ліній, і його розгортка

Оскільки лінійний елемент поверхні, який визначається через коефіцієнти першої квадратичної форми, відноситься до внутрішньої геометрії, то логічно і саму поверхню задавати внутрішніми рівняннями, незалежними від її положення в декартовій системі. В такому випадку згинання поверхні можна здійснювати не прив'язуючись до декартової системи координат, а на основі управління внутрішніми параметрами. Наприклад, лінійчасту поверхню можна задати в супровідному триграннику напрямної кривої. Сама крива (плоска або просторова) задається натуральними рівняннями. Напрямок прямолінійної твірної в системі тригранника задається одиничним вектором в проекціях на його орти. Він може мати як сталий напрям в системі тригранника, так і змінний, залежний від дугової координати s напрямної кривої (надалі під строчною літерою „ s ” будемо розуміти довжину дуги напрямної лінії, а під прописною „ S ” – довжину іншої лінії на поверхні, яка визначається інтегруванням лінійного елемента (1.38)).

В загальному випадку крива задається двома натуральними рівняннями у функції довжини дуги (дугової координати): кривиною $k=k(s)$ і скрутом $\sigma=\sigma(s)$. Для плоскої кривої $\sigma=0$. Натуральні рівняння не змінюються при переносі і повороті кривих в декартовій системі координат, отже в них закладені внутрішні, не залежні від положення в просторі, властивості кривих.

Перехід від натурального рівняння плоскої кривої до параметричних відбувається за формулами:

$$\begin{aligned} x &= \int \cos \left(\int k ds \right) ds ; \\ y &= \int \sin \left(\int k ds \right) ds . \end{aligned} \quad (1.89)$$

Здійснимо неперервне згинання циліндра (1.47) зміною кривини основи. Для цього помножимо кривину на сталий коефіцієнт p . Нове значення кривини опишеться виразом: $k_{32}=pk$. При $p>1$ кривина основи пропорціонально збільшиться по всій її дузі, при $p<1$ – зменшиться, а при $p=1$ одержимо вихідну криву. Підставимо замість k у (1.89) нове значення кривини pk :

$$\begin{aligned} x &= \int \cos \left(p \int k ds \right) ds ; \\ y &= \int \sin \left(p \int k ds \right) ds . \end{aligned} \quad (1.90)$$

Оскільки для кола кривина $k=1/r - const$, то після інтегрування (1.90) одержимо:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{p} \sin \left(\frac{ps}{r} \right); \\ y &= - \frac{r}{p} \cos \left(\frac{ps}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Довжина дуги s , радіус r і кут v кола зв'язані між собою залежністю $s=rv$, звідки $v=s/r$. З врахуванням цього запишемо рівняння циліндра, у якого основою є коло (1.91):

$$\begin{aligned} X &= \frac{r}{p} \sin (pv); \\ Y &= -\frac{r}{p} \cos (pv); \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Якщо для циліндра (1.92) знайти лінійний елемент, то він буде збігатися із лінійним елементом циліндра (1.52), тобто до нього не входить коефіцієнт p . Надаючи різних значень коефіцієнту p , можна одержати множину циліндрів – згинань вихідного циліндра, рівняння якого одержимо при $p=1$. Коефіцієнт p , який не входить до виразу першої квадратичної форми, але впливає на форму поверхні, називають *параметром згинання*.

При фіксованому значенні параметра p із поверхонь неперервного згинання виділиться одна. Таким чином від початкової і до кінцевої форми поверхні при її згинанні можна отримати скільки завгодно проміжних форм. Розглянемо неперервне згинання циліндра із лінією на його поверхні. Візьмемо коло радіуса R :

$$\begin{aligned} x &= R \cos t + c_1; \\ y &= R \sin t + c_2, \end{aligned} \quad (1.93)$$

де c_1 і c_2 – сталі, що задають координати його центра і поставимо умову, щоб воно було описане на розгортці циліндра (1.83). Для цього прирівняємо вирази (1.93) з двома відповідними виразами розгортки (1.83) і одержимо залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{r} (R \cos t + c_1); \\ u &= R \sin t + c_2. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Рівняння (1.94) є внутрішніми рівняннями кривої на поверхні. Вони не змінюються при згинанні поверхні. Щоб одержати координатний запис кривої, потрібно підставити (1.93) у рівняння поверхні (1.92). Отримані параметричні рівняння є рівняннями просторової кривої, у яку перетворюється коло при згинанні циліндра:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{r}{p} \sin \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\
 y &= -\frac{r}{p} \cos \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\
 z &= R \sin t + c_2.
 \end{aligned}
 \tag{1.95}$$

На рис. 1.28 побудовано згинання циліндра за рівняннями (1.92) та криву на його поверхні за рівняннями (1.95) при різних значеннях параметра p .

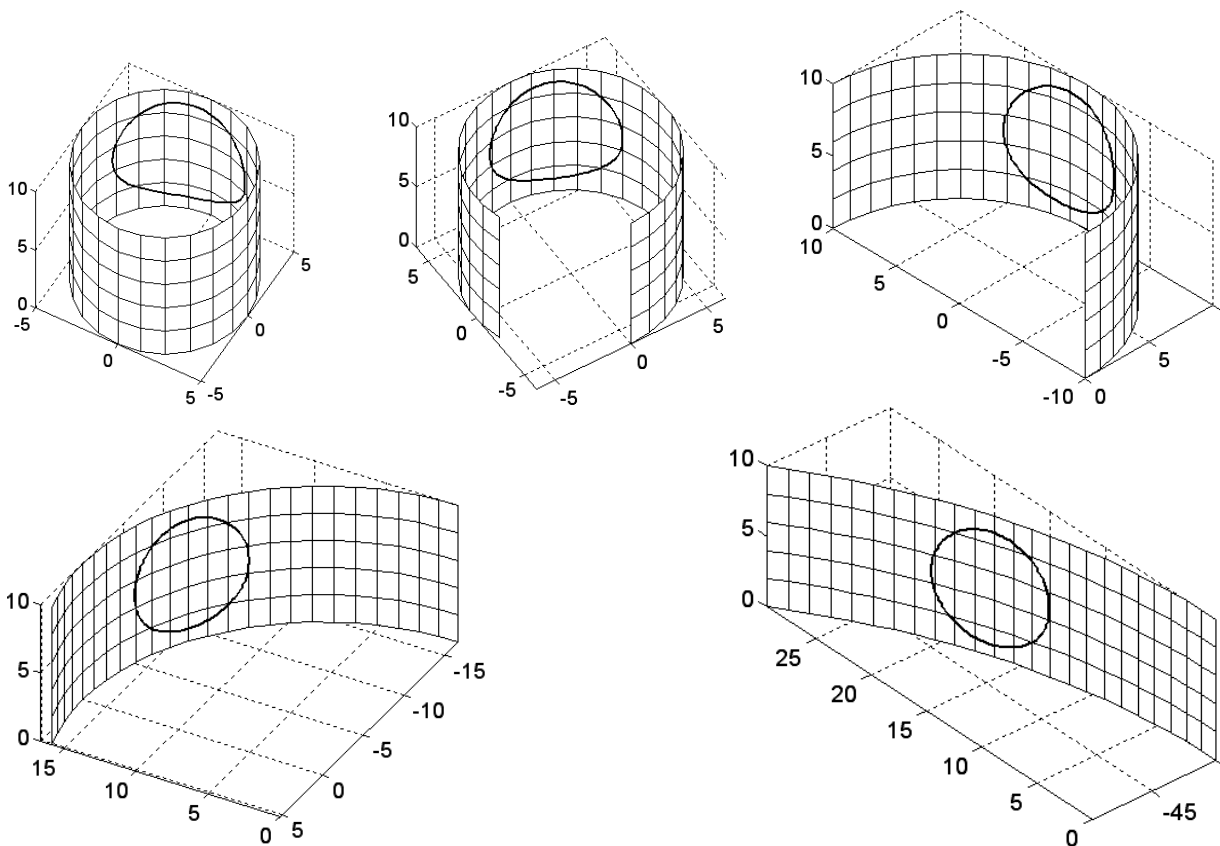


Рис. 1.28. Проміжні положення циліндра при його неперервному згинанні із лінією на поверхні

У циліндрів та конусів ребро звороту вироджене в точку, тому керування згинанням деформацією ребра звороту, як це зазвичай роблять для решти торсів, неможливе. В розглянутому прикладі здійснено неперервне згинання циліндра, у якого напрямною кривою є коло – його ортогональний переріз. Це самий простий випадок згинання, оскільки геодезична кривина кола у всіх точках дорівнює нулю. Надалі розглянемо більш складні випадки згинання. Для їх знаходження використовуються інваріанти внутрішньої геометрії поверхонь.

Нехай напрямна крива задана параметричними рівняннями у формі (1.89). Всі прямолінійні твірні циліндричної поверхні проходять через напрямну криву, паралельні між собою і нахилені до площини напрямної кривої під

сталим кутом α (рис. 1.29). Параметричні рівняння циліндричної поверхні запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \int \cos \left(\int k ds \right) ds + u \cos \alpha ; \\ Y &= \int \sin \left(\int k ds \right) ds ; \\ Z &= u \sin \alpha , \end{aligned} \quad (1.96)$$

де s, u – змінні параметри поверхні.

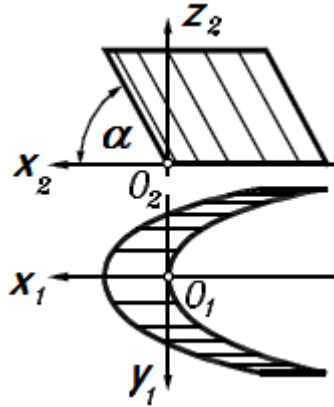


Рис. 1.29. Циліндрична похила поверхня, що проходить через задану плоску криву

Частинні похідні і коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (1.96) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= \cos \left(\int k ds \right); & \frac{\partial Y}{\partial s} &= \sin \left(\int k ds \right); & \frac{\partial Z}{\partial s} &= 0; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \alpha; \\ E &= 1; & G &= 1; & F &= \cos \left(\int k ds \right) \cos \alpha . \end{aligned} \quad (1.97)$$

Згинатимемо поверхню так, щоб кут α зменшився, прямолінійні твірні залишалися паралельними, а напрямна крива після деформації теж залишилася плоскою. Коефіцієнти першої квадратичної форми не повинні при цьому змінюватися. Для коефіцієнта F це можливо при зміні кута α і кривини k таким чином, щоб в цілому його вираз залишався незмінним. Отже, можна записати рівність:

$$\cos \left(\int k ds \right) \cos \alpha = \cos \left(\int k_{зг} ds \right) \cos \alpha_{зг} , \quad (1.98)$$

де k_{32} і α_{32} – вираз кривини напрямної кривої (її натуральне рівняння) і значення кута α після згинання поверхні.

Із (1.98) знаходимо:

$$\int k_{3r} ds = \arccos \frac{\cos \left(\int k ds \right) \cos \alpha}{\cos \alpha_{3r}}. \quad (1.99)$$

Диференціюючи рівняння (1.99) по s , остаточно знаходимо:

$$k_{3r} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{3r}} k \sin \left(\int k ds \right)}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha_{3r}} \cos^2 \left(\int k ds \right)}}. \quad (1.100)$$

Відношення постійних величин $\cos \alpha / \cos \alpha_{32}$ в (1.100) позначимо через коефіцієнт p . Тоді:

$$\cos \alpha_{3z} = \frac{\cos \alpha}{p}; \quad \sin \alpha_{3z} = \frac{\sqrt{p^2 - \cos^2 \alpha}}{p}. \quad (1.101)$$

Підставивши нові вирази (1.100) і (1.101) в (1.96), одержимо:

$$\begin{aligned} X &= \int \cos \left(\int \frac{pk \sin \left(\int k ds \right)}{\sqrt{1 - p^2 \cos^2 \left(\int k ds \right)}} ds \right) ds + u \frac{\cos \alpha}{p}; \\ Y &= \int \sin \left(\int \frac{pk \sin \left(\int k ds \right)}{\sqrt{1 - p^2 \cos^2 \left(\int k ds \right)}} ds \right) ds; \\ Z &= u \frac{\sqrt{p^2 - \cos^2 \alpha}}{p}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Одержані параметричні рівняння (1.102) неперервного згинання циліндричної поверхні справедливі для будь-якої плоскої напрямної кривої, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$.

Розглянемо приклад. Знайти параметричні рівняння неперервного згинання похилої циліндричної поверхні, у якій напрямною кривою є ланцюгова лінія, задана натуральним рівнянням:

$$k = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad (1.103)$$

де a – стала величина.

Підставляємо вираз (1.103) в (1.102) і після інтегрування та спрощень одержимо:

$$\begin{aligned} X &= ap \ln(s + \sqrt{s^2 + a^2}) + u \frac{\cos \alpha}{p}; \\ Y &= \int \sqrt{\frac{s^2 + a^2 (1 - p^2)}{s^2 + a^2}}; \\ Z &= u \frac{\sqrt{p^2 - \cos^2 \alpha}}{p}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Лінійний елемент поверхні (1.104) має вигляд:

$$dS^2 = ds^2 + \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{s^2 + a^2}} dsdu + du^2. \quad (1.105)$$

У вираз (1.105) не входить коефіцієнт p , отже він є параметром згинання. При $p=1$ отримаємо рівняння вихідної поверхні; при $p=\cos\alpha$ (α – кут нахилу твірних вихідної поверхні) отримаємо рівняння розгортки; при інших значеннях p – проміжні згинання поверхні.

Розглянемо неперервне згинання конуса, твірні якого проходять через коло радіуса R і нахилені до основи під постійним кутом ε (рис. 1.23). Рівняння конуса запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{k} + u \cos \varepsilon \right) \cos(ks); \\ Y &= \left(\frac{1}{k} + u \cos \varepsilon \right) \sin(ks); \\ Z &= u \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.106)$$

де $k=1/R$; s, u – змінні величини.

Визначаємо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (1.106) і лінійний елемент:

$$\begin{aligned} G &= (1 + uk \cos \varepsilon)^2; & F &= 0; & E &= 1; \\ dS^2 &= (1 + uk \cos \varepsilon)^2 ds^2 + du^2. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Аналізуючи вирази (1.107), можна зробити висновок, що коефіцієнти не зміняться, якщо ми будемо міняти кривину кола k і кут ε так, щоб добуток $k \cos \varepsilon$ (геодезична кривина лінії) не мінявся. Отже, вказаний добуток до і після згинання ми можемо прирівняти:

$$k \cos \varepsilon = k_{зг} \cos \varepsilon_{зг}, \quad \text{звідки} \quad k_{зг} = \frac{k \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon_{зг}}. \quad (1.108)$$

Рівняння (1.108) ми одержали із умови незмінності коефіцієнта G в (1.107). Однак зважаючи на те, що добуток $k \cos \varepsilon$ є геодезичною кривиною основи конуса (рис. 1.23), рівність (1.108) можна записати також на основі незмінності геодезичної кривини кривої при згинанні поверхні. Зокрема, при $\varepsilon_{зг} = 0$ $k_{зг} = k \cos \varepsilon$ або при переході до радіусів $R_{зг} = R / \cos \varepsilon$, тобто на розгортці радіус кола рівний довжині твірної конуса. Зігнемо конус, надавши куту ε нового значення $\varepsilon_{зг}$. Тоді кривина кола $k_{зг}$ теж зміниться у відповідності з (1.108). Підставимо $\varepsilon_{зг}$ замість ε і $k_{зг}$ із (1.108) замість k в рівняння (1.106). Одержимо:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{\cos \varepsilon_{зг}}{k \cos \varepsilon} + u \cos \varepsilon_{зг} \right) \cos \left(\frac{k \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon_{зг}} s \right); \\ Y &= \left(\frac{\cos \varepsilon_{зг}}{k \cos \varepsilon} + u \cos \varepsilon_{зг} \right) \sin \left(\frac{k \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon_{зг}} s \right); \\ Z &= u \sin \varepsilon_{зг}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Рівняння (1.109) є параметричними рівняннями неперервного згинання конуса. На рис. 1.30 за рівняннями (1.109) побудовані згинання конуса для різних значень $\varepsilon_{зг}$ (в тому числі розгортка при $\varepsilon_{зг} = 0$).

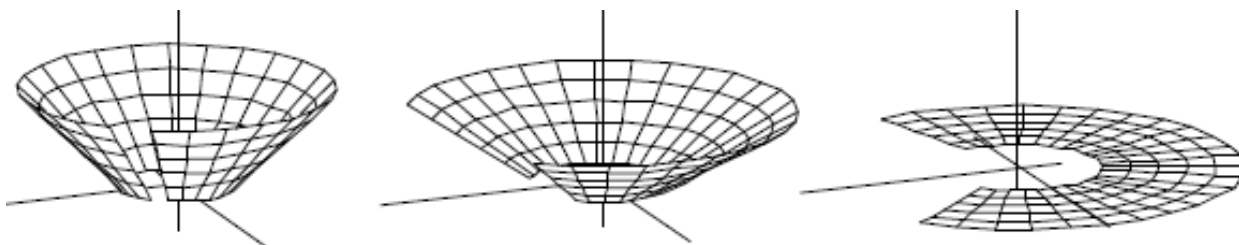


Рис. 1.30. Окремі положення конуса, побудовані за рівняннями (1.109), при його неперервному згинанні

Знайшовши для них коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні і лінійний елемент, бачимо, що вони збігаються із (1.107), тобто не залежать від кута $\varepsilon_{зг}$. Отже, $\varepsilon_{зг}$ є параметром згинання. Аналогічно (1.101) можна було б

перейти до параметра p , однак при цьому втрачається його фізичний зміст (в попередньому випадку ми це зробили для більш компактного запису рівнянь).

Аналізуючи вираз параметра згинання $p = \cos \alpha / \cos \alpha_{z_2}$, можна зробити висновок, що він не змінюється при позитивних і від'ємних кутах. Вирази $k_{зг}$ для циліндричних відсіків (1.100) і конічних (1.108) справедливі як для позитивних, так і від'ємних кутів. Це означає, що два циліндричних або конічних відсіки можуть мати спільну плоску криву. При неперервному сумісному згинанні цих відсіків напрямна крива деформується, залишаючись плоскою, а кути нахилу твірних обох відсіків змінюються на однакову величину. На рис. 1.31 показано сумісне згинання двох циліндричних відсіків із спільною ланцюговою лінією (рис. 1.31,а). При зменшенні кута нахилу твірних вона деформується (рис. 1.31,б) і нарешті переходить в криву на розгортці (на рис. 1.31,в вона показана на розгортці штрих-пунктирною лінією).

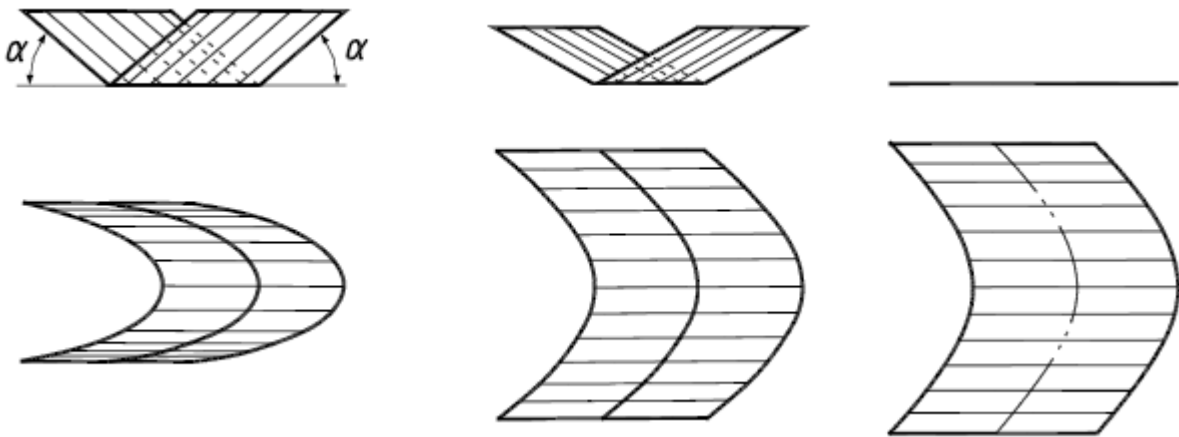


Рис. 1.31. Сумісне згинання двох відсіків із спільною плоскою лінією згину, в ролі якої виступає ланцюгова лінія

Таким же чином можна згинати і дві конічні поверхні. На рис. 1.32 показана фронтальна проєкція двох конусів із спільною напрямною кривою – колом. На спільній розгортці цих конусів напрямне коло перетвориться в коло з іншою кривиною, рівною $k_{зг} = k \cos \varepsilon$ згідно із формулою (1.108).

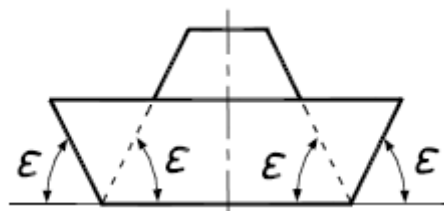


Рис. 1.32. Схема до сумісного згинання двох конусів вздовж спільного кола – лінії їх перетину

Інваріантність геодезичної кривини кривої на поверхні при згинанні останньої ми продемонстрували на прикладі конуса. Такий підхід може бути застосований до всіх поверхонь. Зокрема, якщо напрямною кривою поверхні є

ребро звороту, то його нормальна кривина дорівнює нулю, а геодезична складова дорівнює кривині ребра звороту. Таким чином, потрібно деформувати ребро звороту так, щоб його кривина при цьому не змінювалася, наприклад, зміною його скруту. Оскільки кути між лініями при згинанні поверхні теж не змінюються, то прямолінійні твірні весь час повинні бути дотичними до ребра звороту (кут між твірною і ребром звороту постійний і дорівнює нулю). Таким чином, при зміні скруту ребра звороту ми одержимо новий торс, для якого ребро звороту залишається ним і в новому положенні. Якщо ж задати скрут ребра звороту рівним нулю, то ми одержимо розгортку торса. Розглянемо сказане на прикладі торса-гелікоїда, у якого ребром звороту є гвинтова лінія:

$$\begin{aligned}x &= a \cos v; \\y &= a \sin v; \\z &= bv,\end{aligned}\tag{1.110}$$

де a – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія, b – гвинтовий параметр (сталі величини), v – незалежна змінна (кут повороту точки навколо осі циліндра при її русі по гвинтовій лінії).

Її кривина k , скрут σ і довжина дуги s визначаються із виразів:

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}; \quad \sigma = \frac{b}{a^2 + b^2}; \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} v.\tag{1.111}$$

Розв'язуючи два перші рівняння (1.111) відносно a і b , знайдемо їх вирази, а також вираз змінної v через кривину, скрут і довжину дуги гвинтової лінії:

$$a = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}; \quad b = \frac{\sigma}{k^2 + \sigma^2}; \quad v = \sqrt{k^2 + \sigma^2} s.\tag{1.112}$$

Підстановка (1.112) в (1.110) дає рівняння гвинтової лінії через її внутрішні параметри (кривину, скрут і довжину дуги):

$$\begin{aligned}x &= \frac{k}{k^2 + \sigma^2} \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\y &= \frac{k}{k^2 + \sigma^2} \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\z &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} s.\end{aligned}\tag{1.113}$$

Параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка проходить через просторову криву мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= x + ul; \\ Y &= y + um; \\ Z &= z + un, \end{aligned} \quad (1.114)$$

де x, y, z – параметричні рівняння напрямної кривої;

l, m, n – проекції одиничного вектора (напрямні косинуси) прямолінійної твірної;

u – друга змінна поверхні (довжина прямолінійної твірної).

Частковий випадок рівнянь (1.114) ми використовували в (1.24), коли напрямною лінією була плоска обвідна кіл, проте напрямний вектор там не був одиничним.

Виходячи з того, що прямолінійні твірні дотичні до напрямної лінії (гвинтової лінії (1.113)), параметричні рівняння торса-гелікоїда запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \frac{k}{k^2 + \sigma^2} \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s) - u \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ Y &= \frac{k}{k^2 + \sigma^2} \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s) + u \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ z &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} s + u \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Знаходимо частинні похідні торса (1.115) і його лінійний елемент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= -\frac{k}{k^2 + \sigma^2} \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s) - uk \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \frac{k}{k^2 + \sigma^2} \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s) - uk \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \sqrt{\frac{\sigma}{k^2 + \sigma^2}}; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \sin(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos(\sqrt{k^2 + \sigma^2} s); \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$dS^2 = (1 + u^2 k^2) ds^2 + 2 ds du + du^2. \quad (1.117)$$

До виразу лінійного елемента (1.117) не входить скрут σ гвинтової лінії (ребра звороту). Отже він є параметром згинання. При різних значеннях скруту σ ми будемо одержувати із (1.115) параметричні рівняння згинань торса-гелікоїда, а при $\sigma=0$ – його розгортку. На рис. 1.33 за рівняннями (1.115) побудовані фронтальні проекції проміжних положень торса-гелікоїда при його згинанні.

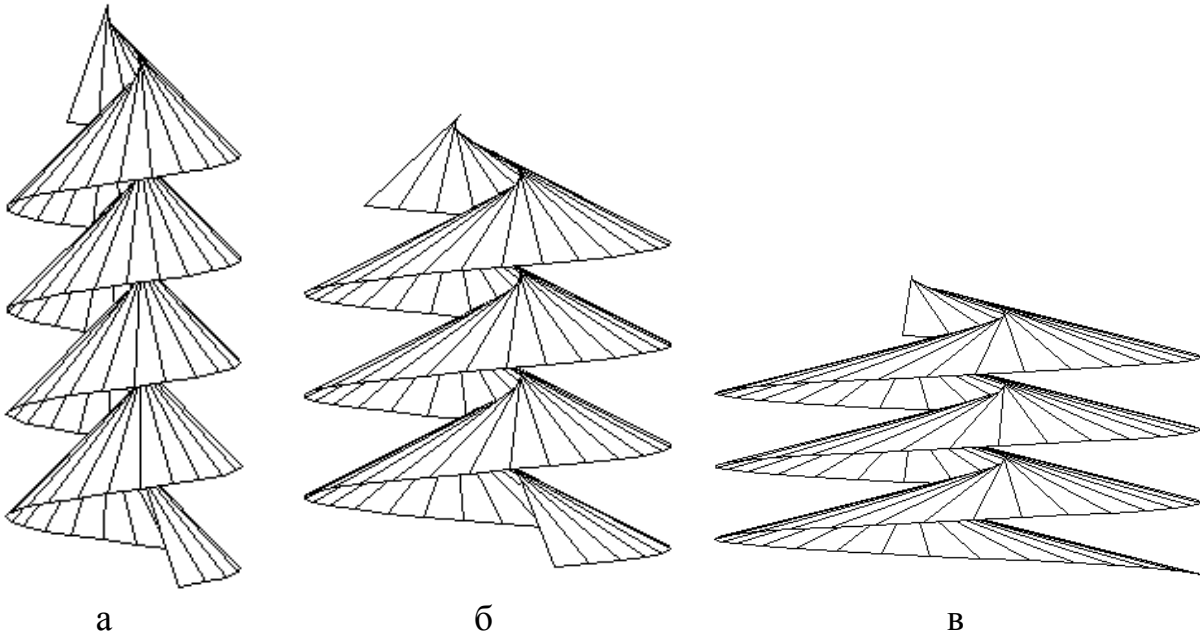


Рис. 1.33. Згинання торса-гелікоїда зміною скруту його ребра звороту при $k=1$:

а) $\sigma=1$;

б) $\sigma=0,5$;

в) $\sigma=0,25$

Якщо відомі параметричні рівняння торса, який проходить через задану напрямну криву (плоску або просторову), то його згинання часто зводиться до відшукування розгортки, оскільки це є практичною задачею. Вона включає два етапи: 1) знаходження виразу геодезичної кривини напрямної кривої від довжини її дуги і побудова на розгортці самої напрямної кривої за її натуральним рівнянням (геодезична кривина напрямної кривої перетворюється в її кривину на розгортці, оскільки нормальна складова кривини кривої на розгортці дорівнює нулю); 2) побудова прямолінійних твірних під певними кутами до напрямної кривої в розгортці, які знаходять на торсі для відповідних точок напрямної кривої.

Для торса однакового нахилу твірних другий етап значно полегшується, оскільки всі його прямолінійні твірні розташовані в нормальній площині плоскій напрямної кривої, отже складають із нею прямий кут.

Параметричні рівняння торса однакового нахилу твірних, який проходить через плоску горизонтальну криву, задану натуральним рівнянням $k=k(s)$, запишуться:

$$\begin{aligned}
X &= \int \cos \left(\int k ds \right) ds + u \cos \beta \sin \left(\int k ds \right); \\
Y &= \int \sin \left(\int k ds \right) ds - u \cos \beta \cos \left(\int k ds \right); \\
Z &= u \sin \beta,
\end{aligned} \tag{1.118}$$

де β – кут нахилу твірних торса до площини напрямної кривої. Для торса однакового нахилу твірних він є також кутом між площиною кривої і дотичною до до торса площиною. Коефіцієнти першої квадратичної форми торса (1.118) мають вигляд:

$$G = (1 + uk \cos \beta)^2; \quad F = 0; \quad E = 1, \tag{1.119}$$

тобто їх вирази аналогічні виразам (1.107) для конуса. При згинанні торса однакового нахилу твірних відбувається деформація плоскої напрямної кривої, у якій вираз геодезичної кривини не змінюється. Він визначається із добутку (1.108), у якому кут „ ε ” відіграє роль кута „ β ”. Зважаючи на те, що $\cos\beta/\cos\beta_{3z} = \text{const}$, можемо переписати рівняння (1.118) наступним чином:

$$\begin{aligned}
X &= \int \cos \left(\frac{\cos \beta}{\cos \beta_{3z}} \int k ds \right) ds + u \cos \beta_{3z} \sin \left(\frac{\cos \beta}{\cos \beta_{3z}} \int k ds \right); \\
Y &= \int \sin \left(\frac{\cos \beta}{\cos \beta_{3z}} \int k ds \right) ds - u \cos \beta_{3z} \cos \left(\frac{\cos \beta}{\cos \beta_{3z}} \int k ds \right); \\
Z &= u \sin \beta_{3z}.
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми торса (1.120) мають такий же вигляд, як і (1.119), отже параметром згинання поверхні служить кут β_{3z} . При $\beta_{3z}=0$ рівняння (1.120) опишуть розгортку торса. Зокрема, при $k=\text{const}$ ми одержимо рівняння конуса, оскільки конус є частковим випадком торса однакового нахилу твірних.

Ребром звороту торса однакового нахилу твірних служить крива укусу. Якщо брати її за напрямну криву, то як було показано раніше, параметром згинання може бути скрут цієї кривої (ребра звороту). Нижче наводимо параметричні рівняння неперервного згинання торса однакового нахилу твірних, заданого ребром звороту з кутом його підйому β :

$$\begin{aligned}
X &= \cos \beta \int \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds + u \cos \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\
Y &= \cos \beta \int \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds + u \cos \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\
Z &= s \cdot \sin \beta + u \sin \beta.
\end{aligned} \tag{1.121}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми торса (1.121) мають вигляд, аналогічний (1.117):

$$G = 1 + u^2 k^2; \quad F = 1; \quad E = 1. \quad (1.122)$$

До виразів (1.122) не входить кут β , отже він є параметром згинання. Зменшуючи кут β на певну величину, можна одержати сім'ю поверхонь – згинань вихідної аж до розгортки (при $\beta=0$). При $k=const$ рівняння (1.121) опишуть неперервне згинання торса-гелікоїда. Ребро звороту одержимо при $u=0$.

1.5. Побудова розгортки відсіків торсів

Розгорткою торса-гелікоїда є плоске кільце. Для одного витка розгорткою буде кільце із вилученим сектором (рис. 1.34).

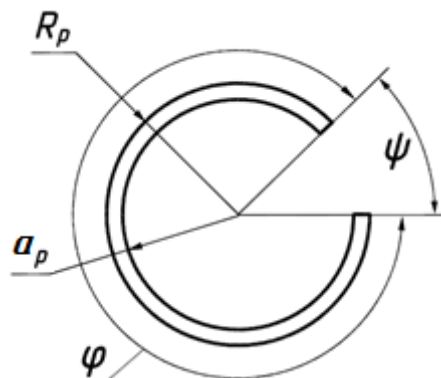


Рис. 1.34. Плоске кільце – розгортка одного витка торса-гелікоїда

Щоб виготовити один виток торса-гелікоїда, обмеженого валом і циліндричним кожухом, потрібно мати розміри заготовки, зображеної на рис. 1.34. Нехай ребро звороту знаходиться на валу радіуса a , а обмежувальний циліндр має радіус R . Потрібно встановити взаємозв'язок між цими радіусами і відповідними радіусами на розгортці: a_p і R_p . Для одного витка потрібно також знати кут ψ .

Кривина ребра звороту (гвинтової лінії) торса-гелікоїда є величина стала згідно першого виразу (1.111). Оскільки вона не змінюється при згинанні торса, то на розгортці ребро звороту перетвориться у коло з кривиною k_p і ми можемо записати:

$$k_p = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{або} \quad a_p = \frac{a^2 + b^2}{a}. \quad (1.123)$$

Зважаючи на те, що $b=atg\beta$, останній вираз (1.123) приймає вигляд:

$$a_p = \frac{a}{\cos^2 \beta}. \quad (1.124)$$

Тепер знайдемо взаємозв'язок між радіусом R обмежувального циліндра і радіусом R_p зовнішнього кола на розгортці (рис. 1.34). У рівняннях (1.110) перейдемо від гвинтового параметра b до кута β підстановкою в останнє рівняння виразу $b = atg\beta$. Після знаходження одиничного вектора дотичної до ребра звороту рівняння торса-гелікоїда запишуться:

$$\begin{aligned} X &= a \cos v \mp u \cos \beta \sin v; \\ Y &= a \sin v \pm u \cos \beta \cos v; \\ Z &= av \operatorname{tg} \beta \pm u \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Верхній знак в рівняннях (1.125) відповідає твірній торса, яка йде вгору від точки дотику від ребра звороту, а нижній – твірній, що йде до низу. За формулою (1.33) перейдемо до параметра ρ :

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{a^2 + u^2 \cos^2 \beta}. \quad (1.126)$$

Отриманий результат очевидний, якщо врахувати, що в прямокутному трикутнику OAB (рис. 1.35) $u_{np} = u \cos \beta$. Із (1.126) знаходимо:

$$u = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\cos \beta}. \quad (1.127)$$

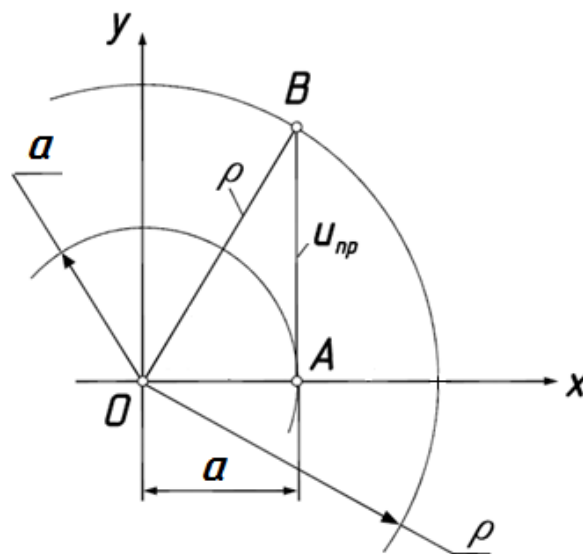


Рис. 1.35. До визначення довжини прямолінійної твірної торса-гелікоїда через відстань ρ від його осі до точки на поверхні

Підставивши (1.127) в (1.125), отримаємо параметричні рівняння торса-гелікоїда, в яких від змінної u перейшли до змінної ρ :

$$\begin{aligned}x &= a \cos v \mp \sqrt{\rho^2 - a^2} \sin v; \\y &= a \sin v \pm \sqrt{\rho^2 - a^2} \cos v; \\z &= \left(av \pm \sqrt{\rho^2 - a^2} \right) \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}\tag{1.128}$$

Очевидно, що зовнішньою крайкою плоскої заготовки (розгортки) теж буде коло, яке позначимо через R_p (рис. 1.34). Його величину можна знайти за схемою, наведеною на рис. 1.35 із прямокутного трикутника OAB . Вважаючи, що точка B лежить на зовнішньому колі розгортки, можна записати:

$$R_p = \sqrt{OA^2 + AB^2}.\tag{1.129}$$

Відрізок OA є радіусом a_p внутрішнього кола розгортки і визначається із другого виразу (1.123). Відрізок AB є довжиною прямолінійної твірної поверхні, яка буде такої ж довжини і на розгортці. Її ми знаходимо із виразу (1.127) при умові, що $\rho=R$ і $a_0=a$, тобто $u = \sqrt{R^2 - a^2} / \cos \beta$. Підставивши вказані вирази у (1.129), остаточно отримаємо:

$$R_p = \frac{1}{\cos^2 \beta} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta}.\tag{1.130}$$

Якщо у формулі (1.130) зовнішня крайка поверхні збігатиметься із ребром звороту, (при $R=a$), то ми отримаємо розгортку ребра звороту, тобто формулу (1.124).

Останній параметр, який потрібно визначити – це відповідність довжини смуги поверхні і її довжини на розгортці. Для цього візьмемо відсік поверхні, який відповідає одному її витку, тобто в межах одного кроку. Для цього скористаємося тим фактом, що довжина лінії на поверхні (наприклад, ребра звороту) на поверхні і на розгортці є рівними. Довжину одного витка ребра звороту знайдемо із того, що на розгортці циліндра гвинтова лінія на його поверхні перетворюється у пряму – гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого одним катетом є довжина кола $2\pi r$ (рис. 1.4), а другим – крок одного витка $H=2\pi r \operatorname{tg} \beta$. В нашому випадку позначення « r » і « a » означає одне і те ж саме – радіус циліндра, на якому розташоване ребро звороту. Скориставшись формулою (1.129), знаходимо довжину s внутрішньої крайки одного витка торса-гелікоїда:

$$s = \sqrt{(2\pi a)^2 + (2\pi a \operatorname{tg} \beta)^2} = \frac{2\pi a}{\cos \beta}.\tag{1.131}$$

Довжина s внутрішньої крайки розгортки, яка відповідає одному витку, визначиться із виразу: $s = a_p \varphi$. Прирівнявши цей вираз до виразу (1.131) і розв'язавши отримане рівняння відносно φ , отримаємо:

$$\varphi = \frac{2\pi a}{a_p \cos \beta} = 2\pi \cos \beta . \quad (1.132)$$

Кут $\psi = 2\pi - \varphi = 2\pi(1 - \cos \beta)$ визначає величину сектора плоскої заготовки, яку необхідно вилучити (рис. 1.34). Знайдені формули (1.124), (1.130) і (1.132) повністю описують геометричну форму розгортки одного витка торса-гелікоїда за заданими конструктивними параметрами його відсіку. Слід зазначити, що в наведених формулах значення радіуса a є граничним. Відсік поверхні можна отримати при значеннях обмежуючих циліндричних кожухів при $R > a$. За формулою (1.130) можна отримувати розгортки витків поверхні торса-гелікоїда за межами ребра звороту при умові, що радіуси обмежувальних циліндрів будуть більшими від радіуса циліндра a , на якому розташоване ребро звороту.

Розглянемо приклади на застосування відсіків торсів-гелікоїдів. У борончастому котку робочі елементи (зуби) розташовані по гвинтовій лінії циліндра перпендикулярно до його бічної поверхні, отже вони є твірними гвинтового коноїда. Це поверхня нерозгортна. В науковій літературі обґрунтовано доцільність заміни за певних умов нерозгортної поверхні розгортною [42, 148]. В цьому випадку можна точно розрахувати розгортку, оскільки робоча поверхня утворюється згинанням розгортки без зміни її площі і довжин ліній та кутів між ними. У котку, який розглядається (рис. 1.36), робочими елементами є відсіки гвинтового коноїда. Їх можна замінити відсіками торса-гелікоїда.

Робочим елементом витка є відсік гвинтової поверхні, обмежений зовнішнім радіусом R , внутрішнім радіусом r і розміром в $1/2$ кроку (рис. 1.36). Цією поверхнею є гвинтовий коноїд, у якого прямолинійні твірні перетинають його вісь під прямим кутом (рис. 1.37,а). Зважаючи на порівняно не широку металеву смугу між радіусами R і r , можна замінити поверхню гвинтового коноїда на відповідну смугу розгортного гелікоїда (торса-гелікоїда).

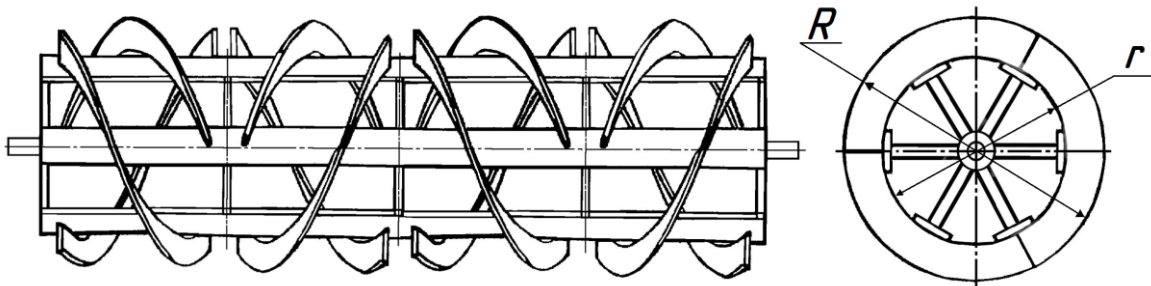


Рис. 1.36. Креслення котка, у якого робочими елементами є відсіки гвинтових поверхонь

При такій заміні потрібно оцінити ступінь відхилення розгортної поверхні від нерозгортної. Торса-гелікоїд теж є лінійчатою поверхнею, однак його прямолінійні твірні розташовані інакше – вони є дотичними до гвинтової лінії – ребра звороту (рис. 1.37,б). Вони нахилені під сталим кутом β до площини, яка перпендикулярна до осі торса-гелікоїда. Якщо для гвинтового коноїда за робочий елемент можна вибрати будь-яку смугу поверхні між сусідніми гвинтовими лініями, то для торса-гелікоїда існує обмеження: ми можемо взяти відсік поверхні тільки зовні від ребра звороту, тому що всередині поверхні не існує. Тоді постає питання, який відсік краще брати: далі від ребра звороту, чи ближче до нього. Для відповіді на це питання зробимо аналіз із застосуванням математичного апарату. Параметричні рівняння торса-гелікоїда мають вигляд (1.128).

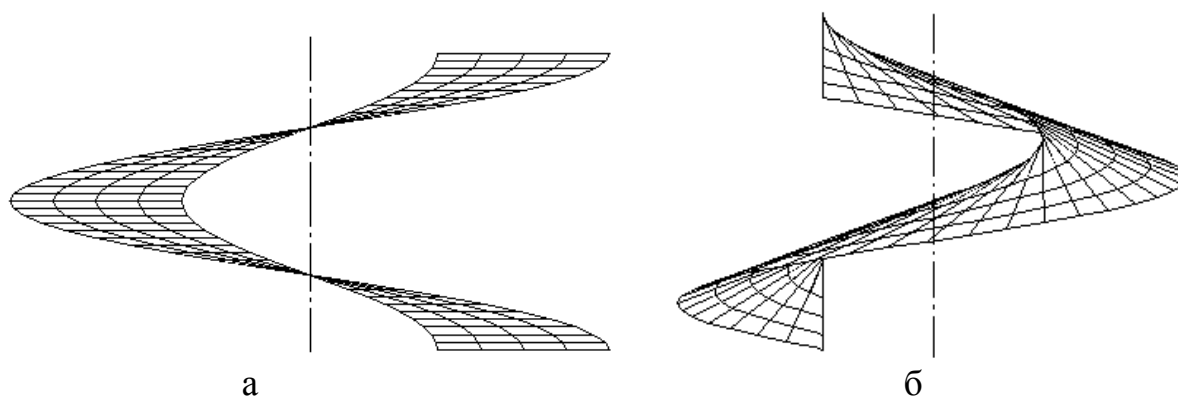


Рис. 1.37. Гвинтові поверхні із вертикальною віссю (фронтальна проекція):

а) гвинтовий коноїд; б) розгортний гелікоїд

З'ясуємо, наскільки поверхня торса-гелікоїда відрізняється від гвинтового коноїда і де краще вибрати його смугу – ближче чи далі від ребра звороту. Для цього порівнюємо осьові перерізи цих двох поверхонь. Осьовим перерізом коноїда є пряма лінія – його твірна. Щоб знайти осьовий переріз торса-гелікоїда (1.128), прирівняємо одне із двох перших рівнянь до нуля. Наприклад, прирівнявши середнє рівняння до нуля і розв'язавши його відносно v , отримаємо:

$$v = \text{Arc cos } \frac{a}{\rho}. \quad (1.133)$$

Підставимо (1.133) у перше і третє рівняння (1.128) і отримаємо вирази, що описують криву осьового перерізу торса-гелікоїда:

$$x = \rho; \quad z = \left(a \text{Arc cos } \frac{a}{\rho} - \sqrt{\rho^2 - a^2} \right) \text{tg } \beta. \quad (1.134)$$

Областю зміни аргумента ρ будуть значення, починаючи від a і закінчуючи заданим значенням. Крива перерізу буде починатися з точки на

ребрі звороту. На рис. 1.38 побудовано криву при різних значеннях кута β для $a=160$ мм і зміні ρ в межах $160\dots200$ мм.

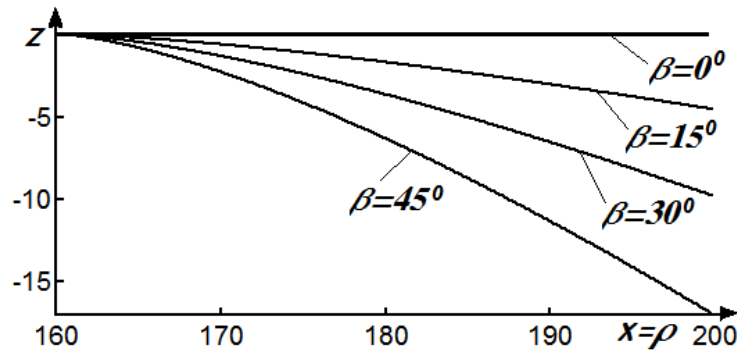


Рис. 1.38. Криві осьового перерізу торса-гелікоїда при різних значеннях кута β

Із рис. 1.38 видно, що по мірі збільшення кута β (тобто по мірі збільшення кроку H ребра звороту, оскільки кут β і крок H зв'язані між собою співвідношенням $H=2\pi a \operatorname{tg}\beta$) відхилення кривої від горизонтальної прямої зростає. При $\beta=0$ крива перетворюється в пряму і збігається із перерізом гвинтового коноїда, але при цьому крок $H=0$, тобто торс-гелікоїд перетворюється у площину. Якщо нам потрібно взяти смугу торса-гелікоїда із зазначеного проміжку $160\dots200$ шириною приміром 10 , то цю смугу потрібно брати біля ребра звороту, де відхилення найменше, тобто в межах $160\dots170$. Таким чином, приходимо до висновку, що внутрішня крайка робочого елемента котка повинна збігатися із ребром звороту, тобто $a=r$. Кутом β ми не можемо впливати на форму кривої перерізу, оскільки крок H поверхні робочого елемента має бути заданий.

Нами було розглянуто проектування робочого елемента котка із торса-гелікоїда при наступних вихідних даних: $r=160$ мм, $R=200$ мм, $\beta=30^\circ$. Як бачимо із рис. 1.38, для нашого випадку відхилення кривої від прямої у крайніх точках становить 10 мм. На рис. 1.39 побудовано робочий елемент котка у вигляді торса-гелікоїда із нанесеними прямолінійними твірними поверхні та показано товщину листового матеріалу.

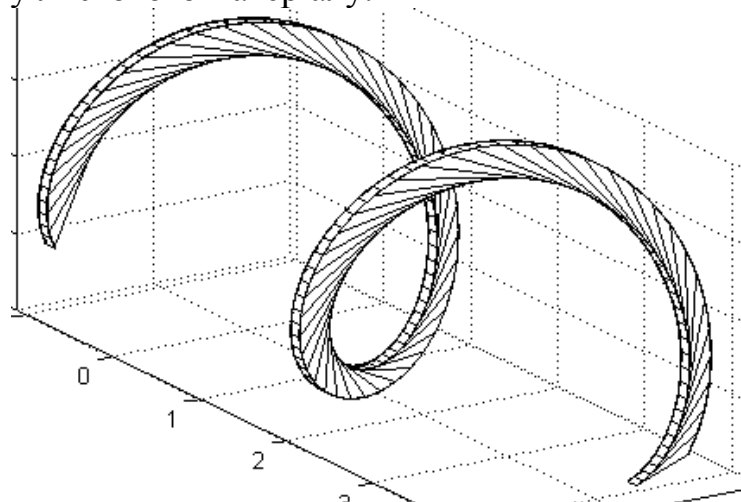


Рис. 1.39. Робочий елемент котка у вигляді смуги торса-гелікоїда

Для конструктивних параметрів $r=160$ мм, $R=200$ мм, $\beta=30^\circ$ знаходимо: $a_p=213,4$ мм, $R_p=254,4$ мм, $\varphi=312^\circ$. Для половини витка відповідатиме заготовка, отримана діленням розгортки одного витка (рис. 1.34) на дві рівні частини.

Інший приклад – конструювання гвинтоподібного ножа подрібнювального апарату кормозбирального агрегату. На рис. 1.40 показаний гвинтоподібний ніж із прямолінійним поперечним перерізом.

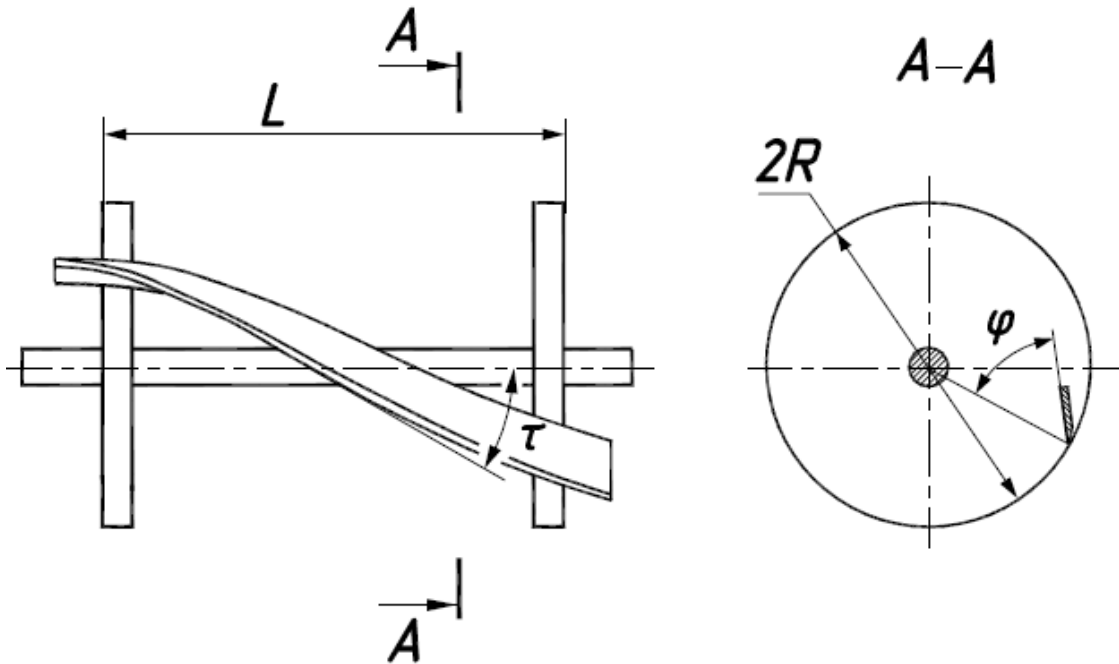


Рис. 1.40. Гвинтоподібний ніж подрібнювального апарату барабанного типу

Перевагами такого ножа в порівнянні із плоскими ножами є постійність кутів φ (передній кут у будь-якій точці поперечного перерізу і τ (кут нахилу леза до кромки протиріжучого бруса), чим забезпечується рівномірне навантаження на подрібнювальний барабан і зменшується енергоємність різання. Постійність кута τ по всій довжині ножа забезпечується ріжучою кромкою у вигляді гвинтової лінії сталого кроку. При прямолінійному поперечному перерізі ножа його поверхнею є відсік прямого відкритого гелікоїда, тобто нерозгортної поверхні. Рівномірне обертання барабана зв'язане із рівномірним поступальним переміщенням шару рослинної маси (рис. 1.41,а) через задану довжину частин подрібненої маси.

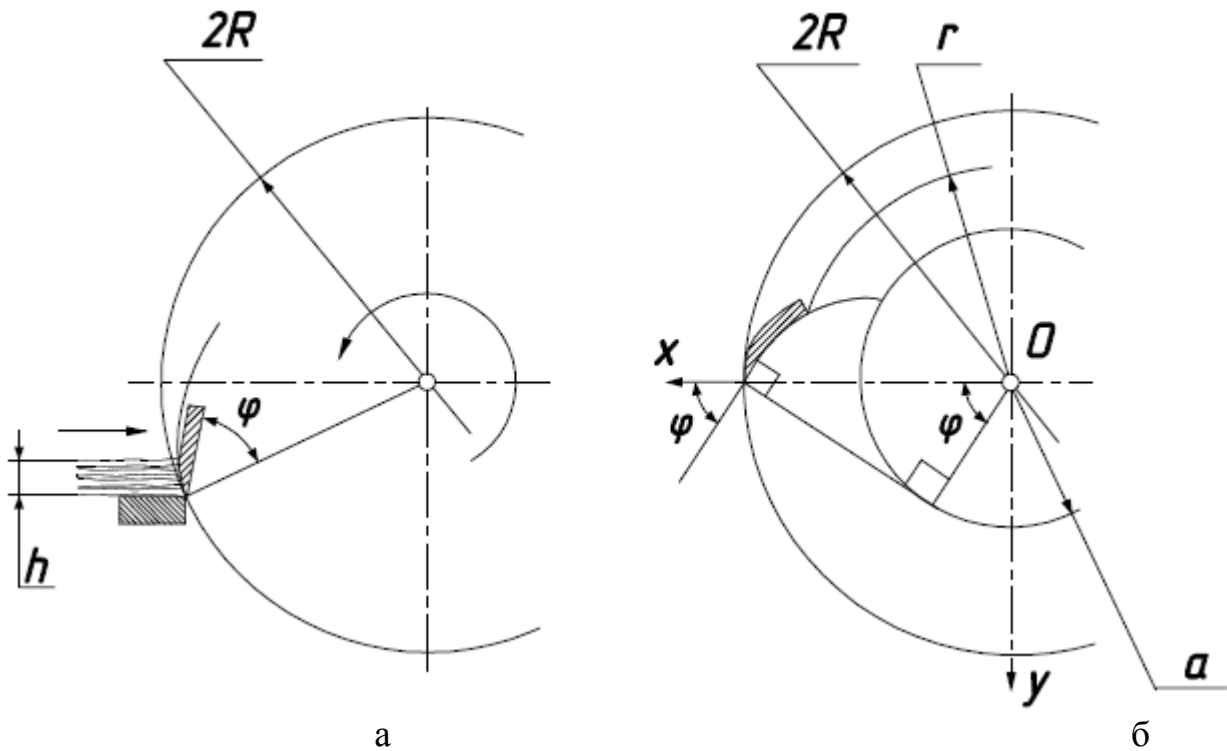


Рис. 1.41. До конструювання поверхні гвинтоподібного ножа подрібнювального апарату барабанного типу:

а) поперечний переріз ножа, поверхнею якого є прямий відкритий гелікоїд;

б) поперечний переріз ножа, поверхнею якого є торса-гелікоїд

В результаті обертального руху ножа і поступального руху рослинної маси перерізаний шар рослин висотою h (рис. 1.41,а) обмежений спіраллю Архімеда. Тому з однієї сторони необхідно зменшувати кут φ до такої міри, щоб перерізаний шар не торкався до поверхні ножа, а з іншої сторони таке зменшення тягне за собою зростання кута заточки, що негативно впливає на енергоємність різання. Звідси можна зробити висновок, що ніж доцільно конструювати з криволінійним перерізом так, щоб крива перерізу знаходилася поза межами спіралі Архімеда.

Відомо, що в торса-гелікоїда поперечним перерізом є еволюта кола радіуса a – проекції його ребра звороту (гвинтової лінії). Отже, ніж із такою поверхнею задовольняє названу вимогу. На рис. 1.41,б зображено переріз ножа із торса-гелікоїда, у якого крива перерізу є частиною евольвенти кола радіуса a – проекції ребра звороту. Відсік торса-гелікоїда обмежено двома співвісними циліндрами радіуса R і r (рис. 1.41,б). В такому випадку можна точно знайти його розгортку у вигляді плоского кільця.

Розглянемо конструювання гвинтоподібних ножів із відсіку торса-гелікоїда і побудову їх розгортки за заданою довжиною барабана L , величинами радіусів R і r , та кутів φ і τ .

Знайдемо величину радіуса a . Проекція прямолінійної твірної торса є дотичною до кола радіуса a – проекції ребра звороту (рис. 1.41,б). Ця дотична

перетинає евольвенту під прямим кутом. Із прямокутного трикутника, у якого катетом є радіус a , а гіпотенузою – радіус R , знаходимо:

$$a = R \cos \varphi . \quad (1.135)$$

Щоб знайти радіус кола R_p (леза ножа на розгортці) за формулою (1.130), потрібно знати величину кута β – кута підйому ребра звороту. Для цього розгорнемо циліндри радіусом a і R і висотою L . Гвинтові лінії (кромка лева і ребро звороту) перетворюються на прямі – гіпотенузи прямокутних трикутників (рис. 1.42,а).

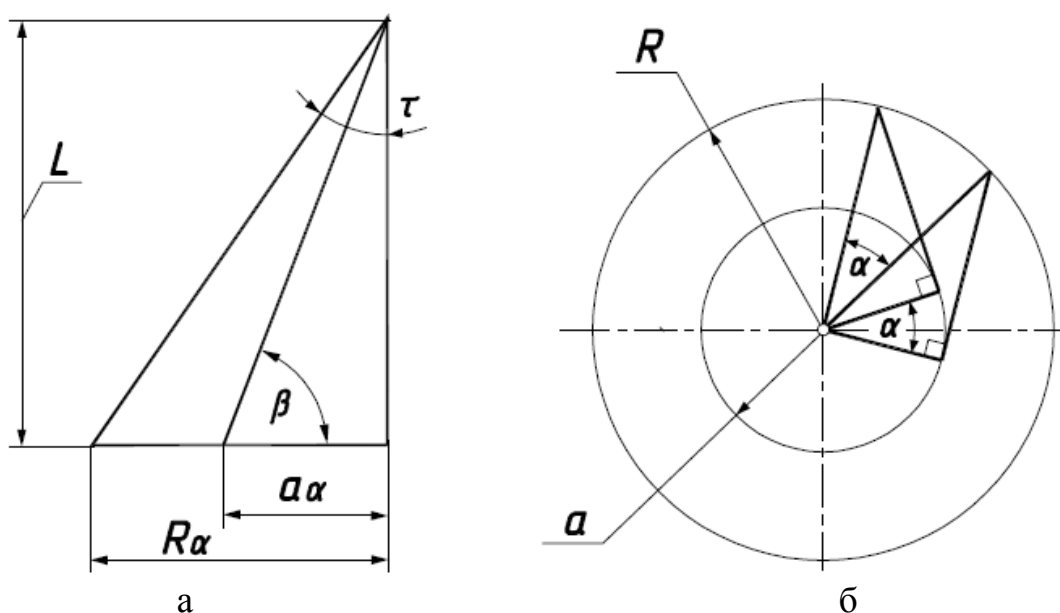


Рис. 1.42. Графічні ілюстрації до визначення геометричних параметрів гвинтоподібного ножа:

- а) гвинтові лінії ріжучої кромки і ребра звороту на розгортках циліндрів радіуса a і R і висотою L ;
- б) проекція циліндрів та твірних торса-гелікоїда на площину, перпендикулярну осі циліндрів

Один катет є спільним – він дорівнює довжині L барабана. Інші катети є довжинами кіл – основ відповідних циліндрів. Вони визначаються добутком радіуса на кут α . Для гвинтоподібного ножа кут α називається кутом закручування. Він визначається наступним чином. При русі точки по лезу ножа вона одночасно повертається навколо осі барабана на певний кут. При переміщенні точки від початку і до кінця ножа, тобто в межах довжини L барабана і буде утворений кут α . Він буде такий же само і для іншої гвинтової лінії – ребра звороту. Це видно із рис. 1.42,б. Кут α утворений двома прямими, які сполучають центр кола із точками на колі – проекцією відповідної гвинтової лінії. Ці точки відповідають початку і кінцю гвинтової лінії (наприклад, ріжучій кромці ножа). За допомогою рівних прямокутних трикутників показано, що кут

α рівний для будь-якої співвісної гвинтової лінії на поверхні торса-гелікоїда в межах відсіку довжиною L вздовж осі.

Знайдемо кут α для ріжучої кромки леза із більшого прямокутного трикутника (рис. 1.42,а):

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{R \alpha}{L}, \quad \text{звідки} \quad \alpha = \frac{L}{R} \operatorname{tg} \tau. \quad (1.136)$$

Із меншого прямокутного трикутника запишемо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{L}{a \alpha}. \quad (1.137)$$

Із врахуванням (1.135) і (1.136) із (1.137) знаходимо:

$$\operatorname{ctg} \beta = \cos \varphi \operatorname{tg} \tau. \quad (1.138)$$

Для підстановки у (1.130) знаходимо вирази синуса і косинуса кута β :

$$\sin \beta = \frac{\cos \tau}{\sqrt{\sin^2 \tau \cos^2 \varphi + \cos^2 \tau}}; \quad \cos \beta = \frac{\sin \tau \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \tau \cos^2 \varphi + \cos^2 \tau}}. \quad (1.139)$$

Знайдемо радіус ріжучої кромки гвинтоподібного ножа на його розгортці. Підставимо (1.135) і (1.139) в (1.130) і після спрощень отримаємо:

$$R_p = \frac{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \tau}}{\sin \tau \cos \varphi}. \quad (1.140)$$

Щоб отримати величину радіуса r_p внутрішнього кола, яке обмежує плоске кільце на розгортці ножа, потрібно у формулу (1.130) замість R підставити r (при цьому у виразі $a=R \cos \alpha$ залишається R).

Залишилося знайти центральний кут φ , який обмежує кільце на розгортці. Формула (1.132) для цього не підходить, оскільки вона обмежує один виток торса-гелікоїда на розгортці, а у нас виток неповний і залежить від довжини барабана L . Цей кут шукатимемо з тих же міркувань, що і для повного витка. Його позначимо літерою “ ε ”, оскільки в нашому випадку літерою “ φ ” позначено передній кут гвинтоподібного ножа.

Радіус a_p кола – ребра звороту на розгортці – визначимо із формули (1.124) при підстановці в неї виразів (1.135) і другого виразу (1.139). Після цього отримаємо:

$$a_p = R \frac{\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \tau}{\cos \varphi}. \quad (1.141)$$

Довжина d потрібної ділянки цього кола дорівнює довжині гіпотенузи меншого прямокутного трикутника на рис. 1.42,а, в яку перетворилося ребро звороту на розгортці циліндра. Отже, можна записати:

$$d = \sqrt{(a \alpha)^2 + L^2} = L \sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \tau}. \quad (1.142)$$

З іншої сторони, довжина частини кола (ребра звороту) радіуса a_p на розгортці торса-гелікоїда визначається із виразу:

$$d = a_p \varepsilon. \quad (1.143)$$

Прирівняємо між собою (1.142) і (1.143) із врахуванням (1.141) і після спрощень одержимо:

$$\varepsilon = \frac{L \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \tau}{R \sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \tau}}. \quad (1.144)$$

Формул (1.140) і (1.144) достатньо, щоб побудувати ріжучу крайку ножа на розгортці, яка спирається на центральний кут ε (1.144). Радіус r_p внутрішнього кола кільця (рис. 1.43,а) можна задати, виходячи із ширини ножа, або ж знайти за формулою (1.130), про що вже йшлося.

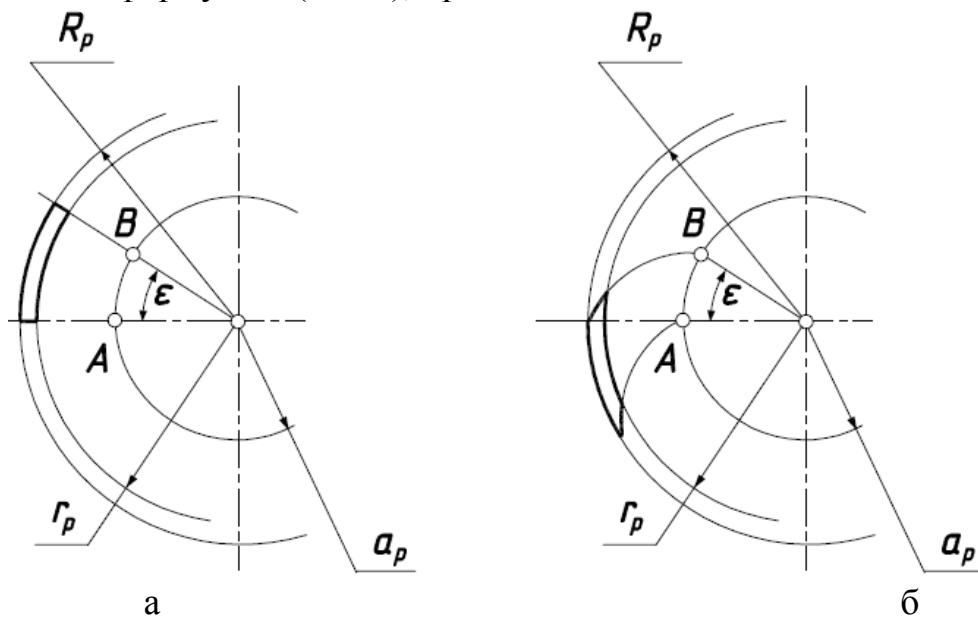


Рис. 1.43. Графічні ілюстрації до побудови розгортки гвинтоподібного ножа:

- а) розгортка з боків обмежена прямими лініями;
- б) розгортка з боків обмежена кривими лініями

Кільце з боків обмежене відрізками прямих ліній, які йдуть із його центра. Таке обмеження кільця може бути прийнятним при його невеликій ширині. Насправді ж кільце обмежене кривими – евольвентами кола (рис. 1.43,б). Якщо поверхню торса-гелікоїда обмежити площинами, перпендикулярними до його осі, то кривими перерізу поверхні будуть евольвенти кола, яке є проекцією ребра звороту. На розгортці ці криві перетворюються теж у евольвенти кола, яке є розгорткою ребра звороту. На рис. 1.43,б евольвенти побудовані із точок A і B , які належать колу радіуса r_p (розгортці ребра звороту). Спрощена (рис. 1.43,а) і точна (рис. 1.43,б) розгортки суттєво відрізняються одна від одної. Насправді ж ця відмінність є незначною, оскільки на рис 1.43 показано схему вирізання відсіку ножа на розгортці без врахування реальних розмірів ножа (його ширини).

Ми розглянули побудову розгортки торса-гелікоїда, у якого ребром звороту є гвинтова лінія. Оскільки її кривина стала, то на розгортці вона перетворюється у коло. Крім того, торс-гелікоїд відноситься до торсів однакового нахилу твірних, неперервне згинання яких описується параметричними рівняннями (1.121). Якщо в наведених рівняннях задати $k=const$, то ми отримаємо неперервне згинання торса-гелікоїда. При $\beta=0$ рівняння (1.121) дадуть розгортку. У рівняннях (1.121) ребро звороту є крива укусу і задана вона у функції довжини власної дуги s . Однак тільки обмежене число кривих може бути задане у функції довжини власної дуги. Для переважної кількості кривих довжина дуги знаходиться інтегруванням виразу (1.11) чисельними методами. Ребром звороту може бути будь-яка просторова крива. Розглянемо приклад на побудову розгортки, у якої ребром звороту є циліндрична крива, яка при побудові підпорних витків шнека була прийнята за напрямну:

$$\begin{aligned}x &= r \cos t; \\y &= r \sin t; \\z &= at - bt^2.\end{aligned}\tag{1.145}$$

Знаходимо перші і другі похідні рівнянь (1.145):

$$\begin{aligned}x' &= -r \sin t; & x'' &= -r \cos t; \\y' &= r \cos t; & y'' &= -r \sin t; \\z' &= a - 2bt; & z'' &= -2b.\end{aligned}\tag{1.146}$$

Перші похідні (1.146) є проекціями дотичної. Знаходимо одиничний вектор дотичної:

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 m &= \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 n &= \frac{a - 2bt}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.147}$$

Параметричні рівняння торса згідно (1.114) запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= r \cos t - u \frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 Y &= r \sin t + u \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 Z &= at - bt^2 + u \frac{a - 2bt}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.148}$$

На рис. 1.44 побудовано чотири витки поверхні, у якої ребром звороту є гвинтова лінія змінного кроку. Радіус циліндра r , на якому розташована лінія, сталі a і b , межі зміни параметра t взяті такі, як і при проектуванні підпорного витка. Хоча поверхні подібні між собою, вони значно відрізняються. Побудований торс не є торсом однакового нахилу твірних, через це при сталій довжині прямолінійних твірних зовнішня крайка поверхні не лежить на циліндрі, що показано на рис. 1.44.

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні (1.148). Частинні похідні рівнянь (1.148) запишуться:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X}{\partial t} &= -\left[r + u \frac{2rb(a - 2bt)}{(r^2 + (a - 2bt)^2)^{3/2}} \right] \sin t - u \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \left[r + u \frac{2rb(a - 2bt)}{(r^2 + (a - 2bt)^2)^{3/2}} \right] \cos t - u \frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\
 \frac{\partial Z}{\partial t} &= a - 2bt - u \frac{2br^2}{(r^2 + (a - 2bt)^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.149}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}; \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{a - 2bt}{\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}}.\end{aligned}\tag{1.150}$$

Згідно формул (1.42) знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (1.148):

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} = \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2}; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2 = r^2 + (a - 2bt)^2 + \frac{u^2 r^4 [4b^2 + r^2 + (a - 2bt)^2]^2}{[r^2 + (a - 2bt)^2]^2}.\end{aligned}\tag{1.151}$$

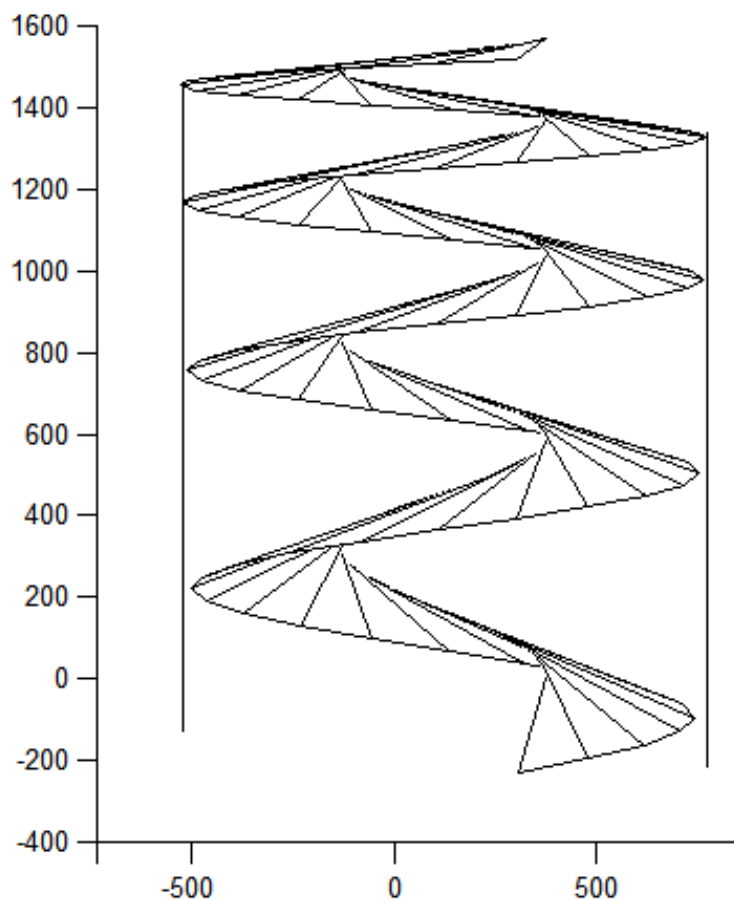


Рис. 1.44. Торс, у якого ребром звороту є циліндрична гвинтова лінія змінного кроку

Перша квадратична форма поверхні (1.148) згідно формули (1.41) запишеться:

$$dS^2 = du^2 + 2\sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} du dt + \left\{ r^2 + (a - 2bt)^2 + \frac{u^2 r^4 [4b^2 + r^2 + (a - 2bt)^2]^2}{[r^2 + (a - 2bt)^2]^2} \right\} dt^2. \quad (1.152)$$

Знайдемо розгортку тора (1.148). Оскільки кривина ребра звороту не змінюється при згинанні, знайдемо її вираз за формулою (1.9). Підставивши в неї похідні (1.146), отримуємо:

$$k = \frac{r^2 [4b^2 + (a - 2bt)^2 + r^2]}{[r^2 + (a - 2bt)^2]^{3/2}}. \quad (1.153)$$

Ребро звороту на розгортці знайдемо за формулами (1.89). Оскільки в нашому випадку незалежною змінною є не довжина дуги s , а довільний параметр t , потрібно знайти вираз для ds :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} dt. \quad (1.154)$$

Підставимо вирази (1.153) і (1.154) в (1.89) і отримуємо:

$$\begin{aligned} x &= \int \cos \left(\int \frac{r^2 [4b^2 + (a - 2bt)^2 + r^2]}{[r^2 + (a - 2bt)^2]} dt \right) \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} dt; \\ y &= \int \sin \left(\int \frac{r^2 [4b^2 + (a - 2bt)^2 + r^2]}{[r^2 + (a - 2bt)^2]} dt \right) \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} dt. \end{aligned} \quad (1.155)$$

До параметричних рівнянь ребра звороту на розгортці входять інтеграли, які рідко вдається проінтегрувати. В нашому випадку вдається проінтегрувати вираз у круглих дужках (під знаками тригонометричних функцій):

$$\int \frac{r^2 [4b^2 + (a - 2bt)^2 + r^2]}{[r^2 + (a - 2bt)^2]} dt = \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right). \quad (1.156)$$

Із врахуванням (1.156) параметричні рівняння (1.155) приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x &= \int \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} \cos \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right) dt; \\
 y &= \int \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} \sin \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right) dt.
 \end{aligned}
 \tag{1.157}$$

Незважаючи на те, що один вираз вдалося проінтегрувати, криву (1.157) потрібно будувати за допомогою чисельних методів.

Оскільки при згинанні прямолінійні твірні поверхні залишаються дотичними до ребра звороту, то такими вони будуть і на розгортці. Отже, до кривої (1.157) потрібно провести дотичні прямолінійні твірні. Беремо похідні рівнянь (1.157) і знаходимо проекції одиничного вектора:

$$\left\{ \cos \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right); \sin \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right) \right\} \tag{1.158}$$

Тепер можна остаточно записати параметричні рівняння розгортки торса (1.148):

$$\begin{aligned}
 X &= \int \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} \cos \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right) dt + \\
 &\quad + u \cos \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right); \\
 Y &= \int \sqrt{r^2 + (a - 2bt)^2} \sin \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right) dt + \\
 &\quad + u \sin \left(r^2 t - \frac{ar^2}{2b} - 2rb \operatorname{Arctg} \frac{a - 2bt}{r} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.159}$$

Якщо взяти частинні похідні рівнянь (1.159) і знайти першу квадратичну форму, то вона буде точно такою, як і форма, наведена в (1.152). Це свідчить про те, що розгортка знайдена правильно.

Якщо ребро звороту задане параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги, то параметричні рівняння розгортки будуть мати загальний вигляд, до яких входить вираз кривини ребра звороту. Перша квадратична форма теж матиме загальний вигляд. Параметричні рівняння ребра звороту на розгортці опишуться виразами (1.89). Їх перші похідні є проекціями одиничного вектора, який є напрямним для дотичних твірних. Отже, параметричні рівняння розгортки можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} X &= \int \cos \left(\int k ds \right) ds + u \cos \left(\int k ds \right); \\ Y &= \int \sin \left(\int k ds \right) ds + u \sin \left(\int k ds \right). \end{aligned} \quad (1.160)$$

Частинні похідні рівнянь (160) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= \cos \left(\int k ds \right) - uk \sin \left(\int k ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \sin \left(\int k ds \right) + uk \cos \left(\int k ds \right); \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \left(\int k ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \sin \left(\int k ds \right). \end{aligned} \quad (1.161)$$

За частинними похідними (1.161) знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} = 1; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 = 1 + u^2 k^2. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Перша квадратична форма розгортки (1.160) запишеться:

$$dS^2 = du^2 + 2duds + (1 + u^2 k^2) ds^2. \quad (1.163)$$

Строчною літерою «*s*» позначено довжину дуги ребра звороту, а прописною – довжину дуги лінії на поверхні торса і на розгортці. Вираз кривини $k=k(s)$ ребра звороту знаходять через перші похідні ребра звороту за формулою (1.13). Якщо взяти будь-яку просторову криву у функції натурального параметра за ребро звороту, то параметричні рівняння розгортки утвореного торса будуть мати вигляд (1.160), тобто вони будуть узагальненими. Знайшовши вираз кривини ребра звороту і підставивши його у рівняння (1.160) і вираз (1.163), ми одержимо рівняння конкретного торса і його квадратичну форму.

Розглянемо приклад. Візьмемо за ребро звороту циліндричну криву, задану параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги s :

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right); \\
 y &= r \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right); \\
 z &= \sqrt{r^2 + s^2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.164}$$

Знаходимо перші і другі похідні рівнянь (1.164):

$$\begin{aligned}
 x' &= -\frac{r \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{\sqrt{r^2 + s^2}}; & x'' &= \frac{rs \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{(r^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{r \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{r^2 + s^2}; \\
 y' &= \frac{r \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{\sqrt{r^2 + s^2}}; & y'' &= -\frac{rs \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{(r^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{r \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right)}{r^2 + s^2}; \\
 z' &= \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}; & z'' &= \frac{r^2}{(r^2 + s^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.165}$$

За формулою (1.13) знаходимо вираз кривини ребра звороту (1.164), який є також виразом кривини для його розгортки:

$$k = \frac{\sqrt{2} r}{r^2 + s^2}.
 \tag{1.166}$$

Параметричні рівняння розгортки згідно (1.160) запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= \int \cos \left(\sqrt{2} \text{Arctg } \frac{s}{r} \right) ds + u \cos \left(\sqrt{2} \text{Arctg } \frac{s}{r} \right); \\
 Y &= \int \sin \left(\sqrt{2} \text{Arctg } \frac{s}{r} \right) ds + u \sin \left(\sqrt{2} \text{Arctg } \frac{s}{r} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.167}$$

Перша квадратична форма розгортки (1.167) згідно (1.163) приймає вигляд:

$$dS^2 = du^2 + 2 du ds + \left(1 + \frac{2u^2 r^2}{(r^2 + s^2)^2} \right) ds^2.
 \tag{1.168}$$

Параметричні рівняння торса з ребром звороту (1.164) запишуться:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right) - u \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right); \\ Y &= r \sin \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right) + u \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \cos \left(\text{Arc sinh } \frac{s}{r} \right); \\ Z &= \sqrt{r^2 + s^2} + u \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Якщо для торса (1.169) знайти першу квадратичну форму, то вона буде точно такою, як і для розгортки, тобто збігатиметься із (1.168).

Побудуємо розгортку для торса, заданого не ребром звороту, а напрямною лінією, як ми це робили при проектуванні підпорних витків із торса однакового нахилу твірних (рис. 1.18). При побудові розгорток окремих витків підпорної поверхні будемо виходити із того, що довжини прямолінійних твірних поверхні, інших ліній, величини кутів між ними при розгинанні поверхні змінюватимуться не будуть. Будемо розгинати поверхню зменшення кута β до повного суміщення її із горизонтальною площиною (рис. 1.18). При такому розгинанні обвідна крива буде певним чином трансформуватися, але її довжина, а також кути між нею і прямолінійними твірними (вони всі прямі і на рис. 8 показані чотирикутними значками) залишатимуться незмінними. Після повного суміщення обвідна трансформується в іншу криву (рис. 1.45), а прямолінійні твірні будуть дотикатися до плоскої кривої – лінії, в яку перетворилося ребро звороту (на рис. 1.18 воно не показане). Точки A і B на зовнішній і внутрішній крайках витка будемо шукати, відштовхуючись від обвідної в розгортці, маючи на увазі, що відстань до них не змінилася. На рис. 1.45 показано, що в точці C ребро звороту заходить на розгортку відсіку витка, отже конструювання поверхні лівіше від неї стає неможливим.

Розгортку можна будувати різними способами. Наприклад, можна знайти геодезичну криву обвідної лінії і побудувати трансформовану криву на розгортці, як ми це робили в попередньому випадку, коли шукали ребро звороту на розгортці. Наступний етап – побудова прямолінійних твірних, які будуть перпендикулярними до обвідної на розгортці. Ми побудуємо розгортку способом, описаним в праці [89]. Прямолінійні твірні, дотикаючись до ребра звороту, утворюють певну закономірність розташування, яка залежить від змінної t . Наприклад, величина кута між крайніми прямолінійними твірними на розгортці (рис. 1.45) буде такою ж, як і між відповідними твірними на поверхні (рис. 1.18). Якщо на розгортці цей кут розташований у площині, то на поверхні він є сумою окремих кутів між окремими твірними, якщо вважати, що такий відсік поверхні є площиною. Інакше кажучи, поверхню можна уявити гранною, тоді сумарний кут буде сумою окремих кутів між ребрами. Якщо всі твірні розгортки провести із однієї точки, то між крайніми твірними і буде величина

сумарного кута. Якщо із цієї точки провести коло одиничного радіуса (рис. 1.46,а), то цей кут буде чисельно рівний дузі AB .

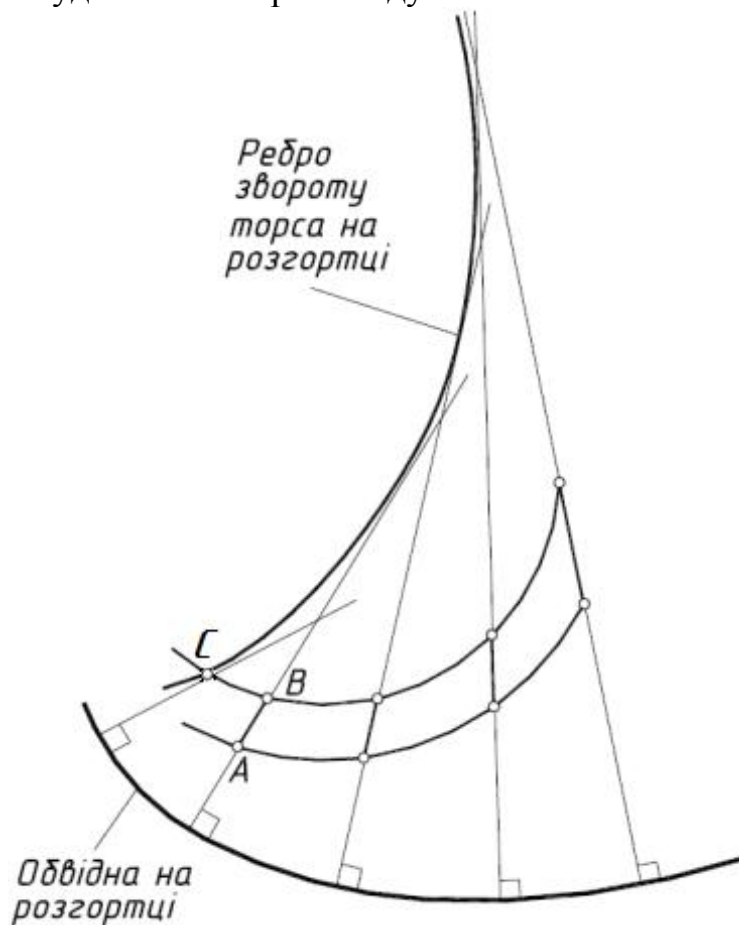


Рис. 1.45. Схема побудови підпорного витка на розгортці

Відлік дуги AB на розгортці можна починати від осі Ox або ж від іншої прямої, задавши кут α_0 . Певному поточному значенню змінної t відповідатиме кут α в точці M (рис. 1.46,а).

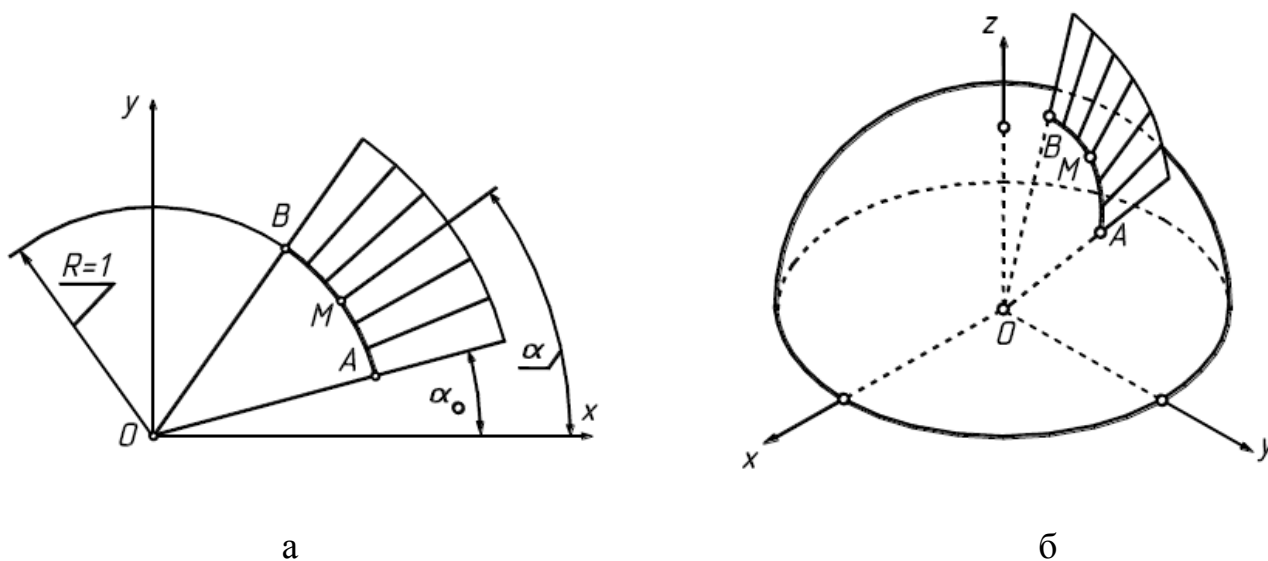


Рис. 1.46. До визначення кута між твірними торса за допомогою сфери одиничного радіуса

Аналогічно можна провести із однієї точки всі твірні торса, тоді вони утворюють конус. Провівши із цієї точки сферу одиничного радіуса, отримаємо сферичну криву перетину сфери із конусом (рис. 1.46,б). Довжина кривої AB на сфері теж чисельно рівна куту між крайніми твірними. Таким чином, визначення кута між твірними торса зводиться до визначення довжини дуги на сфері одиничного радіуса.

Сукупність всіх твірних торса задається напрямним вектором. Для поверхні підпорного витка, якою є торс однакового нахилу твірних, проекції напрямного вектора наведені в (1.27). Однак він не є одиничним. Після приведення до одиничного його проекції запишуться:

$$\begin{aligned} l &= -\frac{\cos \beta}{r} \left[z'_H \operatorname{ctg} \beta \sin t + \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \cos t \right]; \\ m &= \frac{\cos \beta}{r} \left[z'_H \operatorname{ctg} \beta \cos t - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \sin t \right]; \\ n &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Для підпорного витка залежність $z_H = z_H(t)$ наведена в (1.32). Вирази (1.170) можна розцінювати, як параметричні рівняння кривої. Якщо змінювати t в певних межах, то в просторі буде описана крива, причому вона буде розташована на сфері одиничного радіуса. Для знаходження її довжини за формулою (1.11) необхідно мати похідні виразів (1.170). Після їх диференціювання знаходимо:

$$\begin{aligned} l' &= -\frac{\cos \beta}{r} \left[\left(z''_H \operatorname{ctg} \beta - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \right) \sin t + z'_H \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{z''_H \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta}} \right) \cos t \right]; \\ m' &= \frac{\cos \beta}{r} \left[\left(z''_H \operatorname{ctg} \beta - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \right) \cos t - z'_H \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{z''_H \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta}} \right) \sin t \right]; \\ n' &= 0. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Підставивши (1.171) в (1.11), після спрощень отримуємо:

$$\alpha = \cos \beta \int \frac{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} - z''_H \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta}} dt. \quad (1.172)$$

Підставляємо в (1.172) залежність $z_H = z_H(t)$ із (1.32) та її похідні і отримуємо вираз, який вдається проінтегрувати:

$$\alpha = t \cos \beta - \cos \beta \arcsin \left[\frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} (a - 2bt) \right]. \quad (1.173)$$

Залежність (1.173) показує закономірність зростання кута α між прямолінійними твірними торса по мірі збільшення змінної t . Така ж сама закономірність буде і на розгортці торса.

Оскільки для нашого торса (рис. 1.18) всі твірні перетинають обвідну криву під прямим кутом, то і на розгортці буде так само (рис. 1.45). Якщо в точках перетину твірних із обвідною провести дотичні до обвідної кривої, то ми отримаємо таку ж закономірність розташування прямих ліній, як і твірних торса, тільки повернутих на 90° . Отже, закономірність зміни кута α (1.173) справедлива і для дотичних до обвідної. В такому випадку можна записати відоме співвідношення для плоскої кривої, якою є обвідна на розгортці торса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_{\text{обп}}}{dt} : \frac{dx_{\text{обп}}}{dt}. \quad (1.174)$$

Для визначення довжини обвідної кривої, яка є плоскою, запишемо згідно (1.11):

$$\left(\frac{ds_{\text{обп}}}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx_{\text{обп}}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_{\text{обп}}}{dt} \right)^2. \quad (1.175)$$

Розв'язавши (1.174) і (1.175) як систему відносно $x_{\text{обп}}$ і $y_{\text{обп}}$, отримаємо параметричні рівняння обвідної на розгортці:

$$\begin{aligned} x_{\text{обп}} &= \int \left(\frac{ds_{\text{обп}}}{dt} \right) \cos \alpha dt; \\ y_{\text{обп}} &= \int \left(\frac{ds_{\text{обп}}}{dt} \right) \sin \alpha dt. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Довжина обвідної на розгортці така ж, як і на поверхні, тому можемо записати:

$$\frac{ds_{\text{обп}}}{dt} = \frac{ds_{\text{об}}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx_{\text{об}}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_{\text{об}}}{dt} \right)^2}. \quad (1.177)$$

Знаходимо похідні параметричних рівнянь (1.26) обвідної кривої:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{o\bar{o}}}{dt} &= -r \sin t + \frac{z'_H \operatorname{ctg} \beta}{r} \left(z'_H \operatorname{ctg} \beta \sin t + \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \cos t \right) + \\
&+ \frac{z_H \operatorname{ctg} \beta}{r} \left[\left(z''_H \operatorname{ctg} \beta - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \right) \sin t + z'_H \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{z''_H \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta}} \right) \cos t \right]; \\
\frac{dy_{o\bar{o}}}{dt} &= r \cos t - \frac{z'_H \operatorname{ctg} \beta}{r} \left(z'_H \operatorname{ctg} \beta \cos t - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \sin t \right) - \\
&- \frac{z_H \operatorname{ctg} \beta}{r} \left[\left(z''_H \operatorname{ctg} \beta - \sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta} \right) \cos t - z'_H \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{z''_H \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{r^2 - z'^2_H \operatorname{ctg}^2 \beta}} \right) \sin t \right].
\end{aligned} \tag{1.178}$$

Всі вирази, що входять до рівнянь (1.176), відомі, що дає можливість чисельними методами знаходити обвідну криву на розгортці. Щоб отримати параметричні рівняння розгортки, потрібно провести прямолінійні твірні перпендикулярно до кривої (1.176). Однак тут є певний нюанс.

Поверхню торса ми будували за параметричними рівняннями (1.24), до яких входять вирази обвідної кривої (1.20) і напрямного вектора (1.23). Однак вектор (1.23) не є одиничним. Це означає, що коефіцієнт E , який визначається

за формулою $E = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = l^2 + m^2 + n^2$ теж не буде одиничним.

Сума квадратів складових вектора (1.23) дає: $E = 1/\sin^2 \beta$. В параметричних рівняннях розгортки цей коефіцієнт повинен бути такий же само. Із врахуванням цього параметричні рівняння розгортки запишуться:

$$\begin{aligned}
X_p &= \int \left(\frac{dS_{o\bar{o}}}{dt} \right) \cos \alpha dt - u \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \\
Y_p &= \int \left(\frac{dS_{o\bar{o}}}{dt} \right) \sin \alpha dt + u \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.
\end{aligned} \tag{1.179}$$

За рівняннями (1.179) можна побудувати чисельними методами розгортку торса, яка складатиметься із сім'ї прямолінійних прямих, перпендикулярних до обвідної кривої (1.176). Нам же потрібно на цій розгортці вирізати відсік, який відповідатиме підпорному витку (на рис.1.45 лінії, що обмежують виток на розгортці, проходять через точки A і B). Щоб знайти ці лінії, потрібно у рівняння (1.179) підставити внутрішні рівняння (1.35) обмежуючих ліній. Ми отримаємо параметричні рівняння цих ліній на розгортці:

$$\begin{aligned}
x_{pu} &= \int \left(\frac{dS_{o\bar{o}}}{dt} \right) \cos \alpha dt + \operatorname{tg}^2 \beta \left[lx_{o\bar{o}} + my_{o\bar{o}} - \sqrt{\rho^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - (mx_{o\bar{o}} - ly_{o\bar{o}})^2} \right] \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \\
x_{pu} &= \int \left(\frac{dS_{o\bar{o}}}{dt} \right) \sin \alpha dt - \operatorname{tg}^2 \beta \left[lx_{o\bar{o}} + my_{o\bar{o}} - \sqrt{\rho^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - (mx_{o\bar{o}} - ly_{o\bar{o}})^2} \right] \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.
\end{aligned} \tag{1.180}$$

При $\rho=R$ рівняння (1.180) опишуть криву на розгортці, яка на поверхні є циліндричною напрямною кривою на валу, а при $\rho=r$ – криву, яка на поверхні є циліндричною кривою на обмежуючому кожусі. За допомогою чисельних методів було побудовано витки підпорної поверхні із торса однакового нахилу твірних. Межі зміни кута t були кратними 2π , причому цей проміжок був розбитий при інтегруванні на 50 рівних кроків. На рис. 1.47 наведено розгортки окремих витків. Прямими лініями показано прямолінійні твірні поверхні, по яких здійснюється згинання заготовки в поверхню витка.

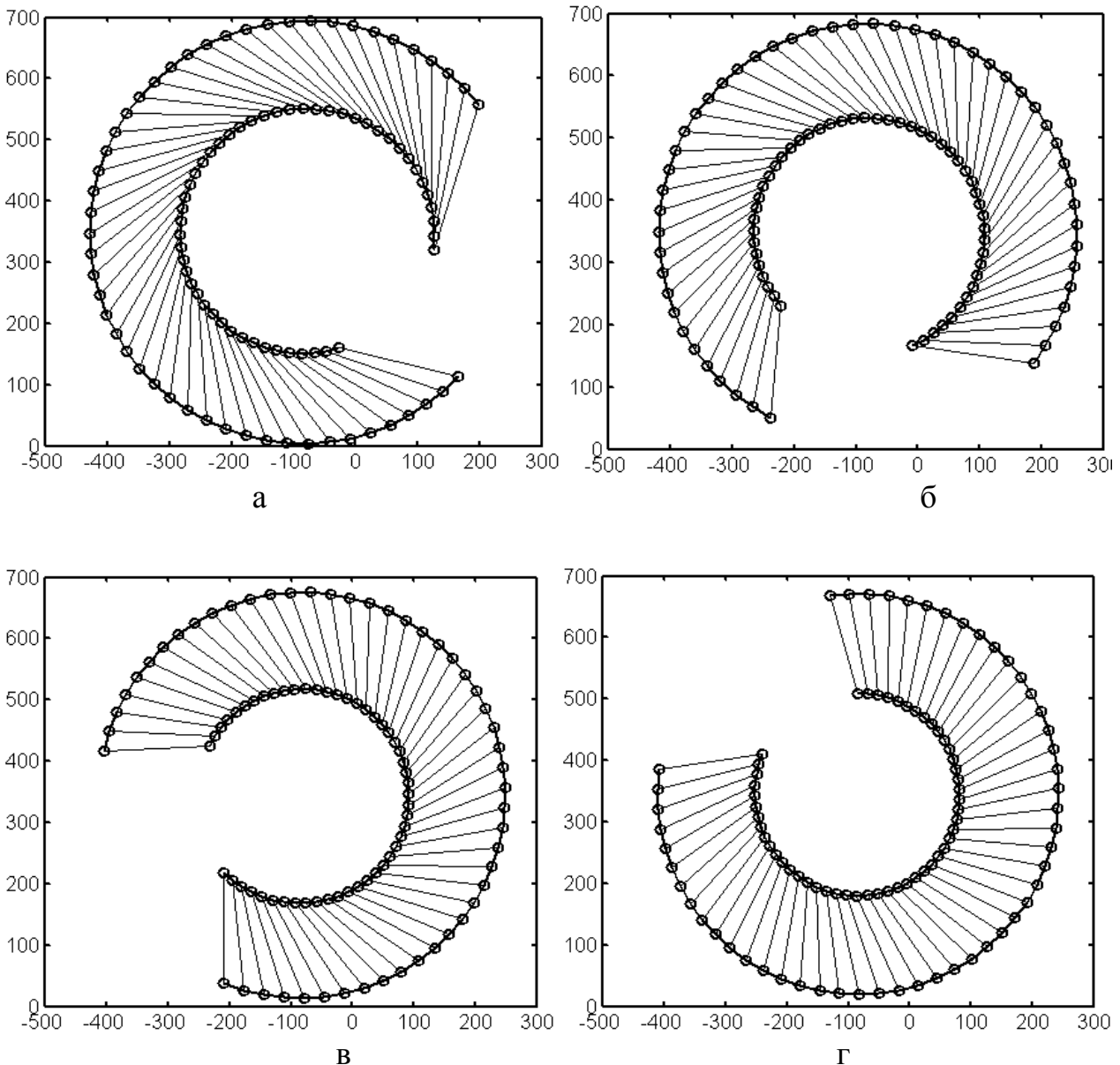


Рис. 1.47. Розгортки витків підпорної поверхні шнека із розгортної поверхні:

- а) розгортка першого витка;
- б) розгортка другого витка;
- в) розгортка третього витка;
- г) розгортка четвертого витка

На перший погляд може здатися, що крайки витків обмежені концентричними колами. Однак це не так. В цьому можна переконатися із рис. 1.48, на якому показана розгортка всіх чотирьох витків.

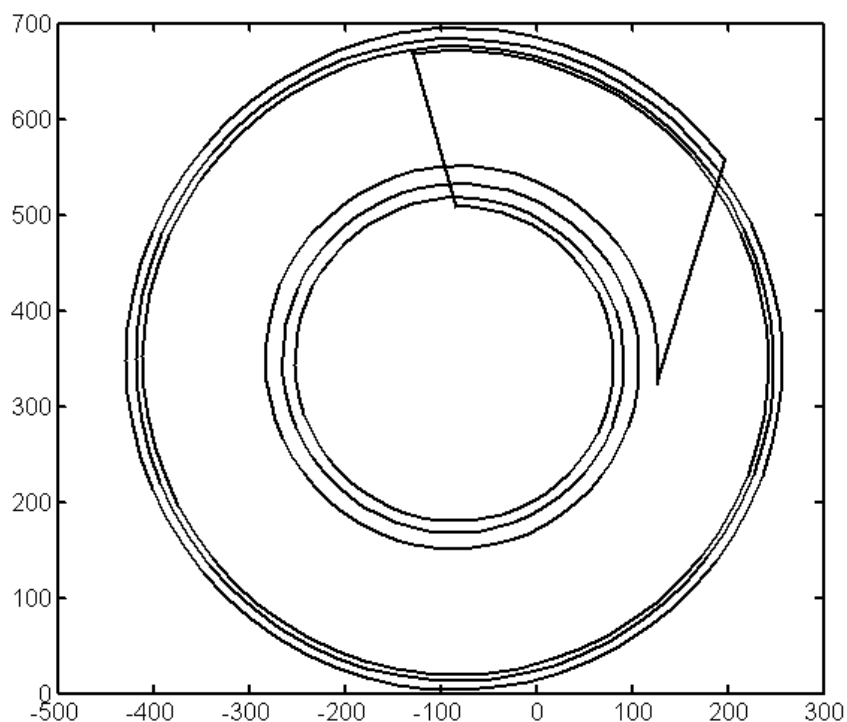


Рис. 1.48. Розгортка чотирьох витків підпорної поверхні шнека із розгортної поверхні

Розгортка циліндричної поверхні вала з нанесеною гвинтовою лінією змінного кроку наведена на рис. 1.49.

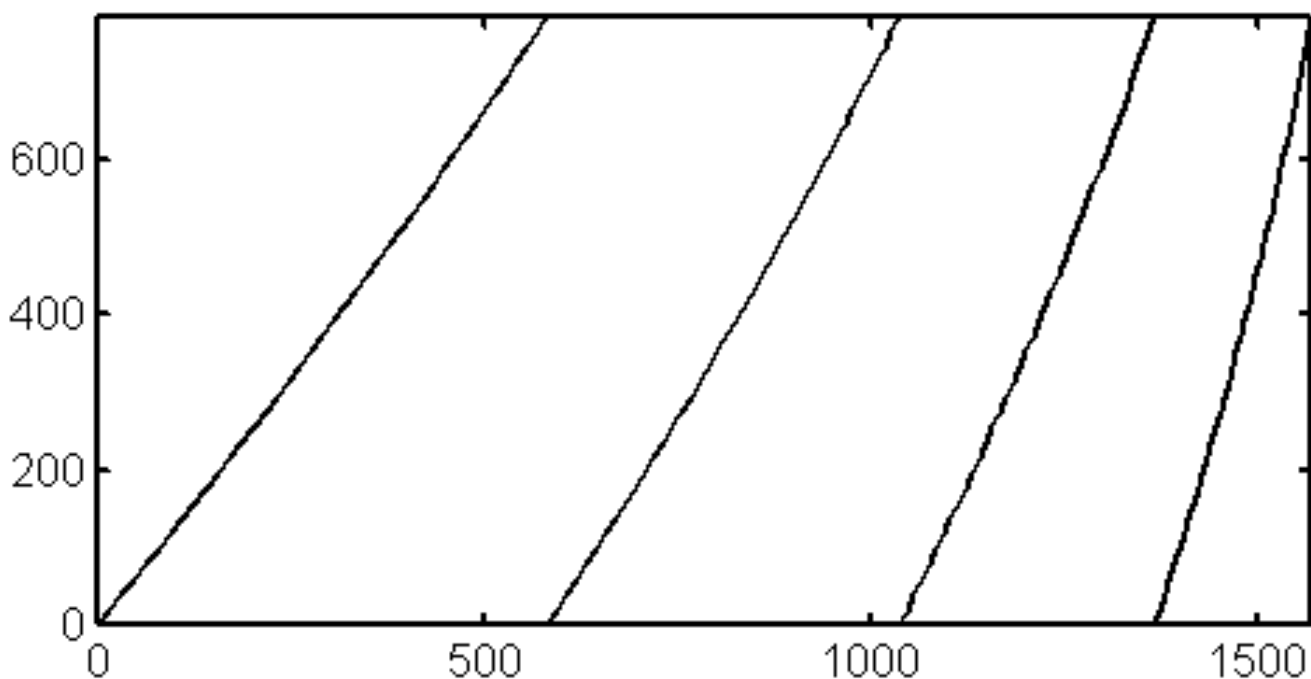


Рис. 1.49. Розгортка циліндричної поверхні вала з нанесеною гвинтовою лінією стику

Частковим випадком торсів є конуси. Розглянемо побудову їх розгортки. Параметричні рівняння конуса запишуться:

$$\begin{aligned} X &= ul ; \\ Y &= um ; \\ Z &= un , \end{aligned} \quad (1.181)$$

де $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$ – проєкції напрямного одиничного вектора твірних конуса;

u - довжина прямолінійної твірної.

Коефіцієнти першої квадратичної форми конуса (1.181) запишуться:

$$\begin{aligned} G &= u^2 (l'^2 + m'^2 + n'^2); \\ F &= ll' + mm' + nn'; \\ E &= 1. \end{aligned} \quad (1.182)$$

Коефіцієнт F є скалярним добутком двох векторів: напрямного вектора і вектора, отриманого диференціюванням першого. Але напрямний вектор є одиничним, тому ці вектори будуть перпендикулярними, отже скалярний добуток буде рівним нулю і коефіцієнт $F=0$. Це означає, що конус віднесено до ортогональної сітки координатних ліній. Перша квадратична форма для конуса (1.181) при умові, що напрямний вектор одиничний, запишеться:

$$dS^2 = u^2 (l'^2 + m'^2 + n'^2) dt^2 + du^2; \quad (1.183)$$

Параметричні рівняння розгортки із врахуванням її повороту на кут α_0 (рис. 1.46,а) запишуться:

$$\begin{aligned} X_p &= u \cos \left(\alpha_0 + \int \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} dt \right); \\ Y_p &= u \sin \left(\alpha_0 + \int \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} dt \right). \end{aligned} \quad (1.184)$$

Перша квадратична форма розгортки (1.184) повністю збігається із (1.183).

РОЗДІЛ 2

КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЯК ОБВІДНИХ ПОВЕРХОНЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН, УТВОРЕНИХ РУХОМ ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРИ ЗА ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ

У даному розділі розглянуто різні способи утворення однопараметричних множин площин без прив'язки до напрямної кривої. Знайдено обвідні поверхні цих множин площин та досліджено їх властивості. Показано, що горизонтальною проекцією обвідних циліндрів однопараметричних множин площин утворених додаванням обертального руху площини та поступального руху осі є циклоїдальні криві, встановлено аналітичні залежності між радіусами твірних кіл кривих та параметрами рухів.

Залежно від властивостей за якими конструюються торсові поверхні, їх можна задавати в різних системах координат: нерухомій прямокутній [151], рухомій системі тригранника Френе [74, 120, 123, 126], в узагальнених циліндричних, гіперболічних, квазісферичних координатах [137 -144]. Нами показано, що утворювати однопараметричні множини площин додаванням двох обертальних рухів доцільно у сферичній системі координат, а обвідними поверхнями таких множин площин є конуси.

2.1. Дослідження розгортних та супутніх поверхонь, утворених однопараметричними сім'ями площин

Площина в системі $OXYZ$ задається рівнянням:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.1)$$

де A, B, C, D є певні числа, від яких залежить положення площини в просторі. Перші три числа A, B, C є проекціями нормального вектора площини на осі координат, отже при їх незмінних значеннях і при зміні значення D площина буде займати нове положення в просторі, залишаючись паралельною самій собі. У цьому випадку ніякого торса у нашому розумінні утворюватися не буде. Якщо всі чотири числа зробити функціями змінної t , тобто $A=A(t), B=B(t), C=C(t), D=D(t)$, то положення площини в просторі залежатиме від параметра t . При фіксованому значенні параметра t в просторі буде задана конкретна площина. При іншому значенні параметра t буде задана інша площина. Таким чином при неперервній зміні параметра t буде задана однопараметрична множина площин, яка є обвідною торса (рис. 2.1).

Площина може бути задана також нормальним рівнянням:

$$Xl + Ym + Zn - p = 0, \quad (2.2)$$

де l, m, n – проєкції одиничного вектора N , перпендикулярного до площини;
 $p = OL$ – відстань від початку координат до площини (рис. 2.1,а).

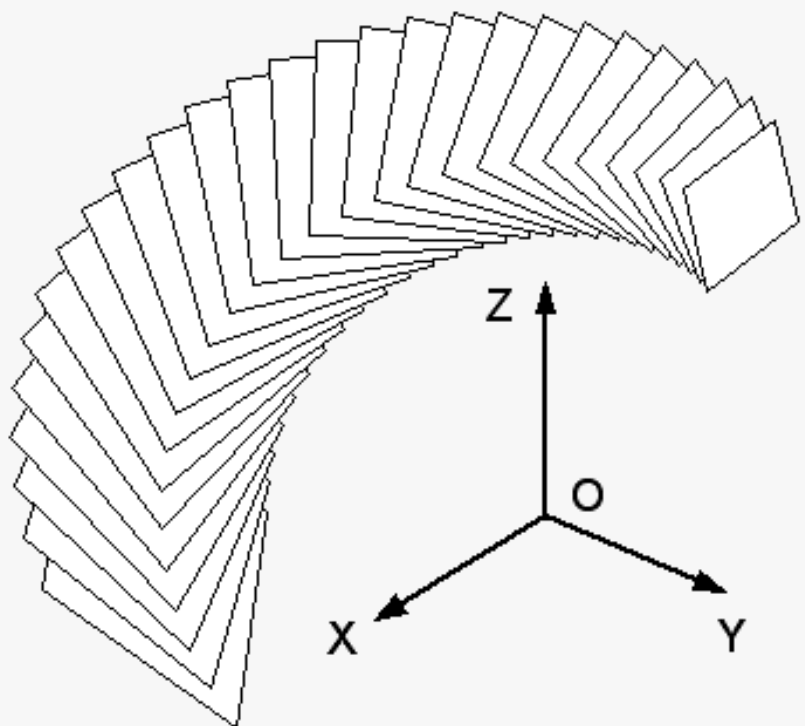


Рис. 2.1. Схема утворення однопараметричної множини площин при заданих довільних функціях $A(t), B(t), C(t), D(t)$

Проєкції нормального вектора N можна знайти через коефіцієнти у рівнянні (2.1):

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
 m &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
 n &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Якщо проєкції вектора N є функціями незалежної змінної t , тобто $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$ і $p=p(t)$, то рівняння (2.2) опишуть однопараметричну множину площин. Щоб побудувати окрему площину, що належить множині, скористаємося схемою, наведеною на рис. 2.2,б. Маючи в точці L вектор N , який має бути для площини нормальним, нам потрібно з точки L провести дві прямі, паралельні векторам N_1 і N_2 , які мають складати прямий кут із вектором N . Якщо вектори N_1 і N_2 теж будуть між собою перпендикулярні, то всі три вектори N , N_1 і N_2 утворять між собою прямий кут, тобто трійка векторів буде взаємно перпендикулярною. В такому випадку наочне зображення окремої площини можна буде показувати у вигляді квадратів або прямокутників. Одним

із способів побудови трійки взаємно перпендикулярних векторів може бути спосіб за допомогою одиничного вектора, напрям якого залежить від змінної t , тобто $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$. Як відомо, диференціювання одиничного вектора по змінній t дає вектор, перпендикулярний заданому. Наприклад, якщо вектор N (рис. 2.2,б) одиничний і залежний від t , то його диференціюванням отримаємо вектор N_1 , або вектор N_2 , або ж будь-який вектор, що лежить в площині, перпендикулярній до вектора N . Положення вектора в цій площині залежить від виду функції $N=N(t)$.

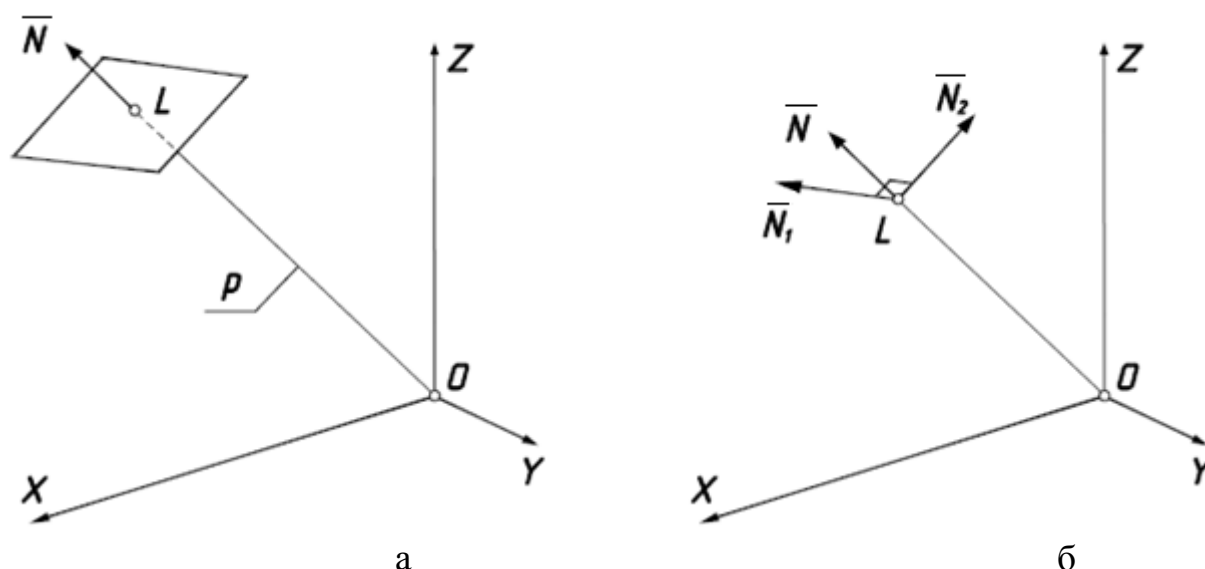


Рис. 2.2. Схема до побудови однієї площини, що належить до однопараметричної множини:

- а) розташування площини в просторі згідно рівняння (2.2);
- б) до утворення площини за допомогою трьох взаємно перпендикулярних векторів

Одиничний вектор можна отримати із параметричних рівнянь будь-якої просторової кривої. Для цього потрібно радіус-вектор, що з'єднує початок координат із точкою кривої, нормалізувати, тобто привести до одиничного.

Розглянемо приклад. Нормалізуємо радіус-вектор гвинтової лінії (1.110) при $a=1$. Координати одиничного вектора запишуться:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \\
 m &= \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}}; \\
 n &= \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Диференціюємо вектор (2.4) по змінній t і теж нормалізуємо:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= -\frac{\sin t + h^2 t (\cos t + t \sin t)}{\sqrt{(1 + h^2 t^2)[1 + h^2 (1 + t^2)]}}; \\
 m_1 &= \frac{\cos t - h^2 t (\sin t - t \cos t)}{\sqrt{(1 + h^2 t^2)[1 + h^2 (1 + t^2)]}}; \\
 n_1 &= \frac{h}{\sqrt{(1 + h^2 t^2)[1 + h^2 (1 + t^2)]}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

За правилами векторного множення знаходимо векторний добуток векторів (2.4) і (2.5):

$$\begin{aligned}
 l_2 &= \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1 + h^2 (1 + t^2)}}; \\
 m_2 &= -\frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1 + h^2 (1 + t^2)}}; \\
 n_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 (1 + t^2)}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Параметричні рівняння однопараметричної множини площин, побудованих за схемою, наведеною на рис. 2.2,б запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= l + ul_1 + vl_2; \\
 Y &= m + um_1 + vm_2; \\
 Z &= n + un_1 + vn_2,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

де u, v – незалежні змінні.

При $t = \text{const}$ за рівняннями (2.7) ми отримаємо конкретну площину. Якщо межі зміни параметрів u і v однакові, то буде окреслено відсік площини у вигляді квадрата. Збільшуючи параметр t на певну величину, отримаємо однопараметричну множину квадратів. Це зручно зробити у циклі.

Оскільки вектор $N \{l, m, n\}$ одиничний, то всі площини, побудовані за рівняннями (2.7) будуть дотикатися до сфери одиничного радіуса, а обвідна поверхня множини площин буде дотичною до сфери. Лінією дотику буде сферична крива, побудована за рівняннями радіус-вектора N : $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$. На рис. 2.3 за рівняннями (2.7) побудовано однопараметричну множину площин, розташування і орієнтація яких визначається векторами (2.4), (2.5) і (2.6). Одиничний вектор (2.4) задає сферичну криву, вздовж якої площини дотикаються до сфери одиничного радіуса.

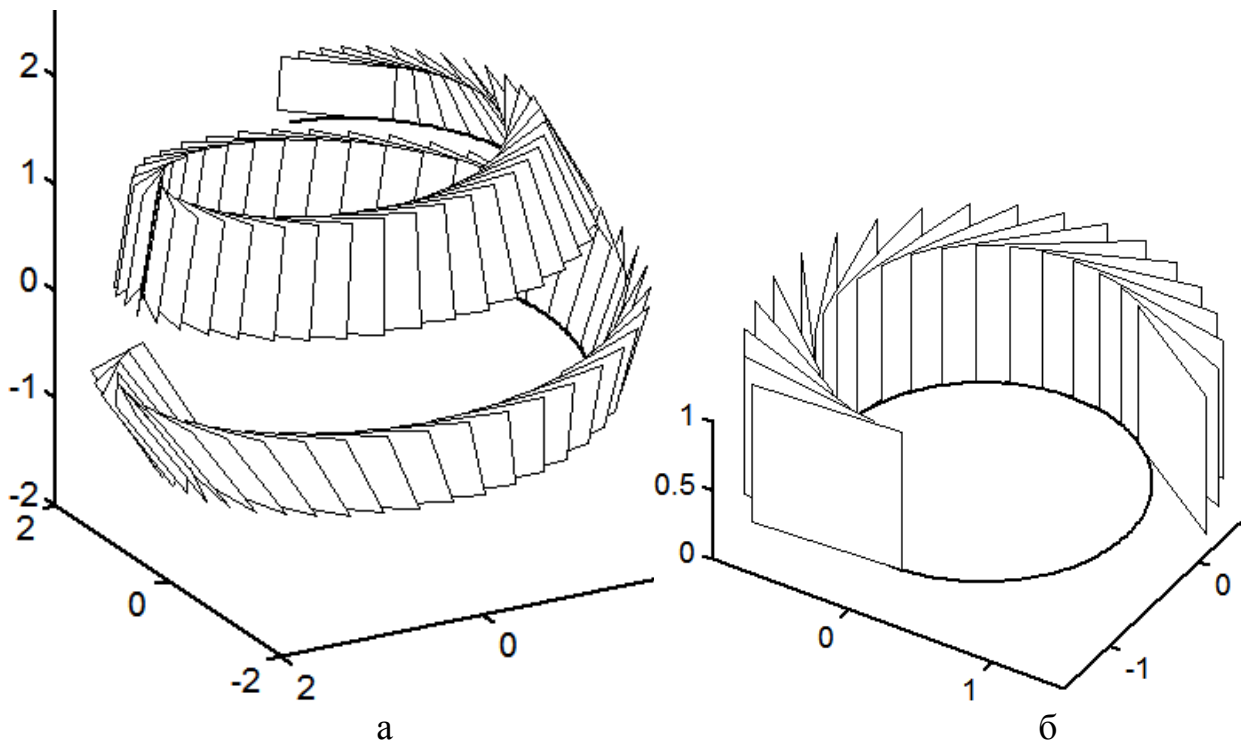


Рис. 2.3. Однопараметрична множина площин, які дотикаються до сфери одиничного радіуса вздовж сферичної кривої (2.4):

а) стала $h=0.15$;

б) стала $h=0$

Оскільки всі три вектори (2.4), (2.5), (2.6) є одиничними, то в ролі напрямного вектора прямої OL (рис. 2.2,б) може бути будь-який із них. Наприклад, якщо в цій ролі виступить вектор (2.5), то ми отримаємо наступну однопараметричну множину площин (рис. 2.4).

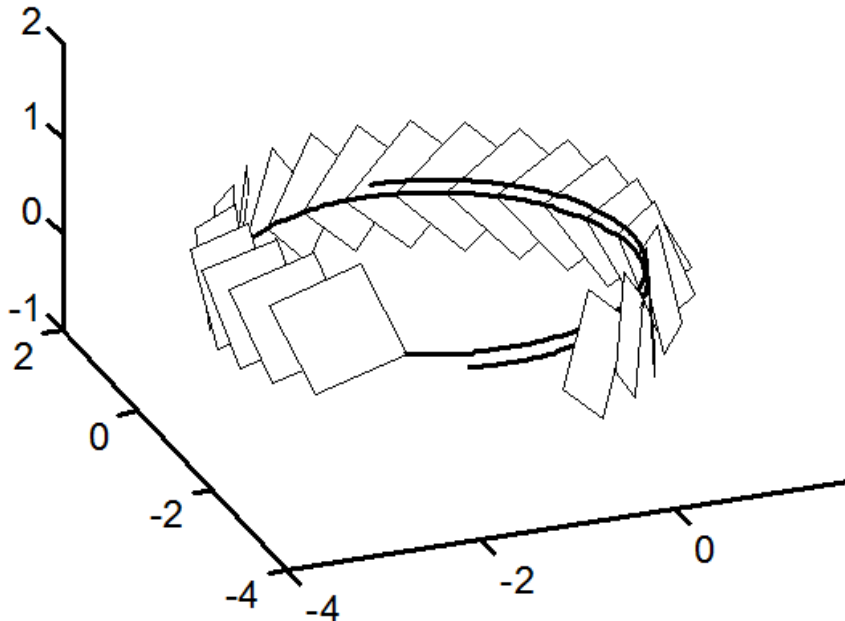


Рис. 2.4. Однопараметрична множина площин, які дотикаються до сфери одиничного радіуса вздовж сферичної кривої (2.5)

Як видно із рис. 2.4, в даному випадку сферична крива близька до кола одиничного радіуса. Відповідно однопараметрична множина площин є

обвідною поверхнею, близькою до циліндра. При $h=0$ множина площин огинає циліндр, як показано на рис. 2.3,б. Орієнтація квадратів, які є перпендикулярними до вектора N , визначається залежностями його проєкцій $l=l(t)$, $m=m(t)$, $n=n(t)$, тому сторона квадрата може не бути дотичною до кривої (рис. 2.4). При $h=0$ вона дотична до кола у всіх точках (рис. 2.3,б).

Якщо в ролі напрямного вектора OL виступає вектор (2.6), то площини утворюють однопараметричну множину, показану на рис. 2.5.

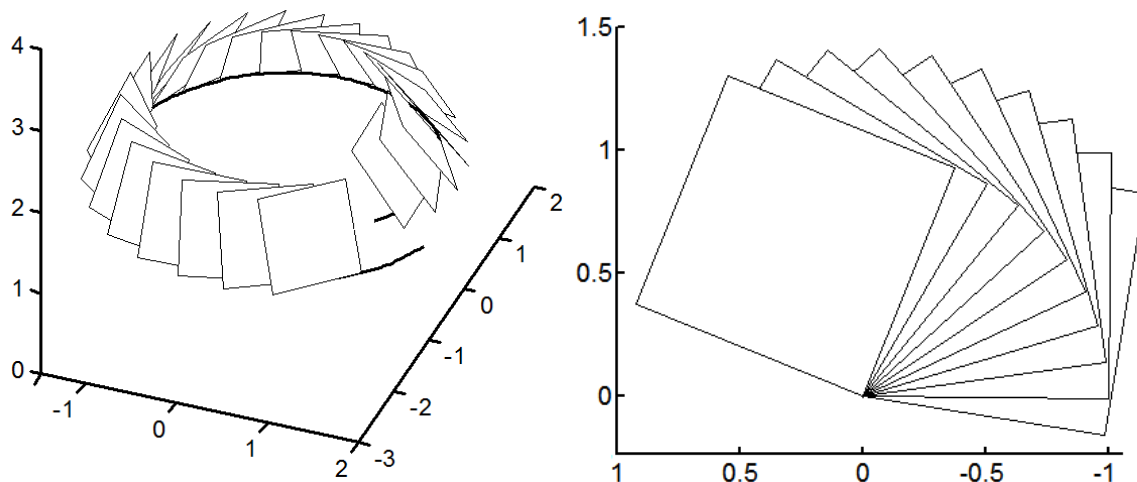


Рис. 2.5. Однопараметрична множина площин, які дотикаються до сфери одиничного радіуса вздовж сферичної кривої (2.6):

а) стала $h=0.15$;

б) стала $h=0$

При $h=0$ всі квадрати лежать у спільній площині (рис. 2.5,б), тобто множина площин вироджується у одну площину, дотичну до сфери. Це можна пояснити тим, що одиничний вектор (2.6) при $h=0$ стає паралельним осі OZ і не змінює свій напрям.

Можна модифікувати торс, зміщуючи точку L вздовж прямої OL . Це можна зробити множенням проєкцій вектора l , m , n на функцію $p=p(t)$, яка задає закономірність переміщення точки L вздовж прямої OL із напрямним вектором N . При $p=const$ отримаємо однопараметричну множину площин, дотичних до сфери радіуса p (рис. 2.6).

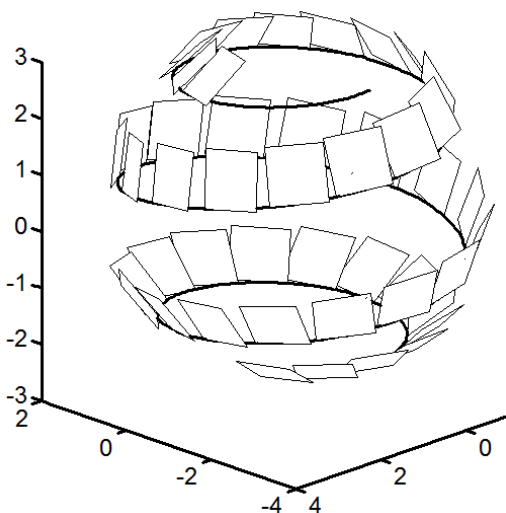


Рис. 2.6. Однопараметрична множина площин, дотичних до сфери, при $p=5$

На рис. 2.7 побудовано однопараметричну множину площин, отриману множенням вектора $N(2.4)$ на $p=0,1t$.

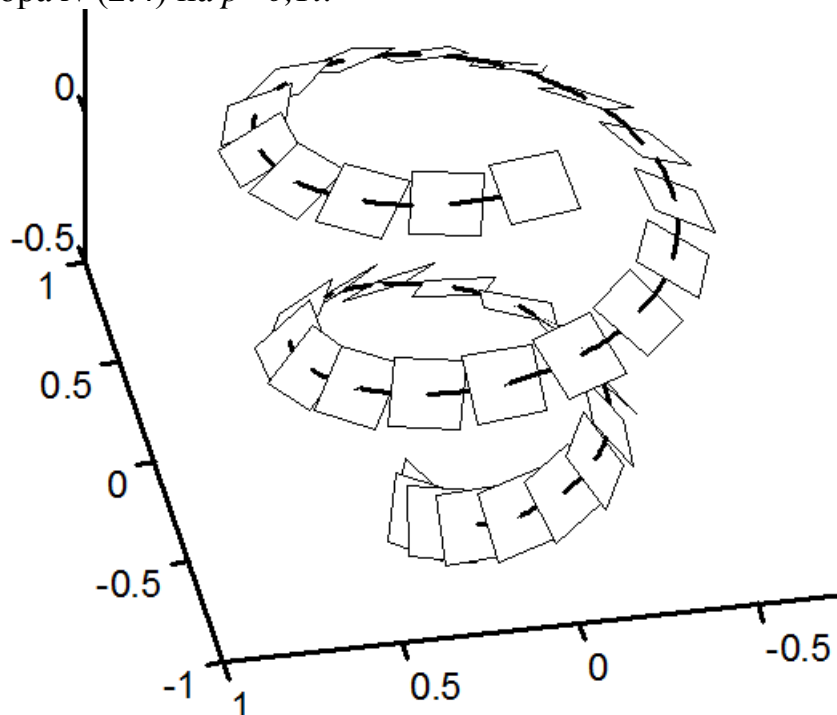


Рис. 2.7. Однопараметрична множина площин, у якої напрямна крива не є сферичною лінією

Щоб знайти рівняння торса і його ребра звороту, потрібно двічі продиференціювати рівняння площини (2.1) по параметру t :

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 : & \quad Ax + By + Cz + D = 0 ; \\
 \Pi_2 : & \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0 ; \\
 \Pi_3 : & \quad A''x + B''y + C''z + D'' = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) задають три площини Π_1 , Π_2 , Π_3 при певному значенні параметра t . Кожна пара площин може перетинатися по прямій лінії, а три площини в перетині утворюють точку, яка належить ребру звороту торса. На рис. 2.8 показана схема перетину площин.

Площини Π_1 , і Π_2 , перетинаючись із собою, утворюють прямолінійну твірну торса, яка торкається ребра звороту в точці 4 (рис. 2.8). Сама ж точка 4 є результатом перетину трьох площин (2.8). Площини Π_2 , і Π_3 , перетинаючись між собою, теж дають твірну 2 іншого торса, оскільки ці площини утворені послідовним диференціюванням вихідної. А от площини Π_1 , і Π_3 не є площинами із послідовного ряду, тому в перетині вони дають твірну 3 нерозгортної лінійчатої поверхні. Твірну 1 будемо вважати твірною основного торса, а твірні 2, 3 – твірними супутніх поверхонь. Знайдемо рівняння основного торса. Для цього спочатку запишемо рівняння прямої лінії:

$$\frac{X - x_0}{l} = \frac{Y - y_0}{m} = \frac{Z - z_0}{n} = u .
 \tag{2.9}$$

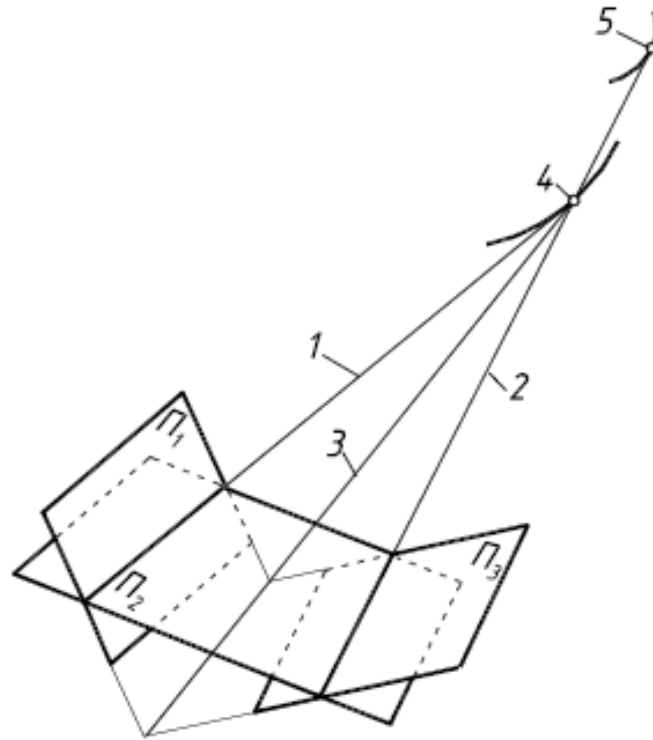


Рис. 2.8. Схема перетину площин (2.8) та утворення прямолінійних твірних лінійчатих поверхонь:

- 1 – твірна торса, як результат перетину площин Π_1 і Π_2 ;
- 2 - твірна торса, як результат перетину площин Π_2 і Π_3 ;
- 3 - твірна нерозгортної лінійчатої поверхні, як результат перетину площин Π_1 і Π_3 ;
- 4, 5 – точки дотику прямолінійних твірних до ребра звороту

Запишемо параметричні рівняння лінійчатої поверхні, прирівнявши кожен складову виразу (2.9) до параметра u :

$$X = x_0 + ul ; \quad Y = y_0 + um ; \quad Z = z_0 + un , \quad (2.10)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить пряма лінія;

l, m, n – проекції напрямного вектора прямої;

u – другий змінний параметр поверхні – довжина прямолінійної твірної (першим змінним параметром є t , від якого залежать значення x_0, y_0, z_0, l, m, n).

Одиничний напрямний вектор прямої перетину площин Π_1 , і Π_2 визначається за відомими формулами:

$$l = \frac{BC' - B'C}{E}; \quad m = \frac{CA' - C'A}{E}; \quad n = \frac{AB' - A'B}{E}, \quad (2.11)$$

де $E = \sqrt{(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2}$.

Точку з координатами x_0, y_0, z_0 будемо шукати, наприклад, в площині OXY . Прирівняємо $Z=0$ і отримаємо систему двох рівнянь відносно невідомих x_0, y_0 :

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0; \\ A'x_0 + B'y_0 + D' &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Її розв'язком будуть наступні вирази:

$$x_0 = \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B}; \quad y_0 = \frac{A'D - AD'}{AB' - A'B}; \quad z_0 = 0. \quad (2.13)$$

Підставимо (2.13) і (2.11) в (2.10) і одержимо:

$$\begin{aligned} X &= \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B} + u \frac{BC' - B'C}{E}; \\ Y &= \frac{A'D - AD'}{AB' - A'B} + u \frac{CA' - C'A}{E}; \\ Z &= u \frac{AB' - A'B}{E}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рівняння (2.14) є параметричними рівняннями основного торса, представлені в загальному вигляді.

Розглянемо приклад. Візьмемо однопараметричну множину площин, задану рівнянням:

$$X \cos t + Y \sin t + Z \sinh t + \cosh t = 0. \quad (2.15)$$

З (2.15) знаходимо:

$$\begin{aligned} A &= \cos t; & B &= \sin t; & C &= \sinh t; & D &= \cosh t; \\ A' &= -\sin t; & B' &= \cos t; & C' &= \cosh t; & D' &= \sinh t. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Підставивши (2.16) в (2.14), після спрощень одержимо:

$$\begin{aligned} X &= \sin t \sinh t - \cos t \cosh t + u (\sin t - \cos t \tanh t) / \sqrt{2}; \\ Y &= -\sin t \cosh t - \cos t \sinh t - u (\cos t + \sin t \tanh t) / \sqrt{2}; \\ Z &= \frac{u}{\sqrt{2} \cosh t}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Із рівнянь (2.14) видно, що при $D = D' = 0$ всі твірні торса будуть проходити через початок координат із заданим напрямом. Отже, в такому

випадку ми одержимо напрямний конус твірних торса (рис. 2.9,б). При значенні $u=1$ основою конуса буде крива на поверхні кулі одиничного радіуса.

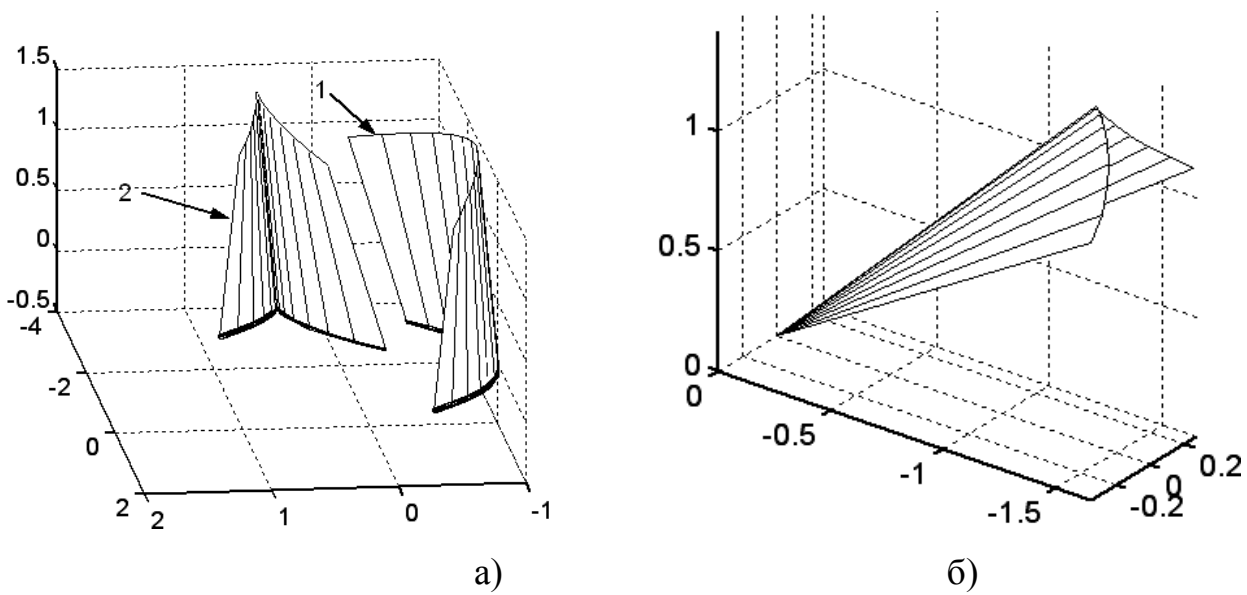


Рис. 2.9. Торсові поверхні:

а) поверхня, побудована за рівняннями (2.17) – 1 і поверхня при заміні $D=\cosh t$ на $D=\sin 2t-0,5-2$;

б) напрямний конус при $D=0$

Із (2.11) також видно, що вираз $D = D(t)$ не впливає на напрям вектора твірної торса. Це означає, що можна одержати новий торс, замінивши в рівняннях (2.14) вирази D і D' , причому напрямний конус залишається спільним. На рис. 2.9,а побудовано такий торс при заміні в рівнянні (2.9) $D = \cosh t$ на $D = \sin 2t - 0,5$ (позначено цифрою 2). Із рисунка видно, що відповідні твірні торсів паралельні (це добре видно на крайніх твірних торсів).

Відшукання ребра звороту торса ґрунтується на знаходженні точки перетину трьох площин (2.8). Множина точок і складе ребро звороту. Для цього потрібно знайти вирази чотирьох визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ D'' & B'' & C'' \end{vmatrix};$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} A & D & C \\ A' & D' & C' \\ A'' & D'' & C'' \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Параметричні рівняння ребра звороту торса запишуться:

$$x_p = -\frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y_p = -\frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z_p = \frac{\Delta z}{\Delta}. \quad (2.19)$$

Долучивши до виразів (2.16) другі похідні $A'' = -\cos t$; $B'' = -\sin t$; $C'' = \sinh t$; $D'' = \cosh t$ за формулами (2.18), (2.19) знаходимо параметричні рівняння ребра звороту основного торса (2.17):

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{\sin t}{\sinh t}; \\ y_p &= \frac{\cos t}{\sinh t}; \\ z_p &= -\coth t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Із рівнянь (2.20) можна зробити висновок, що при $t=0$ ребро звороту має розрив.

Знайдемо рівняння супутнього торса, як результат перетину площин Π_2 і Π_3 в (2.8). Для цього за вихідну площину (2.15) беремо площину Π_2 , тобто:

$$-X \sin t + Y \cos t + Z \cosh t + \sinh t = 0. \quad (2.21)$$

Зробивши відповідні дії, одержимо параметричні рівняння супутнього торса:

$$\begin{aligned} X &= \cos t \cosh t + \sin t \sinh t + u (\sin t + \cos t \tanh t) / \sqrt{2}; \\ Y &= \sin t \cosh t - \cos t \sinh t - u (\cos t - \sin t \tanh t) / \sqrt{2}; \\ Z &= \frac{u}{\sqrt{2} \cosh t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для того, щоб знайти відповідне торсу (2.22) ребро звороту, можна було б скористатися формулами (2.18), (2.19), але для цього потрібно було б мати третю площину Π_4 , одержану диференціюванням площини Π_3 . Однак це можна зробити за наявності площин Π_2 і Π_3 , які в перетині дають твірну торса. Візьмемо в рівняннях (2.21) два будь-яких вирази, наприклад, $Y=Y(t, u)$ і $Z=Z(t, u)$. Вони опишуть множину прямолінійних твірних торса в площині OYZ (проекція торса на цю площину). Виключимо із цих двох рівнянь спільний параметр u і одержимо:

$$y = \sin t \cosh t - \cos t \sinh t - z(\cos t \cosh t - \sin t \sinh t). \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) є рівнянням однопараметричної множини прямих в площині OYZ , де положення кожної прямої залежить від параметра t . Щоб

знайти обвідну криву цих прямих (проекцію ребра звороту), диференціюємо (2.23) по параметру t і після спрощень маємо:

$$z \cosh t + \sinh t = 0. \quad (2.24)$$

Розв'язавши (2.23) і (2.24) відносно y і z , одержимо рівняння профільної проекції ребра звороту:

$$y_p = \frac{\sin t}{\cosh t}; \quad z_p = -\tanh t. \quad (2.25)$$

Щоб знайти координату x_p , прирівняємо, наприклад, вирази для z (або y) в (2.22) і (2.25). Знаходимо вираз для $u = -\sqrt{2} \sinh t$ і підставляємо його в перше рівняння (2.2). Після спрощень одержимо третє рівняння, після чого параметричні рівняння ребра звороту супутнього торса запишуться:

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{\cos t}{\cosh t}; \\ y_p &= \frac{\sin t}{\cosh t}; \\ z_p &= -\tanh t. \end{aligned} \quad (2.26)$$

На рис. 2.10,а побудовано основний (2.17) і супутній (2.22) торси при зміні параметра в межах $u=-2 \dots 2$.

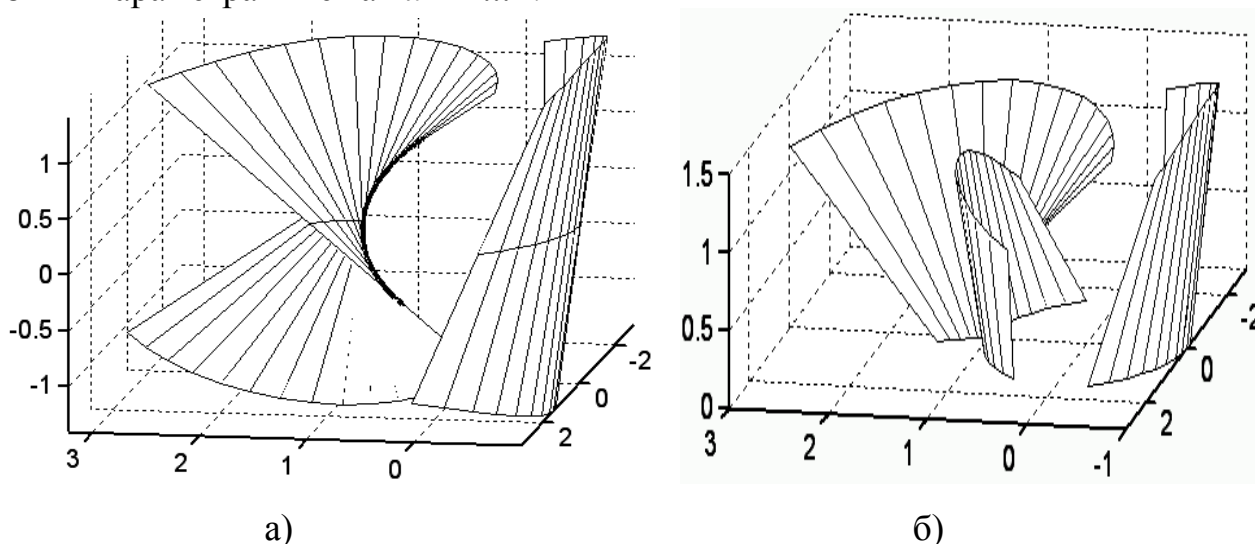


Рис. 2.10. Основний і похідний торси:
а) основний торс із ребром звороту і супутній;
б) основний і два супутніх торси.

Криві перетину горизонтальною площиною показані тонкими лініями. Ребро звороту (2.26) для супутнього торса показано потовщеною лінією. Ребро

звороту (2.20) основного торса не показано, оскільки воно знаходиться дуже далеко від показаного відсіку і крім того має розрив (продовжується в нескінченність).

Знайдемо згідно схеми на рис. 2.8 рівняння нерозгортної лінійчастої поверхні. Її твірні утворені перетином пар площин Π_1 і Π_3 . Напрямний вектор твірної, знайдений за формулами (2.11), має координати:

$$l = 2 \sin t \sinh t; \quad m = -2 \cos t \sinh t; \quad n = 0. \quad (2.27)$$

Згідно (2.27) всі твірні поверхні паралельні горизонтальній площині (оскільки $n=0$). У цьому випадку шукатимемо переріз поверхні іншою площиною, наприклад, OZY (при $x=0$). Знайдемо її рівняння, як це робили для основного торса:

$$\begin{aligned} X &= u \sin t; \\ Y &= -u \cos t; \\ Z &= -\coth t. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Слід зазначити, що послідовним диференціюванням вихідної площини можна одержати нові площини, а отже і нові поверхні. На рис. 2.10,б показано три відсіки торсів: основного (2.18), супутнього (2.22) і ще одного супутнього, утвореного за допомогою площин Π_3 і Π_4 . Його параметричні рівняння та рівняння ребра звороту мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= \cos t \cosh t - \sin t \sinh t + u (\cos t \tanh t - \sin t) / \sqrt{2}; \\ Y &= \cos t \sinh t + \sin t \cosh t - u (\sin t \tanh t + \cos t) / \sqrt{2}; \\ Z &= \frac{u}{\sqrt{2} \cosh t}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{\cos t}{\cosh t}; \\ y_p &= \frac{\cos t}{\sinh t}; \\ z_p &= -\coth t. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Знайдемо рівняння торса, якщо однопараметрична множина площин задана рівняннями у формі (2.7). Характеристика (твірна торса) є лінією перетину двох суміжних нескінченно близьких площин множини. Знаходячись одночасно в двох площинах, твірна перпендикулярна до нормальних векторів цих площин. Отже, напрямний вектор твірної можна визначити, як векторний добуток двох суміжних нормалей:

$$\bar{I} = \bar{N} \times (\bar{N} + d\bar{N}) = \bar{N} \times d\bar{N} . \quad (2.31)$$

Напрямок векторного добутку не зміниться, якщо вектор $d\bar{N}$ замінити паралельним йому вектором $\frac{d\bar{N}}{dt}$:

$$\bar{i} = \bar{N} \times \frac{d\bar{N}}{dt} . \quad (2.32)$$

Знайдемо координати вектора $\frac{d\bar{N}}{dt}$ диференціюванням вектора N , заданого проєкціями (2.4). Отримаємо результат, представлений в (2.5). Результатом векторного множення цих векторів буде одиничний вектор, проєкції якого теж представлені в (2.6). Отже одна сторона квадрата у множинах площин, зображених, наприклад, на рис. 2.6, спрямована вздовж твірної торса. Враховуючи те, що твірні торса проходять через напрямну криву, задану проєкціями (2.4), його рівняння запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\cos t}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{h(\sin t - t \cos t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Y &= \frac{\sin t}{\sqrt{1+h^2t^2}} - u \frac{h(\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}; \\ Z &= \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}} + u \frac{1}{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Якщо в ролі напрямного вектора N взяти інший вектор із трьох векторів (2.4), (2.5), (2.6), то два, що залишилися, для побудови торса використані бути не можуть на відміну від побудови однопараметричної множини площин. Для цього потрібно диференціювати напрямний вектор і приводити його до одиничного, після чого шукати напрямний вектор для твірної торса за формулою (2.32). Цим пояснюється те, що після перемішування одиничних векторів сторона квадрата із однопараметричної множини таких квадратів не є дотичною до напрямної кривої (наприклад, на рис. 2.4).

Перша квадратична форма торса (2.33) має вигляд:

$$dS^2 = \left[\frac{\sqrt{1+h^2(1+t^2)}}{1+h^2t^2} - u \frac{ht\sqrt{1+h^2t^2}}{1+h^2(1+t^2)} \right]^2 dt^2 + du^2 . \quad (2.34)$$

Відсутність коефіцієнта F у квадратичній формі (2.34) свідчить про те, що твірні торса (2.33) перпендикулярні напрямній кривій.

Смуга тора (2.33) із рівною довжиною прямолінійних твірних, що перетинають сферичну напрямну криву, зображена на рис. 2.11.

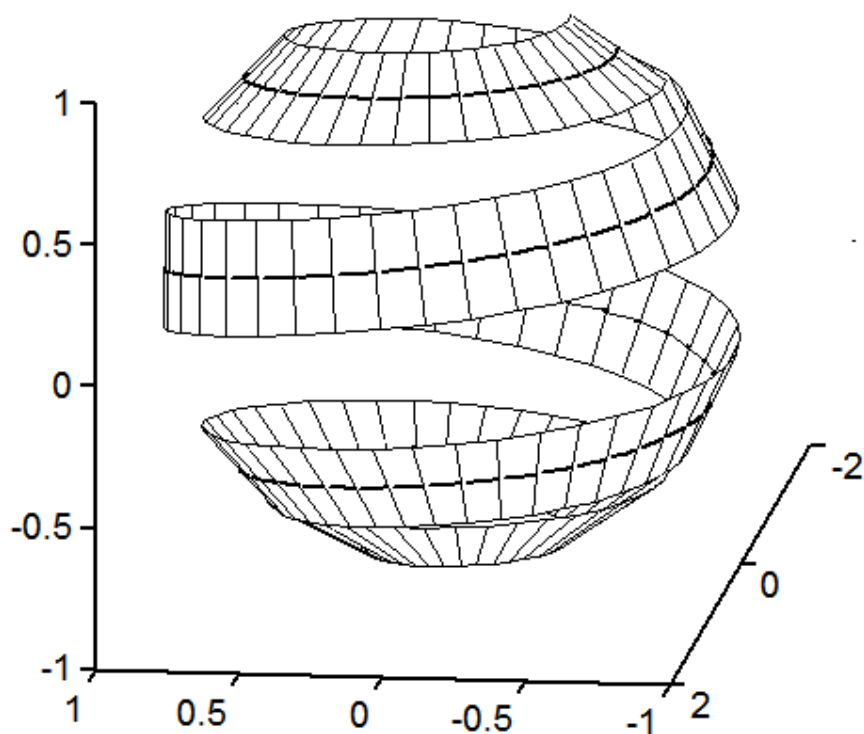


Рис. 2.11. Смуга тора, побудована за параметричними рівняннями (2.33) при $h=0,15$, у якого напрямною лінією є сферична крива

Зміною сталої h можна змінювати форму поверхні (рис. 2.12).

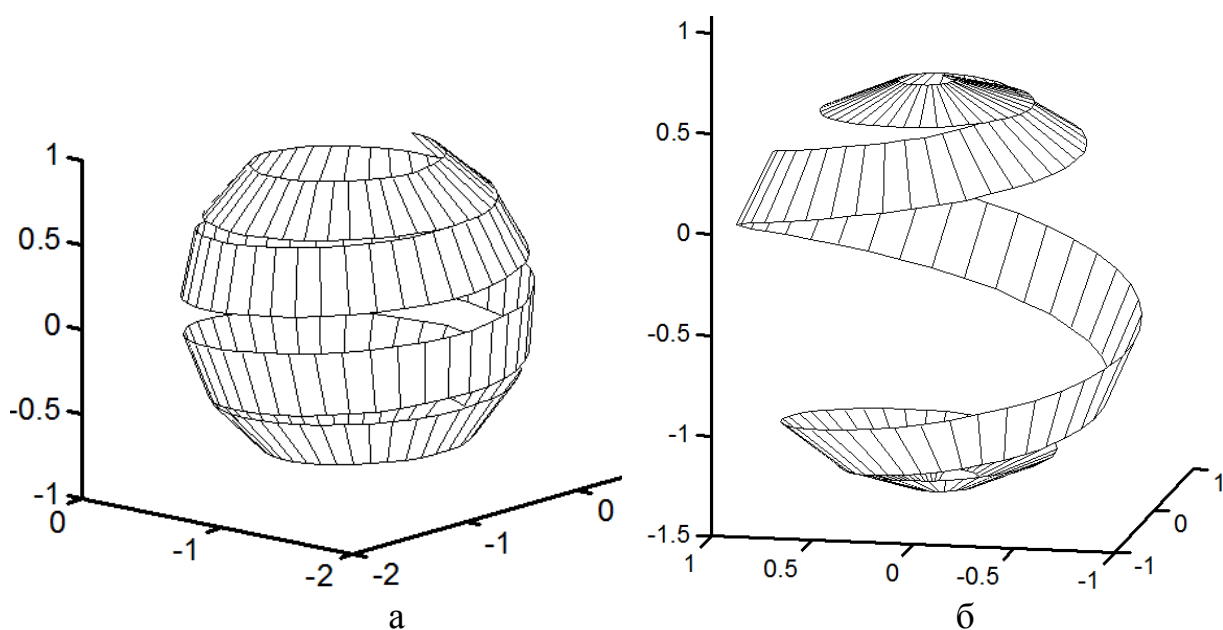


Рис. 2.12. Смуги торсів, побудованих за рівняннями (2.33):

а) при $h=0,1$;

б) при $h=0,3$

Слід зауважити, що торс буде віднесено до ортогональної сітки координатних ліній, якщо він дотикається до поверхні вздовж лінії її кривини. Ця лінія дотику буде лінією кривини і для торса. Оскільки для сфери будь-яка крива на її поверхні є лінією кривини, то дотичні торси до сфери вздовж будь-якої лінії будуть віднесені до ортогональної сітки ліній кривини (прямолінійні твірні торса є лініями кривини). При модифікації торса при іншому розташуванні однопараметричної множини площин (рис. 2.7) торс також буде описуватися по іншому, як, наприклад, торс (2.14).

Знайдемо розгортку торса (2.33). На першому етапі потрібно знайти напрямну криву у розгортці, а потім через кожну її точку потрібно провести прямолінійну твірну під таким же кутом до неї, як і на поверхні. Направну криву на розгортці можна побудувати, виходячи із незмінності геодезичної кривини кривої при згинанні поверхні. Це є загальноприйнятий підхід, однак у нашому випадку можна скористатися формулами (1.176), зважаючи на те, що прямолінійні твірні перпендикулярні до напрямної кривої.

Похідну довжини дуги знаходимо за формулою $ds / dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, де в ролі похідних рівнянь кривої x' , y' , z' виступають похідні одиничного вектора (2.4) l' , m' , n' (вектор (2.5) не підходить, тому що він нормалізований). Похідні вектора (2.4) мають вигляд:

$$\begin{aligned} l' &= - \frac{\sin t + h^2 t (\cos t + t \sin t)}{[1 + h^2 (1 + t^2)]^{3/2}}; \\ m' &= \frac{\cos t - h^2 t (\sin t - t \cos t)}{[1 + h^2 (1 + t^2)]^{3/2}}; \\ n' &= \frac{h}{[1 + h^2 (1 + t^2)]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Похідна довжини дуги запишеться:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + h^2 (1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2}. \quad (2.36)$$

Закономірність зростання кута $\alpha = \alpha(t)$ між прямолінійними твірними будемо знаходити як закономірність зростання довжини дуги на сфері одиничного радіуса. У рівняннях (2.33) напрямний вектор прямолінійних твірних торса $\{l_m, m_m, n_m\}$ є одиничним, отже його кінець при зміні параметра t опише сферичну криву. Щоб знайти її довжину, продиференціюємо цей вектор по змінній t :

$$\begin{aligned}
l'_m &= \frac{ht(1+h^2t^2)^{3/2}[\sin t + h^2t(t\sin t + \cos t)]}{[(1+h^2t^2)(1+h^2(1+t^2))]^{3/2}}; \\
m'_m &= -\frac{ht(1+h^2t^2)^{3/2}[\cos t + h^2t(t\cos t - \sin t)]}{[(1+h^2t^2)(1+h^2(1+t^2))]^{3/2}}; \\
n'_m &= \frac{ht(1+h^2t^2)^{3/2}}{[(1+h^2t^2)(1+h^2(1+t^2))]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Знаходимо довжину дуги інтегруванням кореня квадратного із суми квадратів виразів (2.37). Оскільки довжина дуги чисельно рівна кутів α , запишемо:

$$\alpha = \int \frac{ht\sqrt{1+h^2t^2}}{1+h^2(1+t^2)} dt = \frac{\sqrt{1+h^2t^2}}{h} - \text{Arcctg} \frac{h}{\sqrt{1+h^2t^2}}. \tag{2.38}$$

Сферична напрямна крива торса (2.33) на розгортці згідно (1.176) запишеться:

$$\begin{aligned}
x &= \int \frac{ds}{dt} \cos \alpha dt; \\
y &= \int \frac{ds}{dt} \sin \alpha dt.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Інтеграли (2.39) неможливо виразити у елементарних функціях, проте вираз для знаходження кута α вдалося проінтегрувати. В загальному випадку обидва інтеграли потрібно знаходити чисельними методами. Оскільки всі твірні торса перпендикулярні до напрямної кривої, то і на розгортці вони мають бути перпендикулярними до кривої (2.39). Виходячи із цього, запишемо параметричні рівняння розгортки торса (2.33):

$$\begin{aligned}
X &= \int \frac{ds}{dt} \cos \alpha dt - u \sin \alpha; \\
Y &= \int \frac{ds}{dt} \sin \alpha dt + u \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми розгортки (2.40). Частинні похідні рівнянь (2.40) запишуться:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{ds}{dt} \cos \alpha - u \frac{d\alpha}{dt} \cos \alpha; \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{ds}{dt} \sin \alpha - u \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= -\sin \alpha; \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \cos \alpha.\end{aligned}\tag{2.41}$$

За частинними похідними (2.41) і похідною кута знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми розгортки (2.40):

$$G = \left[\frac{ds}{dt} - u \frac{d\alpha}{dt} \right]^2; \quad F = 0; \quad E = 1.\tag{2.42}$$

Таким чином, коефіцієнти першої квадратичної форми торса, заданого напрямною кривою і перпендикулярними до неї прямолінійними твірними, вирізняються компактністю запису. Вираз коефіцієнта G є узагальненим для такого виду торсів. Щоб отримати його для торса (2.33), необхідно в узагальнений вираз коефіцієнта G (2.42) підставити похідну дуги (2.36) напрямної кривої і похідну кута α (вираз під знаком інтеграла в (2.38)). Після цього отримаємо:

$$G = \left[\frac{\sqrt{1 + h^2(1 + t^2)}}{1 + h^2 t^2} - u \frac{ht \sqrt{1 + h^2 t^2}}{1 + h^2(1 + t^2)} \right]^2.\tag{2.43}$$

Отже, перша квадратична форма (2.42) розгортки (2.40) точно збігається із аналогічною формою (2.34) торса (2.33), що свідчить про те, що розгортка знайдена правильно. Варто зауважити, що при знаходженні коефіцієнта G торса (2.33) за останньою формулою (1.42) ми отримуємо дещо інший вираз із-за суми квадратів трьох складових. Однак алгебраїчними перетвореннями одержаного виразу за допомогою комп'ютерних програм символічної математики можна показати, що він повністю ідентичний із виразом (2.43).

Параметричні рівняння розгортки торса (2.40) і її першої квадратичної форми (2.42) вирізняються простотою запису, що полегшує складання алгоритмів чисельного інтегрування та знаходження коефіцієнта G . З огляду на це виникає задача конструювання торсів, віднесених до ліній кривини. Це торси однакового нахилу твірних із плоскою напрямною кривою, розглянуті в першому розділі. Якщо напрямна крива просторова, то вона має бути лінією кривини певної нерозгортної поверхні, вздовж якої торс має дотикатися до поверхні. В цьому сенсі ми розглянули конструювання торса, дотичного до сфери.

На рис. 2.14 за рівняннями (2.40) при підстановці в них виразів похідної дуги (2.36) і похідної кута α (2.38) чисельними методами побудовано розгортку

смуги, яка є дотичною до кулі одиничного радіуса. Ця смуга зображена на рис. 2.11.

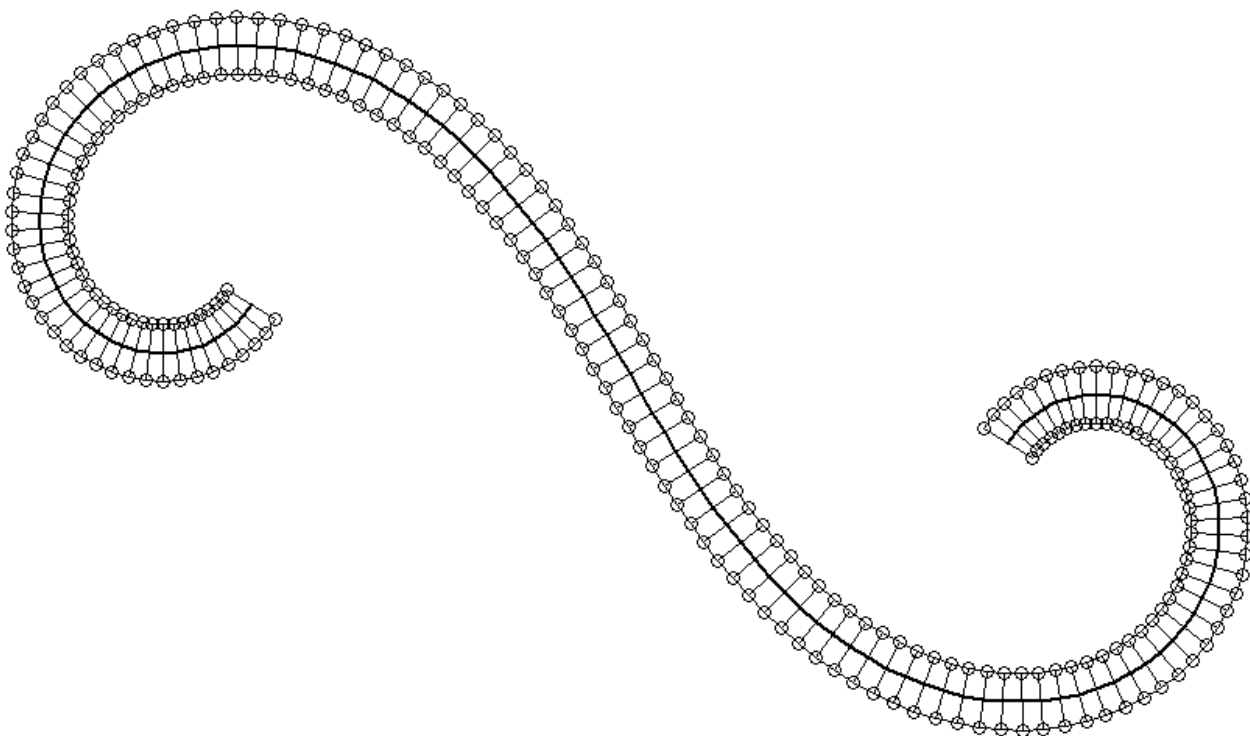


Рис. 2.14. Розгортка смуги торса, показаного на рис. 2.11.

На рис. 2.15, 2.16 в масштабі показано розгортки для торсів, зображених на рис. 2.12 при різних значеннях сталої h .

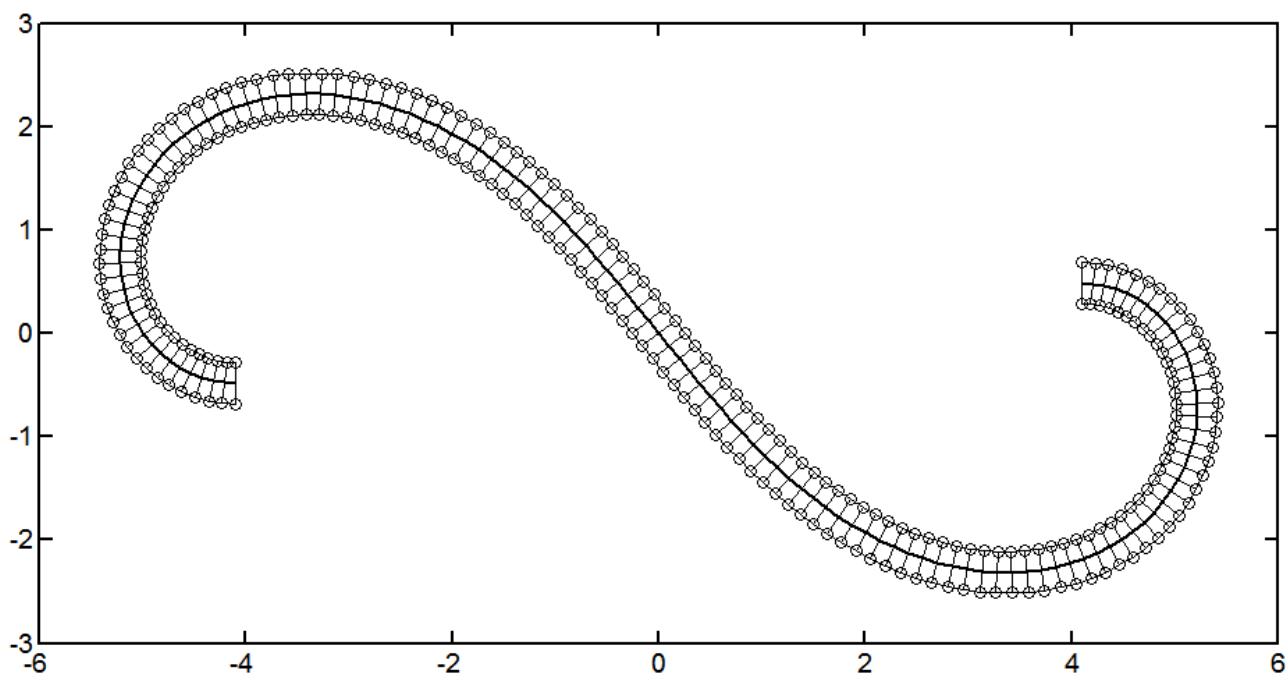


Рис. 2.15. Розгортка смуги торса, показаного на рис. 2.12,а.

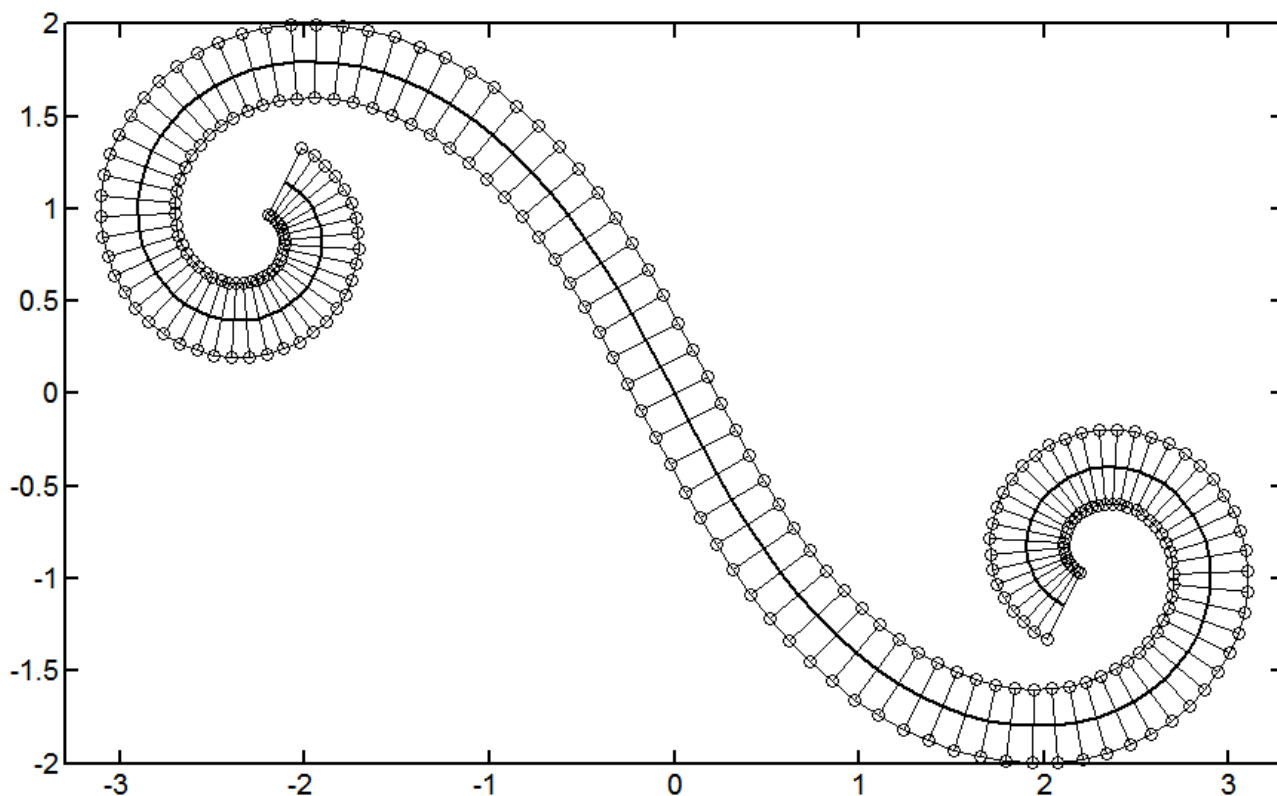


Рис. 2.16. Розгортка смуги торса, показаного на рис. 2.12,б.

Розглянемо інші способи конструювання торсів та побудову їх розгорток за заданою просторовою напрямною кривою, віднесених до координатних ліній, якими є лінії кривини.

2.2. Конструювання торсів, віднесених до ортогональної сітки ліній кривини, за заданою просторовою кривою

Покажемо конструювання і побудову розгортки торса, дотичного до лінії кривини гвинтового коноїда. Параметричні рівняння гвинтового коноїда мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} X &= r \cos v ; \\ Y &= r \sin v ; \\ Z &= bv , \end{aligned} \tag{2.44}$$

де r і v є незалежними змінними поверхні, причому вони мають фізичний зміст. Якщо задати точку на поверхні, то вона характеризується певним значенням змінної v – кутом повороту прямолінійної твірної поверхні навколо осі коноїда і значенням змінної r – відстанню вздовж прямолінійної твірної від осі коноїда до точки на поверхні. Стала b є гвинтовим параметром, через який визначається крок H гвинтового коноїда. При зміні r від r_0 до R опишеться відсік поверхні, розташований між двома співвісними циліндрами, радіуси яких дорівнюють вказаним значенням параметра r .

Візьмемо гвинтовий коноїд і побудуємо на його поверхні лінії кривини. В праці [7] наведено аналітичний вираз ліній кривини для гвинтового коноїда (2.44). Їх рівняння у внутрішніх координатах коноїда має вигляд:

$$v = \pm \ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) + v_0, \quad (2.45)$$

де v_0 – постійна величина, від значення якої залежить точка на гвинтовій лінії, з якої починається лінія кривини.

Від знака перед виразом (2.45) залежить належність лінії кривини одній або іншій сім'ї. Для поверхні коноїда це не має принципового значення, оскільки вона відноситься до мінімальних і в кожній точці має однакові значення головних кривин, які відрізняються між собою тільки знаком. Надалі ми користуватимемося додатним значенням виразу (2.45).

Підстановка залежності $v=v(r)$ із (2.45) в (2.44) дасть рівняння ліній кривини однієї сім'ї, яка буде для нашого торса напрямною:

$$\begin{aligned} x_n &= r \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) + v_0 \right]; \\ y_n &= r \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) + v_0 \right]; \\ z_n &= b \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) + v_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

На рис. 2.17 за рівняннями (2.44) побудовано відсік гвинтового коноїда при $b=19,1$, обмеженого співвісними циліндрами радіусів $r_0=20$ і $R=65$ та за рівняннями (2.46) на нього нанесено лінії кривини для різних значень сталої v_0 через 30° при зміні параметра r у відповідних межах $20 \dots 65$.

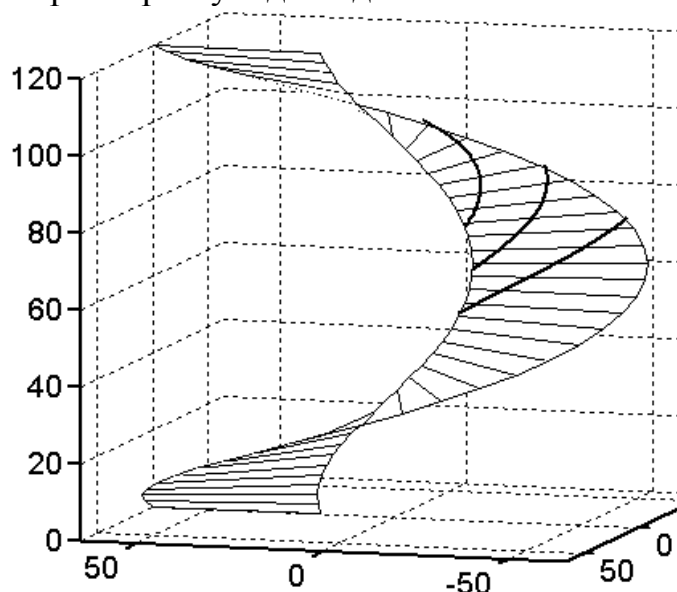


Рис. 2.17. Лінії кривини на поверхні гвинтового коноїда, побудовані за рівняннями (2.46)

Очевидно, що ці лінії є конгруентними. При повороті однієї із них на кут $v_0=30^\circ$ і підйомі вздовж осі OZ на величину bv_0 вона збіжиться із наступною. Отже візьмемо одну із них при $v_0=0$, яка буде напрямною. Побудуємо вздовж цієї кривої дотичний торс до коноїда. Він утвориться як обвідна поверхня однопараметричної множини площин, дотичних до коноїда вздовж заданої лінії кривини (2.46). Рівняння дотичної площини запишеться, як рівняння площини, що проходить через задану точку з координатами x_n, y_n, z_n перпендикулярно нормальному одиничному вектору N з координатами n_x, n_y, n_z (рис. 2.18).

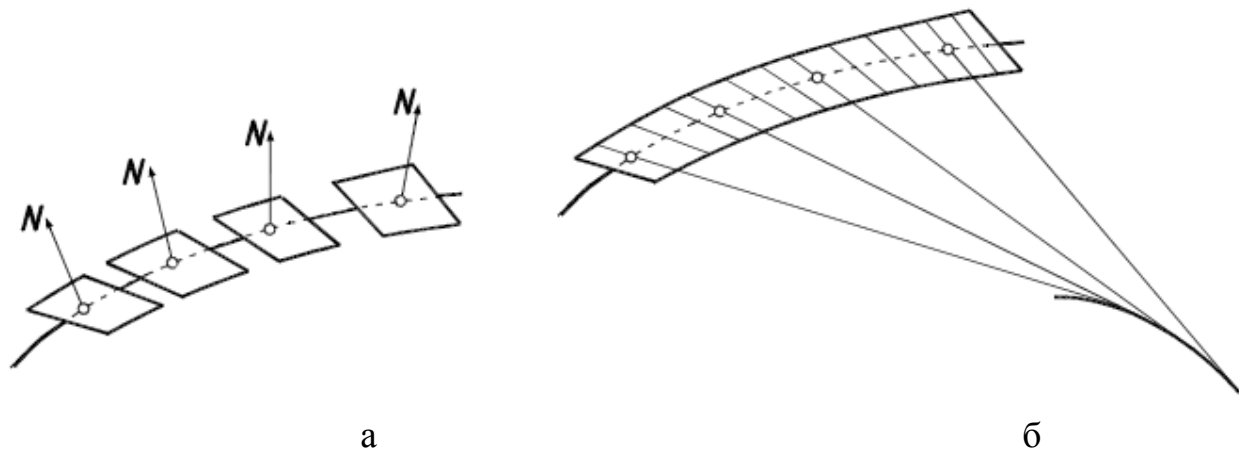


Рис. 2.18. Схема до побудови торса, дотичного до поверхні гвинтового коноїда вздовж його лінії кривини:

- а) лінія кривини коноїда, вздовж якої побудовані окремі площини однопараметричної множини перпендикулярно нормальному вектору коноїда;
- б) прямолінійні твірні дотичного торса, як результат перетину пар нескінченно близьких площин та ребро звороту, до якого вони дотикаються

Нормальний вектор до поверхні коноїда будемо шукати за формулами (1.46). Для цього знаходимо частинні похідні коноїда (2.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial r} &= \cos v; & \frac{\partial Y}{\partial r} &= \sin v; & \frac{\partial z}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= -r \sin v; & \frac{\partial Y}{\partial v} &= r \cos v; & \frac{\partial z}{\partial v} &= b. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Після підстановки похідних (2.47) і розкриття визначника отримаємо:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_r & Y_r & Z_r \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \{b \sin v; \quad -b \cos v; \quad r\}. \quad (2.48)$$

Після приведення вектора (2.48) до одиничного його проєкції запишуться:

$$N_x = \frac{b \sin v}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \quad N_y = -\frac{b \cos v}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \quad N_z = \frac{r}{\sqrt{r^2 + b^2}}. \quad (2.49)$$

Одиничний вектор (2.49) показує напрям нормалі до поверхні коноїда для будь-якої його точки, заданої внутрішніми координатами u і v . Рівняння дотичної площини запишеться, як рівняння площини, що проходить через задану точку з координатами x_n, y_n, z_n перпендикулярно нормальному вектору (2.49):

$$N_x(x - x_n) + N_y(y - y_n) + N_z(z - z_n) = 0. \quad (2.50)$$

Підставляємо у (2.50) рівняння напрямної кривої із (2.46) при $v_0=0$. Координати точки x_n, y_n, z_n отримаємо, підставивши в (2.44) довжину твірної $r=r_0$. Після цього рівняння площини (2.50) запишеться:

$$\frac{b(x - r \cos v) \sin v}{\sqrt{r^2 + b^2}} - \frac{b(y - r \sin v) \cos v}{\sqrt{r^2 + b^2}} + \frac{r(z - bv)}{\sqrt{r^2 + b^2}} = 0, \quad (2.51)$$

де $v = \ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right)$.

Після спрощень (2.51) остаточно запишемо:

$$Xb \sin v - Yb \cos v + Zr - rbv = 0. \quad (2.52)$$

В рівнянні (2.52) ми перейшли від строчних літер “ x ”, “ y ”, “ z ” до прописних, оскільки воно є рівнянням однопараметричної множини площин. Кожному конкретному значенню змінної r відповідатиме конкретна площина, яка буде дотична до гвинтового коноїда вздовж його лінії кривини.

Нормальний вектор окремої площини (2.52) має проєкції: $\{b \sin v; -b \cos v; r\}$. Для знаходження напрямного вектора твірної торса нам потрібен похідний вектор. Диференціюємо проєкції нормального вектора по r і отримуємо:

$$\left\{ \frac{b \cos v}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \quad \frac{b \sin v}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \quad 1 \right\}. \quad (2.53)$$

Знаходимо векторний добуток нормального вектора $\{b \sin v; -b \cos v; r\}$ і вектора (2.53) за правилами векторного множення як, наприклад, в (2.48). Після приведення до одиничного отримаємо напрямний вектор прямолінійної твірної торса:

$$\begin{aligned}
 N_{mx} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos v - \frac{r}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}} \sin v; \\
 N_{my} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin v + \frac{r}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}} \cos v; \\
 N_{mz} &= \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}},
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

де $v = \ln(r + \sqrt{r^2 + b^2})$.

Тепер за рівняннями (2.7) можна побудувати однопараметричну множину площин. В ролі першого вектора може виступати вектор (2.54), а в ролі другого – одиничний вектор, дотичний до напрямної кривої (2.46) при $v=v_0$:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos v - \frac{r \sin v}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin v + \frac{r \cos v}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}}; \quad \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}} \right\}. \tag{2.55}$$

На рис. 2.19 побудовано однопараметричну множину площин, дотичних до коноїда вздовж лінії його кривини (2.46), яка показана потовщеною.

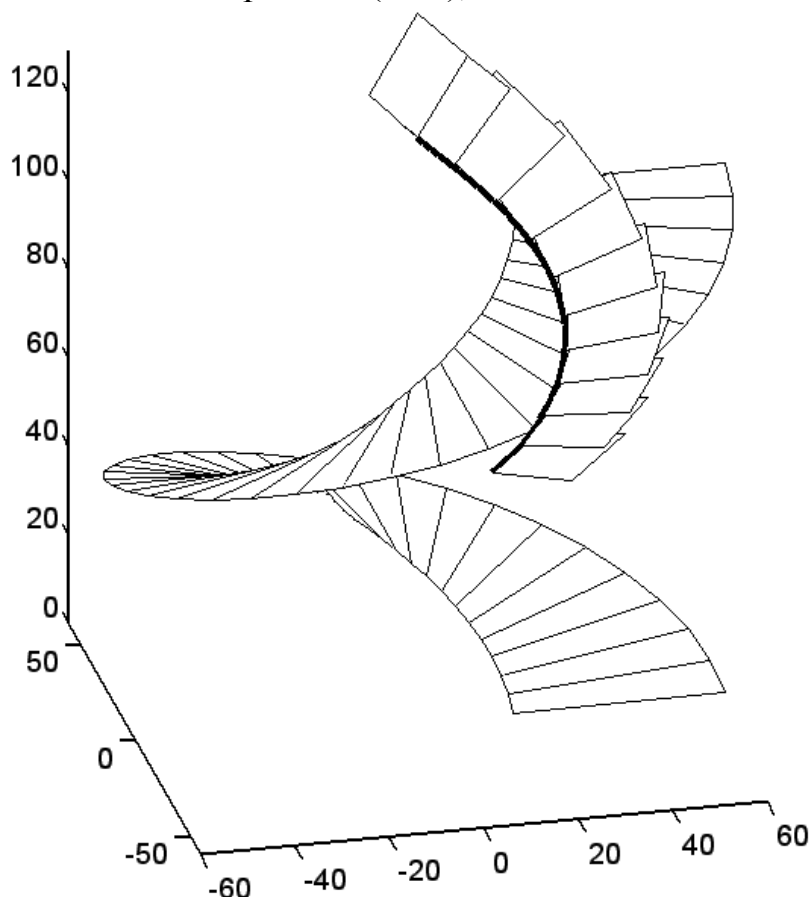


Рис. 2.19. Однопараметрична множина площин, дотичних до коноїда вздовж лінії його кривини

Параметричні рівняння торса, який проходить через просторову криву (2.46) і має напрям прямолінійних твірних (2.54), запишуться:

$$\begin{aligned} X &= r \cos v - u \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos v + \frac{u}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}} \sin v \right); \\ Y &= r \sin v - u \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin v - \frac{u}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}} \cos v \right); \\ Z &= bv + u \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + r^2)}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

В рівняннях (2.56) літерою u позначена друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної торса. Першою змінною є r , а v є функцією r , вираз якої наведено в (2.45).

На рис. 2.20 зображено смуги торса (2.56) із сталою довжиною прямолінійних твірних, які є дотичними до ліній кривини коноїда, зображених на рис. 2.17.

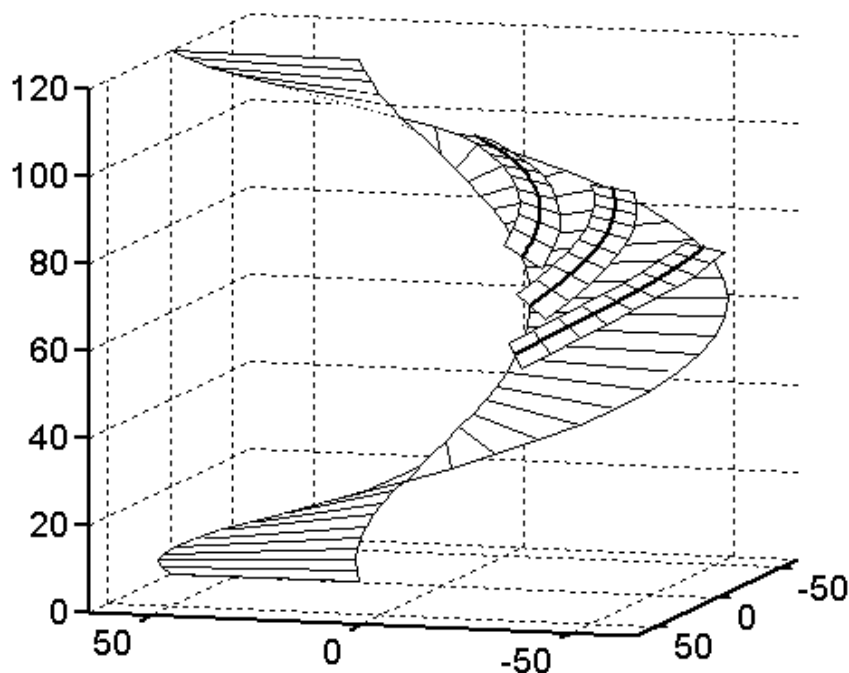


Рис. 2.20. Смуги торсів, дотичних до коноїда вздовж його ліній кривини, побудовані за рівняннями (2.56)

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми торса (2.56). Його частинні похідні мають громіздкий вигляд, тому їх не наводимо, а наводимо готовий результат:

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1; \\
 F &= \frac{\partial X}{\partial r} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial r} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u} = 0; \\
 G &= \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \right)^2 = 2 + \frac{ur \left[(u - 2\sqrt{2}r)r - 2\sqrt{2}b^2 \right]}{(b^2 + r^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Рівність нулю середнього коефіцієнта свідчить про те, що торс віднесено до ортогональної сітки ліній кривини.

Знайдемо ребро звороту торса (2.56). Для цього потрібно двічі продиференціювати рівняння вихідної площини (2.52). Після цього в останній вираз (друга похідна площини) потрібно підставити замість „ X ” і „ Y ” відповідні рівняння торса із (2.56). Після цього одержимо залежність $u=u(r)$, яка є рівнянням ребра звороту у внутрішніх координатах торса:

$$u = \frac{\sqrt{2}}{r} (b^2 + r^2).
 \tag{2.58}$$

При підстановці (2.58) в (2.56) отримаємо параметричні рівняння ребра звороту. За ними на рис. 2.21 на збільшеному фрагменті торса показано його ребро звороту та продовжено деякі твірні торса до дотику із ним.

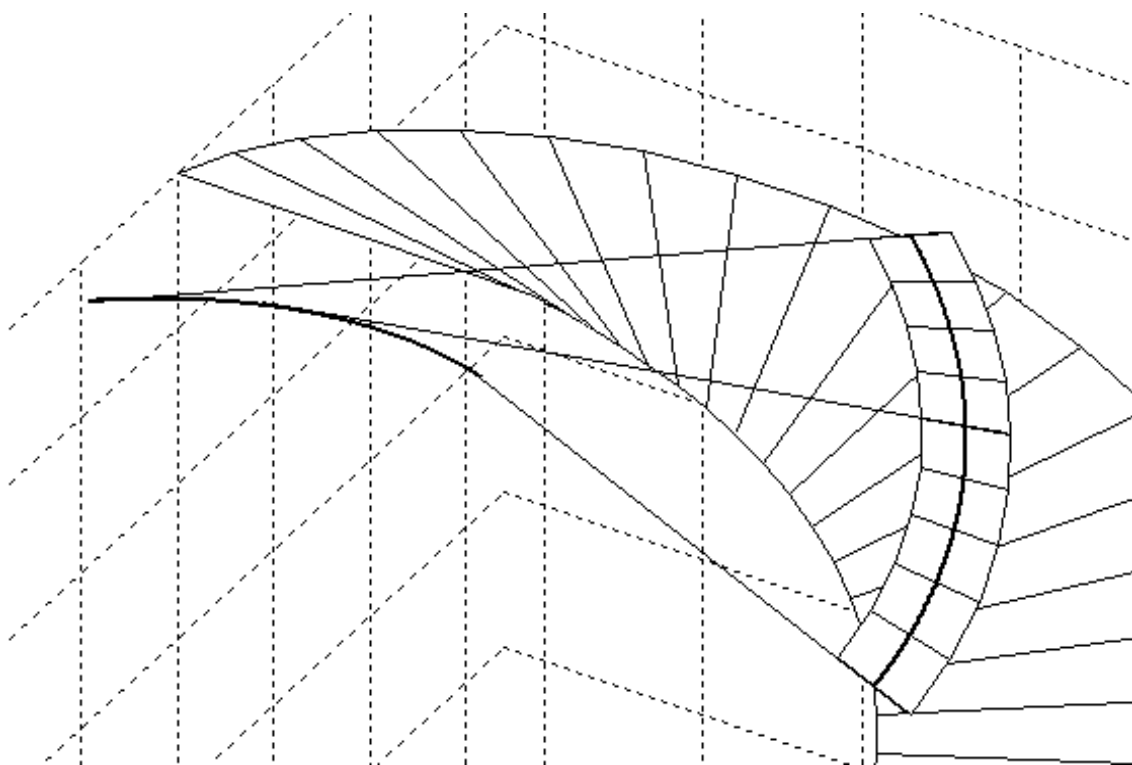


Рис. 2.21. Торс, дотичний до гвинтового коноїда вздовж його лінії кривини, та ребро звороту торсана збільшеному фрагменті

Покажемо побудову розгортки торса (2.56) двома способами: частковим, коли торс віднесено до сітки ортогональних ліній кривини і загальним за допомогою виразу геодезичної кривини напрямної кривої. Знайдемо напрямну криву в розгортці першим способом. Для цього потрібно знати дві залежності: похідну довжини дуги напрямної кривої і похідну кута α між прямолінійними твірними торса. Обидві ці залежності не змінюються під час згинання торса.

Знайдемо похідні напрямної кривої (2.46):

$$\begin{aligned}\frac{dx_u}{dr} &= \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right] - \frac{r \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\ \frac{dy_u}{dr} &= \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right] + \frac{r \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\ \frac{dz_u}{dr} &= \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Похідна довжини дуги кривої (2.46) має простий вигляд:

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2} = \sqrt{2}, \text{ отже } ds = \sqrt{2} dr.\tag{2.60}$$

Залежність $\alpha = \alpha(r)$ шукаємо, як довжину дуги на сфері одиничного радіуса, яку опише на ній одиничний напрямний вектор (2.54). Вважаючи проєкції одиничного вектора (2.54) параметричними рівняннями сферичної кривої, знайдемо її довжину за загальними правилами. Візьмемо похідні вектора (2.54):

$$\begin{aligned}\frac{N_{mx}}{dr} &= \frac{r^2 \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{b^2 + r^2} \right) \right] - r \sqrt{b^2 + r^2} \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{b^2 + r^2} \right) \right]}{\sqrt{2} (b^2 + r^2)^{3/2}}; \\ \frac{N_{my}}{dr} &= - \frac{r^2 \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{b^2 + r^2} \right) \right] + r \sqrt{b^2 + r^2} \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{b^2 + r^2} \right) \right]}{\sqrt{2} (b^2 + r^2)^{3/2}}; \\ \frac{N_{mz}}{dr} &= - \frac{br}{\sqrt{2} (b^2 + r^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Похідна кута α запишеться:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \sqrt{\left(\frac{N_{mx}}{dr} \right)^2 + \left(\frac{N_{my}}{dr} \right)^2 + \left(\frac{N_{mz}}{dr} \right)^2} = \frac{r}{b^2 + r^2}.\tag{2.62}$$

Інтегруванням виразу (2.62) знаходимо залежність $\alpha=\alpha(r)$:

$$\alpha = \int \frac{rdr}{b^2 + r^2} = \frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2). \quad (2.63)$$

Таким чином, параметричні рівняння напрямної кривої (2.46) у розгортці запишуться:

$$\begin{aligned} x_{np} &= \int \frac{ds}{dr} \cos \alpha \, dr = \sqrt{2} \int \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] dr ; \\ y_{np} &= \int \frac{ds}{dr} \sin \alpha \, dr = \sqrt{2} \int \sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] dr . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Знайдемо напрямну криву торса (2.46) у розгортці загальноприйнятим методом, виходячи із того, що її геодезична кривина не змінюється при згинанні торса. Спочатку знайдемо вираз визначника, що входить до формули (1.45). Знайдемо перші і другі похідні рівнянь (2.46):

$$\begin{aligned} x'_n &= \cos \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right] - r \frac{\sin \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}} ; \\ y'_n &= \sin \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right] + r \frac{\cos \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}} ; \\ z'_n &= \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} . \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} x''_n &= - \frac{(2b^2 + r^2) \sin \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right] + r \sqrt{r^2 + b^2} \cos \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]}{(r^2 + b^2)^{3/2}} ; \\ y''_n &= \frac{(2b^2 + r^2) \cos \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right] - r \sqrt{r^2 + b^2} \sin \left[\ln (r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]}{(r^2 + b^2)^{3/2}} ; \\ z''_n &= - \frac{br}{(r^2 + b^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Вектор нормалі до торса збігається із вектором (2.49) нормалі до коноїда. Підставивши у (2.49) залежність (2.45), ми отримаємо одиничний вектор до торса вздовж напрямної кривої (2.46):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{b \sin \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\
 N_y &= -\frac{b \cos \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + b^2} \right) \right]}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\
 N_z &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + b^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.67}$$

Підставимо у визначник проекції одиничного вектора нормалі (2.67), перші (2.65) і другі (2.66) похідні і після спрощень отримаємо:

$$\begin{vmatrix}
 N_x & N_y & N_z \\
 x'_u & y'_u & z'_u \\
 x''_u & y''_u & z''_u
 \end{vmatrix} = \frac{2r}{r^2 + b^2}.
 \tag{2.68}$$

Зважаючи на те, що згідно (2.60) $ds/dr = 1/\sqrt{2}$, геодезична кривина напрямної кривої за формулою (1.45) набуває вигляду:

$$k_z = \frac{r}{\sqrt{2}(r^2 + b^2)}.
 \tag{2.69}$$

Для знаходження напрямної кривої в розгортці скористаємося формулами (1.89). В ролі кривини k в нашому випадку виступає геодезична кривина (2.69), оскільки вона не змінюється при згинанні поверхні. Замість ds у формули (1.89) підставляємо вираз $ds = \sqrt{2} dr$. Тоді внутрішній інтеграл формул (1.89) набуває вигляду:

$$\int k_z ds = \int \frac{r dr}{r^2 + b^2}.
 \tag{2.70}$$

Інтеграл (2.70) у нас уже був, коли ми шукали розгортку першим способом при знаходженні кута α (2.63). Взагалі то інтегрування виразу (2.70) дає закономірність зміни кута між дотичними до напрямної кривої. Але у випадку, коли прямолінійні твірні торса перпендикулярні напрямній кривій, то ця закономірність однакова із закономірністю зміни кута між твірними, про що говорилося раніше. В кінцевому підсумку при другому способі ми отримуємо рівняння (2.64). Після цього можна записати рівняння торса на розгортці, маючи на увазі, що прямолінійні твірні перпендикулярні напрямній кривій:

$$\begin{aligned}
 X_p &= \sqrt{2} \int \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] dr - u \sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right]; \\
 Y_p &= \sqrt{2} \int \sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] dr + u \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

Частинні похідні розгортки (2.71) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X_p}{\partial r} &= \sqrt{2} \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] - \frac{ur}{b^2 + r^2} \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right]; \\
 \frac{\partial Y_p}{\partial r} &= \sqrt{2} \sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right] - \frac{ur}{b^2 + r^2} \sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right]; \\
 \frac{\partial X_p}{\partial u} &= -\sin \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right]; \\
 \frac{\partial Y_p}{\partial u} &= \cos \left[\frac{1}{2} \ln (b^2 + r^2) \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.72}$$

Якщо за частинними похідними (2.72) знайти коефіцієнти першої квадратичної форми, то вони будуть точно такі, як у (2.57).

Щоб отримати параметричні рівняння ребра звороту на розгортці, потрібно внутрішнє рівняння (2.58) підставити у рівняння розгортки торса (2.71). На рис. 2.22 побудована смуга торса із ребром звороту на розгортці, яка відповідає смузі торса, зображеного на рис. 2.21.

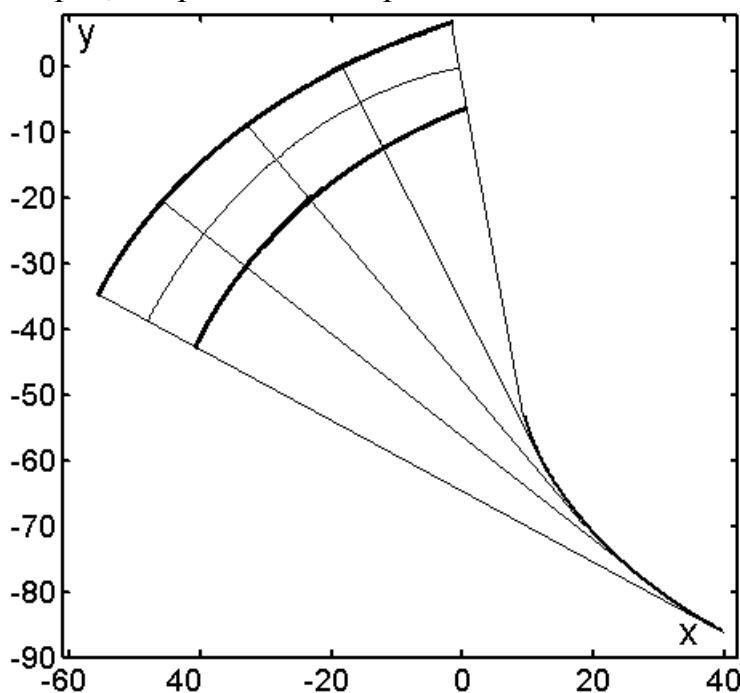


Рис. 2.22. Відсік торса (2.56) на розгортці, побудований за рівняннями (2.71)

Конструювати торс за заданою просторовою напрямною кривою так, щоб прямолінійні твірні були перпендикулярні до неї, за допомогою лінії кривини певної поверхні можна, однак незручно. Справа в тому, що тільки для обмеженого класу кривих можна знайти лінії кривини, пошук яких зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь. Рухаючись вздовж лінії кривини дотична площина певним чином повертається, утворюючи однопараметричну множину. Перетин двох нескінченно близьких площин множини дає твірну, перпендикулярну до лінії кривини поверхні. В принципі, можна по певному закону рухати площину вздовж довільної просторової кривої, але утворений торс не буде віднесено до сітки ортогональних ліній. Знайти спосіб конструювання торса, для якого задана просторова або плоска крива є лінією кривини, зручно з допомогою векторного представлення поверхні. В першому розділі було розглянуто векторне рівняння (1.76) торса, коли напрямна крива є ребром звороту. В такому випадку сітка координатних ліній косокутна, а напрямний вектор прямолінійної твірної збігається із ортом дотичної супровідного тригранника Френе. Очевидно, що через задану просторову або плоску напрямну криву можна провести і інші торси і при цьому напрямний вектор прямолінійної твірної може проєкціюватися на всі три орти.

Нехай напрямна крива, через яку має проходити торс, буде задана параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги: $x_n=x_n(s)$, $y_n=y_n(s)$, $z_n=z_n(s)$. Проведемо до кривої в точці A дотичну і через неї проведемо площину. Положення площини зручно описати в системі тригранника Френе вихідної кривої. Побудуємо в точці A тригранник і в ньому задамо положення площини кутом ε (рис. 2.23,а), відлік якого починаємо від стичної площини тригранника.

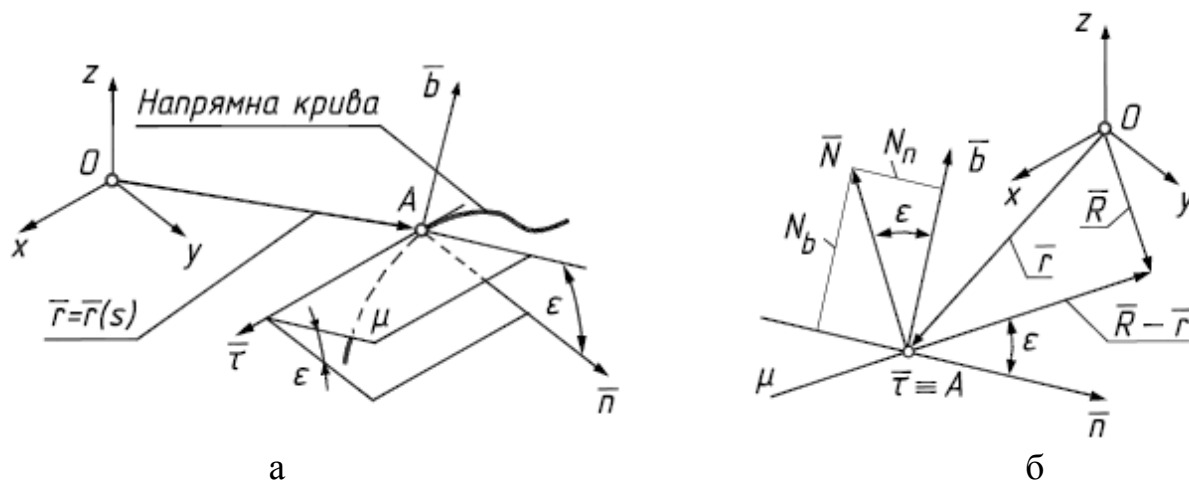


Рис. 2.23. Напрямна крива із супровідним тригранником в точці A в нерухомій системі координат:

- положення площини в триграннику задане кутом ε ;
- до визначення проєкцій нормального вектора \vec{N} на орти тригранника

Вважатимемо, що при русі тригранника по кривій площина μ обертається навколо орта дотичної $\vec{\tau}$ за певним законом $\varepsilon=\varepsilon(s)$.

Якщо закон обертального руху $\varepsilon=\varepsilon(s)$ заданий, то при русі тригранника по кривій площина μ рухається разом із ним і додатково обертається навколо орта

дотичної. Конкретному значенню дуги s відповідає певне положення площини μ , а сукупність цих положень утворює однопараметричну множину площин (рис. 2.24). Щоб знайти обвідний торс і його ребро звороту, запишемо рівняння площини μ в системі тригранника. Виберемо напрям погляду так, щоб орт дотичної спроекціювався в точку, тоді площина μ спроекціюється в пряму лінію (рис. 2.23,б).

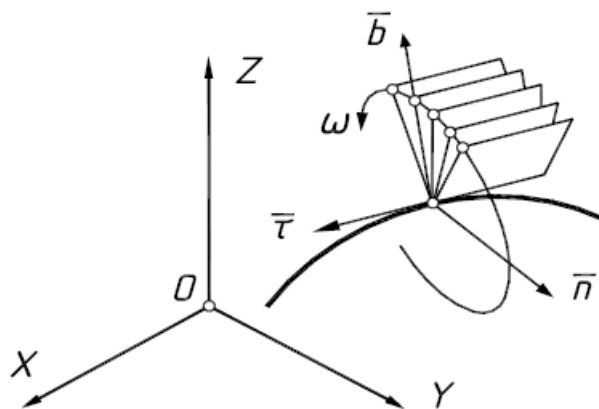


Рис. 2.24. Схема утворення однопараметричної множини обертанням площини навколо орта дотичної тригранника Френе

В системі $\bar{\tau n b}$ тригранника проекції одиничного нормального вектора площини μ запишуться:

$$\bar{N} \{ 0, \quad -\sin \varepsilon, \quad \cos \varepsilon \}. \quad (2.73)$$

Рівняння площини в триграннику Френе з врахуванням (2.73) запишеться:

$$-\bar{n} \sin \varepsilon + \bar{b} \cos \varepsilon = 0. \quad (2.74)$$

Сполучимо точку O нерухомої системи координат із довільною точкою площини μ (вектор \bar{R} , рис. 2.23,б). Вектор \bar{r} сполучає початок нерухомої системи координат із вершиною тригранника – точкою A . Вектор $\bar{R} - \bar{r}$ лежить у площині μ . Він перпендикулярний нормальному вектору \bar{N} площини (2.73). Виходячи з того, що вектори $\bar{R} - \bar{r}$ і \bar{N} перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю, запишемо:

$$(\bar{R} - \bar{r})(-\bar{n} \sin \varepsilon + \bar{b} \cos \varepsilon) = 0. \quad (2.75)$$

Щоб отримати ребро звороту торса, потрібно двічі продиференціювати вираз (2.75) по параметру s із застосуванням формул Френе. Після цього отримаємо ще два векторних рівняння:

$$(\bar{R} - \bar{r})[\bar{\tau}k \sin \varepsilon - \bar{n}(\sigma + \varepsilon') \cos \varepsilon - \bar{b}(\sigma + \varepsilon') \sin \varepsilon] = 0. \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} &(\bar{R} - \bar{r})\{\bar{\tau}[k' \sin \varepsilon + k(\sigma + 2\varepsilon') \cos \varepsilon] + \bar{n}[k^2 \sin \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2 \sin \varepsilon - \\ & - (\sigma' + \varepsilon'') \cos \varepsilon] - \bar{b}[(\sigma + \varepsilon')^2 \cos \varepsilon + (\sigma' + \varepsilon'') \sin \varepsilon]\} = k \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.77)$$

В рівняннях (2.76) і (2.77) через σ і σ' позначено вираз скруту вихідної кривої і його похідну. Отримані рівняння (2.75), (2.76) і (2.77) потрібно розв'язати відносно вектора $\bar{R} - \bar{r}$. Початок вектора $\bar{R} - \bar{r}$ знаходиться у вершині тригранника, отже його можна розкласти в проекціях на орти:

$$\bar{R} - \bar{r} = \bar{\tau} \rho_\tau + \bar{n} \rho_n + \bar{b} \rho_b, \quad (2.78)$$

де $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$, $\rho_b = \rho_b(s)$ – проекції вектора $\bar{R} - \bar{r}$ на відповідні орти тригранника, які є проекціями ребра звороту торса.

Вираз (2.78) підставляємо в (2.75), (2.76), (2.77) і скалярно перемножуємо. Отримаємо три скалярних рівняння до яких входять три невідомих функції ρ_τ , ρ_n , ρ_b – координати ребра звороту. Розв'язок подібної системи показано в [126]. Наведемо саму систему і готовий результат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_b \cos \varepsilon - \rho_n \sin \varepsilon = 0; \\ \rho_\tau k \sin \varepsilon - \rho_n (\sigma + \varepsilon') \cos \varepsilon - \rho_b (\sigma + \varepsilon') \sin \varepsilon = 0; \\ \rho_\tau [k' \sin \varepsilon + k(\sigma + 2\varepsilon') \cos \varepsilon] + \rho_n [k^2 \sin \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2 \sin \varepsilon - (\sigma' + \varepsilon'') \cos \varepsilon] - \\ - \rho_b [(\sigma + \varepsilon')^2 \cos \varepsilon + (\sigma' + \varepsilon'') \sin \varepsilon] = k \sin \varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.79)$$

$$\rho_\tau = \frac{k(\sigma + \varepsilon') \sin \varepsilon}{E}; \quad \rho_n = \frac{k^2 \sin^2 \varepsilon \cos \varepsilon}{E}; \quad \rho_b = \frac{k^2 \sin^3 \varepsilon}{E}, \quad (2.80)$$

де $E = k \cos \varepsilon [(\sigma + \varepsilon')(\sigma + 2\varepsilon') + k^2 \sin^2 \varepsilon] + \sin \varepsilon [k'(\sigma + \varepsilon') - k(\sigma' + \varepsilon'')]$.

Знайдемо напрямний вектор твірної торса. Оскільки твірна торса дотична до ребра звороту (2.80) торса, то цю задачу можна було б розв'язати диференціюванням рівнянь (2.80). Однак це невиправдано, тому що приведе до громіздких виразів. Через те ми поступимо іншим чином. Розв'яжемо як систему два перших рівняння (2.79). До них входять три невідомих величини

$\rho_\tau, \rho_n, \rho_b$. Нехай $\rho_\tau = 0$, отже ми будемо шукати дві координати ρ_n, ρ_b перетину твірної торса із нормальною площиною. Знаходимо, що в цьому випадку $\rho_n = \rho_b = 0$. Отже, твірна торса за будь-якої залежності $\varepsilon = \varepsilon(s)$ буде проходити через вершину тригранника, тобто буде перетинати вихідну напрямну криву. Звідси робимо висновок, що при запропонованому способі конструювання торса він завжди буде проходити через задану напрямну криву. При цьому прямолінійна твірна, яка виходить із вершини тригранника, буде торкатися ребра звороту, тобто її можна прийняти за напрямний вектор. Щоб провести твірну, потрібно мати ще одну точку. Задамо, наприклад, $\rho_n = 1$. Це означає, що ми перетнули цю пряму площиною, паралельною нормальній площині на відстані 1 від неї. Розв'язуючи перші два рівняння системи (2.80) одержимо:

$$\rho_\tau = \frac{\sigma + \varepsilon'}{k \cos \varepsilon \sin \varepsilon}; \quad \rho_b = \frac{2(\sigma + \varepsilon')}{k \sin 2\varepsilon}. \quad (2.81)$$

Приєднавши до двох виразів (2.81) $\rho_n = 1$ ми отримаємо напрямний вектор твірної торса в системі тригранника, оскільки його початок знаходиться у вершині тригранника. Нормалізуємо його до одиничного і остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \frac{\sigma + \varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}; \\ \rho_n &= \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}; \\ \rho_b &= \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Векторне рівняння торса в системі тригранника Френе запишеться:

$$\overline{R}(s, u) = \overline{r} + u \left[\begin{aligned} &\overline{\tau} \frac{\sigma + \varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} + \overline{n} \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} + \\ &\quad + \overline{b} \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}} \end{aligned} \right], \quad (2.83)$$

де u – друга незалежна змінна (довжина прямолінійної твірної торса).

Через задану просторову криву, у якій відомі натуральні рівняння $k=k(s)$ і $\sigma=\sigma(s)$, можна провести безліч торсів, задаючи різні залежності $\varepsilon=\varepsilon(s)$ в (2.83). Зокрема, при $\sigma + \varepsilon' = 0$, тобто при $\varepsilon = -\int \sigma ds + \varepsilon_0$ ми отримаємо торс, для якого вихідна крива буде лінією кривини [126]. Справді, згідно (2.82) в такому випадку проекція напрямного вектора твірної на орт дотичної дорівнює нулю, отже прямолінійна твірна розташована в нормальній площині тригранника, тобто перпендикулярна до напрямної кривої. При $\varepsilon=0$ напрямний вектор твірної збігається із ортом дотичної (проекції на орти \bar{n} і \bar{b} дорівнюють нулю згідно (2.82)), отже напрямна крива в цьому випадку буде ребром звороту торса. Цей же результат можна отримати із рівнянь (2.80), які дають при $\varepsilon=0$ $\rho_\tau = \rho_n = \rho_b = 0$, тобто точка ребра звороту знаходиться у вершині тригранника (в точці A вихідної напрямної кривої). Надаючи сталій інтегрування ε_0 певних значень, можна отримати різні торси, які будуть віднесені до ортогональної сітки координатних ліній.

Розглянемо деякі приклади для напрямної просторової кривої, заданої параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}x_n &= 0,5 \cos^2 s; \\y_n &= 0,5(s - \sin s \cos s); \\z_n &= \sin s.\end{aligned}\tag{2.84}$$

Кривина і скрут кривої (2.84) знаходяться за формулами (1.13), (1.14):

$$k = \sqrt{1 + \sin^2 s}; \quad \sigma = \frac{\cos 3s - 9 \cos s}{4(1 + \sin^2 s)}.\tag{2.85}$$

Для побудови торса та його ребра звороту потрібно перейти від рівнянь (2.83) і (2.80) в системі тригранника Френе до рівнянь в декартовій системі координат. Це робиться за допомогою дев'яти напрямних косинусів, які встановлюють відповідність між двома системами координат: рухомого тригранника Френе і нерухомої декартової системи.

Проекції напрямного вектора прямолінійної твірної торса на осі нерухомої системи координат знаходимо за допомогою дев'яти напрямних косинусів вихідної кривої [72]:

$$\begin{aligned}\rho_x = l &= \rho_\tau \cos \alpha_\tau + \rho_n \cos \alpha_n + \rho_b \cos \alpha_b; \\ \rho_y = m &= \rho_\tau \cos \beta_\tau + \rho_n \cos \beta_n + \rho_b \cos \beta_b; \\ \rho_z = n &= \rho_\tau \cos \gamma_\tau + \rho_n \cos \gamma_n + \rho_b \cos \gamma_b,\end{aligned}\tag{2.86}$$

де кожний із них визначається через перші і другі похідні кривої (2.85):

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_{\tau} &= \frac{x'_A}{\sqrt{x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A}}; \\
\cos \beta_{\tau} &= \frac{y'_A}{\sqrt{x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A}}; \\
\cos \gamma_{\tau} &= \frac{z'_A}{\sqrt{x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A}}; \\
\cos \alpha_n &= \frac{Bz'_A - Cy'_A}{\sqrt{(x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\
\cos \beta_n &= \frac{Cx'_A - Az'_A}{\sqrt{(x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\
\cos \gamma_n &= \frac{Ay'_A - Bx'_A}{\sqrt{(x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\
\cos \alpha_b &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
\cos \beta_b &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
\cos \gamma_b &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};
\end{aligned} \tag{2.87}$$

де $A = y'_A z''_A - y''_A z'_A$; $B = z'_A x''_A - z''_A x'_A$; $C = x'_A y''_A - x''_A y'_A$.

У випадку, коли напрямна крива (радіус-вектор) задана у функції довжини її дуги s параметричними рівняннями $x=x(s)$; $y=y(s)$; $z=z(s)$ (а саме із таким способом задана крива (2.84)), то вирази (2.87) значно спрощуються, оскільки в цьому випадку $x'^2_A + y'^2_A + z'^2_A = 1$. Нижче наводимо готові вирази:

$$\cos \alpha_{\tau} = -\sin s \cos s;$$

$$\cos \alpha_n = -\frac{\cos 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}};$$

$$\cos \alpha_b = -\frac{5 \sin s + \sin 3s}{4 \sqrt{1 + \sin^2 s}};$$

$$\begin{aligned}
\cos \beta_{\tau} &= \sin^2 s; \\
\cos \beta_n &= \frac{\sin 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\
\cos \beta_b &= -\frac{\cos^3 s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\
\cos \gamma_{\tau} &= \cos s; \\
\cos \gamma_n &= -\frac{\sin s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\
\cos \gamma_b &= -\frac{\sin^2 s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Параметричні рівняння торса згідно (1.114) запишуться:

$$\begin{aligned}
X &= x_n + ul = x_n + u(\rho_{\tau} \cos \alpha_{\tau} + \rho_n \cos \alpha_n + \rho_b \cos \alpha_b); \\
Y &= y_n + um = y_n + u(\rho_{\tau} \cos \beta_{\tau} + \rho_n \cos \beta_n + \rho_b \cos \beta_b); \\
Z &= z_n + un = z_n + u(\rho_{\tau} \cos \gamma_{\tau} + \rho_n \cos \gamma_n + \rho_b \cos \gamma_b),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Рівняння (2.89) є узагальненими рівняннями торса, усі твірні якого проходять через напрямну криву із заданою закономірністю зміни кута $\varepsilon = \varepsilon(s)$. Розглянемо окремі приклади.

Приклад 1. $\varepsilon = -0,8s$. Площина μ здійснює два рівномірних рухи із сталими лінійною і кутовою швидкостями. Підставляємо $\varepsilon = -0,8s$, $\varepsilon' = -0,8$ у (2.82) і отримуємо проекції напрямного вектора прямолінійної твірної торса. За рівняннями (2.89) при підстановці в них (2.84) і (2.88) побудовано торс, відсік якого наведено на рис. 2.25.

За формулами (2.89) можна будувати торс для будь-якої закономірності зміни кута $\varepsilon = \varepsilon(s)$, підставивши його вираз у (2.82). Їх можна вважати параметричними рівняннями торса в загальному вигляді, що проходить через просторову криву, задану у функції натурального параметра.

Щоб побудувати розгортку торса, будемо поступати наступним чином. Оскільки геодезична кривина лінії на поверхні не змінюється при згинанні останньої, знайдемо геодезичну кривину напрямної кривої на торсі (2.89), яка на розгортці торса стане кривою плоскої кривої, у яку перетвориться напрямна просторова крива. В нашому випадку геодезичну кривину кривої торса зручно шукати в системі супровідного тригранника Френе. Відомо, що вона є мішаним добутком трьох векторів: одиничного вектора нормалі до

поверхні, який в нашому випадку відомий: $\vec{N} \{0, -\sin \varepsilon, \cos \varepsilon\}$;

вектора $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ і вектора $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = nk$.

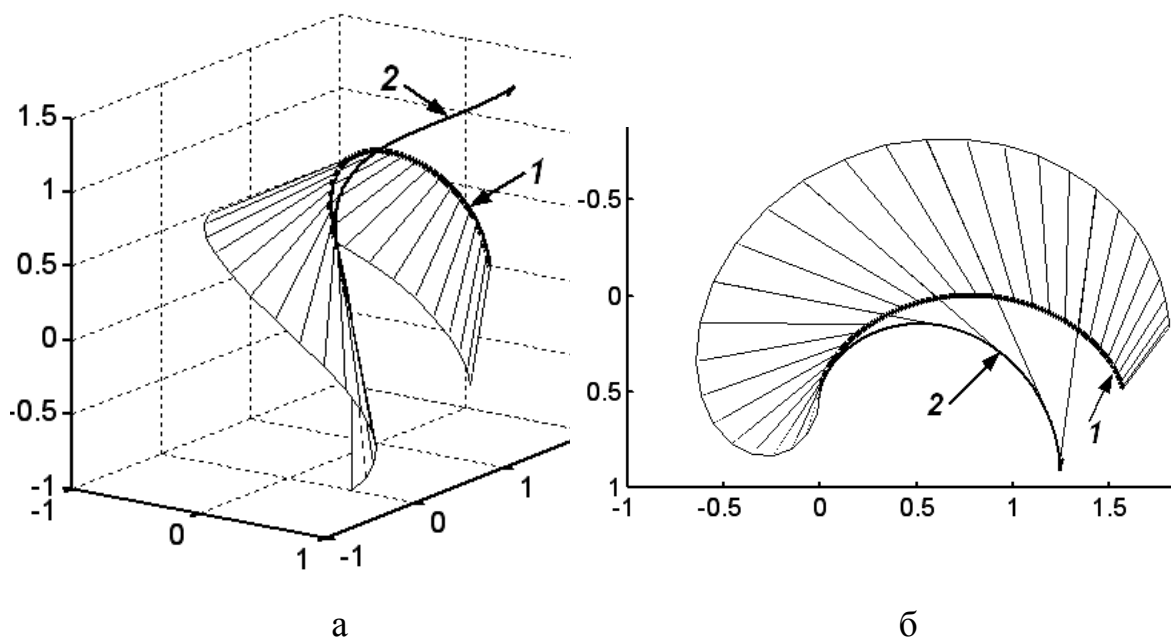


Рис. 2.25. Відсік торса, побудований при залежності $\varepsilon = -0,8s$ (1 – напрямна крива (2.84); 2 – ребро звороту):

а) аксонометрія;

б) горизонтальна проекція.

Із визначника знаходимо:

$$k_z = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = k \cos \varepsilon . \quad (2.90)$$

За формулами (1.89) знаходимо напрямну криву на розгортці торса:

$$\begin{aligned} x_{\text{тв}} &= \int \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds ; \\ y_{\text{тв}} &= \int \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Далі через кожну точку кривої (2.91) ми повинні провести прямолінійну твірну під тим же кутом до кривої на розгортці, під яким вона перетинає у відповідній точці напрямну криву на торсі. Цей кут дорівнює куту між напрямним вектором твірної (2.82) і одиничним вектором орта дотичної $\{1, 0, 0\}$. За відомими формулами знаходимо:

$$\cos \varphi = \frac{\sigma + \varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}. \quad (2.92)$$

З іншої сторони, такий же само кут (2.92) має бути між кривою на розгортці і напрямом прямолінійної твірної. Вектор дотичної до кривої в розгортці отримаємо диференціюванням (2.91):

$$\begin{aligned} x'_{i0} &= \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right); \\ y'_{i0} &= \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Невідомий поки що напрямний вектор прямолінійної твірної в розгортці позначимо проекціями $l_{роз}$, $m_{роз}$. Знайдемо кут між ним і вектором (2.93):

$$\cos \varphi = \frac{x'_{i0} l_{роз} + y'_{i0} m_{роз}}{\sqrt{l_{роз}^2 + m_{роз}^2}}. \quad (2.94)$$

Кути (2.92) і (2.94) мають бути рівними. Додамо до рівняння (2.94) умову, що вектор твірної одиничний, тобто $l_{роз}^2 + m_{роз}^2 = 1$. Після цього розв'яжемо систему двох рівнянь, до якої входить рівняння $l_{роз}^2 + m_{роз}^2 = 1$ і рівняння (2.94). Після перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} l_{роз} &= \frac{(\sigma + \varepsilon') \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) - k \sin \varepsilon \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}; \\ m_{роз} &= \frac{(\sigma + \varepsilon') \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) + k \sin \varepsilon \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Отже, розгортка тора запишеться:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + u \frac{(\sigma + \varepsilon') \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) - k \sin \varepsilon \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}; \\ Y_p &= \int \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + u \frac{(\sigma + \varepsilon') \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) + k \sin \varepsilon \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

де $k=k(s)$ наведено в (2.85) і $\varepsilon=-0,8s$, $\varepsilon'=-0,8$.

Приклад 2. Нехай напрямна крива буде лінією кривини торса. В цьому випадку залежність $\varepsilon=\varepsilon(s)$ визначається інтегруванням скруту кривої:

$$\varepsilon = -\int \sigma ds = -\int \frac{\cos 3s - 9 \cos s}{4(1 + \sin^2 s)} ds = \sin s + \operatorname{arctg}(\sin s) + \varepsilon_0, \quad (2.97)$$

де ε_0 – постійна інтегрування.

Слід зазначити, що при такій залежності кута $\varepsilon=\varepsilon(s)$ торс буде віднесено до ортогональної сітки ліній кривини. Оскільки $\sigma + \varepsilon' = 0$, проєкції напрямного вектора прямолінійної твірної торса (2.82) значно спростяться:

$$\rho_\tau = 0; \quad \rho_n = \cos \varepsilon; \quad \rho_b = \sin \varepsilon. \quad (2.98)$$

Рівняння торса (2.89) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} X &= x_n + ul = x_n + u(\cos \varepsilon \cos \alpha_n + \sin \varepsilon \cos \alpha_b); \\ Y &= y_n + um = y_n + u(\cos \varepsilon \cos \beta_n + \sin \varepsilon \cos \beta_b); \\ Z &= z_n + un = z_n + u(\cos \varepsilon \cos \gamma_n + \sin \varepsilon \cos \gamma_b), \end{aligned} \quad (2.99)$$

Після підстановки в (2.99) рівнянь (2.84) напрямної кривої і виразів (2.88) параметричні рівняння торса, віднесеного до ортогональної сітки координатних ліній, запишуться:

$$\begin{aligned} X &= 0,5 \cos^2 s - u \left(\frac{\cos \varepsilon \cos 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} + \sin \varepsilon \frac{5 \sin s + \sin 3s}{4 \sqrt{1 + \sin^2 s}} \right); \\ Y &= 0,5(s - \sin s \cos s) + u \left(\frac{\cos \varepsilon \sin 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} - \frac{\sin \varepsilon \cos^3 s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} \right); \\ Z &= \sin s - u \left(\frac{\cos \varepsilon \sin s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} + \frac{\sin \varepsilon \sin^2 s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} \right), \end{aligned} \quad (2.100)$$

де залежність кута $\varepsilon=\varepsilon(s)$ знайдено в (2.97).

Розгортку торса (2.100) одержимо із загальних рівнянь (2.96) при $\sigma + \varepsilon' = 0$:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds - u \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right); \\ Y_p &= \int \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + u \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right). \end{aligned} \quad (2.101)$$

На рис. 2.26 побудовано відсіки торса (2.100) при різних значеннях ε_0 в залежності (2.97).

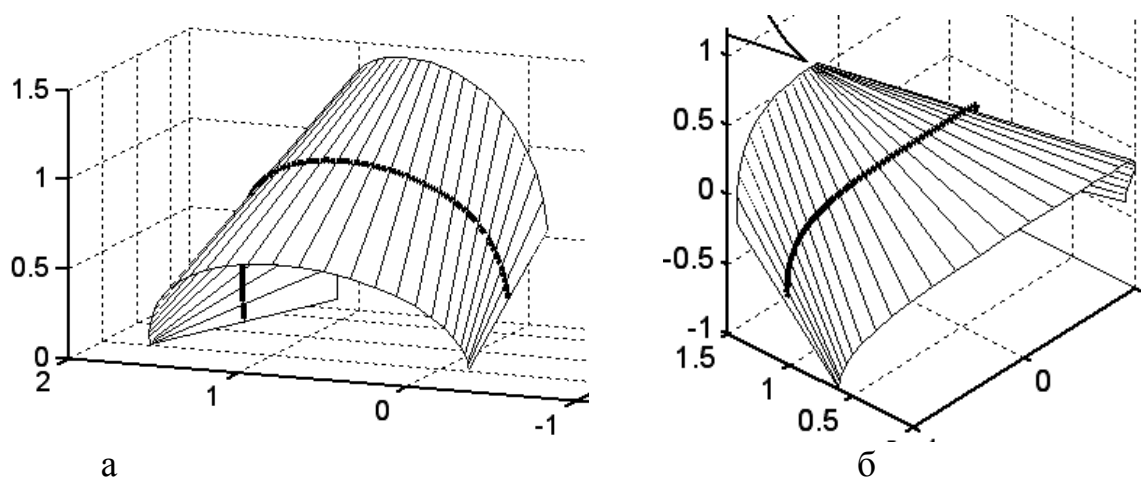


Рис. 2.26. Відсіки торса, для яких напрямна крива є лінією кривини:
а) постійна інтегрування $\varepsilon_0=0$; б) постійна інтегрування $\varepsilon_0=30^\circ$.

Для торса, побудованого на рис. 2.26, напрямна крива задана параметрними рівняннями (2.84). Для неї ми визначали за відомими формулами залежності кривини $k=k(s)$ і скруту $\sigma=\sigma(s)$. Але просторову криву можна задати цими двома натуральними рівняннями і конструювати торс, для якого ця крива є напрямною кривою. Однак побудова просторової кривої за заданими натуральними рівняннями потребує застосування чисельних методів. В основі них лежить кінематична інтерпретація супровідного тригранника Френе.

Оскільки положення супровідного тригранника Френе в певній точці просторової кривої визначається однозначно, то при переміщенні тригранника по кривій його рух теж буде цілком визначеним. При рівномірному русі тригранника по просторовій кривій він в кожен момент часу здійснює гвинтове переміщення. Напрямок миттєвої осі обертання і ковзання, а також величина кутової і поступальної швидкостей для конкретної точки кривої повністю залежать від величини кривини і скруту в даній точці. Відомо, що такий рух можна розкласти на два: 1) поступальний, коли всі точки тіла переміщуються на один і той же вектор, і 2) обертальний, коли тверде тіло здійснює поворот навколо нерухомої осі [71]. Якщо швидкість поступального руху відняти від швидкості кожної точки тіла, то воно буде здійснювати обертальний рух навколо миттєвої осі обертання. Таким чином, в кожен момент часу тригранник здійснює складний рух: поступальний в напрямі дотичної і обертальний навколо миттєвої осі обертання. В курсі теоретичної механіки відомі кінематичні рівняння Ейлера, що дозволяють знайти проекції вектора миттєвої осі обертання на осі рухомої системи координат, що жорстко прив'язана до твердого тіла, котре рухається по певній траєкторії [103]:

$$\begin{aligned}
 \omega_{\tau} &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi; \\
 \omega_n &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi; \\
 \omega_b &= \psi' \cos \theta + \varphi',
 \end{aligned}
 \tag{2.102}$$

де ω_{τ} , ω_n , ω_b – проєкції вектора осі миттєвого обертання тригранника (рис. 1.9).

Положення рухомої системи координат $\overline{\tau n b}$ в нерухомій $OXYZ$ характеризується трьома кутами Ейлера φ , ψ , θ . Оскільки ми поступальний рух тригранника відняли від всіх його точок, то швидкість початку координат буде рівна нулю, тобто він збігатиметься із початком координат нерухомої системи. Беручи до уваги, що тригранник Френе рухається по кривій рівномірно, тобто за одиницю часу проходить одиницю довжини дуги, то можна вважати, що роль часу відіграє дуга кривої. Розв'язавши (2.102) відносно φ' , ψ' , θ' , одержимо:

$$\begin{aligned}
 \varphi' &= \omega_b - (\omega_{\tau} \sin \varphi + \omega_n \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta; \\
 \psi' &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega_{\tau} \sin \varphi + \omega_n \cos \varphi); \\
 \theta' &= \omega_{\tau} \cos \varphi - \omega_n \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{2.103}$$

Оскільки положення вектора миттєвої осі обертання $\overline{\omega}$ (рис. 1.9) залежить від величини кривини і скруту кривої в даній точці, знайдемо його проєкції ω_{τ} , ω_n , ω_b на орти супровідного тригранника і підставимо в (2.103). Розглянемо спочатку рух тригранника по плоскій кривій. Рухаючись двома ортами ($\overline{\tau}$ і \overline{n}) в площині кривої, він здійснює обертальний рух навколо бінормалі. Кутова швидкість такого обертання чисельно дорівнює відношенню кута повороту дотичної до довжини дуги, тобто це буде кривина кривої. Таким чином, для плоскої кривої вектор миттєвої осі обертання збігається з ортом бінормалі, а його модуль дорівнює кривині. Для просторової кривої за рахунок наявності скруту σ тригранник здійснює ще один обертальний рух, зумовлений поворотом стичної площини навколо дотичної. Його вектор направлений по дотичній $\overline{\tau}$, а модуль рівний скруту σ (рис. 1.9). Таким чином, додавши два знайдені вектори, одержимо сумарний вектор $\overline{\omega}$ миттєвої осі обертання тригранника. Його модуль і проєкції в системі $\overline{\tau n b}$ відповідно запишуться:

$$\left| \overline{\omega} \right| = \sqrt{k^2 + \tau^2}; \quad \overline{\omega} \{ \tau, \quad 0, \quad k \}.
 \tag{2.104}$$

Підставивши значення $\omega_{\tau} = \tau$; $\omega_n = 0$; $\omega_b = k$ в (2.103), одержимо залежності зміни кутів Ейлера і їх похідних від дуги s (оскільки вона відіграє роль часу):

$$\frac{d\psi}{ds} = \sigma \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \sigma \cos \varphi; \quad \frac{d\varphi}{ds} = k - \sigma \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (2.105)$$

Формули (2.105) приведені в [151], але вони там одержані іншим шляхом. Для знаходження параметричних рівнянь просторової кривої скористаємося відомими формулами [151]:

$$\begin{aligned} dx &= (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) ds; \\ dy &= (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) ds; \\ dz &= \sin \varphi \sin \theta ds. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Для інтегрування рівнянь (2.106) необхідно мати функції $\varphi = \varphi(s)$; $\psi = \psi(s)$; $\theta = \theta(s)$, які в свою чергу отримуємо як результат розв'язку системи диференціальних рівнянь (2.105) за допомогою чисельних методів. На рис. 2.27 побудовано напрямні криві за заданими натуральними рівняннями $k=k(s)$ і $\sigma=\sigma(s)$ за допомогою чисельних методів і знайдені прямолінійні твірні торса за виконання умови $\sigma + \varepsilon' = 0$, тобто торс віднесено до ліній кривини.

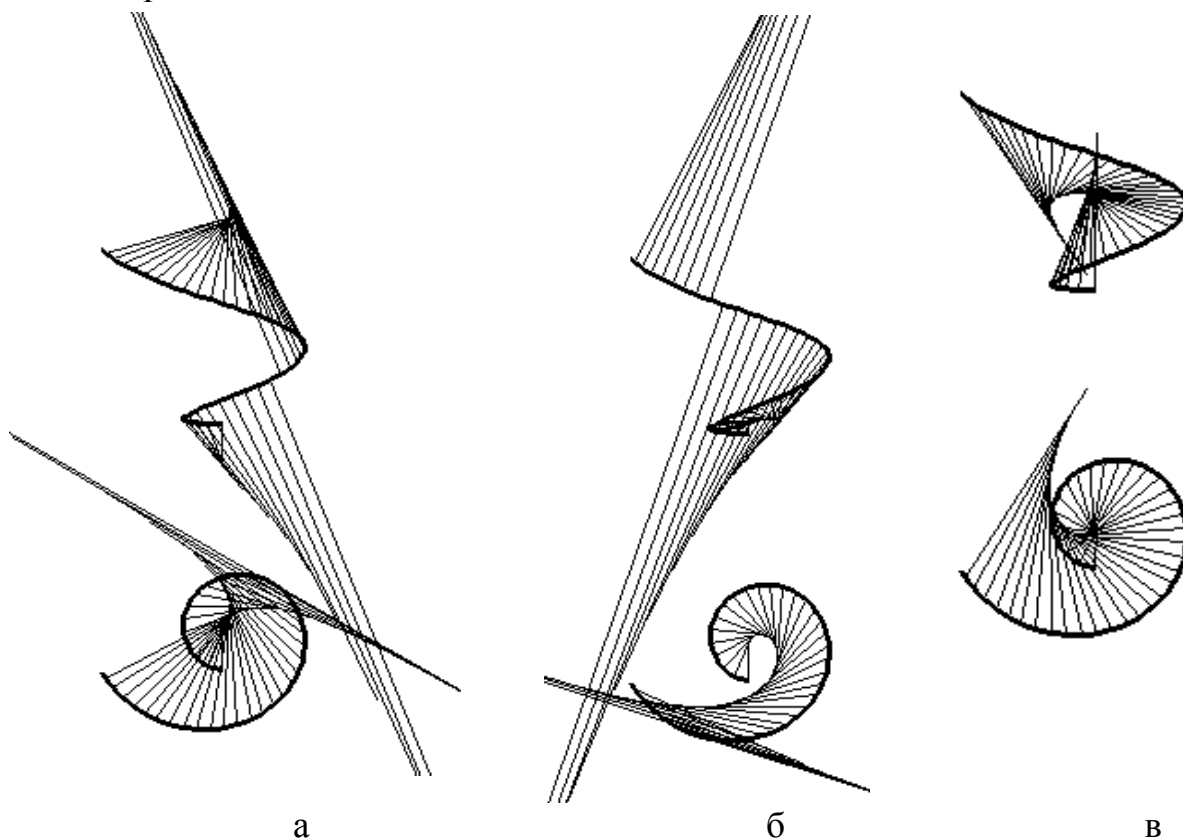


Рис. 2.27. Торси, для яких просторові напрямні криві служать лініями кривини:

а) $k=5/s$; $\tau=0,006$; $\varepsilon_0=0$;

б) $k=5/s$; $\tau=0,006$; $\varepsilon_0=\pi/3$;

в) $k=5/s$; $\tau=0,006$; $\varepsilon_0=-\pi/3$

В тому випадку, коли плоска напрямна крива буде лінією кривини, кут ε буде сталим згідно умови $\sigma + \varepsilon' = 0$. Проекція ребра звороту на площину напрямної кривої буде еволютою цієї кривої і не залежатиме від значення кута ε . Крім того, постійність кута ε свідчить про те, що всі твірні поверхні будуть нахилені до площини кривої під одним і тим же кутом, тобто конструйований торс буде торсом однакового нахилу твірних. Ясно, що при цьому ребро звороту буде лінією укусу. Якщо за напрямну криву взяти коло, то одержимо найпростіший торс однакового нахилу - круговий конус. На рис. 2.28,а,б побудовані торси однакового нахилу, для яких напрямними взяли замкнені криві, задані натуральними рівняннями. Відсіки торсів обмежені напрямними кривими і ребрами звороту. В окремому випадку, коли $\varepsilon = 90^\circ$, торс однакового нахилу перетворюється в циліндричну поверхню із твірними, перпендикулярними до площини напрямної кривої. Отже, для циліндричної поверхні плоска лінія кривини буде одночасно і геодезичною. Сталість кута ε свідчить про те, що геодезична кривина напрямної кривої буде завжди прямо пропорційна повній її кривині, де коефіцієнтом пропорційності служить $\cos\varepsilon$.

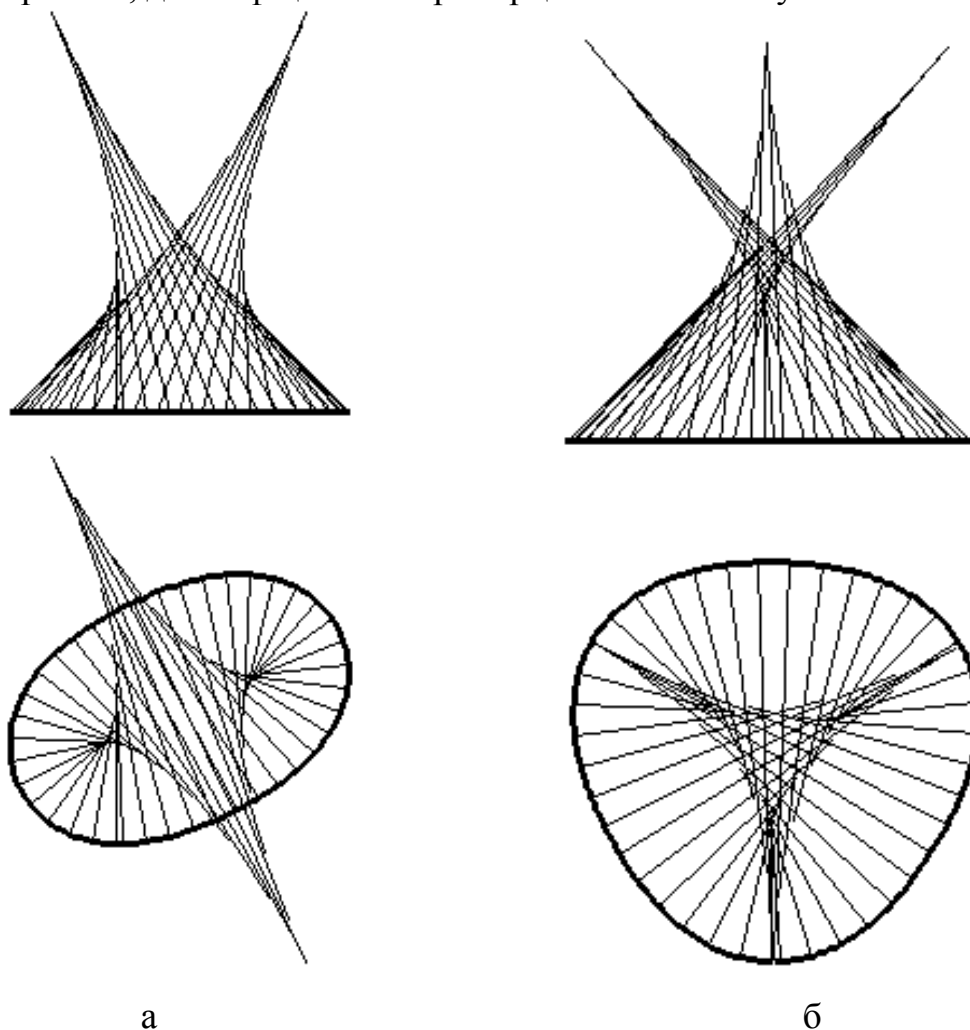


Рис. 2.28. Торси однакового нахилу твірних ($\varepsilon = 45^\circ$), задані плоскими напрямними лініями кривини:

а) $k = 0,025 \sin(0,08s) + 0,04$;

б) $k = 0,01 \sin(0,06s) + 0,02$

Побудуємо торс, для якого за напрямну лінію кривини візьмемо гвинтову лінію (1.110). Узагальнені параметричні рівняння торса, для якого напрямна лінія є лінія кривини, наведено в (2.99). Згідно них нам потрібно мати шість напрямних косинусів. Їх знаходимо за формулами (2.87):

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= -\cos v; \\ \cos \beta_n &= -\sin v; \\ \cos \gamma_n &= 0; \\ \cos \alpha_b &= \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \cos \beta_b &= -\frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \cos \gamma_b &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\end{aligned}\tag{2.107}$$

Підставимо (2.107) у (2.99) і отримаємо:

$$\begin{aligned}X &= a \cos v - u \left(\cos v \cos \varepsilon - \frac{b \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon \right); \\ Y &= a \sin v - u \left(\sin v \cos \varepsilon + \frac{b \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon \right); \\ Z &= bv + u \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{2.108}$$

Можна задати в рівняннях (2.108) будь-яку залежність $\varepsilon = \varepsilon(v)$ і одержати лінійчату поверхню. Для нашого випадку ця залежність визначається, виходячи із умови $\sigma + \varepsilon' = 0$. Вираз для скруту гвинтової лінії беремо із (1.111). Знаходимо необхідну закономірність зміни кута ε :

$$\varepsilon = -\int \tau ds + \varepsilon_0 = -\frac{bs}{a^2 + b^2} + \varepsilon_0.\tag{2.109}$$

Підставивши в (2.109) вираз для довжини дуги гвинтової лінії $s = \sqrt{a^2 + b^2} v$, остаточно одержимо закономірність зміни $\varepsilon = \varepsilon(v)$:

$$\varepsilon = -\frac{bv}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \varepsilon_0.\tag{2.110}$$

Підстановка (2.110) в (2.108) дасть рівняння розгортної поверхні, для якої гвинтова лінія є лінією кривини. Щоб знайти рівняння ребра звороту, візьмемо, наприклад, два перших рівняння (2.108) і виключимо із них параметр u . Одержане рівняння

$$\begin{aligned} & x \left(\cos \varepsilon \sin v + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon \cos v \right) - \\ & - y \left(\cos \varepsilon \cos v - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon \sin v \right) - \\ & - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

описує однопараметричну множину прямолінійних твірних в проекції на горизонтальну площину проекцій. Диференціюємо (2.111) по параметру v і після спрощень одержуємо:

$$xa \cos v + ya \sin v + b^2 = 0. \quad (2.112)$$

Розв'язавши (2.111) і (2.112) відносно x і y , одержимо рівняння горизонтальної проекції ребра звороту:

$$\begin{aligned} x_{\text{реб.}} &= \frac{b}{a} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \varepsilon \sin v - b \cos v \right); \\ y_{\text{реб.}} &= -\frac{b}{a} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \varepsilon \cos v + b \sin v \right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Щоб знайти координату $z_{\text{реб.}}$, прирівняємо перші рівняння (2.108) і (2.113) між собою (або ж другі рівняння) і розв'яжемо їх відносно параметра u :

$$u = \frac{a^2 + b^2}{a \cos \varepsilon}. \quad (2.114)$$

Одержаний вираз (2.114) підставимо в третє рівняння (2.108) замість u і після спрощень одержимо:

$$z_{\text{реб.}} = bv + \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (2.115)$$

Приєднавши (2.115) до (2.113), одержимо рівняння ребра звороту торса (2.108) в нерухомій системі координат. Відсіки даної поверхні, обмежені напрямною кривою і ребром звороту, побудовані в проекціях на рис. 2.29, а, б. Із рисунків видно, що ребро звороту в межах повного витка напрямної гвинтової

лінії може мати розрив (рис. 2.29,а) або ж не мати його (рис. 2.29,б). Якщо взяти торс із декількома повними витками гвинтової лінії, яка є для нього лінією кривини, то ділянки ребра звороту із розривом і без нього будуть чергуватися між собою вздовж гвинтової лінії. На рис. 2.29,в побудований торс, у якого прямолінійна твірна має постійну довжину.

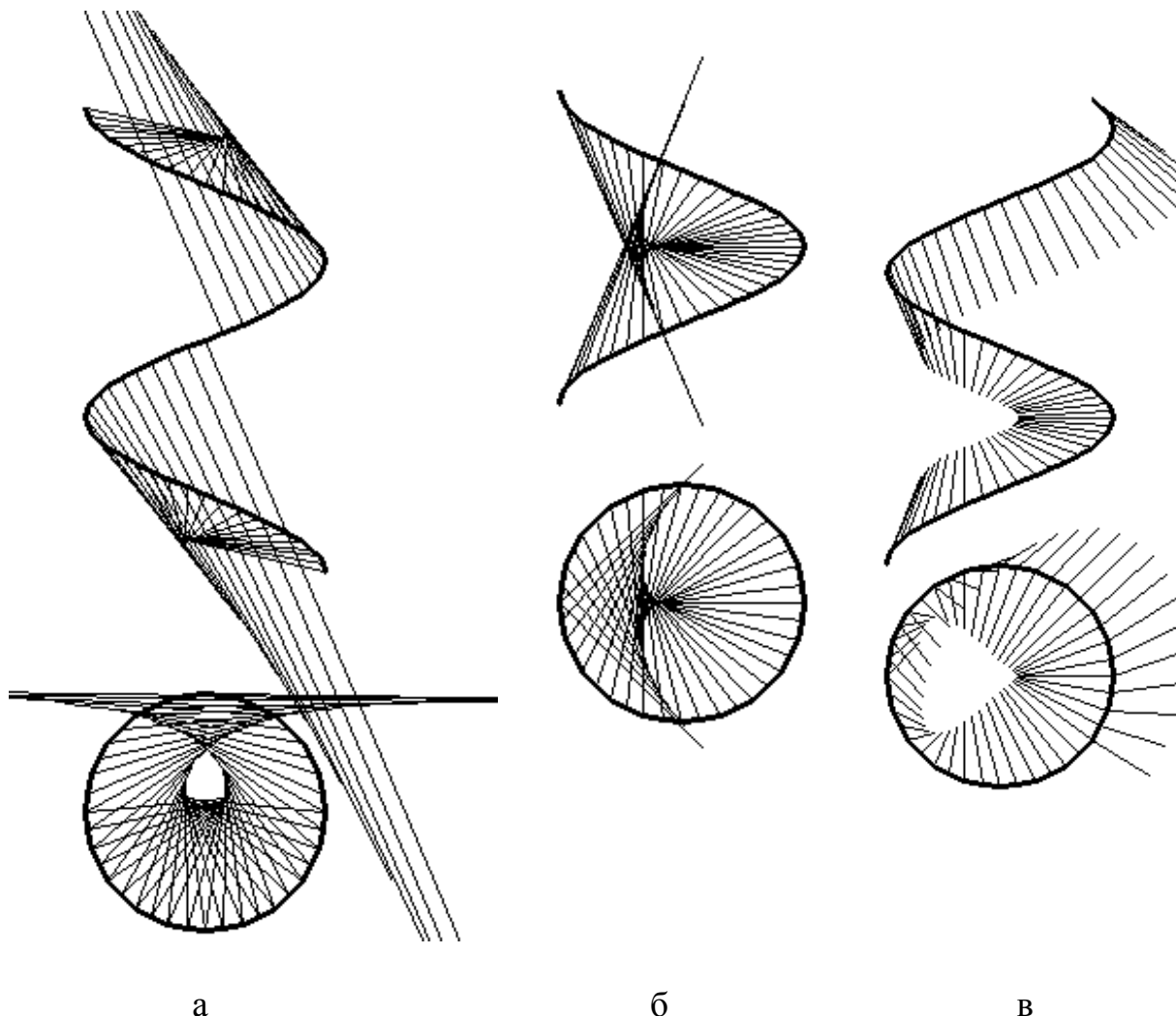


Рис. 2.29. Торс, для якого напрямна гвинтова лінія є лінією кривини:
 а) ребро звороту терпить розрив;
 б) ребро звороту без розриву;
 в) торс із сталою довжиною твірних

Знайдемо розгортку поверхні (2.108). Оскільки геодезична кривина $k_r = k \cos \varepsilon$ не змінюється при згинанні, то вираз для її визначення:

$$k_r = \frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{-bv}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.116)$$

буде рівнянням повної кривини напрямної кривої в розгортці в функції параметра v . Інтеграл (2.70) із врахуванням того, що $ds = \sqrt{a^2 + b^2} dv$, набуває вигляду:

$$\int k_\varepsilon ds = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{-bvdv}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{b} \sin \frac{bv}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.117)$$

Параметричні рівняння гвинтової лінії на розгортці знаходимо за формулами (1.89), для яких внутрішній інтеграл знайдено в (2.117). Зважаючи на те, що прямолінійні твірні торса мають бути перпендикулярними до напрямної кривої в розгортці, остаточно запишемо рівняння поверхні (2.108) після згинання її на площину:

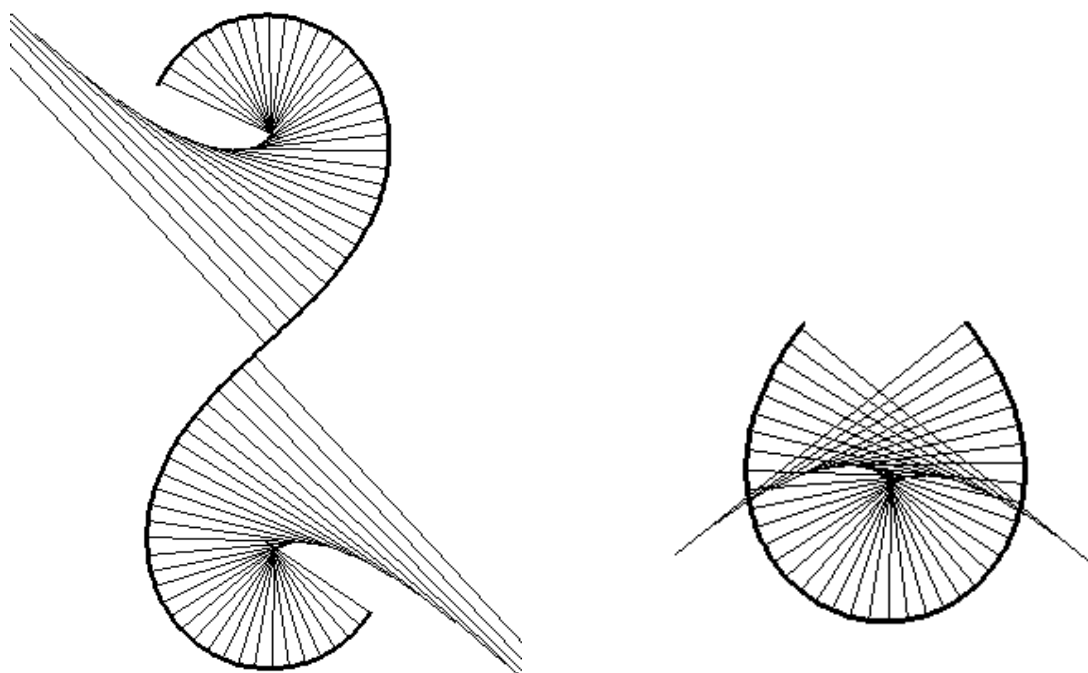
$$\begin{aligned} X_p &= \sqrt{a^2 + b^2} \int \cos \left(\frac{a}{b} \sin \varepsilon \right) dv + u \sin \left(\frac{a}{b} \sin \varepsilon \right); \\ Y_p &= \sqrt{a^2 + b^2} \int \sin \left(\frac{a}{b} \sin \varepsilon \right) dv - u \cos \left(\frac{a}{b} \sin \varepsilon \right), \end{aligned} \quad (2.118)$$

де вираз для кута ε наведено в (2.110).

Коефіцієнти першої квадратичної форми для торса (2.108) і його розгортки (2.118) ідентичні:

$$\begin{aligned} E &= 1; & F &= 0; \\ G &= a^2 + b^2 - 2ua \cos \varepsilon + u^2 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cos^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Це свідчить про те, що їх лінійні елементи однакові і рівняння (2.108), (2.119) є рівняннями однієї і тієї ж поверхні до і після згинання на площину. Ребро звороту торса в розгортці знайдемо підстановкою його внутрішнього рівняння (2.114) у (2.118). На рис. 2.30 побудовано чисельними методами за рівняннями (2.118) фрагменти розгортки торса. Довжина прямолінійних твірних визначалася від напрямної кривої до ребра звороту. Із внутрішнього рівняння (2.114) ребра звороту видно, що при $\varepsilon = \pi/2$ довжина прямолінійної твірної прямує в нескінченність, тобто точка дотику її до ребра звороту знаходиться на нескінченності. При відповідному значенні змінної v у виразі (2.110) кут ε набуває значення $\varepsilon = \pi/2$ і в цей момент ребро звороту терпить розрив.



а

б

Рис. 2.30. Розгортки відсіків торса із напрямною гвинтовою лінією кривини:

- а) ребро звороту терпить розрив;
- б) ребро звороту без розриву

2.3. Конструювання полярних торсів заданої напрямної кривої

Як відомо, з кожною точкою просторової кривої пов'язані три взаємно перпендикулярні площини – стична, спрямна і нормальна. При переміщенні точки вздовж кривої кожна з цих площин описує однопараметричну сім'ю площин, тобто огинає деякий торс [36]. Обвідною поверхнею стичних площин є торс дотичних до напрямної кривої, тобто напрямна крива є для нього ребром звороту. Обвідною поверхнею спрямних площин є торс, для якого напрямна лінія служить геодезичною лінією. Обвідна поверхня однопараметричної множини нормальних площин називається полярним торсом. Особливість такого торса полягає в тому, що напрямна просторова крива не лежить на його поверхні, а ребро звороту торса є геометричним місцем центрів стичних сфер цієї кривої.

Побудуємо полярний торс для просторової кривої, заданої крива параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}
 x &= e^{at} \cos t; \\
 y &= e^{at} \sin t; \\
 z &= e^{at}.
 \end{aligned}
 \tag{2.120}$$

Можна поставити умову, щоб через кожен точку кривої (2.120) пройшла площина із заданим нормальним вектором. Нехай таким вектором буде вектор дотичної до кривої; в такому випадку всі площини будуть перпендикулярними до кривої, а торс, який вони утворюють, буде називатися полярною поверхнею [72].

Рівняння площини, що проходить через точку кривої (2.120) перпендикулярно до вектора дотичної в цій точці, запишеться:

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0, \quad (2.121)$$

де x, y, z – параметричні рівняння кривої (2.120) та їх похідні:

$$\begin{aligned} x' &= e^{at} (a \cos t - \sin t); \\ y' &= e^{at} (a \sin t + \cos t); \\ z' &= ae^{at}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Підстановкою (2.120) і (2.122) у (2.121) одержимо рівняння однопараметричної множини площин, яке після спрощень запишеться:

$$X(a \cos t - \sin t) + Y(a \sin t + \cos t) + Za - 2ae^{at} = 0. \quad (2.123)$$

Однопараметрична множина площин (2.123) буде огинати торс, рівняння якого знайдемо за формулами (2.14). Для цього запишемо вирази, що до нього входять, взявши їх із рівняння (2.123):

$$\begin{aligned} A &= a \cos t - \sin t; & A' &= -a \sin t - \cos t; \\ B &= a \sin t + \cos t; & B' &= a \cos t - \sin t; \\ C &= a; & C' &= 0; \\ D &= -2ae^{at}; & D' &= -2a^2e^{at}; \\ E &= \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Підстановкою (2.124) у (2.13) одержимо параметричні рівняння кривої перерізу полярного торса горизонтальною площиною:

$$\begin{aligned} x_0 &= -2ae^{at} \sin t; \\ y_0 &= 2ae^{at} \cos t; \\ z_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Параметричні рівняння полярного торса кривої (2.120) згідно (2.14) запишуться:

$$\begin{aligned} X &= -2ae^{at} \sin t - ua(a \cos t - \sin t) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}; \\ Y &= 2ae^{at} \cos t - ua(a \sin t + \cos t) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}; \\ Z &= u(1 + a^2) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Знайдемо рівняння ребра звороту торса (2.126). Точку ребра звороту можна шукати як результат перетину площин Π_1 , Π_2 , і Π_3 згідно схеми на рис. 2.8 або ж як результат перетину твірної 1 торса із площиною Π_3 . Зупинимось на останньому варіанті. Продиференціюємо вирази (2.124) ще один раз і запишемо рівняння площини Π_3 :

$$X(-a \cos t + \sin t) - Y(a \sin t + \cos t) - 2a^3 e^{at} = 0. \quad (2.127)$$

Підставимо вирази X , Y , Z із (2.126) у (2.127) і розв'яжемо отримане рівняння відносно u . Отримаємо:

$$u = 2\sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4} e^{at}. \quad (2.128)$$

Підстановкою u із (2.128) у (2.126) отримаємо параметричні рівняння ребра звороту:

$$\begin{aligned} x_p &= -2a^2 e^{at} \cos t; \\ y_p &= -2a^2 e^{at} \sin t; \\ z_p &= 2(1 + a^2) e^{at}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Якщо взяти похідні рівнянь (2.129) і знайти одиничний вектор дотичної до ребра звороту, то його вирази будуть аналогічними із виразами напрямного вектора твірної торса (2.126), що і слід було чекати. Тепер можна записати рівняння торса як поверхні, утвореної множиною прямолінійних твірних, дотичних до ребра звороту (2.129):

$$\begin{aligned} X &= -2a^2 e^{at} \cos t - ua(a \cos t - \sin t) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}; \\ Y &= 2a^2 e^{at} \sin t - ua(a \sin t + \cos t) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}; \\ Z &= 2(1 + a^2) e^{at} + u(1 + a^2) / \sqrt{1 + 3a^2 + 2a^4}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Рівняння (2.126) і (2.130) є рівняннями одного і того ж торса. В першому випадку довжина прямолінійних твірних відраховується від плоскої координатної лінії, що лежить у горизонтальній площині, а в другому – від ребра звороту. На рис. 2.31 відсік торса 3 побудовано за рівняннями (2.130), а відсік 4 – за рівняннями (2.126). З нього видно, що крайні твірні відсіку 3 збігаються із твірними відсіку 4, що свідчить про достовірність отриманих результатів. Цифрою 1 позначено вихідну криву (2.120), а цифрою 2 – ребро звороту (2.129). Як видно із рис. 2.31, поверхня не проходить через вихідну криву.

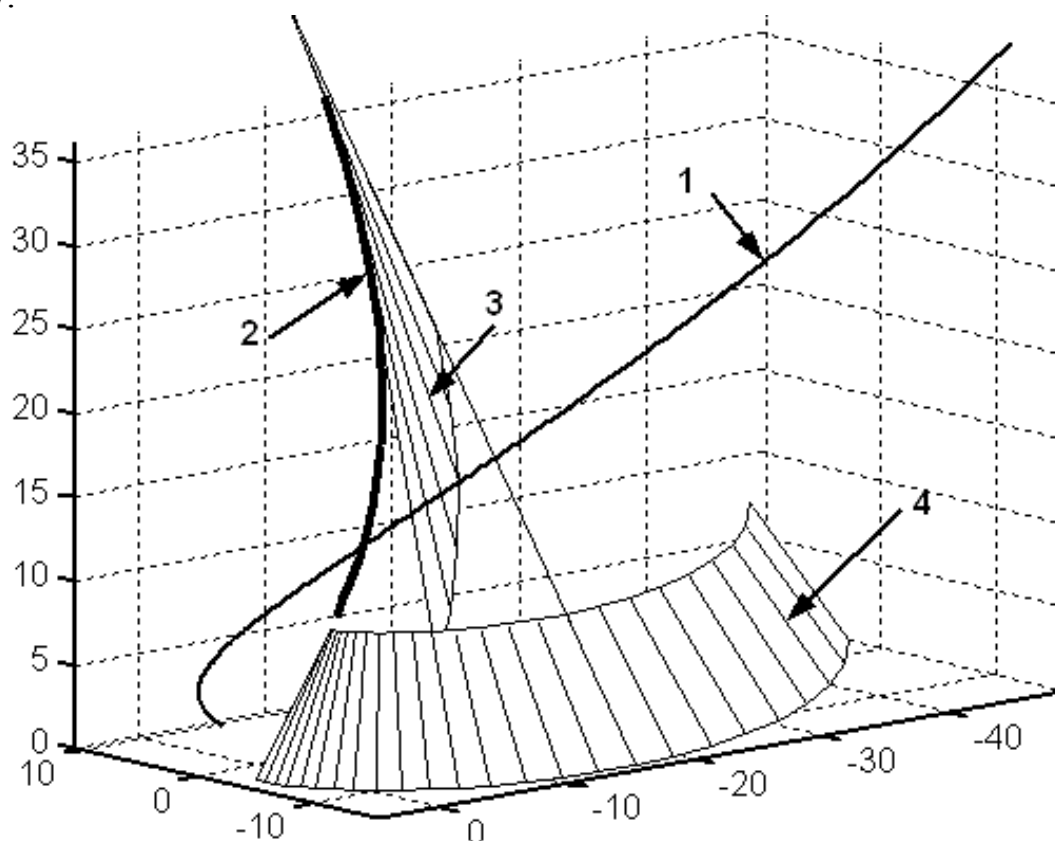


Рис. 2.31. Вихідна крива 1, ребро звороту 2, відсіки торса 3 і 4, побудовані відповідно за рівняннями (2.120), (2.129), (2.130) і (2.126) при $a=1$.

Розглянемо побудову полярного торса кривої укусу. За вихідну візьмемо просторову криву, яку запропоновано в праці [27] задавати натуральним рівнянням $k=k(s)$, де k – кривина кривої, s – довжина її дуги та змінним кутом $\beta=\beta(s)$ її підйому. При $\beta=const$ крива буде кривою укусу і її параметричні рівняння запишуться [27]:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \psi \, ds ; \\ y &= \cos \beta \int \sin \psi \, ds ; \\ z &= s \sin \beta , \end{aligned} \tag{2.131}$$

де кут ψ є функцією довжини дуги s , а саме: $\psi = \frac{1}{\cos \beta} \int k \, ds$.

Рівняння площини, що проходить через точку кривої (2.131) перпендикулярно до вектора дотичної в цій точці, знайдемо за формулами (2.121), де x, y, z – параметричні рівняння кривої (2.131) та їх похідні.

Для конкретного значення змінного параметра (дуги s) рівняння (2.121) опише нормальну площину кривої (2.131) у відповідній точці. Надаючи інших значень параметру s , ми отримаємо однопараметричну множину нормальних площин кривої укусу (2.131), які огинатимуть полярний торс. Для зручності наступного диференціювання рівняння (2.121) по параметру s приведемо його до звичного вигляду (2.1), де

$$\begin{aligned} A &= x' = \cos \beta \cos \psi ; \\ B &= y' = \cos \beta \sin \psi ; \\ C &= z' = \sin \beta ; \\ D &= -(xx' + yy' + zz') = \\ &= -\cos^2 \beta \left(\cos \psi \int \cos \psi ds + \sin \psi \int \sin \psi ds \right) - s \sin^2 \beta. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Полярний торс знайдемо за схемою, описаною в підрозділі 2.1. Коефіцієнти, що входять до рівнянь (2.8) знайдемо диференціюванням виразів (2.132):

$$\begin{aligned} A' &= -k \sin \psi ; & B' &= k \cos \psi ; & C' &= 0 ; \\ D' &= k \cos \beta \left(\sin \psi \int \cos \psi ds - \cos \psi \int \sin \psi ds \right) - 1 ; \\ A'' &= -\frac{k^2}{\cos \beta} \cos \psi - k' \sin \psi ; & B'' &= -\frac{k^2}{\cos \beta} \sin \psi + k' \cos \psi ; & C'' &= 0 ; \\ D'' &= k' \cos \beta \left(\sin \psi \int \cos \psi ds - \cos \psi \int \sin \psi ds \right) + \\ &+ k^2 \left(\cos \psi \int \cos \psi ds + \sin \psi \int \sin \psi ds \right). \end{aligned} \tag{2.133}$$

Кожних три відповідні площини із множини (2.8) будуть перетинатися в точці, що належить ребру звороту полярного торса, а множина цих точок утворить ребро звороту. Застосувавши відомі формули знаходження точки перетину трьох площин і знаючи коефіцієнти (2.132) та їх похідні (2.133), знаходимо параметричні рівняння ребра звороту:

$$\begin{aligned} x_{p_2} &= \cos \beta \left(\int \cos \psi ds + \frac{k'}{k^3} \cos \psi \right) - \frac{1}{k} \sin \psi ; \\ y_{p_2} &= \cos \beta \left(\int \sin \psi ds + \frac{k'}{k^3} \sin \psi \right) + \frac{1}{k} \cos \psi ; \\ z_{p_2} &= s \sin \beta - \frac{k' \cos^2 \beta}{k^3 \sin \beta}. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Оскільки визначником тора є просторова крива – його ребро звороту – то на основі його рівнянь можна написати рівняння самого тора. Однак в загальному вигляді це зробити досить проблематично. Справа в тому, що твірна тора є дотичною до ребра звороту, отже знаходження її напрямного вектора зв'язане із диференціюванням рівнянь (2.134), що призведе до значного ускладнення виразів. Якщо ж в подальшому ще й будувати ребро звороту на розгортці, то необхідно буде визначати його кривину, що зв'язано ще із одним диференціюванням і виконанням алгебраїчних операцій над першими і другими похідними. З огляду на це знаходження параметричних рівнянь полярного тора та його розгортки будемо здійснювати іншим шляхом.

Дві нескінченно близьких площини (2.8) перетнуться між собою по прямолінійній твірній полярного тора, яка знаходиться у нормальній площині вихідної кривої (2.131). На рис. 2.32 показана схема утворення тора. Цифрою 1 позначено вихідну криву укосу. В точці A до неї проведено нормальну площину і дотичну, яка складає із горизонтальною площиною кут β . Твірна полярного тора лежить в нормальній площині, є дотичною до ребра звороту 3 і, перетинаючись із горизонтальною площиною, складає із нею кут φ . Характерним для твірної полярного тора є те, що вона не перетинає вихідну криву. Однопараметрична множина твірних в перетині із горизонтальною площиною утворює криву 2 перерізу тора.

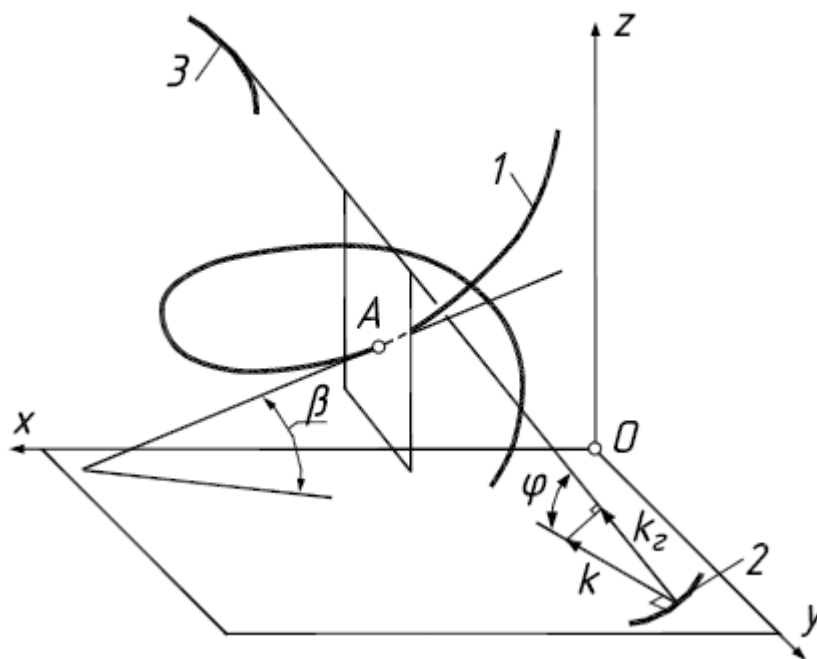


Рис. 2.32. Схема утворення полярного тора кривої

Параметричні рівняння полярного тора будемо шукати як однопараметричну множину твірних, що ідуть від відповідних точок плоскої кривої 2. Одиничний напрямний вектор твірної полярного тора визначається за відомими формулами (2.11).

Підстановка коефіцієнтів та їх похідних із (2.132) і (2.133) в (2.11) дає прості вирази одиничного напрямного вектора твірної торса:

$$\begin{aligned} l &= -\sin \beta \cos \psi ; \\ m &= -\sin \beta \sin \psi ; \\ n &= \cos \beta . \end{aligned} \quad (2.135)$$

Параметричні рівняння полярного торса запишуться:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + ul ; \\ Y &= y_0 + um ; \\ Z &= un , \end{aligned} \quad (2.136)$$

де $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$ – рівняння кривої 2 перерізу торса (рис. 2.32);
 u – другий змінний параметр поверхні – довжина прямолінійної твірної.
 Оскільки для кривої перерізу $Z=0$, то рівняння (2.8) запишуться:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0; \\ A'x_0 + B'y_0 + D' &= 0. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Розв'язуючи систему (2.137) відносно x_0 , y_0 , отримаємо параметричні рівняння кривої перерізу торса горизонтальною площиною:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B} = \cos \beta \int \cos \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \cos \psi - \frac{1}{k} \sin \psi ; \\ y_0 &= \frac{A'D - AD'}{AB' - A'B} = \cos \beta \int \sin \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \sin \psi + \frac{1}{k} \cos \psi . \end{aligned} \quad (2.138)$$

Рівняння полярного торса (2.136) остаточно запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \cos \beta \int \cos \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \cos \psi - \frac{1}{k} \sin \psi - u \sin \beta \cos \psi ; \\ Y &= \cos \beta \int \sin \psi \, ds + s \sin \beta \operatorname{tg} \beta \sin \psi + \frac{1}{k} \cos \psi - u \sin \beta \sin \psi ; \\ Z &= u \cos \beta . \end{aligned} \quad (2.139)$$

Із виразів напрямного вектора (2.135) видно, що кут нахилу прямолінійної твірної до горизонтальної площини сталий. Знайдемо його (на рис. 2.32 він позначений грецькою літерою φ):

$$\varphi = 90^{\circ} - \beta. \quad (2.140)$$

Отже, полярний торс кривої укусу із кутом підйому β є торсом однакового нахилу твірних, причому цей кут нахилу рівний $90^{\circ} - \beta$. Зазначимо ще одну характерну властивість полярного торса (2.139), ребра звороту (2.134), кривої перерізу (2.138): в їх аналітичному описанні однією із змінних а саме змінною s є дуга вихідної кривої, тобто “чужа” дуга.

Розглянемо приклад. Побудуємо полярний торс, напрямною кривою якого є гвинтова лінія, задана параметричними рівняннями у функції довжини дуги:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos^2 \beta}{k} \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\ y &= -\frac{\cos^2 \beta}{k} \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Продиференціюємо рівняння (2.141) по s :

$$\begin{aligned} x' &= \cos \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\ y' &= \cos \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\ z' &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Підстановкою рівнянь (2.141) та (2.142) в (2.121) отримаємо рівняння площини, що проходить через точку кривої, перпендикулярно до вектора дотичної:

$$X \cos \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta} + Y \cos \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta} + Z \sin \beta - s \sin^2 \beta = 0. \quad (2.143)$$

Однопараметрична множина площин (2.143) буде огинати торс, рівняння якого знайдемо за формулами (2.14). Для цього запишемо вирази, що до нього входять, взявши їх із рівняння (2.143):

$$\begin{aligned} A &= \cos \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\ B &= \cos \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\ C &= \sin \beta; \quad D = -s \sin^2 \beta; \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned}
 A' &= -k \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 B' &= k \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 C' &= 0; \quad D' = -\sin^2 \beta; \\
 E &= k.
 \end{aligned}
 \tag{2.144}$$

Підставивши (2.144) в (2.14) матимемо параметричні рівняння полярного торса:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{-\sin^2 \beta \left(\cos \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta} - sk \cos \frac{ks}{\beta} \right)}{k \cos \beta} - u \sin \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 Y &= \frac{\sin^2 \beta \left(\cos \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta} + sk \sin \frac{ks}{\cos \beta} \right)}{k \cos \beta} - u \sin \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 Z &= u \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{2.145}$$

Ребро звороту торса (2.145) знаходимо за формулами (2.134), підставивши в них $\psi = \frac{1}{\cos \beta} \int k ds = \frac{1}{\cos \beta} ks$:

$$\begin{aligned}
 x_{p3} &= -\frac{\sin^2 \beta}{k} \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 y_{p3} &= \frac{\sin^2 \beta}{k} \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 z_{p3} &= s \sin \beta.
 \end{aligned}
 \tag{2.146}$$

При відомих рівняннях ребра звороту (2.146) можна записати параметричні рівняння полярного торса, як поверхні, утвореної множиною прямолінійних твірних, дотичних до нього. Для цього знаходимо напрямний вектор прямолінійної твірної торса диференціюванням рівнянь ребра звороту (2.146). Після цього отриманий вектор нормалізуємо:

$$\begin{aligned}
 l &= -\sin \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 m &= -\sin \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 n &= \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{2.147}$$

Після цього запишемо параметричні рівняння полярного торса, утвореного множиною прямолінійних твірних, дотичних до нього:

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{\sin^2 \beta}{k} \sin \frac{ks}{\cos \beta} - u \sin \beta \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 Y &= \frac{\sin^2 \beta}{k} \cos \frac{ks}{\cos \beta} - u \sin \beta \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\
 Z &= s \sin \beta + u \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{2.148}$$

Торси за рівняннями (2.145) і (2.148) побудовано на рис. 2.33.

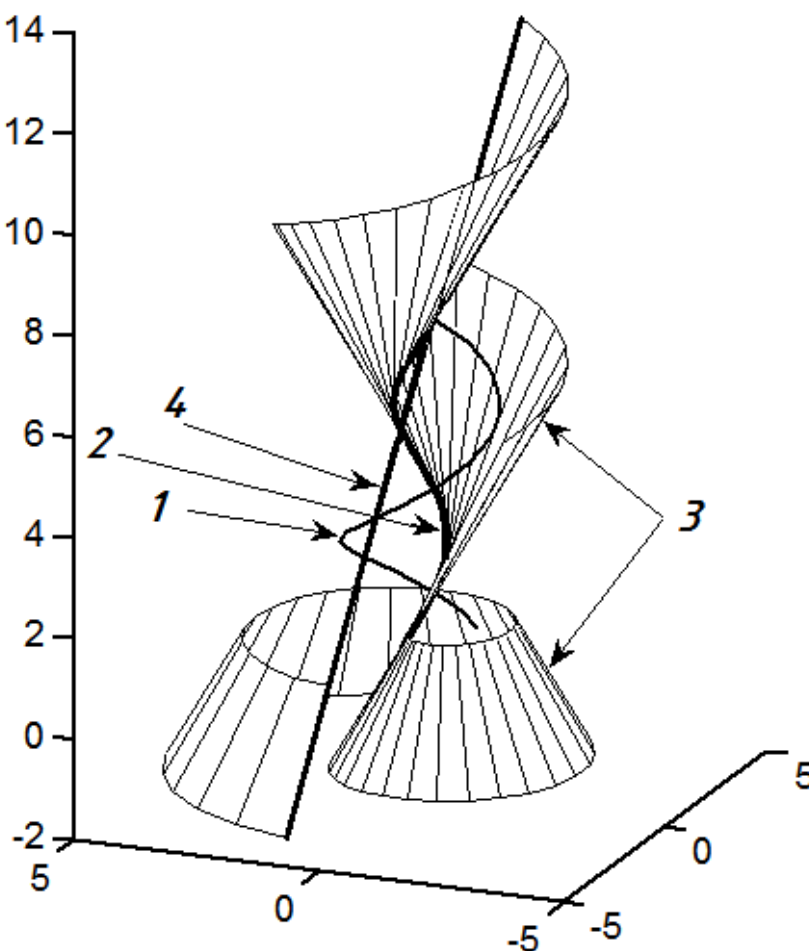


Рис. 2.33. Полярний торс гвинтової лінії (2.141), побудований за за рівняннями (2.145) і (2.148) при $k=0,5$ і $\beta=30^\circ$

На рис. 2.23 вихідну криву – гвинтову лінію (2.141) позначено цифрою 1, ребро звороту полярного торса – цифрою 2, торс, побудований за рівняннями (2.145) і (2.148) – цифрою 3. Цифрою 4 позначено твірну торса, яку отримали при кінцевому значенні змінної s . Вона зображена потовщеною і із рисунка видно, що вона є спільною для обох торсів. Це свідчить про достовірність отриманих результатів.

Перейдемо до побудови розгортки торса (2.139), описаного узагальненими рівняннями. Властивістю торса однакового нахилу твірних є те, що його прямолінійні твірні перпендикулярні до кривої перерізу, тобто сітка координатних ліній торса (2.139) перпендикулярна і утворена сім'ями ліній кривини. Переконаємося в цьому, знайшовши коефіцієнти першої квадратичної форми. Частинні похідні торса (2.139) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} &= \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta + u k \operatorname{tg} \beta \right) \sin \psi ; \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= - \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta + u k \operatorname{tg} \beta \right) \cos \psi ; \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= 0; \quad \frac{\partial X}{\partial u} = - \sin \beta \cos \psi ; \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= - \sin \beta \sin \psi ; \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \cos \beta .\end{aligned}\tag{2.149}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (2.139) будуть:

$$\begin{aligned}G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right)^2 = \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta + u k \operatorname{tg} \beta \right)^2 ; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial s} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial s} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u} = 0; \\ E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1.\end{aligned}\tag{2.150}$$

Рівність середнього коефіцієнта F нулю свідчить про те, що сім'ї координатних ліній ортогональні. Вони ж будуть ортогональними і на розгортці, оскільки кути між лініями при згинанні торса не змінюються.

Знайдемо на розгортці криву перерізу (2.138). При її знаходженні будемо виходити із того, що геодезична кривина кривої на торсі перетворюється в повну кривину цієї ж кривої на розгортці. Співвідношення між кривиною кривої перерізу k_{\perp} і її геодезичною кривиною $k_{\text{гп}}$ можна записати через кут φ (рис. 2.32), значення якого наведено у виразі (2.140):

$$k_{\text{гп}} = k_{\perp} \cos \varphi = k_{\perp} \sin \beta .\tag{2.151}$$

Щоб знайти вираз кривини k_n кривої перерізу (2.138), запишемо спочатку її перші і другі похідні:

$$\begin{aligned}x'_n &= \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \psi ; & y'_n &= - \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \psi ; \\x''_n &= \left[\frac{k k'' - 2 k'^2}{k^3} - (k + s k') \operatorname{tg}^2 \beta \right] \sin \psi + \frac{k}{\cos \beta} \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \psi ; & (2.152) \\y''_n &= - \left[\frac{k k'' - 2 k'^2}{k^3} - (k + s k') \operatorname{tg}^2 \beta \right] \cos \psi + \frac{k}{\cos \beta} \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \psi .\end{aligned}$$

За відомими формулами через похідні (2.152) шукаємо кривину кривої перерізу (2.138) . Після цього підставляємо у (2.151) і після спрощень отримуємо:

$$k_m = \sin \beta \frac{x'_o y''_o - x''_o y'_o}{(x'^2_o + y'^2_o)^{3/2}} = \frac{k^3 \operatorname{tg} \beta}{k' - k^2 s \operatorname{tg}^2 \beta} . \quad (2.153)$$

Вираз (2.153) є залежністю $k=k(s)$ кривої (2.138) на розгортці у функції “чужої” дуги s . Довжину власної дуги кривої (2.138) можна знайти інтегруванням виразу:

$$ds_n = \sqrt{x'^2_o + y'^2_o} ds = \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) ds . \quad (2.154)$$

Перехід від рівняння $k=k(s)$ (2.153) до параметричних здійснюємо за відомими формулами (1.89) із врахуванням (2.154):

$$\begin{aligned}x_{op} &= \int \cos \left(\int k_m ds_n \right) ds_n = \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) ds ; \\y_{op} &= \int \sin \left(\int k_m ds_n \right) ds_n = \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) ds .\end{aligned} \quad (2.155)$$

Щоб отримати розгортку торса (2.139), потрібно від кривої (2.155) перпендикулярно до неї провести прямолінійні твірні. Для цього беремо похідні рівнянь (2.155) і знаходимо одиничний вектор дотичної. Після цього беремо перпендикулярний до нього і проводимо твірні. Параметричні рівняння розгортки запишуться:

$$\begin{aligned}
X_p &= \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) ds + u \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right); \\
Y_p &= \int \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) ds - u \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right).
\end{aligned}
\tag{2.156}$$

Вирази (2.156) є параметричними рівняннями розгортки полярного торса (2.139). Вони записані в загальному вигляді для кривої укусу (2.131), заданої натуральним рівнянням кривини $k=k(s)$ і кутом підйому $\beta=\operatorname{const}$. Знайдемо частинні похідні рівнянь (2.156) та коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_p}{\partial s} &= \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) + u k \operatorname{tg} \beta \cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right); \\
\frac{\partial Y_p}{\partial s} &= \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta \right) \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right) - u k \operatorname{tg} \beta \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right); \\
\frac{\partial X_p}{\partial u} &= \sin \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right); & \frac{\partial Y_p}{\partial u} &= -\cos \left(\operatorname{tg} \beta \int k ds \right).
\end{aligned}
\tag{2.157}$$

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{\partial X_p}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial s} \right)^2 = \left(\frac{k'}{k^2} - s k \operatorname{tg}^2 \beta + u k \operatorname{tg} \beta \right)^2; \\
F &= \frac{\partial X_p}{\partial s} \cdot \frac{\partial X_p}{\partial u} + \frac{\partial Y_p}{\partial s} \cdot \frac{\partial Y_p}{\partial u} = 0; & E &= \left(\frac{\partial X_p}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial u} \right)^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{2.158}$$

Порівнявши (2.150) і (2.158) бачимо, що коефіцієнти першої квадратичної форми повністю збігаються. Це свідчить про те, що рівняння (2.156) розгортки торса (2.139) знайдено правильно. Як видно із рис. 2.33 полярним торсом для гвинтової лінії є торс-гелікоїд, тобто і вихідна крива, і ребро звороту, є лівою і правою гвинтовими лініями. Крім того, їх кути підйому різні і в сумі становлять 90° згідно отриманого результату (2.140).

Розглянемо ще один приклад. Нехай залежність $k=k(s)$ в рівнянні кривої (2.131) має вигляд:

$$k = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{s} . \tag{2.160}$$

Підставивши (2.160) в (2.131), одержимо параметричні рівняння вихідної кривої укусу:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{s \sin 2\beta}{2(1 + \sin^2 \beta)} \left[\sin \beta \cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) + \sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right]; \\
y &= \frac{s \sin 2\beta}{2(1 + \sin^2 \beta)} \left[\sin \beta \sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) - \cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right]; \\
z &= s \sin \beta.
\end{aligned} \tag{2.161}$$

Підстановка (2.160) в (2.134) дає параметричні рівняння ребра звороту полярного торса:

$$\begin{aligned}
x_{\text{п3}} &= -\frac{2s \operatorname{tg} \beta \sin^2 \beta}{1 + \sin^2 \beta} \left[\sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) + \sin \beta \cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right]; \\
y_{\text{п3}} &= \frac{2s \operatorname{tg} \beta \sin^2 \beta}{1 + \sin^2 \beta} \left[\cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) - \sin \beta \sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right]; \\
z_{\text{п3}} &= 2s \sin \beta.
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Нарешті підстановкою (2.160) у (2.139) і (2.156) відповідно одержимо параметричні рівняння:

- полярного торса:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{2s \operatorname{tg} \beta \sin \beta}{1 + \sin^2 \beta} \left[\cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) - \sin \beta \sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right] - u \sin \beta \cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right); \\
Y &= \frac{2s \operatorname{tg} \beta \sin \beta}{1 + \sin^2 \beta} \left[\sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) + \sin \beta \cos \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right) \right] - u \sin \beta \sin \left(\frac{\ln s}{\sin \beta} \right); \\
Z &= u \cos \beta.
\end{aligned} \tag{2.163}$$

- та його розгортки:

$$\begin{aligned}
X_{\text{п}} &= -s \operatorname{tg} \beta [\cos(\ln s) + \sin(\ln s)] + u \sin(\ln s); \\
Y_{\text{п}} &= s \operatorname{tg} \beta [\cos(\ln s) - \sin(\ln s)] - u \cos(\ln s).
\end{aligned} \tag{2.164}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми для торса (2.163) і його розгортки (2.164) однакові і мають вигляд:

$$G = \frac{1}{s^2} (u - 2s \operatorname{tg} \beta)^2; \quad F = 0; \quad E = 1. \tag{2.165}$$

Вони узгоджуються із коефіцієнтами (2.158), одержаними в загальному вигляді. Коефіцієнт G одержимо із першого виразу (2.158) при підстановці в нього натурального рівняння (2.160) та його похідної.

За рівняннями (2.161), (2.162), (2.163) на рис. 2.34,а побудовано вихідну криву 1, ребро звороту 2, два відсіки полярного торса з різною густиною координатних ліній. На рис. 2.34,б за рівняннями (2.164) побудовано розгортки відповідних відсіків.

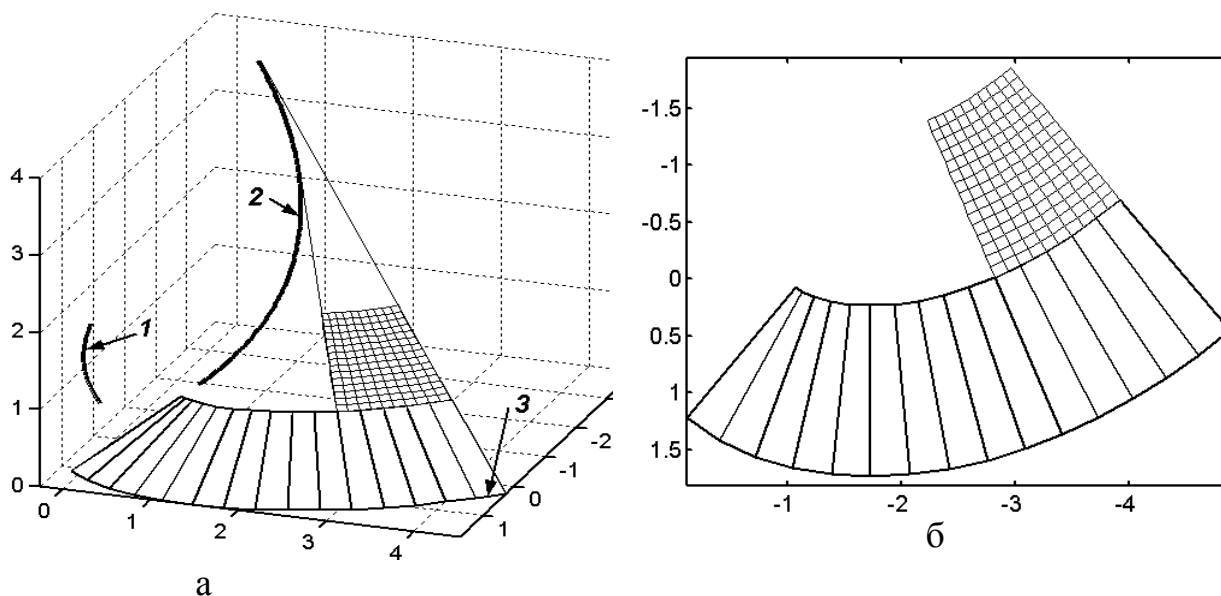


Рис. 2.34. Полярний торс кривої – а) та його розгортка – б)

Розглянемо полярний торс для довільної сферичної кривої, заданої у функції натурального параметра s , та знайдемо його розгортку. Візьмемо криву, задану у внутрішніх координатах сфери у вигляді [128]:

$$\varepsilon = as ; \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{as}{2}. \quad (2.166)$$

Перейшовши до параметричних рівнянь, одержимо криву на поверхні одиничної сфери:

$$\begin{aligned} x &= \sin(as) \cos \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ y &= \sin(as) \sin \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\ z &= \cos(as), \end{aligned} \quad (2.167)$$

де a – стала величина.

Як відомо ребром звороту торса, утвореного нормальними площинами просторової кривої, є геометричне місце центрів стичних сфер [53], тому ребро звороту полярного торса сферичної кривої вироджується у точку – центр сфери. Щоб знайти сам торс, відшукаємо напрямні косинуси його твірних за формулами (2.11). Спочатку знаходимо коефіцієнти, які входять до формул (2.11) для кривої (2.167):

$$\begin{aligned}
 A = x' &= a \cos(as) \cos s \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\} - \sqrt{1-a^2} \sin \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\}, \\
 B = y' &= a \cos(as) \sin \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\} + \sqrt{1-a^2} \cos \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\}, \\
 C = z' &= -a \sin(as), \\
 D &= 0, \\
 A' = x'' &= \frac{1}{2} (-2 + a^2 + a^2 \cos(2as)) \operatorname{csc}(as) \cos s \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\} - \\
 &\quad - a \sqrt{1-a^2} \cot(as) \sin \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\}, \\
 B' = y'' &= \frac{1}{2} (-2 + a^2 + a^2 \cos(2as)) \operatorname{csc}(as) \sin \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\} + \\
 &\quad + a \sqrt{1-a^2} \cot(as) \cos \left\{ \frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right\}, \\
 C' = z'' &= -a^2 \cos(as), \\
 E &= \frac{\sqrt{1-a^2} \cos^2 as}{\sin as}.
 \end{aligned} \tag{2.168}$$

Після підстановки (2.168) в (2.11) та спрощень координати напрямного вектора запишуться:

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{a \sin(as)}{\sqrt{1-a^2 \cos^2(as)}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right) \right]; \\
 m &= \frac{a \sin(as)}{\sqrt{1-a^2 \cos^2(as)}} \cos \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right) \right]; \\
 n &= \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2 \cos^2(as)}},
 \end{aligned} \tag{2.169}$$

Оскільки вектор (2.169) є одиничним, то він опише криву на сфері одиничного радіуса, яка буде кривою перетину полярного торса із сферою. Рівняння самого торса опишуться за формулами:

$$X = ul; \quad Y = um; \quad Z = un, \tag{2.170}$$

оскільки всі твірні ідуть із початку координат.

Після підстановки (2.169) у (2.170) параметричні рівняння торса запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= -u \frac{a \sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\
 Y &= u \frac{a \sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}} \cos \left[\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{as}{2} \right) \right]; \\
 Z &= u \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^2 \cos^2 as}}.
 \end{aligned} \tag{2.171}$$

Перша квадратична форма торса (2.171) має вигляд:

$$dS^2 = du^2 + \frac{2a^2 u^2 (1-a^2)}{1-a^2 \cos^2 as} ds^2. \tag{2.172}$$

При $a=l$ напрямна крива (2.167) перетворюється у коло, у якого віссю обертання є вісь Oy . Однопараметрична множина нормальних площин цього кола буде проходити через вісь Oy . Це означає, що обвідної поверхні не буде, вона вироджується у пряму лінію – вісь пучка площин. Цей результат ми також отримаємо із рівнянь торса (2.171) при $a=l$.

На рис. 2.35 на сфері одиничного радіуса показано криву (2.167) при $a=0,75$ та побудовано полярний торс, який має дві порожнини.

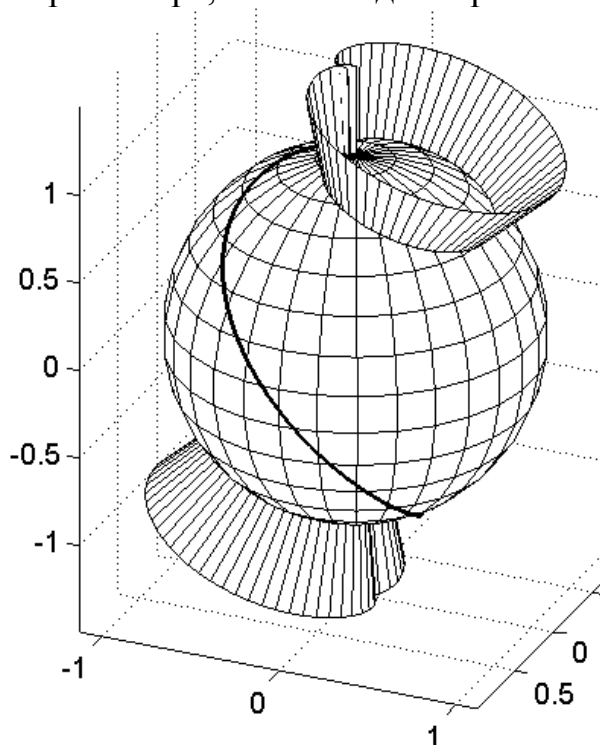


Рис. 2.35. Полярний торс сферичної кривої (2.167) при $a=0.75$

Побудуємо розгортку полярного торса. Для цього спочатку знайдемо в розгортці сферичну криву (2.169), через яку проходить полярний торс. Оскільки сам торс є конічною поверхнею, то довжина всіх твірних від центра сфери одиничного радіуса до кривої (2.169) дорівнює одиниці. Отже, розгорткою торса буде сектор, на якому крива (2.169) буде зображатися дугою кола одиничного радіуса (рис. 1.46,б). Довжина дуги AB на поверхні сфери дорівнюватиме відповідній дузі на розгортці. Щоб знайти координати поточної точки M на розгортці, потрібно відкласти кут α , який складається із кута α_0 плюс кут, що відповідає довжині дуги AM . Оскільки коло одиничне, відповідний кут чисельно буде рівний довжині дуги AM . Отже, можна записати: $\alpha = \alpha_0 + s_{AM}$. Зважаючи на те, що точка M – поточна, індекс біля s можна не писати. Тоді координати поточної точки M в системі Oxy запишуться:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\alpha_0 + s); \\ y &= \sin(\alpha_0 + s). \end{aligned} \tag{2.173}$$

Оскільки довжини дуг на сфері і на розгортці рівні, то знайдемо вираз для визначення довжини дуги на сфері і використаємо його для побудови розгортки. У кривої (2.169) параметром s служить довжина дуги вихідної кривої (2.167), отже вона є «чужою дугою». Свою власну дугу можна знайти за відомою формулою (1.11). Тоді вираз для знаходження кута α запишеться:

$$\alpha = \alpha_0 + \int \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} ds, \quad (2.174)$$

де $l=l(s)$, $m=m(s)$, $n=n(s)$ – параметричні рівняння кривої (2.169). Рівняння полярного торса в розгортці запишуться:

$$\begin{aligned} X_p &= u \cos(\alpha_0 + \alpha); \\ Y_p &= u \sin(\alpha_0 + \alpha), \end{aligned} \quad (2.175)$$

де u – довжина прямолінійної твірної. При $\alpha_0=0$ крайня твірна розгортки буде збігатися із віссю Ox .

Знайдемо похідні рівнянь кривої (2.169), які входять до виразу довжини дуги (2.174), яка чисельно дорівнює куту α :

$$\begin{aligned} l' &= \frac{a \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-a^2} (-2 + a^2 + a^2 \cos(2as)) \cos \xi + a(a^2 - 1) \cos(as) \sin \xi \right]}{(1 - a^2 \cos^2(as))^{\frac{3}{2}}}; \\ m &= - \frac{a \left[-\sqrt{1-a^2} (-2 + a^2 + a^2 \cos(2as)) \sin \xi + 2a(a^2 - 1) \cos(as) \cos \xi \right]}{(1 - a^2 \cos^2(as))^{\frac{3}{2}}}, \\ n' &= \frac{a^3 \cos(as) \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 \cos^2(as) - 1} \right)^{\frac{3}{2}} \sin(as)}{a^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\text{де } \xi = \left[\frac{\sqrt{1-a^2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{as}{2} \right) \right)}{a} \right].$$

Після підстановки (2.176) в (2.174) отримаємо:

$$\alpha = \int \frac{a \sqrt{1-a^2}}{a^2 \cos^2(as) - 1} ds = -\operatorname{Arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}(as)}{\sqrt{1-a^2}} \right], \quad (2.177)$$

Підстановка (2.177) в (2.175) при $\alpha_0=0$ дає параметричні рівняння розгортки полярного торса:

$$\begin{aligned}
 X_p &= u \cos \left[-\operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] = u \frac{\sqrt{1-a^2} \cos as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}}; \\
 Y_p &= u \sin \left[-\operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} as}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] = -u \frac{\sin as}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 as}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.178}$$

Перша квадратична форма розгортки (2.178) повністю збігається із аналогічною формою (2.172) полярного торса (2.171).

Розглянемо ще один приклад конструювання полярного торса для сферичної кривої укусу.

Рівняння сферичної кривої, розташованої на поверхні кулі одиничного радіуса, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x &= \sin \varepsilon \cos \gamma; \\
 y &= \sin \varepsilon \sin \gamma; \\
 z &= \cos \varepsilon,
 \end{aligned}
 \tag{2.179}$$

де $\varepsilon = \varepsilon(s)$; $\gamma = \gamma(s)$ – залежності у функції довжини дуги s кривої.

Диференціальне рівняння кривої укусу із кутом підйому β наведено в (1.2). Приєднавши до нього ще одну відому залежність, яка характеризує криву у функції натурального параметра, отримаємо система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1; \\ \frac{z'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \operatorname{tg} \beta. \end{cases}
 \tag{2.180}$$

Продиференціюємо (2.179) по параметру s і отримаємо:

$$\begin{aligned}
 x' &= \varepsilon' \cos \varepsilon \cos \gamma - \gamma' \sin \varepsilon \sin \gamma; \\
 y' &= \varepsilon' \cos \varepsilon \sin \gamma + \gamma' \sin \varepsilon \cos \gamma; \\
 z' &= -\varepsilon' \sin \varepsilon,
 \end{aligned}
 \tag{2.181}$$

Після підстановки (2.181) в (2.180) та спрощень матимемо систему диференціальних рівнянь сферичної кривої укусу із кутом підйому β у внутрішніх координатах сфери одиничного радіуса:

$$\begin{cases} \varepsilon'^2 + \gamma'^2 \sin^2 \varepsilon = 1; \\ \frac{\varepsilon' \sin \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 \cos^2 \varepsilon + \gamma'^2 \sin^2 \varepsilon}} = -\operatorname{tg} \beta. \end{cases} \quad (2.182)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.182) для кута підйому $\beta=45^\circ$ запишеться:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} s; \\ \gamma &= \sqrt{2} \arcsin s - \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{2(1-s^2)}}. \end{aligned} \quad (2.183)$$

В результаті підстановки (2.183) в (2.179) та спрощень, отримаємо рівняння сферичної кривої укусу з кутом підйому $\beta=45^\circ$:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2-s^2}{2}} \cos \left[\sqrt{2} \arcsin s - \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{2(1-s^2)}} \right]; \\ y &= \sqrt{\frac{2-s^2}{2}} \sin \left[\sqrt{2} \arcsin s - \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{2(1-s^2)}} \right]; \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2} s. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Для побудови полярного торса потрібно мати напрямний вектор прямолінійної твірної. Для цього спочатку знаходимо вирази A , B , C та їх похідні, які входять до рівнянь (2.11). Складаючи рівняння площини (2.121) ми отримуємо ці коефіцієнти, як, наприклад, у (2.168). Далі за рівняннями (2.11) знаходимо проєкції l , m , n напрямного вектора твірної торса, підстановка яких у (2.170) дає параметричні рівняння полярного торса кривої (2.184) (наводимо готовий результат):

$$\begin{aligned} X &= -u \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left[\sqrt{2} \arcsin s \right]; \\ Y &= -u \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left[\sqrt{2} \arcsin s \right]; \\ Z &= \frac{\sqrt{2}}{2} u. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Сферична крива укусу і відповідний полярний торс, побудовані за рівняннями (2.184) і (2.185), показані на рис. 2.36.

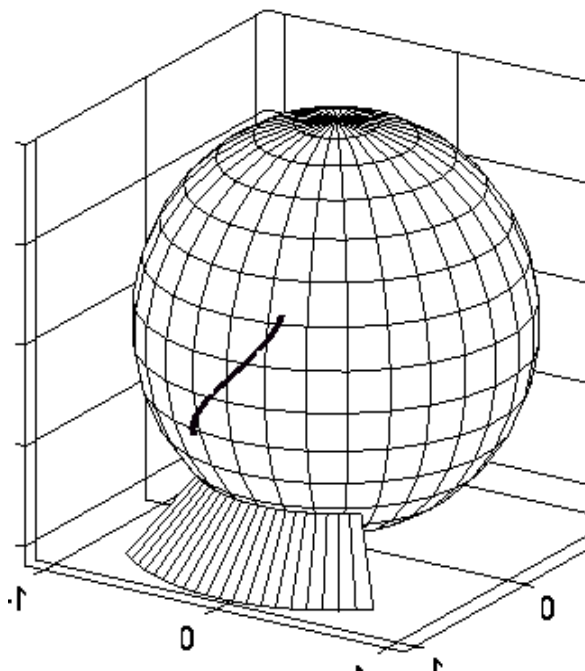


Рис. 2.36. Сферична крива укусу (2.184) і її полярний торс (2.185)

2.4. Конструювання торсів за заданими іншими вихідними умовами

Значимо дуже суттєвий аспект при конструюванні торса, який дозволяє задавати такий закон $\varepsilon = \varepsilon(s)$, при якому в розгортці торса вихідна просторова крива перетворюється у потрібну нам плоску криву. Наприклад, поставимо умову, щоб вихідна просторова крива (2.84) перетворилася в коло одиничного радіуса. Отже, геодезична кривина кривої на поверхні торса має бути рівною одиниці. Зважаючи на те, що кривина просторової кривої (2.84) наведена в (2.85), запишемо:

$$k_2 = k \cos \varepsilon = \sqrt{1 + \sin^2 s} \cos \varepsilon = 1. \quad (2.186)$$

Із (2.186) знаходимо вираз $\varepsilon = \varepsilon(s)$:

$$\varepsilon = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}. \quad (2.187)$$

Диференціюємо (2.187):

$$\varepsilon' = \frac{\cos s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}. \quad (2.188)$$

Підстановка виразів (2.187) і (2.188) у формули з їх присутністю дуже спрощує ці вирази. Зокрема:

$$\begin{aligned} \sigma + \varepsilon' &= -\cos s; \\ k \cos \varepsilon &= 1; \\ \sin \varepsilon &= \sin s; \\ \sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2} &= 1. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Беручи до уваги (2.189), (2.82) і (2.88) рівняння торса (2.89) для вихідної кривої (2.84) і заданим законом (2.187) обертання площини навколо орта дотичної запишуться:

$$\begin{aligned} X &= 0,5 \cos^2 s; \\ Y &= 0,5(s - \sin s \cos s); \\ Z &= \sin s - u. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Рівняння розгортки (2.96) для заданого закону (2.187) обертання площини приймають вигляд:

$$\begin{aligned} X_p &= \sin s - u; \\ Y_p &= -\cos s. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Перша квадратична форма поверхні (2.190) і розгортки (2.191) однакова:

$$dS^2 = ds^2 - 2 \cos s dsdu + du^2. \quad (2.192)$$

Це свідчить про те, що рівняння (2.191) справді є параметричними рівняннями поверхні розгортки торса (2.190). У квадратичній формі (2.192) присутній середній коефіцієнт. Це означає, що поверхня і розгортка віднесені до косокутної сітки координатних ліній.

На рис. 2.37 побудовано відсік торса за рівняннями (2.190), та його розгортку за рівняннями (2.191). Знайденим торсом є циліндр. Можна показати, що його ортогональним перерізом є циклоїда.

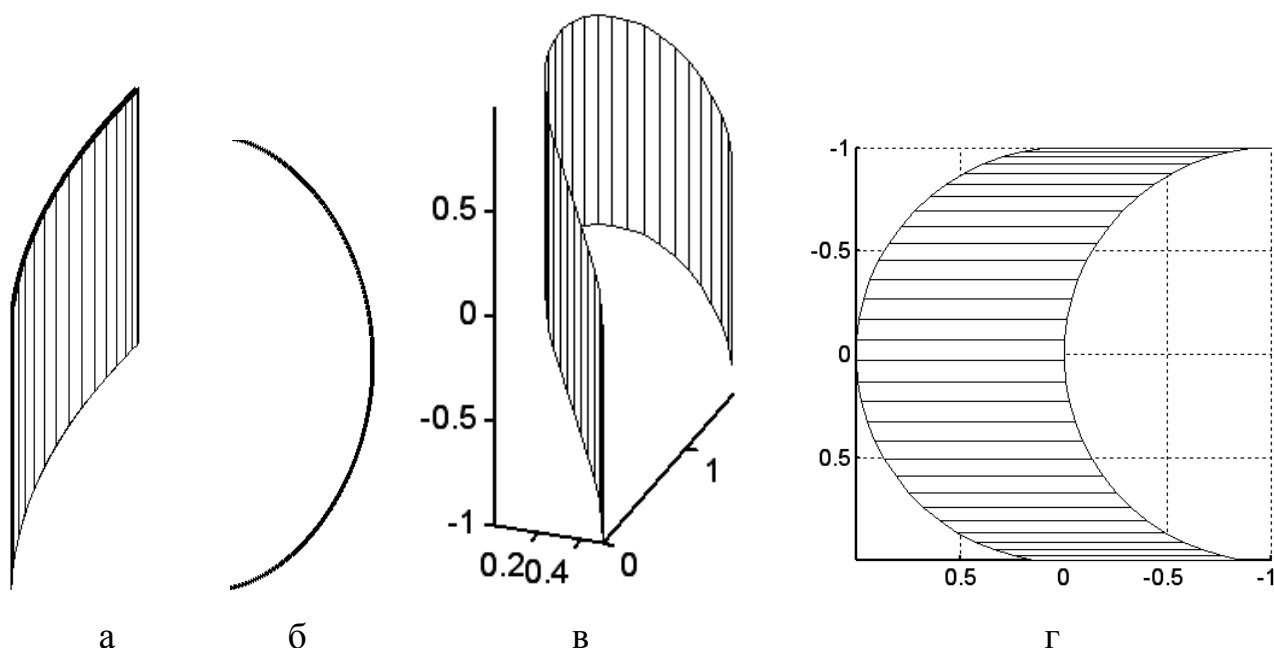


Рис. 2.37. Відсік циліндричної поверхні (2.190) та його розгортка:
 а) фронтальна проекція відсіку;
 б) горизонтальна проекція відсіку;
 в) аксонометричне зображення;
 г) розгортка відсіку

Слід зазначити, що умова переходу кривої торса в задану криву на розгортці не може бути довільною. Із виразу $k_z = k \cos \varepsilon$ можна зробити висновок, що геодезична кривина, тобто кривина кривої на розгортці торса має бути меншою від кривини цієї ж кривої на поверхні торса. Їх кривини можуть бути рівними в тому випадку, коли $\varepsilon=0$, тобто коли торс утворений множиною стичних площин вихідної просторової кривої. Але в цьому випадку вихідна крива є для торса ребром звороту, отже він утворений множиною дотичних до вихідної кривої (ребра звороту) і те ж саме відбуватиметься і на розгортці.

Розглянемо ще один приклад. Поставимо умову, щоб наша вихідна крива (2.84) перетворилася в циклоїду на розгортці. Кривина циклоїди визначається із виразу її натурального рівняння:

$$k_u = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}. \quad (2.194)$$

Нехай стала величина в (2.194) буде рівною одиниці: $16a^2 = 1$, тобто $a=1/4$. Побудуємо графіки кривини в спільній системі координат для вихідної кривої за виразом (2.85) і для циклоїди за виразом (2.194). При початковому значенні параметра $s=0$ кривина в цих кривих рівна і дорівнює одиниці (рис. 2.38,а). При зростанні змінної s в межах допустимих значень для циклоїди її кривина є більшою від кривини вихідної просторової кривої. Отже перетворення її в задану циклоїду на розгортці неможливе.

Однак якщо взяти циклоїду із іншою сталою величиною $16a^2 = 10$, то потрібна умова для перетворення здійснюється в межах зміни s від нуля до трьох (рис. 2.38,б).

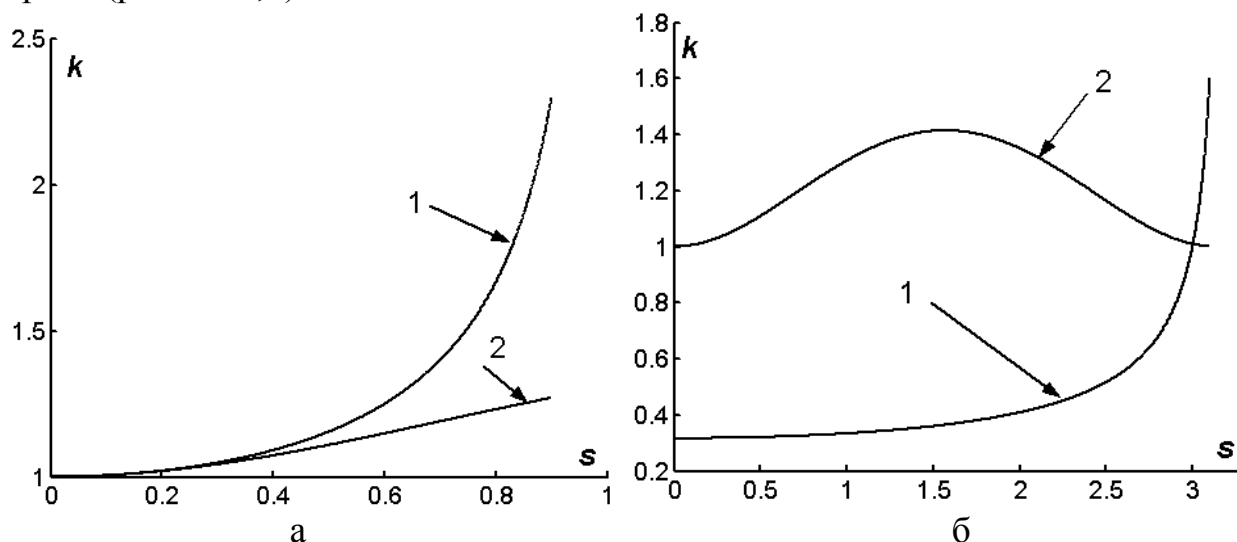


Рис. 2.38. Графіки кривини (1- циклоїди на розгортці; 2 – вихідної просторової кривої на торсі):

- а) перетворення кривої торса в циклоїду на розгортці неможливе;
 б) перетворення кривої торса в циклоїду на розгортці можливе в певних межах

Щоб побудувати відповідний торс, знаходимо закономірність зміни кута $\varepsilon = \varepsilon(s)$. Для цього прирівнюємо вирази:

$$k_{\varepsilon} = k \cos \varepsilon = \sqrt{1 + \sin^2 s} \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10 - s^2}}. \quad (2.195)$$

Із (2.195) знаходимо залежність $\varepsilon = \varepsilon(s)$:

$$\varepsilon = \arccos \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin^2 s)(10 - s^2)}}. \quad (2.196)$$

Знаходимо похідну кута ε (2.196):

$$\varepsilon' = \frac{5 \sin 2s - s(1 + \sin^2 s)(s \cos s + \sin s)}{(10 - s^2)(1 + \sin^2 s) \sqrt{(1 + \sin^2 s)(9 - s^2) + \sin^2 s}}. \quad (2.197)$$

Побудова торса здійснюється за рівняннями (2.89). Дев'ять напрямних косинусів відомі із (2.88), а напрямний вектор твірної знаходимо за формулами (2.82) із врахуванням (2.196) і (2.187). Торс у двох проекціях і на аксонометрії побудовано на рис. 2.39 при зміні s у можливих межах, тобто згідно графіка

рис. 2.39,б, $s=-3\dots3$ (на графіку показана симетрична частина). Горизонтальною проекцією вихідної просторової кривої на торсі є дві вітки циклоїди. На кінцях них, як видно із рис. 2.29, прямолінійні твірні торса дотичні до вихідної кривої, оскільки в цих точках кривини рівні (точки перетину графіків на рис. 2.28,б).

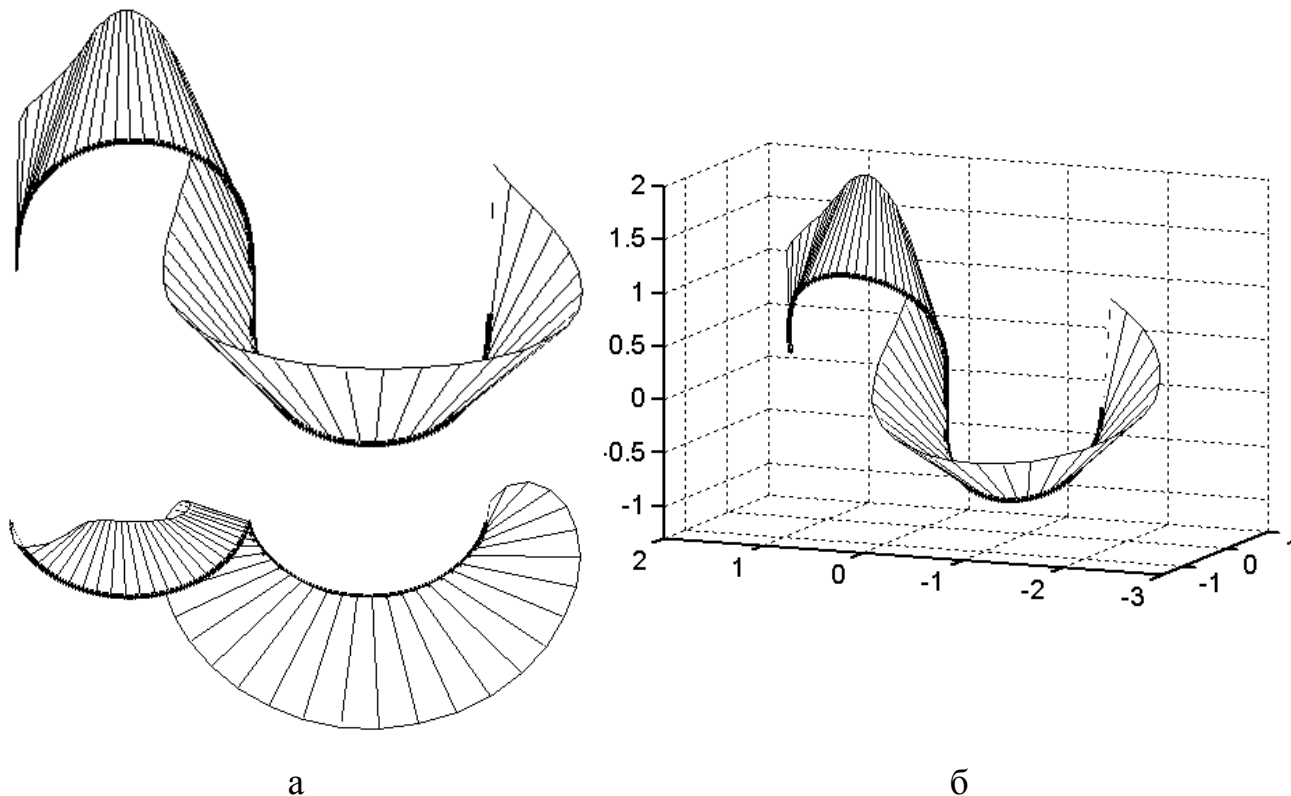


Рис. 2.39. Проекції і аксонометрія торса для вихідної просторової кривої (2.84) при заданій закономірності зміни кута ε (3.196):

- а) фронтальна горизонтальна проекції;
б) аксонометрія

Розгортку торса побудуємо за формулами (2.96). Всі інтеграли, що входять до (2.96), можна виразити в елементарних функціях, оскільки нами була поставлена відповідна умова. Після інтегрування одержимо:

$$\begin{aligned}
 X_p &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \left(s\sqrt{10-s^2} + 10 \operatorname{Arc} \sin \frac{s}{10} \right) + \\
 &\quad + u \frac{\sqrt{10-s^2}(\sigma + \varepsilon') - sk \sin \varepsilon}{\sqrt{10[k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2]}}; \\
 Y_p &= \frac{s^2}{2\sqrt{10}} + u \frac{s(\sigma + \varepsilon') + k\sqrt{10-s^2} \sin \varepsilon}{\sqrt{10[k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2]}}.
 \end{aligned} \tag{2.198}$$

У рівняннях (2.198) вирази для k , σ , ε та ε' наведені відповідно у (2.85), (2.196) і (2.197). Відсік торса у розгортці за рівняннями (2.198) побудовано на рис. 2.40 при тих же межах змінних s і u , що і відсік торса на рис. 2.39.

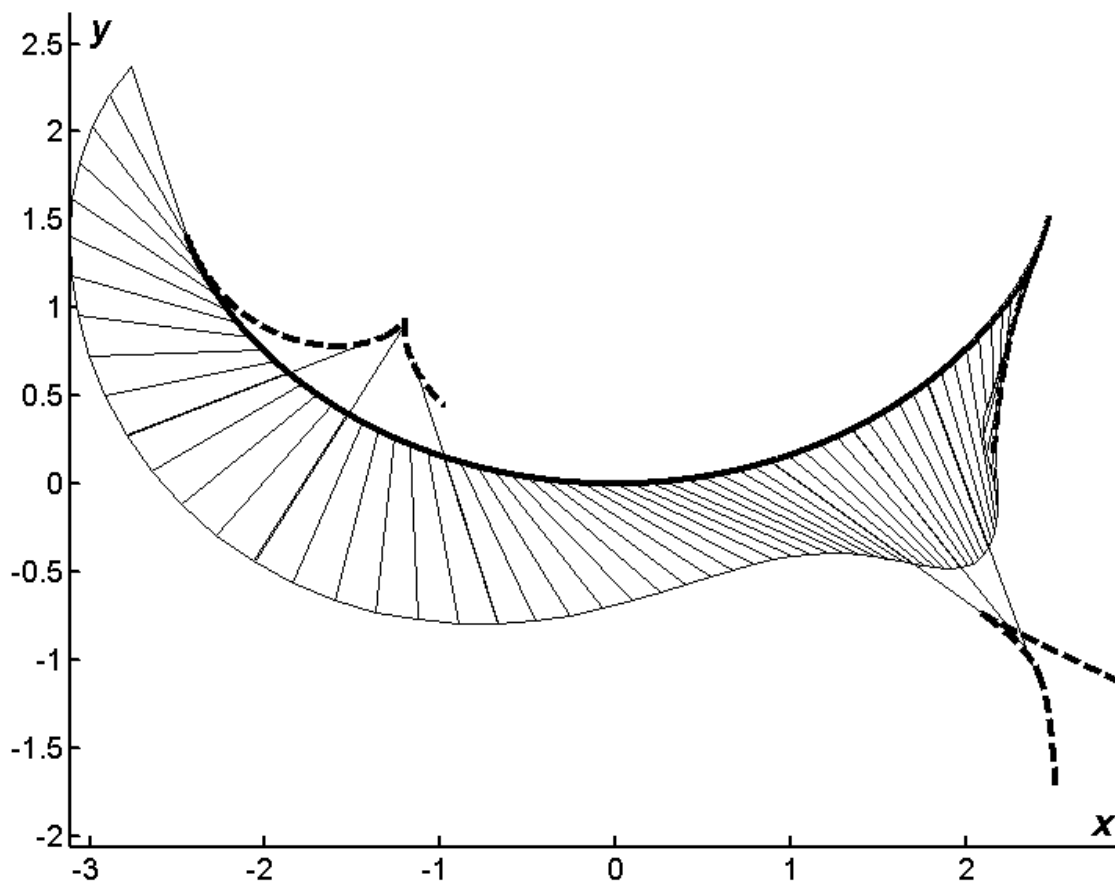


Рис. 2.40. Розгортка торса, зображеного на рис. 2.39, із фрагментами ребра звороту

Ребро звороту торса можна знаходити різними способами. В даному випадку ми визначали в триграннику Френе відстань від його вершини, тобто від поточної точки кривої, до точки на ребрі звороту а потім через напрямні косинуси знаходили координати цієї точки в нерухомій системі координат. Для знаходження ребра звороту на розгортці ми скористалися тим фактом, що ця відстань не змінюється. Вона визначається за координатами точки ребра звороту в триграннику (2.80), як відстань від його вершини до поточної точки ребра звороту:

$$\rho = \sqrt{\rho_r^2 + \rho_n^2 + \rho_b^2} . \quad (2.199)$$

Напрямний вектор твірної на розгортці нами знайдений у (2.95). Отже нам потрібно від поточної точки кривої в розгортці у напрямі, визначеному напрямним вектором, відкласти відстань $\rho = \rho(s)$ (2.199). Таким чином, параметричні рівняння ребра звороту у розгортці запишуться:

$$\begin{aligned}x_{peб} &= \int \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + l_{poz} \sqrt{\rho_{\tau}^2 + \rho_n^2 + \rho_b^2}; \\y_{peб} &= \int \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + m_{poz} \sqrt{\rho_{\tau}^2 + \rho_n^2 + \rho_b^2},\end{aligned}\tag{2.200}$$

де вирази для l_{poz} , m_{poz} наведені в (2.95).

Для визначення відстані $\rho = \rho(s)$ ми використали формулу (2.199), до якої входять проекції, визначені формулами (2.80). Для цього потрібно мати перші похідні кривини і скруту вихідної кривої:

$$\begin{aligned}\frac{dk}{ds} &= \frac{\sin s \cos s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\ \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{86 \sin s - 9 \sin 3s + \sin 5s}{4(\cos 2s - 3)^2}.\end{aligned}\tag{2.201}$$

Крім того, потрібно мати першу і другу похідну кута ε У даному випадку вирази для кута ε і його похідної наведено в (2.196) і (2.197) відповідно. Другу похідну взяти дуже непросто і «вручну», мабуть, нереально. Наводимо готовий результат, отриманий в середовищі програмного продукту «*Mathematica*»:

$$\begin{aligned}\varepsilon'' &= (42 s^6 - 992 s^4 + 11096 s^2 + \\ &+ 3(-27 s^6 + 720 s^4 - 7426 s^2 + 28940) \cos 2s + \\ &+ 2(3 s^6 - 72 s^4 + 812 s^2 - 3880) \cos 4s + \\ &(s^2 - 10) \left(\frac{8s(s^2 - 10) \sin 2s (\cos 2s - 3)^2 +}{(s^4 - 22 s^2 + 90) \cos 6s} - 52240 \right) / \\ &/ \left(32 (s^2 - 10)^2 (\sin^2 s + 1)^2 (-s^2 - (s^2 - 10) \sin^2 s + 9) \right)^{3/2}.\end{aligned}\tag{2.202}$$

Із врахуванням всього наведеного було складено програму для побудови ребра звороту на розгортці торса. На рис. 2.40 наведено окремі його фрагменти, оскільки воно має розрив. Той факт, що в кінцях кривої ребро звороту має із нею спільну точку (там кривини вихідної кривої і кривої на розгортці рівні) свідчить про те, що воно знайдене правильно. Крім того, це підтверджують і окремі твірні, проведені до дотику із ребром звороту. При побудові ребра звороту описаним способом виникає особливість, яку потрібно враховувати. Мова іде про те, в яку сторону від кривої відкладати відрізок ρ , отриманий із (2.199). Він згідно формули завжди буде позитивним. Однак із рис. 2.40 видно, що фрагменти ребра звороту знаходяться по різні сторони від кривої. В цьому випадку знак відрізка визначали візуально після побудови відповідного фрагмента ребра звороту, інакше результат був би неприйнятним.

Нами було розглянуто конструювання торсів поворотом площини на кут $\varepsilon=\varepsilon(s)$ навколо орта дотичної просторової кривої. Очевидно, що даний спосіб може бути застосований і в частковому випадку – для плоскої кривої. Як відомо для плоскої кривої скрут дорівнює нулю. Підставивши $\sigma=0$ в (2.82) одержимо координати напрямного вектора твірної торса, напрямна крива якого плоска:

$$\begin{aligned}\rho_{\tau} &= \frac{\varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}; \\ \rho_n &= \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}; \\ \rho_b &= \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}.\end{aligned}\tag{2.203}$$

Знайдемо проекції двох напрямних косинусів (l і m) на нерухому систему координат. Проекція n на вісь OZ буде така ж як і на бінормаль тригранника, оскільки вони паралельні. Перехід здійснюється за відомими формулами [127]:

$$\begin{aligned}x_{\text{нер}} &= l_{\text{нер}} = \rho_{\tau} \cos \left(\int k ds \right) - \rho_n \sin \left(\int k ds \right); \\ y_{\text{нер}} &= m_{\text{нер}} = \rho_{\tau} \sin \left(\int k ds \right) + \rho_n \cos \left(\int k ds \right).\end{aligned}\tag{2.204}$$

Підстановкою (2.203) в (2.204) отримаємо координати напрямного вектора твірної торса в нерухомій системі координат:

$$\begin{aligned}l_{\text{нер}} &= \frac{\varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}} \cos \left(\int k ds \right) - \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}} \sin \left(\int k ds \right); \\ m_{\text{нер}} &= \frac{\varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}} \sin \left(\int k ds \right) + \frac{k \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}} \cos \left(\int k ds \right); \\ n_{\text{нер}} &= \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}.\end{aligned}\tag{2.205}$$

Якщо крива задана натуральним рівнянням $k=k(s)$, то параметричні рівняння торса запишуться:

$$\begin{aligned}X &= \int \cos \left(\int k ds \right) + ul_{\text{нер}}; \\ Y &= \int \sin \left(\int k ds \right) + um_{\text{нер}}; \\ Z &= un_{\text{нер}}.\end{aligned}\tag{2.206}$$

Таким чином, ми можемо записати узагальнені параметричні рівняння торса, утвореного рухом площини вздовж плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$ з одночасним її поворотом навколо дотичної із заданою закономірністю зміни кута $\varepsilon=\varepsilon(s)$:

$$\begin{aligned} X &= \int \cos \left(\int k ds \right) + u \frac{\varepsilon' \cos \left(\int k ds \right) - k \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \left(\int k ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}; \\ Y &= \int \sin \left(\int k ds \right) + u \frac{\varepsilon' \sin \left(\int k ds \right) + k \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos \left(\int k ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}; \\ Z &= u \frac{k \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Узагальнені параметричні рівняння розгортки торса отримаємо із (2.96) при $\sigma=0$:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + u \frac{\varepsilon' \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) - k \sin \varepsilon \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}; \\ Y_p &= \int \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) ds + u \frac{\varepsilon' \sin \left(\int k \cos \varepsilon ds \right) + k \sin \varepsilon \cos \left(\int k \cos \varepsilon ds \right)}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon'^2}}. \end{aligned} \quad (2.208)$$

Знайти узагальнені перші квадратичні форми торса (2.207) і його розгортки (2.208) важко із-за громіздких виразів, які ми отримуємо при диференціюванні цих рівнянь і подальшому перетворенні одержаних виразів. Однак ми це покажемо на частковому прикладі.

Розглянемо побудову торсів і їх розгорток за рівняннями (2.207), (2.208), взявши за напрямну лінію коло. У цьому випадку $k=const$ і рівняння (2.207), (2.208) спрощуються. Розглянемо окремі випадки.

Випадок перший. Кут $\varepsilon=const$, тобто площина не повертається (вона нахилена під цим кутом до горизонтальної площини).

Рівняння торса (2.207) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{k} \sin ks - u \cos \varepsilon \sin ks; \\ Y &= -\frac{1}{k} \cos ks + u \cos \varepsilon \cos ks; \\ Z &= u \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.209)$$

Торс (2.209) представляє собою конус із кутом нахилу ε до основи. Знайдемо його першу квадратичну форму.

Частинні похідні конуса (2.209) будуть:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} &= \cos ks - uk \cos \varepsilon \cos ks; \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \sin ks - uk \cos \varepsilon \sin ks; \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= 0; \quad \frac{\partial X}{\partial u} = -\cos \varepsilon \sin ks \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \varepsilon \cos ks; \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{2.210}$$

За похідними (2.210) знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned}G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2 = (uk \cos \varepsilon - 1)^2; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial s} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial s} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u} = 0; \\ E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = 1.\end{aligned}\tag{2.211}$$

Параметричні рівняння розгортки конуса (2.209) запишуться:

$$\begin{aligned}X_p &= \frac{\sin (ks \cos \varepsilon)}{k \cos \varepsilon} - u \sin (ks \cos \varepsilon); \\ Y_p &= -\frac{\cos (ks \cos \varepsilon)}{k \cos \varepsilon} + u \cos (ks \cos \varepsilon).\end{aligned}\tag{2.212}$$

Знаходимо частинні похідні рівнянь (2.12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_p}{\partial s} &= \cos (ks \cos \varepsilon) - uk \cos \varepsilon \cos (ks \cos \varepsilon); \\ \frac{\partial Y_p}{\partial s} &= \sin (ks \cos \varepsilon) - uk \cos \varepsilon \sin (ks \cos \varepsilon); \\ \frac{\partial X_p}{\partial u} &= -\sin (ks \cos \varepsilon); \\ \frac{\partial Y_p}{\partial u} &= \cos (ks \cos \varepsilon).\end{aligned}\tag{2.213}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми розгортки (2.212), знайдені за частинними похідними (2.213), повністю збігаються із (2.211). Таким чином,

перша квадратична форма, яка є спільною для (2.211) і (2.212), набуває вигляду:

$$dS^2 = du^2 + (uk \cos \varepsilon - 1)^2 ds^2. \quad (2.214)$$

Слід зазначити, що узагальнені параметричні рівняння тора (2.207) при $\varepsilon = \text{const}$ завжди дають торс однакового нахилу твірних, для якого плоска крива $k = k(s)$ є перерізом його горизонтальною площиною і лінією кривини.

Випадок другий. Кут $\varepsilon = as$, де a – стала. Кут ε збільшується за лінійним законом, тобто площина рухається із сталою швидкістю вздовж кола і одночасно обертається із сталою кутовою швидкістю навколо дотичної. Підставляємо в (2.207) і (2.208) $k = \text{const}$, $\varepsilon = as$, $\varepsilon' = a$ і отримуємо відповідні параметричні рівняння тора і розгортки. На рис. 2.41 побудовано відповідні зображення.

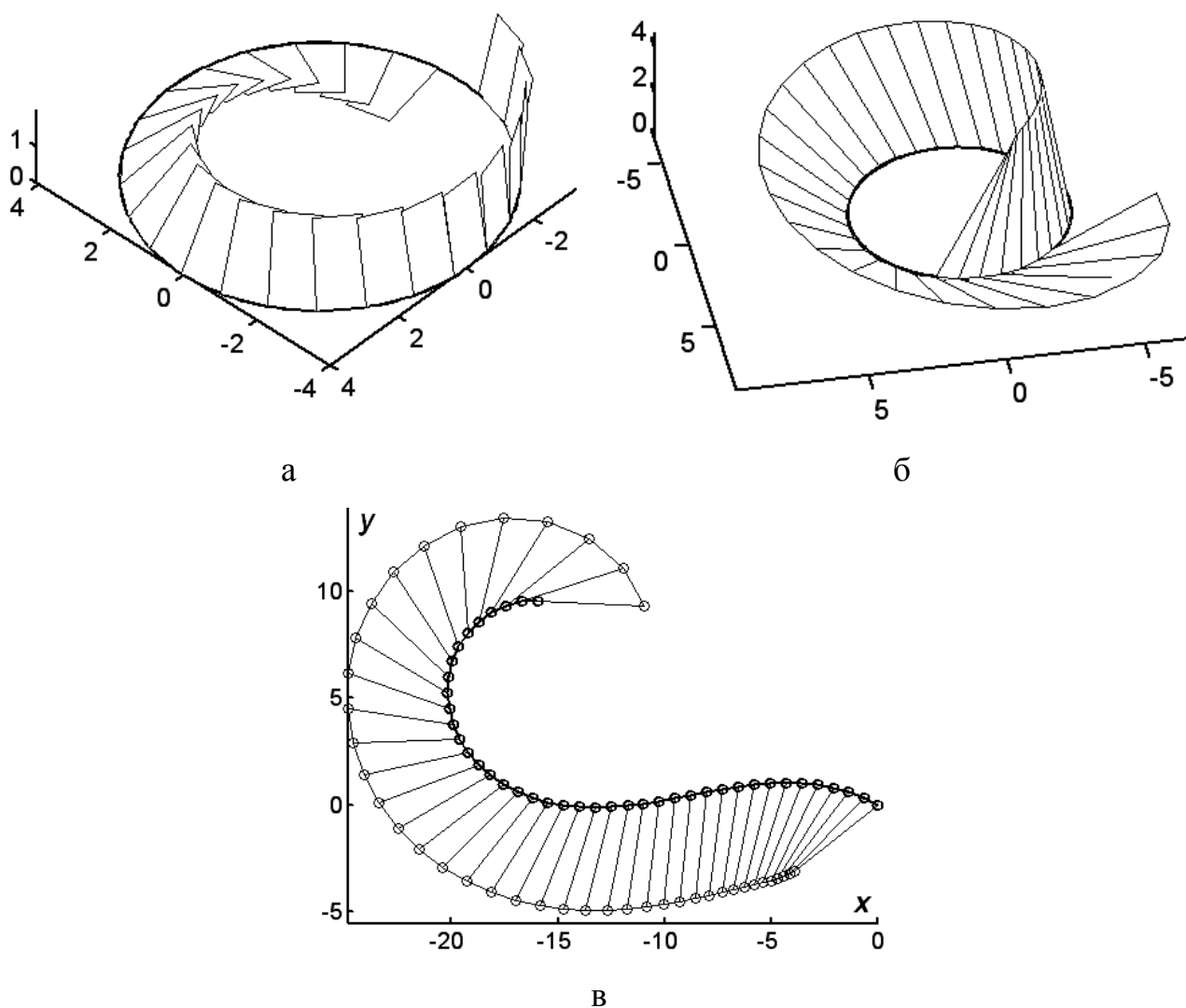


Рис. 2.41. Побудова зображень при $k = \text{const}$ і лінійній залежності $\varepsilon = as$:
 а) однопараметрична множина площин;
 б) торс, для якого напрямне коло є горизонтальним перерізом;
 в) розгортка (напрямна крива показана потовщеною)

Як ми бачимо, через плоску криву (в нашому випадку, через коло) можна провести безліч торсів в залежності від заданої закономірності зміни кута $\varepsilon=\varepsilon(s)$. При цьому їх прямолінійні твірні перетинають напрямну криву по-різному (наприклад, під прямим кутом у першому випадку і різними кутами у другому). Цей кут відомий із проекцій напрямного вектора (2.82) прямолінійної твірної торса. Оскільки він одиничний, то проекції вектора називають ще напрямними косинусами. Перша проекція у (2.82) чисельно рівна косинусу кута γ між прямолінійною твірною і ортом дотичної до напрямної кривої, тобто:

$$\cos \gamma = \frac{\sigma + \varepsilon'}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varepsilon + (\sigma + \varepsilon')^2}}. \quad (2.215)$$

Якщо перейти від косинуса до тангенса, то ми отримаємо більш компактний запис:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k \sin \varepsilon}{\sigma + \varepsilon'}. \quad (2.216)$$

Ми отримали залежність (2.216), аналогічну наведеній в (1.15). Вона дає можливість конструювати торс за заданою закономірністю $\gamma=\gamma(s)$ зміни кута прямолінійною твірною торса і напрямною кривою. Наприклад, якщо ми хочемо, щоб цей кут був прямим, тобто щоб торс був віднесений до ортогональної сітки координатних ліній, необхідно виконати умову $\sigma+\varepsilon'=0$, про що вже йшлося. Для плоскої напрямної кривої згідно цієї умови кут ε має бути сталим. Цей приклад розглянуто у першому випадку.

Випадок третій. Поставимо умову, щоб прямолінійні твірні перетинали напрямне коло під сталим кутом $\gamma=45^\circ$. Зважаючи на те, що $\sigma=0$ і $\operatorname{tg}45^\circ=1$, ми отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = k \sin \varepsilon. \quad (2.217)$$

Диференціальне рівняння (2.217) має розв'язок:

$$\varepsilon = 2 \operatorname{Arctg} e^{ks}. \quad (2.218)$$

Знайдемо похідну залежності (2.218), яка потрібна для (2.205):

$$\varepsilon' = \frac{k}{\cosh(ks)} \quad (2.219)$$

Підставимо $k=\text{const}$, вирази (2.218) і (2.219) в (2.207) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{k} \sin ks + \frac{u}{\sqrt{2}} (\cos ks + \tanh ks \sin ks); \\
 Y &= -\frac{1}{k} \cos ks + \frac{u}{\sqrt{2}} (\sin ks - \tanh ks \cos ks); \\
 Z &= \frac{u}{\sqrt{2} \cosh ks}.
 \end{aligned}
 \tag{2.220}$$

Параметричні рівняння розгортки одержимо після підстановки цих же виразів у (2.208).

На рис. 2.42 за отриманими рівняннями побудовано торс і його розгортку.

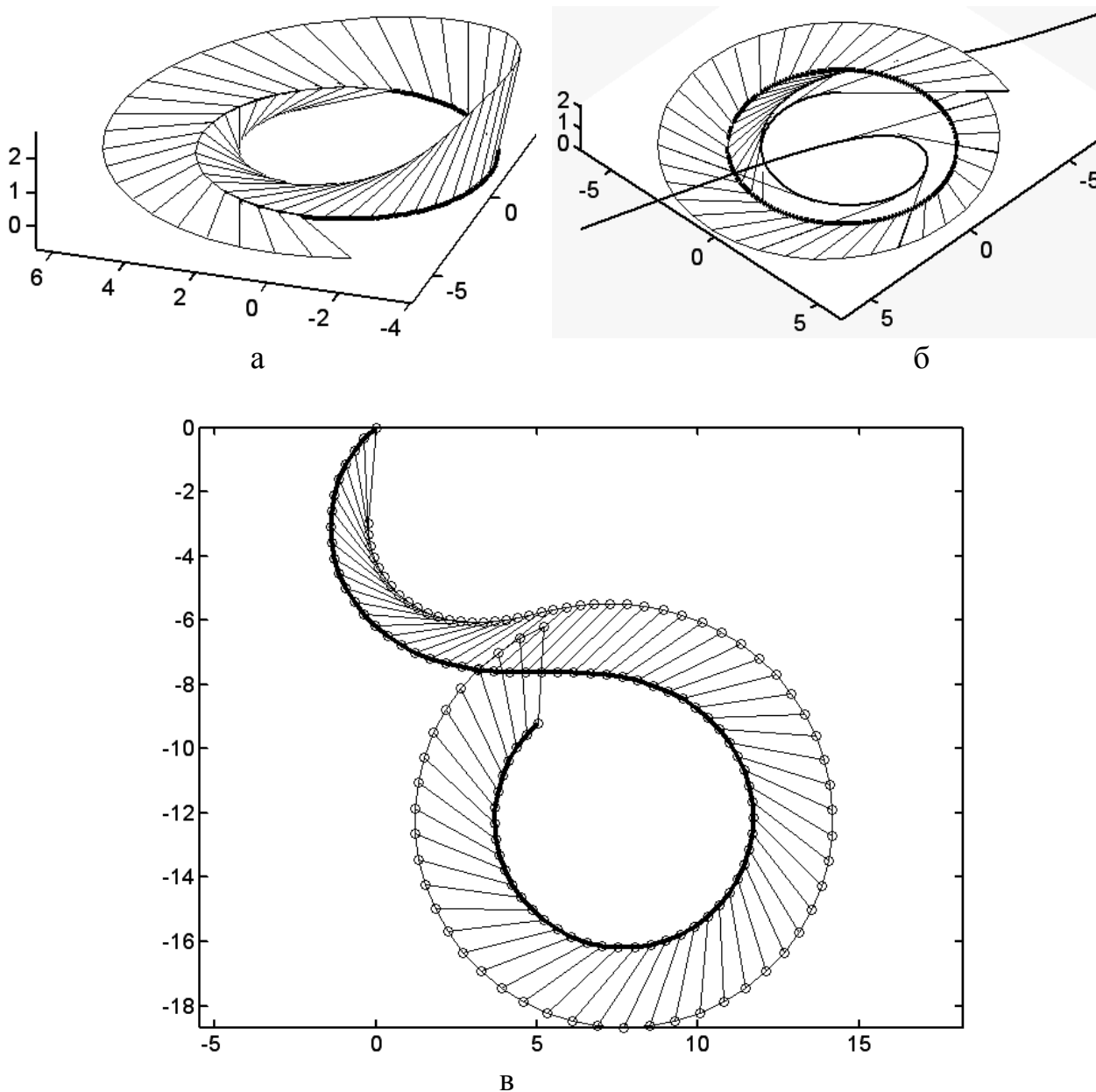


Рис. 2.42. Торс, у якого всі твірні перетинають напрямне коло під кутом 45° :

а), б) зображення торса;

в) розгортка

Із розгортки видно (рис. 2.42,в), що прямолінійні твірні перетинають напрямну криву (зображена потовщеною лінією) під сталим кутом $\gamma=45^0$.

В цьому підрозділі розглянемо також побудову розгорток циліндричних поверхонь, що проходять через задану просторову криву. Через просторову криву можна провести три проєкціювальні циліндри, прямолінійні твірні яких перетинатимуть цю криву і будуть паралельними одній із трьох координатних осей. Розглянемо побудову розгортки окремого циліндра

Нехай просторовою кривою буде крива (2.84). Через неї проведемо циліндр, прямолінійні твірні якого паралельні осі Ox .

Параметричні рівняння циліндра запишуться:

$$\begin{aligned} X &= 0,5 \cos^2 s + u; \\ Y &= 0,5(s - \sin s \cos s); \\ Z &= \sin s. \end{aligned} \quad (2.221)$$

Рівняння (2.221) мають дуже простий вигляд в нерухомій системі координат і мали б складний вигляд в триграннику Френе, оскільки напрямний вектор твірної в системі тригранника матиме не сталий напрям. Сама циліндрична поверхня показана на рис. 2.43,а, а плоска крива її ортогонального перерізу – на рис. 2.43,б.

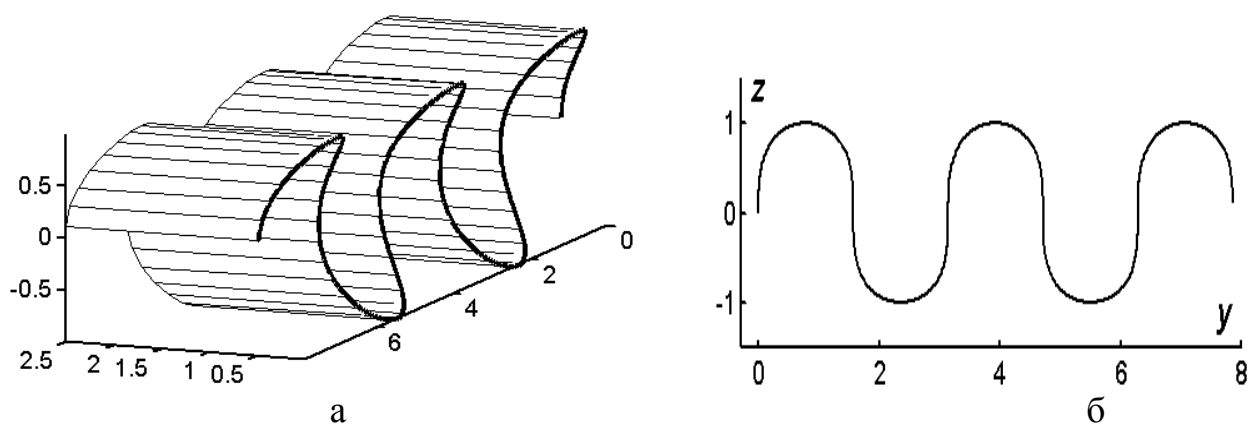


Рис. 2.43. Циліндрична поверхня, побудована за рівняннями (2.221):

а) аксонометрія;

б) плоска крива ортогонального перерізу

Розгортку поверхні (2.221) шукатимемо наступним чином: спочатку знайдемо геодезичну кривину вихідної просторової кривої, вона нам потрібна для того, щоб побудувати вихідну криву на розгортці циліндра. Геодезична кривина кривої не змінюється при згинанні поверхні, отже вона перейде на розгортці в кривину трансформованої кривої. Для цього необхідно мати три

вектори \bar{N} , $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$, але якщо в системі тригранника вони описувалися дуже компактно [45], то тут буде дещо інакше. Геодезичну кривину в даному випадку будемо шукати із визначника (1.45) без виразу перед ним, піднесеного

до куба, оскільки він в нашому випадку рівний одиниці, тому що незалежною змінною напрямної кривої є натуральний параметр – довжина дуги.

Знайдемо вектор нормалі, як векторний добуток частинних похідних рівнянь поверхні (2.221). Частинні похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= -\sin s \cos s; & \frac{\partial X}{\partial u} &= 1; \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \sin^2 s; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \cos s; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.222)$$

Із векторного добутку знаходимо:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X'_s & Y'_s & Z'_s \\ X'_u & Y'_u & Z'_u \end{vmatrix}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} N_x &= 0; \\ N_y &= \cos s; \\ N_z &= -\sin^2 s. \end{aligned} \quad (2.223)$$

Нормалізувавши вектор (2.223) до одиничного, отримаємо:

$$\begin{aligned} N_x &= 0; \\ N_y &= \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}; \\ N_z &= -\frac{\sin^2 s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Підставимо проєкції вектора (2.224), перші і другі похідні кривої (2.84) у визначник (1.45) і отримаємо:

$$\begin{aligned} k_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}; & -\frac{\sin^2 s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}} \\ -\sin s \cos s & \sin^2 s & \cos s \\ -\cos 2s & \sin 2s & -\sin s \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{\cos 2s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}. \end{aligned} \quad (2.225)$$

Інтегруванням виразу (2.225) отримаємо кут α , як проміжний результат знаходження кривої за заданим її натуральним рівнянням, яким є (2.225):

$$\alpha = \int k_2 ds = - \int \frac{\cos 2s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}} ds = - \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}}. \quad (2.226)$$

Знаходимо рівняння напрямної кривої на розгортці циліндра:

$$\begin{aligned} x_p &= \int \cos \alpha ds = \int \cos \left(- \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}} \right) ds = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{7 + \cos 4s} ds ; \\ y_p &= \int \sin \alpha ds = \int \sin \left(- \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}} \right) ds = \\ &= - \int \sin s \cos s ds = \frac{\cos^2 s}{2}. \end{aligned} \quad (2.227)$$

Рівняння циліндричної поверхні (2.221) на розгортці запишуться:

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{7 + \cos 4s} ds ; \\ Y_p &= \frac{\cos^2 s}{2} + u. \end{aligned} \quad (2.228)$$

Частинні похідні рівнянь (2.228) будуть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_p}{\partial s} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{7 + \cos 4s} ; & \frac{\partial X_p}{\partial u} &= 0 ; \\ \frac{\partial Y_p}{\partial s} &= - \sin s \cos s ; & \frac{\partial Y_p}{\partial u} &= 1. \end{aligned} \quad (2.229)$$

Виходячи із частинних похідних (2.222) циліндра і частинних похідних (2.229) його розгортки знаходимо перші квадратичні форми і бачимо, що вони однакові:

$$dS^2 = ds^2 - \sin 2s ds du + du^2. \quad (2.230)$$

Отже, рівняння розгортки знайдені правильно. Розгортка відсіку циліндра (2.221) (рис. 2.43,а) за рівняннями (2.228) побудована на рис. 2.44.

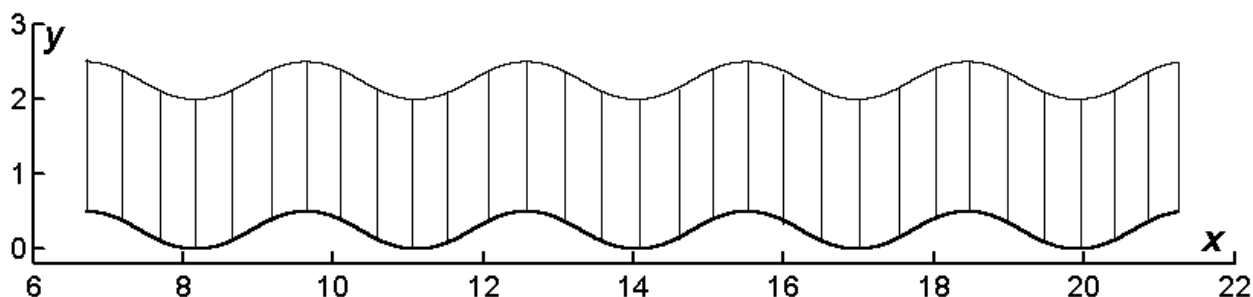


Рис. 2.44. Розгортка відсіку циліндра (2.221)

Якщо вирізати із листового гнучкого матеріалу відсік, показаний на рис. 2.44, провести на ньому пряму лінію паралельно осі Ox , а потім зігнути заготовку вздовж прямолінійних твірних так, щоб пряма перетворилася в криву ортогонального перерізу циліндра (рис. 2.43,б), то крива, що показана на розгортці потовщеною лінією, прийме відповідну просторову форму вихідної просторової кривої на циліндрі (рис. 2.43,а).

За такою схемою можна будувати розгортки циліндричних поверхонь, у яких вихідна просторова крива задана у функції довільної змінної t . При цьому є певні особливості. Розглянемо побудову розгортки циліндричної поверхні в загальному вигляді.

Нехай вихідна просторова крива, через яку проходить циліндрична поверхня, задана параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= x(t); \\y &= y(t); \\z &= z(t),\end{aligned}\tag{2.231}$$

Рівняння циліндричної поверхні, що проходить через криву (2.231) із твірними, паралельними осі Ox , запишуться:

$$\begin{aligned}X &= x + u; \\Y &= y; \\Z &= z.\end{aligned}\tag{2.232}$$

Частинні похідні поверхні (2.232) будуть наступними:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial t} &= x'; & \frac{\partial X}{\partial u} &= 1; \\
\frac{\partial Y}{\partial t} &= y'; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; \\
\frac{\partial Z}{\partial t} &= z'; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.233}$$

Одиничний вектор нормалі до поверхні (2.232) за аналогією (2.223), (2.224) має вигляд:

$$\bar{N} \left\{ 0; \quad \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}; \quad -\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \right\}. \tag{2.234}$$

Від одиничного вектора $\frac{d\bar{r}}{ds}$ потрібно перейти до вектора у функції змінної t :

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{s'} = \frac{1}{s'} \{x'; \quad y'; \quad z'\}. \tag{2.235}$$

Геодезичну кривину кривої на циліндрі знайдемо як мішаний добуток трьох векторів (2.234), (2.235) і (3.131):

У третьому векторі $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$, що входить до визначника (1.45), теж переходимо до змінної t :

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{s'} \right) \frac{1}{s'} = \frac{1}{s'^2} \{x''; \quad y''; \quad z''\} \tag{2.236}$$

Геодезичну кривину кривої на циліндрі знайдемо як мішаний добуток трьох векторів (2.234), (2.235) і (2.236):

$$k_z = \frac{1}{s'^3} \begin{vmatrix} 0; & \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}; & -\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \tag{2.237}$$

Із врахуванням того, що $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, після розкриття визначника (2.237) одержимо:

$$k_z = \frac{x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2} \sqrt{y'^2 + z'^2}}. \quad (2.238)$$

Проміжний кут α (за аналогією із (2.226)) отримаємо інтегруванням виразу (2.238) $\alpha = \int k_z ds$, де $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$. Таким чином отримаємо:

$$\alpha = \int \frac{x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)\sqrt{y'^2 + z'^2}} dt. \quad (2.239)$$

Інтеграл виразу (2.239) існує і він має вигляд:

$$\alpha = \text{Arc sin} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad \text{або} \quad \alpha = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \quad (2.240)$$

В цьому можна переконатися, взявши похідну виразів (2.240).

Криву на розгортці циліндра знаходимо наступним інтегруванням виразів (2.240):

$$\begin{aligned} x_p &= \int \cos \left(\text{Arc cos} \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) ds = \\ &= \int \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} ds = \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt; \\ y_p &= \int \sin \left(\text{Arc cos} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) ds = \\ &= \int x' dt = \int dx = x. \end{aligned} \quad (2.241)$$

Із врахуванням (2.241) рівняння розгортки циліндричної поверхні (2.232) в загальному вигляді запишуться:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt; \\ Y_p &= x + u. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Для поверхні (2.232) і для її розгортки (2.242) перша квадратична форма має однаковий вигляд:

$$dS^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) dt^2 + 2x' dt du + du^2. \quad (2.243)$$

Це свідчить про те, що задача на знаходження розгортки в загальному вигляді розв'язана правильно. Параметричні рівняння (2.232) є рівняннями циліндра, у якого твірні паралельні осі Ox і відповідно (2.242) є рівняннями його розгортки. Однак нескладно записати рівняння циліндра, у якого твірні проходять через ту ж саму просторову криву, але паралельні іншій осі і відповідно записати відповідні рівняння розгортки, відштовхуючись від (2.242).

Розглянемо приклад із просторовою кривою, через яку проходять три циліндричні поверхні, і твірні яких паралельні до різних осей нерухомої системи координат.

Нехай вихідна просторова крива задана параметричними рівняннями у функції довільного параметра t :

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{Arctg} \left(\tanh \frac{t}{2} \right); \\ y &= \ln (\cosh t); \\ z &= t - \ln (\cosh t). \end{aligned} \quad (2.244)$$

На рис. 2.45,а побудована крива (2.244) в проекціях.

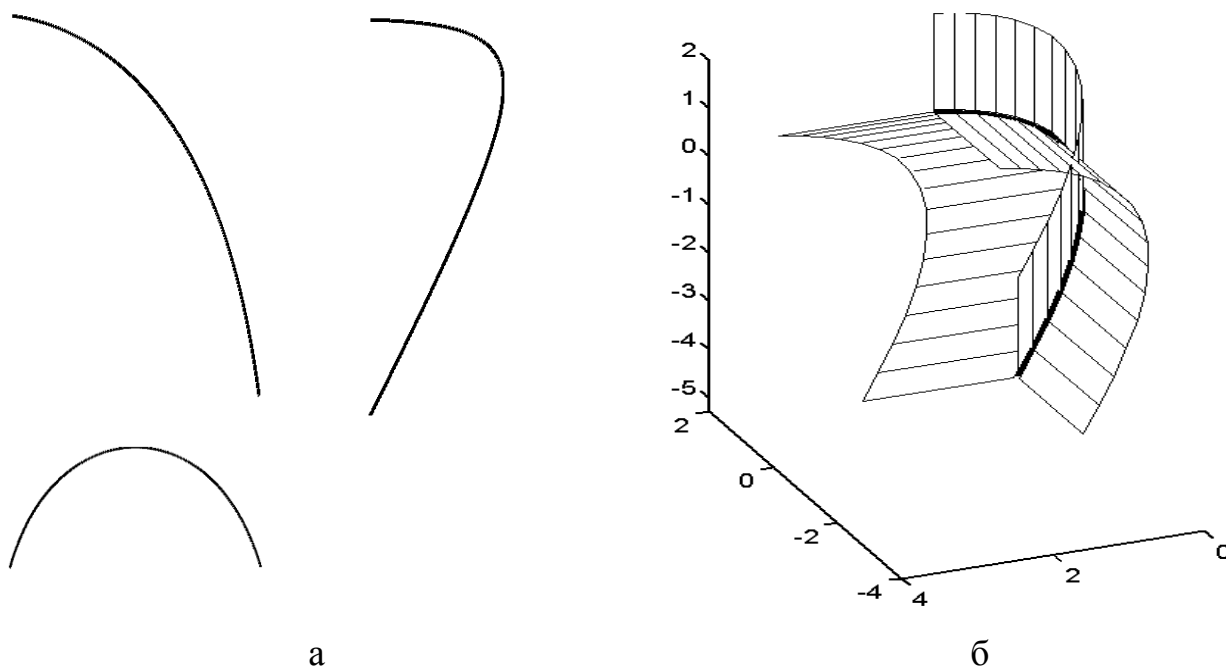


Рис. 2.45. Проекції просторової кривої – а) та три циліндри, що через неї проходять – б).

Її характерною особливістю є те, що для визначення довжини дуги (2.244) відсутній вираз в елементарних функціях, тобто довжина дуги знаходиться чисельним інтегруванням, але для кожної із представлених проєкцій такий вираз є, тобто для всіх трьох циліндрів, що через неї проходять (рис. 2,45,б), інтеграл в рівняннях розгортки (2.242) виражаються через елементарні функції. Наводимо рівняння цих циліндрів, у яких твірні паралельні одній із осей нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} X &= 2 \operatorname{Arctg} \left(\tanh \frac{t}{2} \right) + u; \\ Y &= \ln (\cosh t); \\ Z &= t - \ln (\cosh t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 2 \operatorname{Arctg} \left(\tanh \frac{t}{2} \right); \\ Y &= \ln (\cosh t) + u; \\ Z &= t - \ln (\cosh t); \end{aligned} \tag{2.245}$$

$$\begin{aligned} X &= 2 \operatorname{Arctg} \left(\tanh \frac{t}{2} \right); \\ Y &= \ln (\cosh t); \\ Z &= t - \ln (\cosh t) + u. \end{aligned}$$

Щоб побудувати розгортки кожного із циліндрів (2.245), візьмемо перші похідні напрямної просторової кривої (2.244):

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sech} t; \\ y' &= \tanh t; \\ z' &= 1 - \tanh t. \end{aligned} \tag{2.246}$$

За формулами (2.242) із врахуванням (2.246) і (2.244) знаходимо параметричні рівняння розгортки циліндра, твірні якого паралельні осі Ox :

$$\begin{aligned} X_p &= \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt = \int \sqrt{\tanh^2 t + (1 - \tanh t)^2} dt; \\ Y_p &= x + u = 2 \operatorname{Arctg} \left(\tanh \frac{t}{2} \right) + u. \end{aligned} \tag{2.247}$$

Інтеграл у першому рівнянні (2.247) існує в елементарних функціях, однак має дуже громіздкий вигляд, тому ми його не наводимо. Параметричні рівняння розгортки циліндра, твірні якого паралельні осі Oy , мають вигляд:

$$X_p = \int \sqrt{x'^2 + z'^2} dt = \ln \frac{2 - \sqrt{2 - 2 \tanh t}}{2 + \sqrt{2 - 2 \tanh t}}; \quad (2.248)$$

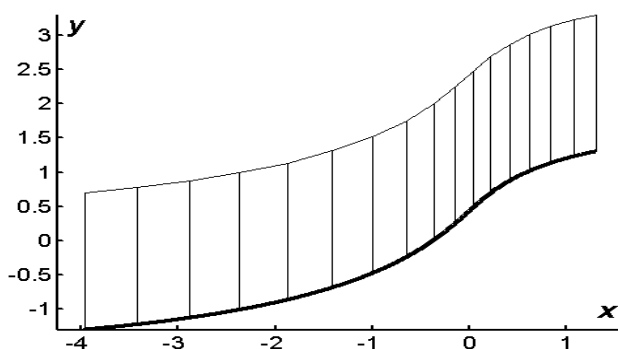
$$Y_p = y + u = \ln(\cosh t) + u.$$

I, нарешті, знаходимо розгортку циліндра, у якого твірні паралельні осі Oz :

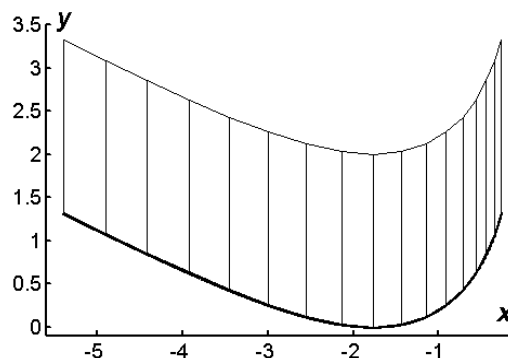
$$X_p = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = t; \quad (2.249)$$

$$Y_p = z + u = t - \ln(\cosh t) + u.$$

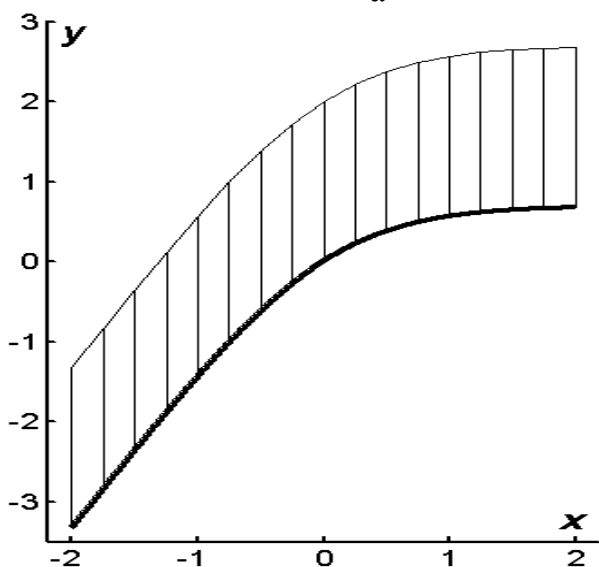
На рис. 2.46 за рівняннями (2.247), (2.248) і (2.249) побудовано розгортки відсіків циліндрів, що проходять через просторову криву (2.244) і зображені на рис. 2.45,б.



а



б



в

Рис. 2.46. Розгортки відсіків циліндрів, що проходять через просторову криву (2.244):

- а) з твірними, паралельними осі Ox ;
- б) з твірними, паралельними осі Oy ;
- в) з твірними, паралельними осі Oz .

Якщо із листового матеріалу (наприклад, паперу), вирізати заготовки за знайденим контуром, а потім кожну із них зігнути вздовж прямолінійних твірних так, щоб потовщена лінія в просторі збіглася в одну, то ми отримаємо модель, зображену на рис. 2.45,б.

РОЗДІЛ 3

КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЯК ОБВІДНИХ ПОВЕРХОНЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН, УТВОРЕНИХ ДОДАВАННЯМ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ПЛОЩИНИ НАВКОЛО ОСІ І ПЕРЕМІЩЕННЯ ОСІ В ПРОСТОРІ ЗА ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ

У даному розділі розглянуто різні способи утворення однопараметричних множин площин без прив'язки до напрямної кривої. Знайдено обвідні поверхні цих множин площин та досліджено їх властивості. Показано, що горизонтальною проекцією обвідних циліндрів однопараметричних множин площин утворених додаванням обертального руху площини навколо осі та поступального руху цієї осі без зміни напрямку є циклоїдальні криві.

Залежно від властивостей за якими конструюються торсові поверхні, їх можна задавати в різних системах координат: нерухомій прямокутній [151], рухомій системі тригранника Френе [74, 120, 123, 126], в узагальнених циліндричних, гіперболічних, квазісферичних координатах [137 -144].

Якщо утворювати однопараметричні множини площин додаванням двох обертальних рухів у сферичній системі координат, то обвідними поверхнями таких множин площин є конуси.

3.1. Утворення однопараметричних множин площин додаванням обертального руху площини навколо осі та поступального переміщення цієї осі в просторі

Обертання об'єктів навколо осі - широко розповсюджена задача, особливо в комп'ютерній графіці, яка використовується для візуалізації тривимірних об'єктів [160]. У літературі вона здебільшого описана у вигляді перетворення матриць без трактування геометричної суті.

Візьмемо відрізок AB , заданий точками $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, який приймемо за вісь обертання. Третю точку (наприклад точку C) будемо обертати навколо AB в площині перпендикулярній до AB (рис. 3.1). Запишемо рівняння площини μ , яка проходить через початок координат O перпендикулярно вектору \overline{AB} , (рис. 3.2, а):

$$(x_B - x_A)X + (y_B - y_A)Y + (z_B - z_A)Z = 0. \quad (3.1)$$

Точку C перетину площини μ із відрізком AB знаходимо за відомими формулами [11]:

$$x_C = x_A - (x_B - x_A)\rho; \quad y_C = y_A - (y_B - y_A)\rho; \quad z_C = z_A - (z_B - z_A)\rho, \quad (3.2)$$

де
$$\rho = \frac{(x_B - x_A)x_A + (y_B - y_A)y_A + (z_B - z_A)z_A}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

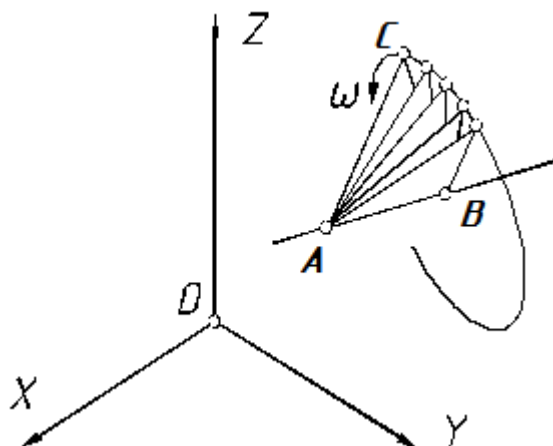
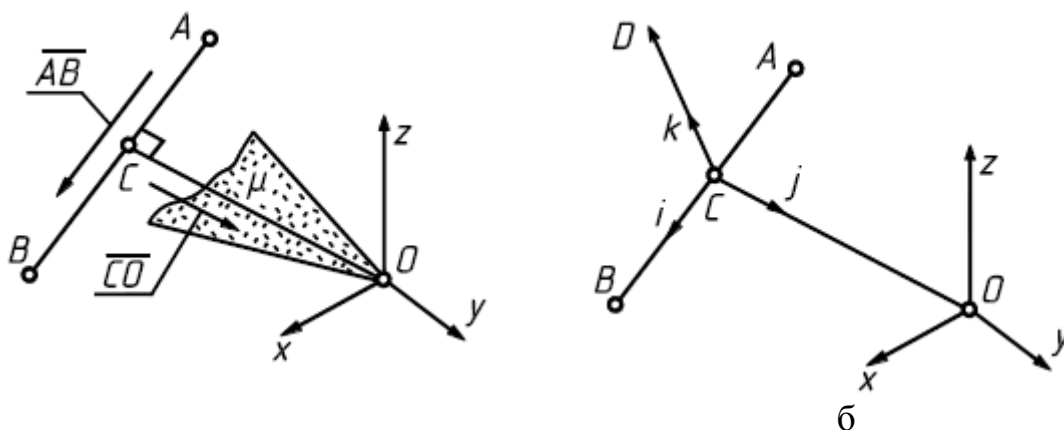


Рис. 3.1. Схема утворення пучка площин

Оскільки відрізок CO проходить через початок координат, то вирази (3.2) задають координати цього вектора.



а

б

Рис. 3.2. Графічні ілюстрації до схеми обертання площини навколо осі AB :

а) знаходження точки C перетину осі AB із перпендикулярною площиною μ ;

б) створення ортонормованого базису, у якого орт \vec{i} паралельний відрізку AB .

Окрему площину пучка задано трьома точками: A , B і третьою точкою, яка буде знаходитися в площині, що проходить через відрізок CO перпендикулярно AB . Якщо третю точку обертати навколо осі AB на заданій відстані r , то вона опише коло радіуса r у цій площині. Щоб написати рівняння кола, створимо ортонормований базис, один орт \vec{i} якого буде паралельним відрізку AB , другий орт \vec{j} - паралельним відрізку OC , а третій \vec{k} - буде перпендикулярний до перших двох (рис. 3.2, б).

Напрямок орта \vec{k} знайдемо із векторного добутку векторів \vec{AB} , \vec{CO} :

$$\overline{CD} = \overline{AB} \times \overline{CO} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ (x_B - x_A)\rho - x_A & (y_B - y_A)\rho - y_A & (z_B - z_A)\rho - z_A \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Розкривши визначник (3.3), отримаємо координати вектора \overline{CD} :

$$\overline{CD} \{z_B y_A - y_B z_A; x_B z_A - x_A z_B; x_A y_B - x_B y_A\}. \quad (3.4)$$

Щоб отримати орти \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} , нормуємо відповідні вектори \overline{AB} , \overline{CO} і \overline{CD} , розділивши їх координати на довжину вектора.

Запишемо рівняння кола радіуса r в системі базису \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} в проекціях на орти \overline{j} , \overline{k} :

$$\begin{aligned} r_j &= r \cos \alpha; \\ r_k &= r \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.5)$$

де α – кут повороту точки навколо орта \overline{i} .

Координати одиничних ортів \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} є напрямними косинусами по відношенню до нерухомої системи $OXYZ$. Перейдемо від рівнянь кола (2.28) у системі базису \overline{i} , \overline{j} , \overline{k} до його рівнянь в системі $OXYZ$ через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} x &= r j_x \cos \alpha + r k_x \sin \alpha; \\ y &= r j_y \cos \alpha + r k_y \sin \alpha; \\ z &= r j_z \cos \alpha + r k_z \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Параметричні рівняння (3.6) є рівняннями кола радіуса r , площина якого перпендикулярна вектору \overline{AB} , а центр знаходиться в початку координат.

Щоб отримати коло із центром в точці C , потрібно здійснити паралельне перенесення його вздовж осей системи $OXYZ$ на відрізки, рівні координатам точки C , які знаходяться із виразів (3.2). Взагалі точку C (центр кола) можна задати в потрібному місці на відрізку AB , скориставшись співвідношенням:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{x_A + nx_B}{1+n}; \\
 y_C &= \frac{y_A + ny_B}{1+n}; \\
 z_C &= \frac{z_A + nz_B}{1+n}.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Якщо $n=1$, то центр кола буде знаходитися посередині відрізка AB . На рис. 3.3 побудовано пучок площин першого порядку, кожна із яких проходить через точки A , B і точку на колі.

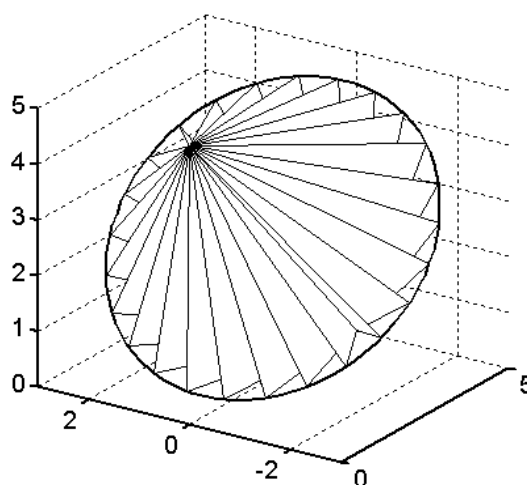


Рис. 3.3. Пучок площин, побудований за формулами (3.6)

З допомогою одержаного пучка площин можна утворювати однопараметричні множини площин, які в свою чергу огинають певні торсові поверхні. Вид торсової поверхні залежить від способу утворення однопараметричної множини площин. Один із таких способів – поєднання обертального руху площини і поступального руху осі обертання, тобто певним чином узгодження в часі руху осі пучка в просторі з обертальним рухом площини в пучку.

Нехай відрізок AB осі обертання буде заданий точками: $A(1,0,0)$ і $B(1,0,6)$. Таким чином вісь обертання буде паралельна осі OZ і всі площини пучка будуть проєкціюватися прямими лініями на горизонтальну площину. Напрямні косинуси векторів \overline{AB} , \overline{CO} і \overline{CD} відповідно запишуться:

$$\overline{i}(i_x = 0; i_y = 0; i_z = 1), \quad \overline{j}(j_x = 1; j_y = 0; j_z = 0), \quad \overline{k}(k_x = 0; k_y = 1; k_z = 1). \tag{3.8}$$

Третя точка пучка на колі згідно (3.6) із врахуванням (3.8) визначиться із виразів:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \alpha; \\
 y &= r \sin \alpha; \\
 z &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Надамо пучку рівномірного поступального руху вздовж осі OX . Тоді рух точок A і B опишуться наступними виразами координат. Точка A : $(x_A = vt; y_A = 0; z_A = 1)$. Точка B : $(x_B = vt; y_B = 0; z_B = 6)$, де v – швидкість руху, t – час. Положення точки на колі залежить від значення кута α . Кутова швидкість обертання визначиться диференціюванням: $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$. Якщо прийняти $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$, то $\alpha = t$. Отже, рух точки на колі опишеться параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos t + vt; \\
 y &= r \sin t; \\
 z &= 6.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

У виразах (3.10) точку взято на висоті 6 лінійних одиниць. На рис. 3.4 побудовано однопараметричну множину площин, що проходить через три точки, положення кожної із яких залежить від параметра часу t .

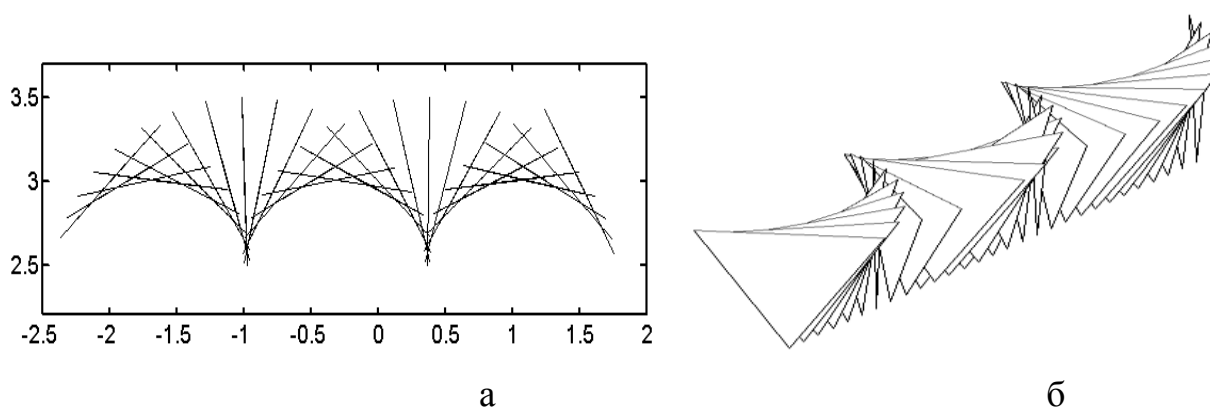


Рис. 3.4. Однопараметрична множина площин при поєднанні обертального руху площини із кутовою швидкістю обертання $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$ і поступальною швидкістю осі обертання $v=0,5 \text{ м/с}$:

- а) горизонтальна проекція;
- б) аксонометрія

На рис. 3.5 представлена однопараметрична множина площин, побудованих при прискореному обертанні площини і рівномірному прямолінійному русі осі обертання.

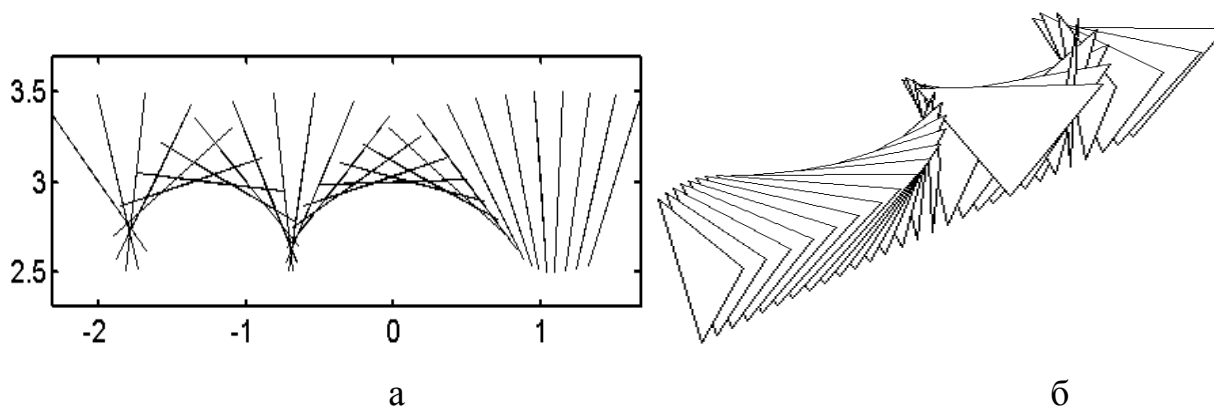


Рис. 3.5. Однопараметрична множина площин при поєднанні обертального руху площини із кутовою швидкістю обертання $\omega = 0,1 \text{ t c}^{-1}$ і поступальною швидкістю осі обертання $v=0,5 \text{ м/с}$:

- а) горизонтальна проекція;
- б) аксонометрія

3.2. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний прямолінійний рух

Утворимо пучок площин першого порядку, які проходять через вісь OZ системи координат $OXYZ$. Виділимо окрему площину із пучка, взявши три точки: $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$ і B (рис. 3.6). Точки O і A знаходяться на осі OZ і є нерухомими. Щоб утворити пучок площин, будемо рівномірно обертати точку B по колу одиничного радіуса навколо осі OZ . Тоді її координати запишуться: $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$, де α – кут повороту точки B . Одночасно з обертанням площини будемо її рухати вздовж осі OX із швидкістю v . Тоді кожна точка одночасно із поворотом на кут α додатково переміститься вздовж осі OX на відстань vt , де t – час повороту на кут α . Для конкретного значення часу t координати запишуться:

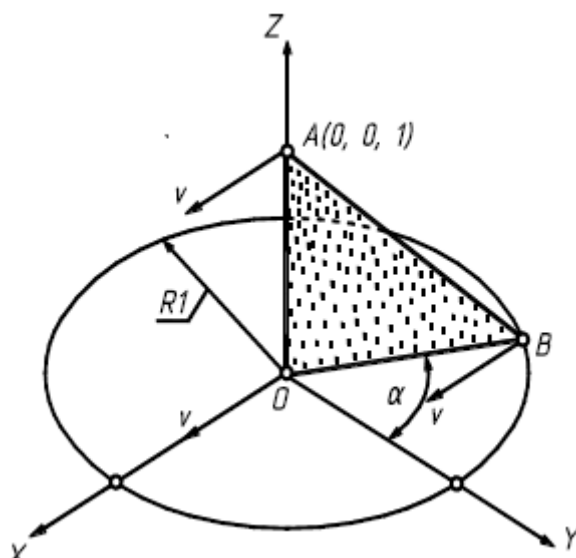


Рис. 3.6. Схема утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертального і поступального рухів

$$O(vt, 0, 0); A(vt, 0, l); B(vt - \sin \alpha, \cos \alpha, 0). \quad (3.11)$$

Якщо задано три точки, то рівняння площини можна знайти з визначника [11]:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \\ x_B - x_0 & y_B - y_0 & z_B - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Підставивши (3.11) в (3.12), після спрощень отримаємо рівняння площини для конкретного значення t :

$$-X \cos \alpha - Y \sin \alpha + vt \cos \alpha = 0. \quad (3.13)$$

У рівнянні (3.13) кут α є функцією часу t : $\alpha = \alpha(t)$. Змінюючи t ми отримаємо однопараметричну множину положень площини. Щоб знайти обвідний циліндр, продиференціюємо (3.13) по часу t :

$$X \alpha' \sin \alpha - Y \alpha' \cos \alpha + v(\cos \alpha - t \alpha' \sin \alpha) = 0. \quad (3.14)$$

Розв'яжемо рівняння (3.13) і (3.14) відносно X і Y . Із рівняння (3.13) запишемо:

$$X = -Y \tan \alpha + vt. \quad (3.15)$$

Підстановка (3.15) в (3.14) дає можливість знайти $x=x(t)$. Після цього знаходимо $y=y(t)$:

$$\begin{aligned} x &= vt - \frac{v}{\alpha'} \sin \alpha \cos \alpha; \\ y &= \frac{v}{\alpha'} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16) є параметричними рівняннями горизонтального перерізу циліндра, який є обвідним однопараметричної множини площин. Розглянемо окремі приклади.

Приклад 1. Швидкості поступального і обертального рухів є постійними.

Оскільки $\frac{d\alpha}{dt} = \omega - const$, то $\alpha = \omega t$, де ω - кутова швидкість обертання.

Підставимо в (3.16) $\alpha = \omega t$ і $\alpha' = \omega$ і отримаємо:

$$\begin{aligned}
 x &= vt - \frac{v}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t; \\
 y &= \frac{v}{\omega} \cos^2 \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Крива, побудована за рівнянням (3.17), подібна до циклоїди (рис. 3.7,а). Щоб переконатися в цьому, знайдемо натуральне рівняння кривої (3.17). За відомими виразами знаходимо кривину і довжину дуги кривої (3.17):

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\omega}{2v \sin \omega t}; \\
 s &= -2 \frac{v}{\omega} \cos \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Виключивши із рівнянь змінну t , знаходимо натуральне рівняння:

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{4v^2 - s^2 \omega^2}}.
 \tag{3.19}$$

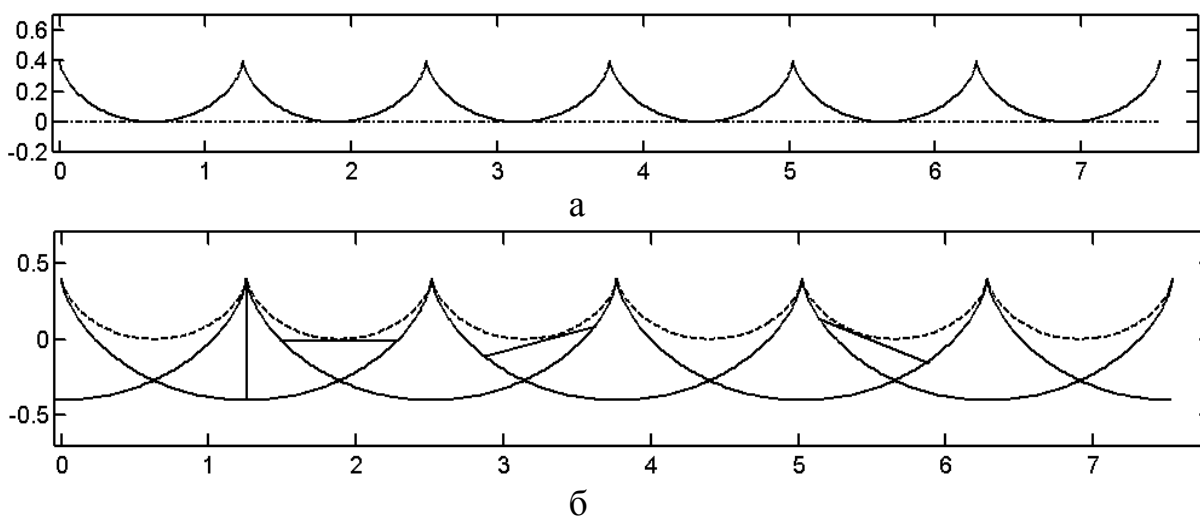


Рис. 3.7. Циклоїди, утворені в результаті обертового ($\omega = 0,5 c^{-1}$) і поступального ($v=0,2$ м/с) рухів відрізка:

- а) обвідна циклоїда;
- б) обвідна і супутні циклоїди – траєкторії кінців відрізка

Порівнявши (3.19) із відомим натуральним рівнянням циклоїди, бачимо, що вони подібні і повністю збігаються, якщо ввести позначення $a = \frac{v}{2\omega}$, де a - радіус твірного кола циклоїди. Отже, можна сформулювати наступне твердження.

Твердження. Якщо площина одночасно перебуває у двох рухах – в обертальному навколо осі постійного напрямку з кутовою швидкістю ω і прямолінійному поступальному перпендикулярно до осі з швидкістю v – то обвідною поверхнею однопараметричної множини положень площини буде циліндр, поперечним перерізом якого є циклоїда, причому параметр форми циклоїди (радіус a твірного кола) визначається із співвідношення обертальної і поступальної швидкостей: $a = \frac{v}{2\omega}$.

Утворення обвідного циліндра можна уявити на плоскій задачі. Відомо, що при коченні кола по прямій лінії його точка описує циклоїду. Візьмемо на колі дві діаметрально протилежні точки і сполучимо відрізком. При коченні кола ці точки описуватимуть кожна свою циклоїду, а відрізок огинатиме ще одну циклоїду – обвідну криву. На рис. 3.7,б обвідна циклоїда зображена штриховою лінією. Тут також показано окремі положення відрізка, який сполучає відповідні точки на двох інших циклоїдах і є дотичним до обвідної.

Приклад 2. Швидкість поступального руху постійна, кутова швидкість обертального руху змінюється періодично у відповідності із числом обертів, причому в межах одного оберту вона змінна (зростає і спадає). Така зміна кутової швидкості досягається зубчастою передачею еліптичних коліс [64]. За один оберт ведучого колеса ведене теж робить один оберт, при цьому співвідношення їх кутів повороту описується передаточною функцією [64]:

$$i = \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{1 - e^2}{1 - 2e \cos \varphi + e^2}, \quad (3.20)$$

де e - ексцентриситет – стала величина;

α - кут повороту веденого колеса;

φ - кут повороту ведучого колеса.

Кут повороту веденого колеса знайдемо інтегруванням виразу (3.20):

$$\alpha = (1 - e^2) \int \frac{d\varphi}{1 - 2e \cos \varphi + e^2} = 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.21)$$

Оскільки $\varphi = \omega t$, то підставимо цю залежність в (3.21) і продиференціюємо по t :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega(1 - e^2)}{1 - 2e \cos \omega t + e^2}. \quad (3.22)$$

Підставимо (3.21) із врахуванням $\varphi = \omega t$ і (3.22) в (3.16) і отримаємо параметричні рівняння кривої – перерізу обвідного циліндра. Крива горизонтального перерізу циліндра побудована на рис. 3.8,а.

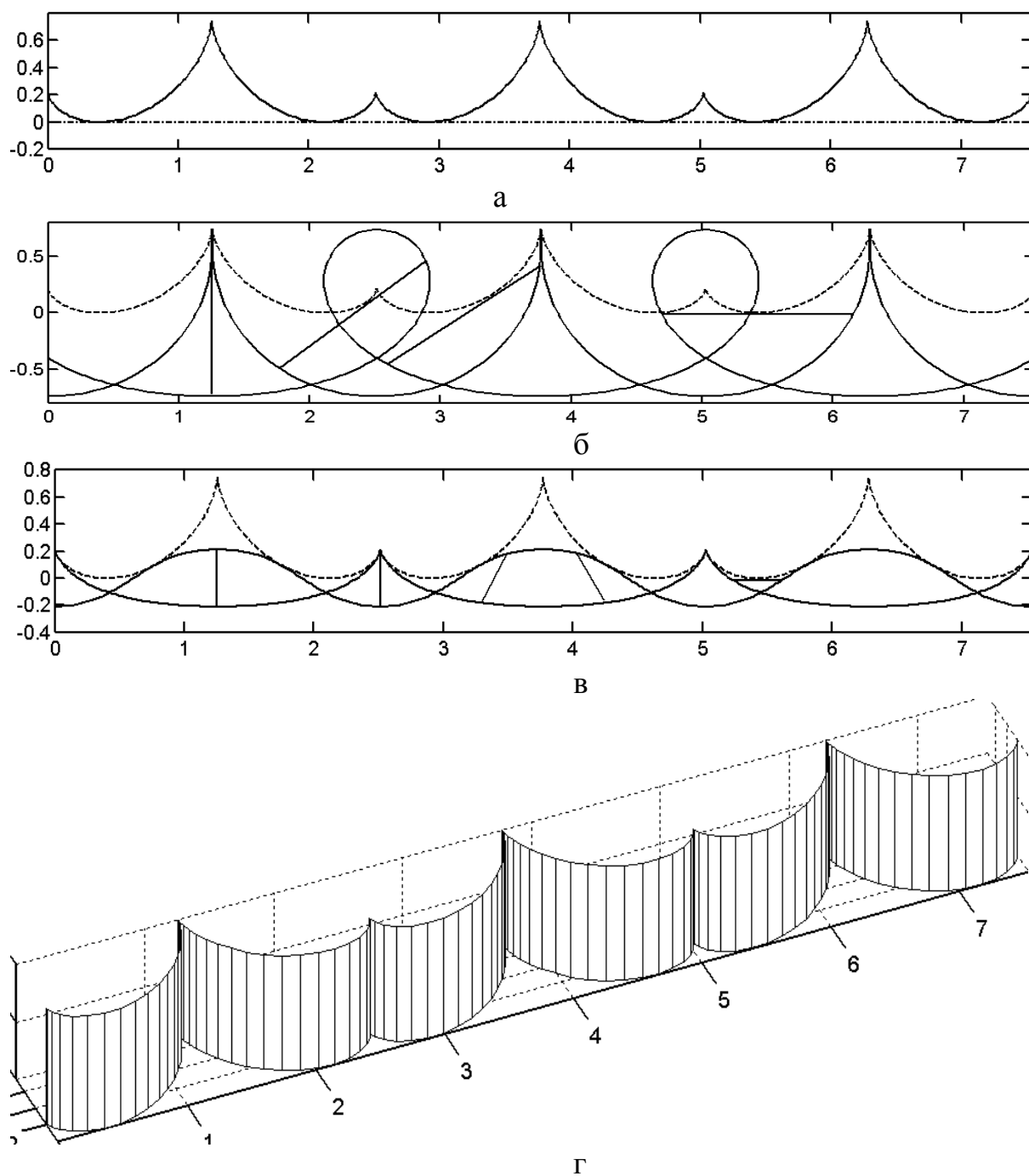


Рис. 3.8. Крива поперечного перерізу обвідного циліндра та супровідні криві з періодично змінною кутовою швидкістю обертання площини при $e=0,3$; $v=0,2$ м/с; $\omega=0,5$ с⁻¹:

- а) крива поперечного перерізу обвідного циліндра;
- б) траєкторія кінців відрізка більшої довжини;
- в) траєкторія кінців відрізка меншої довжини;
- г) обвідний циліндр в аксонометрії.

Штрих-пунктирною лінією показано напрям руху осі обертання площини. При збільшенні ексцентриситету e різниця по висоті між нижніми і верхніми точками звороту зростає. При $e = 0$ різниця зникає і крива перетворюється в циклоїду.

По аналогії із циклоїдою можна взяти дві діаметрально протилежні точки на однаковій відстані від осі обертання і знайти їх траєкторії. Однак у цьому випадку буде певна асиметрія. Якщо взяти відрізок більшої довжини так, щоб один кінець описував траєкторію із точками звороту, то другий кінець буде описувати траєкторію із точками самоперетину (рис. 3.8,б).

Якщо взяти відрізок меншої довжини з такою ж умовою, то один кінець описуватиме криву із точками звороту, а протилежний - синусоподібну криву (рис. 3.8,в). У першому і другому випадках показані окремі положення відрізка.

Приклад 3. Швидкість поступального руху або кутова швидкість обертального руху зростають за лінійним законом. У такому випадку поступальний або обертальний рух буде рівноприскореним.

Нехай швидкість поступального руху v буде сталою, а кутова швидкість обертального руху змінюється за законом $\omega = at$, де a - стала величина. Отже, $\alpha = at^2/2$ і $\alpha' = at$. Підставивши ці вирази в (3.16), отримаємо параметричні рівняння перерізу обвідного циліндра, який представлено на рис. 3.9,а при $a = 0,5$ і $v=2$ м/с.

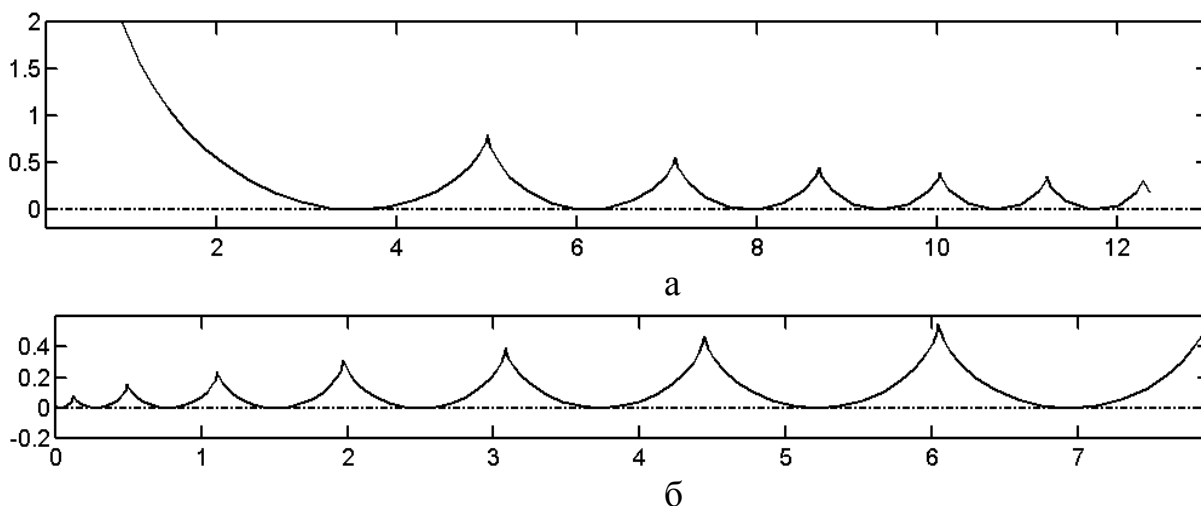


Рис. 3.9. Криві перерізу обвідного циліндра при лінійному законі зміни швидкості обертального або прямолінійного рухів:

а) рівноприскорений обертальний рух із кутовою швидкістю $\omega = 0,5t$ при $v=2$ м/с;

б) рівноприскорений прямолінійний рух із швидкістю $v=0,05t$ при $\omega=2$ рад/с

Щоб знайти обвідну криву при $\omega = const$ і $v=bt$, де $b = const$, потрібно у вирази координат точок (3.11) замість vt підставити bt^2 і далі зробити відповідні перетворення. В кінці одержимо параметричні рівняння кривої перерізу циліндра:

$$\begin{aligned} x &= bt^2 - \frac{b}{\omega}t \sin 2\omega t; \\ y &= 2 \frac{b}{\omega}t^2 \cos^2 \omega t. \end{aligned} \quad (3.23)$$

На рис. 3.9,б побудована крива перерізу за рівнянням (3.23) при $\omega=2$ рад/с і $b=0,05$.

3.3. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний криволінійний рух

Нехай вісь обертання здійснює криволінійний рух по колу радіуса r за годинниковою стрілкою (рис. 3.10). Рівняння кола запишеться:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \frac{s}{r}; \\ y &= r \cos \frac{s}{r}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

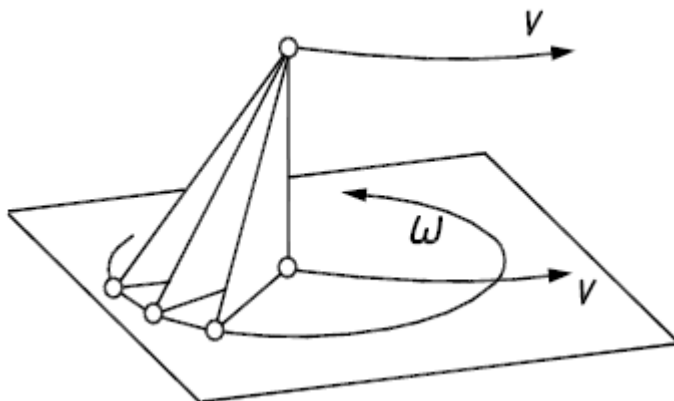


Рис. 3.10. Схема утворення однопараметричної множини площин додаванням двох рухів: обертального руху площини навколо осі та поступального прямолінійного або криволінійного руху осі

Тоді координати точок O, A, B (рис. 3.6) будуть наступними:

$$\begin{aligned} O & \left(r \sin \frac{s}{r}, \quad r \cos \frac{s}{r}, \quad 0 \right); \\ A & \left(r \sin \frac{s}{r}, \quad r \cos \frac{s}{r}, \quad 1 \right); \\ B & \left(r \sin \frac{s}{r} - \sin \alpha, \quad r \cos \frac{s}{r} + \cos \alpha, \quad 0 \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Рівняння площини, що проходить через три точки знаходимо за формулою (3.12). Здійснивши підстановку (3.25) в (3.12), після спрощень отримаємо рівняння однопараметричної множини площин:

$$-X \cos \alpha - Y \sin \alpha + r \sin \alpha \cos \frac{s}{r} + r \cos \alpha \sin \frac{s}{r} = 0. \quad (3.26)$$

Побудуємо торсову поверхню, як обвідну однопараметричної множини площин (3.26), де змінною виступає довжина дуги s напрямного кола.

З рівнянь (3.26) знаходимо:

$$\begin{aligned} A &= -\cos \alpha; & B &= -\sin \alpha; & C &= 0; & D &= r \sin \left(\alpha + \frac{s}{r} \right); \\ A' &= \alpha' \sin \alpha; & B' &= -\alpha' \cos \alpha; & C' &= 0; \\ D' &= (r\alpha' + 1) \cos \left(\alpha + \frac{s}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Підставивши (3.27) в (2.14) та здійснивши спрощення одержимо параметричні рівняння тора:

$$\begin{aligned} X &= r \sin \frac{s}{r} - \frac{\sin \alpha}{\alpha'} \cos \left(\alpha + \frac{s}{r} \right); \\ Y &= r \cos \frac{s}{r} + \frac{\cos \alpha}{\alpha'} \cos \left(\alpha + \frac{s}{r} \right); \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Утворена поверхня – циліндр. Його горизонтальним перерізом буде крива, форма якої залежить від радіуса r кола (3.24) та заданого закону зміни кута $\alpha = \alpha(s)$ обертального руху площини.

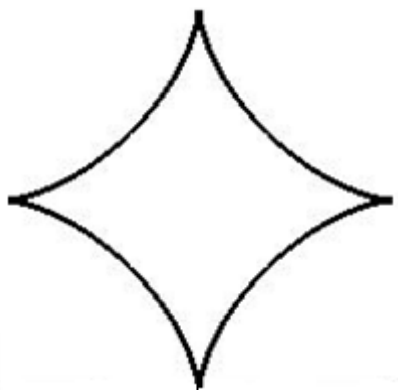
Якщо площина обертається за лінійним законом $\alpha = a s$, то параметричні рівняння тора запишуться:

$$\begin{aligned} X &= r \sin \frac{s}{r} - \frac{\sin (a s)}{a} \cos \left(a s + \frac{s}{r} \right); \\ Y &= r \cos \frac{s}{r} + \frac{\cos (a s)}{a} \cos \left(a s + \frac{s}{r} \right); \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Горизонтальним перерізом такого циліндра буде крива, подібна до гіпоциклоїди (рис. 3.11). Щоб ідентифікувати криву, знайдемо її натуральне рівняння $k_{кр} = k(s_{кр})$, для цього перейдемо від довжини дуги s кола до власної довжини дуги кривої $s_{кр}$.

Перші два рівняння циліндра (3.29) є параметричними рівняннями його перерізу. Їх похідні запишуться:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{(1 + 2ar) \sin(as) \sin\left(as + \frac{s}{r}\right)}{ar}; \\
 y' &= -\frac{(1 + 2ar) \cos(as) \sin\left(as + \frac{s}{r}\right)}{ar}.
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$



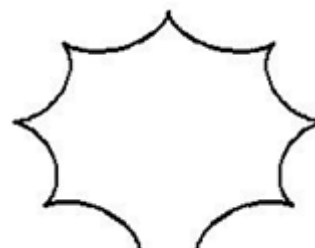
$$r=0.5, \quad \alpha=2s$$



$$r=0.5, \quad \alpha=s$$



$$r=1, \quad \alpha=0.25s$$



m – ірраціональне

Рис. 3.11. Горизонтальні перерізи циліндра, утвореного обертанням площини навколо осі за годинниковою стрілкою та одночасним переміщенням осі по колу радіуса r при різних значеннях r та a

Знаходимо власну довжину дуги перерізу циліндра:

$$s_{sp} = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} ds = -\frac{(1 + 2ar)}{(1 + ar)a} \cos\left[\left(\frac{1}{r} + a\right)s\right].
 \tag{3.31}$$

За відомими формулами знаходимо кривину кривої у функції «чужої» дуги:

$$k_{sp} = \frac{a^2 r}{(1 + 2ar) \sin\left[\left(\frac{1}{r} + a\right)s\right]}.
 \tag{3.32}$$

Виключивши з рівнянь (3.31) та (3.32) параметр s , отримаємо натуральне рівняння кривої:

$$k_{кр} = \frac{ra}{(1+ar)\sqrt{\frac{(1+2ar)^2}{a^2(1+ra)^2} - s_{кр}^2}}. \quad (3.33)$$

Натуральне рівняння епі- та гіпоциклоїд відоме [134]:

$$k_{кр} = \frac{2m+1}{\sqrt{16R_n^2 m^2 (1+m)^2 - s_{кр}^2}}. \quad (3.34)$$

Прирівнявши чисельники рівнянь (3.33) і (3.34), а також вирази постійних під коренем, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{ar}{(1+ar)} = 2m+1; \\ \frac{1+2ar}{a(1+ar)} = 4R_n m(1+m) \end{cases}. \quad (3.35)$$

Розв'язавши систему відносно m і R_n , отримаємо:

$$m = -\frac{1}{2(1+ar)}. \quad (3.36)$$

$$R_n = -\frac{1+ar}{a}. \quad (3.37)$$

Знак «мінус» вказує на те, що утворена крива буде саме гіпоциклоїдою [134].

Стала величина m в рівнянні (3.34) називається модулем гіпоциклоїди, який визначається із співвідношення [134]:

$$m = \frac{R_p}{R_n}, \quad (3.38)$$

де R_n – радіус зовнішнього нерухомого кола;

R_p – радіус внутрішнього рухомого кола.

Підставивши (3.36) і (3.37) в (3.38), після спрощень отримаємо:

$$R_p = \frac{1}{2a}. \quad (3.39)$$

З'ясуємо кінематичну суть сталої a , яка входить до лінійної залежності зміни кута $\alpha=as$. Диференціюванням цієї залежності отримуємо:

$$a = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\omega}{v}, \quad (3.40)$$

звідки отримуємо:

$$\omega=av. \quad (3.41)$$

Отже, кутова швидкість обертання дорівнює добутку сталої a на швидкість переміщення осі по напрямному колу. При $v=1$ $a=\omega$.

Враховавши вищесказане можна сформулювати твердження.

Твердження. Якщо площина одночасно перебуває у двох рухах – в обертальному навколо осі постійного напрямку з кутовою швидкістю ω і криволінійному поступальному русі осі по колу радіуса r з одиничною швидкістю перпендикулярно його площині, то обвідною поверхнею однопараметричної множини положень площини буде циліндр, поперечним перерізом якого є гіпоциклоїда, яку можна утворити відомим способом перекочування кола радіуса R_p по внутрішній стороні кола радіуса R_n , причому

$$R_n = -\frac{1+r\omega}{\omega}, \quad R_p = \frac{1}{2\omega}.$$

Якщо площину обертати навколо осі у протилежному напрямку, тобто проти годинникової стрілки, то обвідною поверхнею однопараметричної множини площин теж буде циліндр:

$$\begin{aligned} X &= -r \sin \frac{s}{r} + \frac{\sin(as)}{a} \cos \left(as + \frac{s}{r} \right); \\ Y &= r \cos \frac{s}{r} + \frac{\cos(as)}{a} \cos \left(as + \frac{s}{r} \right); \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Горизонтальною проекцією такого циліндра буде епіциклоїда, модуль якої відрізняється від модуля гіпоциклоїди лише знаком. Деякі епіциклоїди при різному співвідношенні сталих a і r побудовані на рис. 3.12.

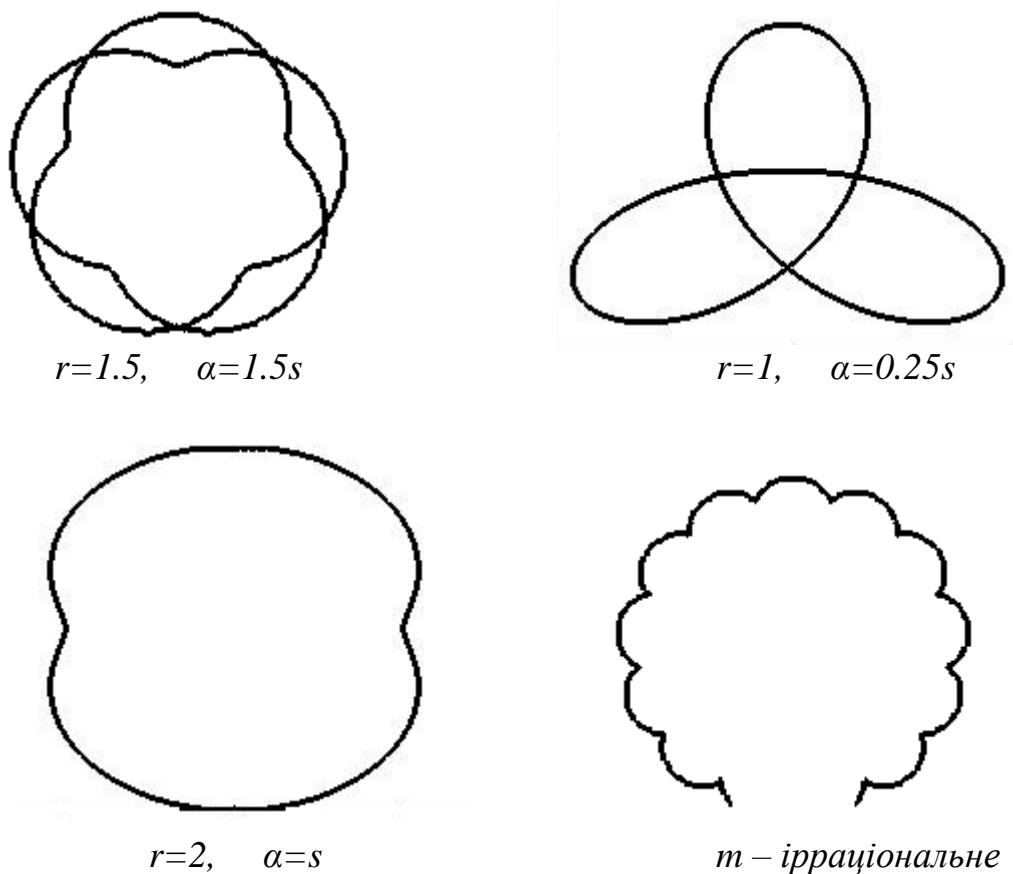


Рис. 3.12. Горизонтальні перерізи циліндра, утвореного обертанням площини навколо осі проти годинникової стрілки та одночасним переміщенням осі по колу радіуса r при різних значеннях r та a

3.4. Конструювання обвідних поверхонь однопараметричної множини площин у сферичній системі координат

Щоб описати однопараметричну множину площин, утворену додаванням двох обертальних рухів (рис. 3.13), доцільно використати сферичну систему координат.

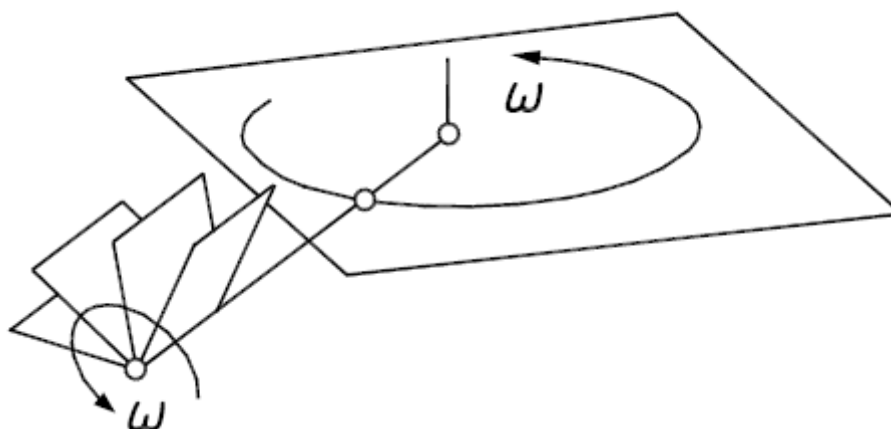


Рис. 3.13. Схема утворення однопараметричної множини площин додаванням двох обертальних рухів

Для цього будемо розглядати сферичні трикутники, утворені дугами великих кіл (тобто кіл, утворених перетином сфери площиною, яка проходить через її центр). За аналогією із плоскими вони можуть бути прямокутними і косокутними, однак є і суттєва відмінність: можлива ситуація, коли всі три кути є прямими. Для сферичних трикутників є характерним те, що не тільки вершини, а і сторони вимірюються кутами. Вершина задає двогранний кут між площинами, що проходять через радіус-вектор сфери, а сторона – центральний кут між радіус-векторами. Для знаходження невідомого кута сферичного трикутника за заданими іншими є відповідні формули [22].

Для розв'язання задачі використаємо сферу одиничного радіуса, задану параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X &= \sin \varepsilon \cos \gamma; \\ Y &= \sin \varepsilon \sin \gamma; \\ Z &= \cos \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.43)$$

де ε, γ – незалежні змінні, які є сферичними координатами точки на поверхні сфери. Заданим значенням ε_0, γ_0 на сфері відповідатиме точка L , сполучивши яку із початком координат отримаємо радіус-вектор OL (рис. 3.14,а). Позначимо його через \bar{w} і приймемо за вісь обертання точки E . При обертанні точка E опише коло на поверхні сфери, яке перетнеться із іншим колом – екватором – під кутом ε_0 (це добре видно на рис. 3.14,б, на якому обидва кола проєкціюються в пряму лінію).

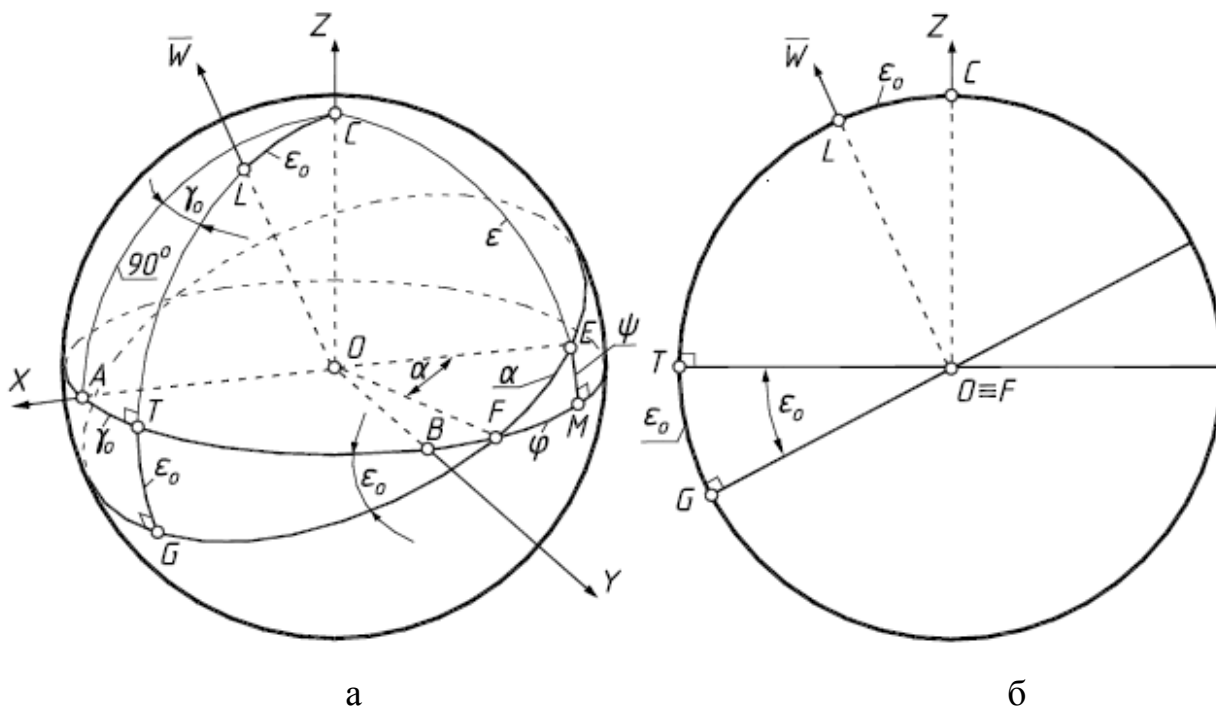


Рис. 3.14. Сфера одиничного радіуса із заданим вектором \bar{w} осі обертання точки навколо неї:

а) аксонометричне зображення сфери із позначенням кутів на ній;

б) проєкція сфери, на якій лінія перетину OF двох кіл проєкціюється в точку.

При обертанні точки E навколо осі \overline{w} опишеться коло одиничного радіуса з центром у точці O , площина якого буде перпендикулярна до осі обертання \overline{w} . Наша задача - описати обертальний рух таким чином, щоб при рівномірній зміні параметра обертання точка E рухалася по колу одиничного радіуса теж рівномірно, тобто із постійною кутовою швидкістю. В такому випадку за параметр обертання необхідно взяти довжину дуги кола, по якому рухається точка E . Відлік дуги почнемо із точки F перетину двох кіл в напрямі точки E . Поточне значення параметра обертання (дуга $F\widehat{E}$) чисельно дорівнює куту α центрального кута, який опирається на дугу $F\widehat{E}$. Будь-яку лінію на поверхні сфери (в тому числі і коло) можна задати залежностями $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ або ж через третю змінну у вигляді $\gamma = \gamma(\alpha)$, $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$. Очевидно, що нам підходить останній варіант. Щоб знайти вказані залежності, доцільно скористатися формулами сферичної тригонометрії [22].

Центральний кут γ , який вимірюється довжиною дуги екватора і починає свій відлік від точки A на осі OX , в поточній точці M матиме значення (рис. 3.14,а):

$$\gamma = A\widehat{T} + T\widehat{F} + F\widehat{M}, \quad (3.44)$$

де $A\widehat{T} = \gamma_0$; $T\widehat{F} = 90^\circ$; $F\widehat{M} = \varphi$.

Для рівнянь (3.43) потрібні вирази $\sin \gamma$ і $\cos \gamma$. Підставивши в (3.44) замість дуг відповідні значення центральних кутів, одержимо:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \cos (\gamma_0 + \varphi); \\ \cos \gamma &= -\sin (\gamma_0 + \varphi). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Поточне значення кута φ , що входить до виразів (3.45), потрібно записати через кут α – нову незалежну змінну. Для цього розглянемо прямокутний сферичний трикутник FME . За відомою формулою, коли задана вершина $F = \varepsilon_0$ і гіпотенуза $F\widehat{E} = \alpha$, запишемо [22]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.46)$$

Розкривши вирази косинуса і синуса суми кутів (3.45) і підставивши в них із (3.46) відповідні значення кута φ , теж попередньо перейшовши від тангенса до косинуса і синуса, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{\cos \gamma_0 \cos \alpha - \sin \gamma_0 \cos \varepsilon_0 \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \varepsilon_0 \sin^2 \alpha}}; \\ \cos \gamma &= \frac{-\sin \gamma_0 \cos \alpha - \cos \gamma_0 \cos \varepsilon_0 \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \varepsilon_0 \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Тепер знайдемо вирази $\sin \varepsilon$ і $\cos \varepsilon$, що теж входять до рівнянь (3.43). Кутіві ε відповідає дуга $C\widehat{E}$. Кут ε можна записати як різницю дуг $\varepsilon = C\widehat{M} - E\widehat{M}$. Оскільки $C\widehat{M} = 90^\circ$, а дугу $E\widehat{M}$ позначимо через ψ , то можна записати:

$$\varepsilon = 90^\circ - \psi. \quad (3.48)$$

Із того ж таки прямокутного трикутника FME знаходимо:

$$\sin \psi = \sin \varepsilon_0 \sin \alpha. \quad (3.49)$$

Провівши аналогічні перетворення по підстановці (3.48) в (3.49), остаточно одержимо:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \varepsilon_0 \sin^2 \alpha}; \\ \cos \varepsilon &= \sin \varepsilon_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.50)$$

При підстановці виразів кутів із (3.47) і (3.49) у (3.43) одержимо рівняння кола із центром у початку координат – траєкторію руху точки E :

$$\begin{aligned} x_E &= -\sin \gamma_0 \cos \alpha - \cos \gamma_0 \cos \varepsilon_0 \sin \alpha; \\ y_E &= \cos \gamma_0 \cos \alpha - \sin \gamma_0 \cos \varepsilon_0 \sin \alpha; \\ z_E &= \sin \varepsilon_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.51)$$

При заданому значенні кута α рівняння (3.51) дадуть координати точки E . Якщо її сполучити з точками O і L , то отримаємо трикутний відсік. На рис. 3.15,а зображено множину таких відсіків, побудованих через рівні проміжки кола, що відповідає рівним значенням приросту кута α .

В даному випадку однопараметрична множина площин утворює пучок першого порядку. За допомогою нього будемо утворювати інші множини площин за рахунок того, що під час обертання площини пучка його вісь теж буде змінювати свій напрям.

Нехай площина в пучку обертається навколо осі OL із постійною кутовою швидкістю ω , отже $\alpha = \omega t$, де t – час (нова змінна). Нехай вісь OL в свою чергу обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1$ так, що точка L рухається по екватору. В такому випадку координати точки L будуть: $\varepsilon_0 = 90^\circ$; $\gamma_0 = t$, отже підстановка їх в (3.43) дає:

$$\begin{aligned} x_L &= \cos t; \\ y_L &= \sin t; \\ z_L &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

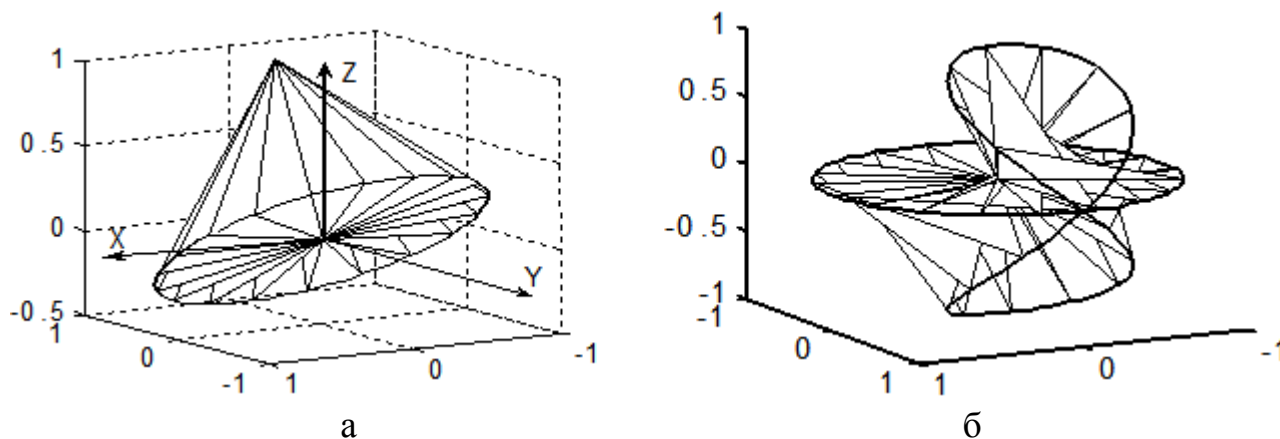


Рис. 3.15. Однопараметрична множина трикутних відсіків, одна вершина яких знаходиться в центрі сфери одиничного радіуса, а дві інших – на її поверхні:

а) пучок першого порядку, вісь обертання якого задана радіус-вектором сфери із координатами $\varepsilon_0=30^\circ$, $\gamma=0^\circ$;

б) однопараметрична множина трикутних відсіків, утворена додаванням двох обертальних рухів площини

Знайдемо координати точки E . Для цього у (3.51) підставимо $\alpha = \omega t$; $\varepsilon_0 = 90^\circ$; $\gamma_0 = t$ і одержимо:

$$\begin{aligned} x_E &= -\sin t \cos \omega t; \\ y_E &= \cos t \cos \omega t; \\ z_E &= \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

У цьому випадку тільки точка O є нерухомою. Точка L (3.52) рухається по екватору і матиме конкретні координати при певному значенні змінної t так само як і точка E (3.53), яка описує сферичну криву. На рис. 3.15,б побудовано однопараметричну множину трикутних відсіків, у яких вершина O знаходиться в початку координат, вершина L – на екваторі (зображений штриховою лінією) і вершина E – на замкненій сферичній кривій, якою в даному випадку (при $\omega = 1$, тобто при однакових кутових швидкостях обертальних рухів) є лінія Вівіані.

Обвідною поверхнею однопараметричної множини площин є торс. Очевидно, що в нашому випадку такою поверхнею буде конічна поверхня, оскільки всі площини множини проходять через нерухому точку – початок координат.

Із рис. 3.15,б важко уявити форму конічної поверхні, яку огинає однопараметрична множина трикутних відсіків. Щоб знайти цю поверхню, потрібно знати аналітичний вираз однопараметричної множини площин. Його знайдемо з визначника через координати трьох точок.

Підставивши координати точок L із (3.52), E із (3.53) і $D(0, 0, 0)$ в (3.12), після спрощень одержимо:

$$X \sin t \sin \omega t - Y \cos t \sin \omega t + Z \cos \omega t = 0. \quad (3.54)$$

Відсутність вільного члена в (3.54) вказує на те, що площина проходить через початок координат, а її положення визначається координатами нормального вектора:

$$\begin{aligned} N_x &= \sin t \sin \omega t; \\ N_y &= -\cos t \sin \omega t; \\ N_z &= \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Характеристику (твірну торса) можна шукати, як граничне положення лінії перетину двох суміжних нескінченно близьких площин множини. Знаходячись одночасно в двох площинах, твірна перпендикулярна до нормальних векторів цих площин. Отже, напрямний вектор твірної можна визначити, як векторний добуток двох суміжних нормалей за формулою (2.31).

Знайдемо координати вектора $\frac{d\bar{N}}{dt}$ диференціюванням вектора \bar{N} (3.55):

$$\begin{aligned} N'_x &= \cos t \sin \omega t + \omega \sin t \cos \omega t; \\ N'_y &= \sin t \sin \omega t - \omega \cos t \cos \omega t; \\ N'_z &= -\omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.56)$$

За правилом векторного множення знаходимо проекції вектора \bar{i} :

$$\begin{aligned} i_x &= \omega \cos t - \sin t \sin \omega t \cos \omega t; \\ i_y &= \omega \sin t + \cos t \sin \omega t \cos \omega t; \\ i_z &= \sin^2 \omega t. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Приведемо вектор (3.57) до одиничного. Тоді його кінець описуватиме лінію на сфері одиничного радіуса – по суті лінію перетину конуса із сферою. Для описання самого конуса введемо ще одну змінну u – довжину прямолінійної твірної:

$$\begin{aligned} X &= u \frac{\omega \cos t - \sin t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\ Y &= u \frac{\omega \sin t + \cos t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\ Z &= u \frac{\sin^2 \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

При зміні u від 0 до 1 отримаємо конус, обмежений кривою на сфері одиничного радіуса. На рис. 3.16,а він побудований за формулами (3.58) при $\omega = 1$, тобто є обвідною поверхнею однопараметричної множини площин, зображених на рис. 3.15,б.

Звичайно, із рис. 3.15,б неможливо уявити, що обвідною поверхнею однопараметричної множини площин буде конус, показаний на рис. 3.16,а. Однак площини множини можна представити по-іншому – не трикутними відсіками, а кругами – круглими відсіками обмеженими колами, по яких перетинається кожна площина множини із сферою. Для знаходження лінії перетину в рівняння площини множини $XN_x + YN_y + ZN_z = 0$ підставимо відповідні вирази сфери (3.43):

$$N_x \sin \varepsilon \cos \gamma + N_y \sin \varepsilon \sin \gamma + N_z \cos \varepsilon = 0. \quad (3.59)$$

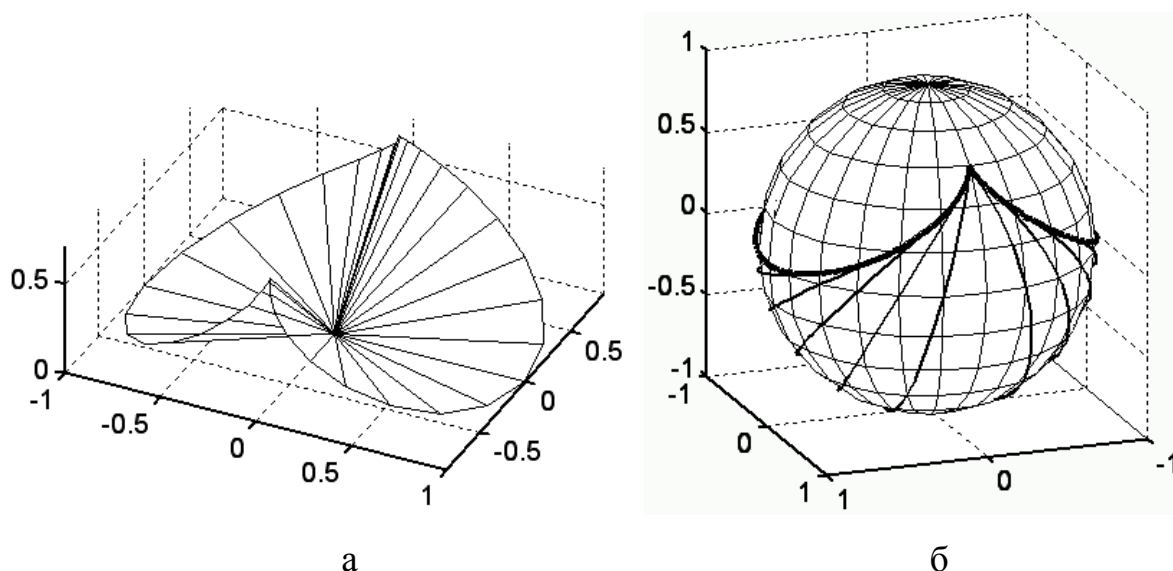


Рис. 3.16. До утворення конічної поверхні (3.51) із вершиною у центрі сфери:
а) конічна поверхня, обмежена сферичною лінією;
б) сферична крива (лінія перетину конічної поверхні із сферою) та кола, дотичні до неї

Розв'язавши відносно ε , отримаємо:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{N_z}{\sqrt{N_z^2 + (N_x \cos \gamma + N_y \sin \gamma)^2}}; \\ \cos \varepsilon &= -\frac{N_z \cos \gamma + N_y \sin \gamma}{\sqrt{N_z^2 + (N_x \cos \gamma + N_y \sin \gamma)^2}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Вирази (3.60) описують залежність $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, тобто зв'язують дві координати (незалежні змінні), що відповідає колу на сфері.

Рівняння множини кіл отримаємо, підставивши координати вектора (3.53) в (3.60), а потім (3.60) в (3.43). Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \gamma \cos \omega t}{\sqrt{1 - \sin^2 \omega t \cos^2(t - \gamma)}}; \\ y &= \frac{\sin \gamma \cos \omega t}{\sqrt{1 - \sin^2 \omega t \cos^2(t - \gamma)}}; \\ z &= -\frac{\sin \omega t \sin(t - \gamma)}{\sqrt{1 - \sin^2 \omega t \cos^2(t - \gamma)}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

При $t = \text{const}$ і зміні кута γ рівняння (3.61) опишуть коло, яке обмежує площину (3.54) при тому ж значенні t . На рис. 3.16,б за рівняннями (3.61) побудовано фрагмент кіл з інтервалом $\Delta t = 15^\circ$. Цей рисунок більш наочний, ніж рис. 3.15,б. З нього видно, що кожне коло торкається до лінії перетину конуса із сферою. Оскільки площина кола і твірна конуса проходять через центр сфери, то кожен круг, обмежений колом, є дотичним до конуса, тобто множина кругів огинає конус.

Очевидно, що вид конуса залежить від співвідношення кутових швидкостей обертання площини в пучку і осі самого пучка. Оскільки кутову швидкість осі пучка прийнято за одиницю, то це співвідношення буде рівним ω - кутовій швидкості обертання осі в пучку. На рис. 3.15,а і 3.16,а,б побудовані зображення для співвідношення $\omega = 1$. Окремо сферична лінія для цього випадку, яка обмежує конус, показана в проекціях на рис. 3.17,б. На цьому ж рисунку показані криві для інших співвідношень кутових швидкостей.

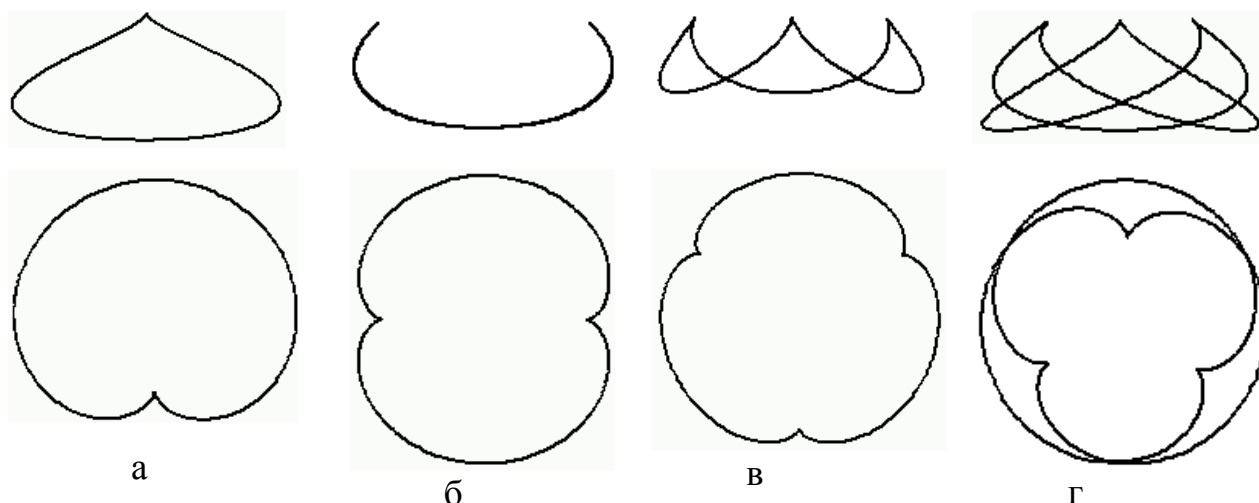


Рис. 3.17. Проекції сферичних кривих, що обмежують конус, при різних кутових швидкостях обертання площини ω в пучку:

а) $\omega = 0,5$;

б) $\omega = 1$;

в) $\omega = 1,5$;

г) $\omega = 0,75$

Характерною ознакою для цих кривих є те, що їх горизонтальні проекції подібні до відомих плоских кривих – епіциклоїд. Епіциклоїда утворюється траєкторією точки кола, яке котиться без ковзання зовні іншого кола [134]. Форма епіциклоїди залежить від співвідношення кіл: при одиниці кривою буде кардіоїда, при двох – епіциклоїда із двома вітками, при трьох – епіциклоїда з трьома вітками і т. д. На рис. 3.17,а,б,в показані криві, горизонтальні проекції яких подібні до названих кривих і утворюються вони при співвідношенні кутових швидкостей, кратних 0,5. При іншому дробовому співвідношенні крива буде замкнена і матиме точки самоперетину (наприклад на рис. 3.17,г). При ірраціональному співвідношенні крива буде незамкненою. Подібним чином утворюються епіциклоїди, однак не зважаючи на це і на зовнішню схожість, це різні криві. Криві, зображені на рис. 3.17, мають аналітичний вираз довжини дуги, а довжина дуги горизонтальної проекції зводиться до обчислення еліптичного інтегралу. Епіциклоїди ж мають аналітичний вираз довжини дуги. Є іще підтвердження того, що отримані горизонтальні проекції тільки дуже подібні до епіциклоїд. Якщо епіциклоїду прийняти за горизонтальну проекцію сферичної кривої, то сама крива буде кривою укусу. Наприклад, така сферична крива укусу показана в проекціях в підручнику [13], яка подібна до сферичної кривої на рис. 3.17,в. Їх горизонтальні проекції подібні, але суттєву відмінність видно на фронтальних проекціях: якщо на рис. 3.17,в крива розташована у верхній півкулі сфери, то для подібної кривої в [13] крива розташована в обох півкулях.

3.5. Утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертальних рухів та руху осі обертання вздовж однієї з осей координат

Розглянемо випадок, коли вісь обертання \overline{w} одночасно здійснює рух вздовж однієї з осей координат (наприклад осі OX) за лінійним законом $x=bt$, тобто до двох обертальних рухів додається ще і поступальний. Рівняння однопараметричної множини площин знайдемо, як рівняння площини, що проходить через три точки O, L, E (рис. 3.14), координати яких запишуться:

$$\begin{aligned} O & (bt; & 0; & 0); \\ L & (\cos t + bt; & \sin t; & 0); \\ E & (-\sin t \cos \omega t + bt; & \cos t \cos \omega t; & 0). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Підставивши (3.62) в (3.12), після спрощень отримаємо рівняння однопараметричної множини площин:

$$X \sin t \sin \omega t - Y \cos t \sin \omega t + Z \cos t \omega t - bt \sin t \sin \omega t = 0. \quad (3.63)$$

Із рівняння (3.63) згідно (2.11) знаходимо:

$$\begin{aligned}
A &= \sin t \sin \omega t; & B &= -\cos t \sin \omega t; \\
C &= \cos \omega t; & D &= -bt \sin t \sin \omega t; \\
A' &= \cos t \sin \omega t + \omega \sin t \cos \omega t; \\
B' &= \sin t \sin \omega t - \omega \cos t \cos \omega t; \\
C' &= -\omega \sin \omega t; \\
D' &= -b(\sin t \sin \omega t + t \cos t \sin \omega t + \omega \sin t \cos \omega t); \\
E &= \sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Підстановкою (3.64) в (2.14), одержимо параметричні рівняння тора:

$$\begin{aligned}
X &= b \sin t \cos t + bt + u \frac{\omega \cos t - \sin t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\
Y &= b \sin^2 t + u \frac{\omega \sin t + \cos t \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}; \\
Z &= u \frac{\sin^2 \omega t}{\sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

На рис. 3.18 за рівняннями (3.65) побудовано торс в проєкціях. Потовщеною лінією показано ребро звороту, для якого знайдено внутрішнє рівняння:

$$u = \frac{2b \cos t \sin \omega t \sqrt{\omega^2 + \sin^2 \omega t}}{\cos \omega t (\sin^2 \omega t + 2\omega^2) + \omega^2 \cos^2 t (\sin \omega t \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t \cos \omega t)}. \tag{3.66}$$

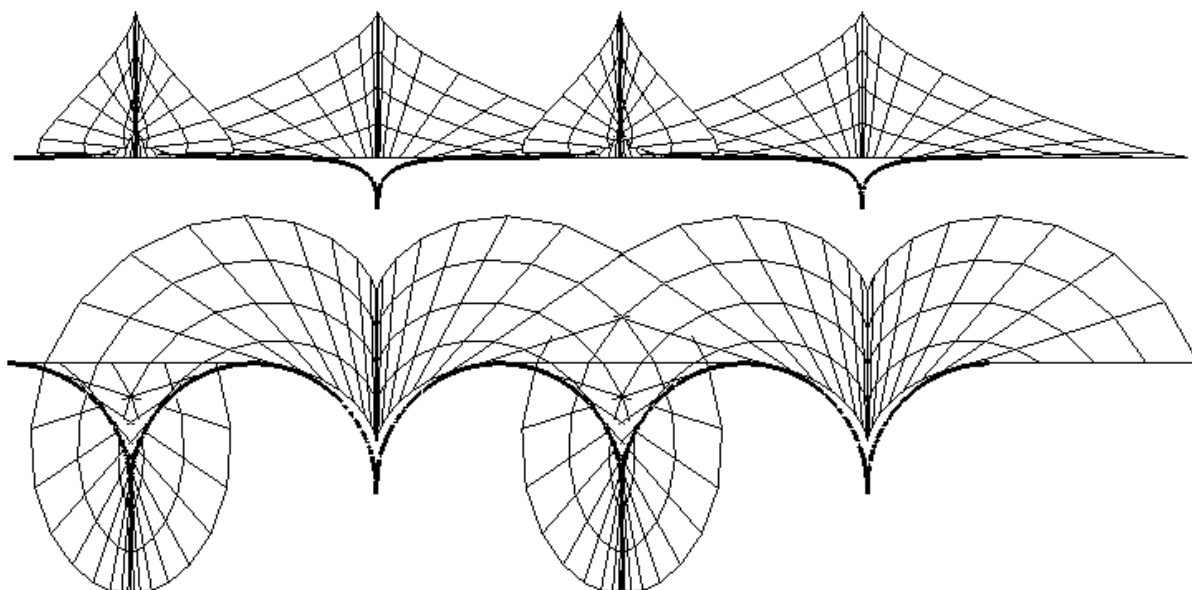


Рис. 3.18. Проєкції тора, побудованого за рівняннями (3.65)

3.6. Застосування однопараметричної множини положень площини при створенні робочого органу агромогового комплексу

Аналіз стану і тенденцій розвитку засобів механізації рослинництва дозволяє зробити висновок про те, що сучасні технології виконання польових робіт з допомогою машинно-тракторних агрегатів вичерпали можливості подальшого розвитку. Такі чинники, як зниження родючості ґрунтів за рахунок їх ущільнення ходовими системами енергетичних засобів і сільськогосподарських машин, необхідність суттєвого зменшення витрат праці, енергії та коштів, з кожним днем стають все більш визначальними.

Зважаючи на повну відсутність ущільнення ґрунту від контакту з ходовими системами машин в агротехнічній зоні створюються передумови для підвищення врожайності сільськогосподарських культур та істотного зниження витрат на виробництво продукції рослинництва. Крім поліпшення динаміки руху машин та підвищення комфортності роботи операторів, впровадження колійної чи мостової систем землеробства створює основу для автоматизації і роботизації більшості технологічних процесів у рослинництві, забезпечує ефективне впровадження „точного” землеробства [77].

Ущільнення ґрунту призводить до порушення газо- і водообміну ускладнення руху поживних речовин і живих організмів, які населяють родючий шар агрофону, утруднює розвиток кореневої системи культурних рослин, знижуючи тим самим їх урожайність.

Запропоновані способи зниження ущільнення ґрунту:

- застосування машин низького тиску, спарених або строєних коліс, скороченням числа проходів машино-тракторних агрегатів по полю;
- застосування комбінованих МТА;
- застосування гусеничного рушія замість колісного

не є радикальними способами вирішення цієї проблеми.

Система мостового землеробства була вперше запропонована як комплексний засіб індустріалізації сільськогосподарського виробництва у 1931 році Правоторовим М.А. Мостові системи – машини для мостового землеробства і допоміжне технологічне устаткування (робочі органи, транспортні і енергетичні системи, системи керування й автоматики, інформаційні системи і бази даних) перебувають і нині у стані розвитку.

Надикто В.Т. та Улексін В.О. стверджують, що перспективним напрямком розвитку, альтернативою традиційним тракторно-комбайновим технологіям є мостове землеробство, сутність якого полягає у функціональному поділі поля на агротехнічну зону для розташування рослин та інженерну зону для розміщення всіх засобів механізації. У мостовому землеробстві машини не травмують плодоносний шар ґрунту, з яким контактують лише робочі органи для здійснення операцій, необхідних за технологією вирощування рослин.

Ефект від використання мостових засобів механізації рослинництва може проявитися повною мірою лише при комплексному їх застосуванні як цілісної системи, яка включає:

- мостові машини з інженерним обладнанням поля;

- знаряддя та робочі органи, пристосовані до роботи в складі мостової машини, набір яких є достатнім для реалізації всіх технологічних процесів;
- інфраструктуру енергозабезпечення для живлення мобільних машин;
- транспортне забезпечення;
- гідромеліоративну (в першу чергу зрошувальну) систему;
- інформаційне забезпечення та системи автоматичного керування технологічними процесами з метою реалізації можливостей прецизійного землеробства – персоніфікації догляду за рослинами: сівозміни, пристосовані до систем мостового землеробства;
- агрофітоценози, недоступні в реалізації при застосуванні традиційних засобів механізації.

Мостові машини з інженерним обладнанням поля повинні утворювати єдину систему, яка дозволяє з високою точністю позиціонувати робочі органи відносно рослин, на основі чого буде досягтися можливість автоматизації механізованих робіт та персоніфікації вирощування рослин. З цих позицій агроміст нагадує відомі промислові порталні роботи, які на обладнаній відповідним чином дільниці дозволяють автоматизувати технологічні процеси.

Особливості агромоств полягають у різноманітності об'єктів взаємодії – рослин та полів, як зони місцезнаходження агромоства. Причому, параметри цих об'єктів не завжди можна урівняти та привести у відповідність до стандартів. Рослини на полі, як живі об'єкти, мають досить широкі відмінності між собою. Кожне поле має особливості мікро- і макрорельєфу, структури і фізичних властивостей ґрунту, відмінності у дії природних факторів. Тому, для нормального функціонування мостових засобів механізації рослинництва процеси адаптації машин та поля повинні бути взаємними: з одного боку, рослини та поле необхідно приводити у відповідність до вимог мостової машини, з іншого – мостову машину пристосовувати до конкретних умов на даному полі. Для цього, як у мостової машини, так і в засобах інженерного обладнання, повинні передбачатися варіанти виконання чи комплектації.

Автори формулюють концепцію мостових засобів механізації рослинництва, головною метою створення яких повинно бути одержання максимальної кількості продукції при мінімальних затратах. Зокрема, в технологіях виконання робіт і у будові всіх машин і механізмів повинні бути реалізовані:

- жорстка прив'язка мостової машини до поверхні ґрунту;
- координатно-транспортний принцип руху;
- рейково-крокуючий рушій;
- електричний привод з кабельним живленням;
- активні робочі органи не тягової концепції;
- зонний обробіток ґрунту;
- керування ЕОМ з одночасним збором інформації про ґрунт та рослини.

Застосування цих принципів дозволяє провести повну автоматизацію машини, реалізувати переваги адресного землеробства без залучення супутникових засобів навігації, досягти максимального енергозбереження та мінімального

шкідливого впливу на ґрунт, зменшити загальну матеріалоемність системи, максимально використати площу родючої землі, застосувати ефективні технології одночасного вирощування різних рослин на одному полі.

У конструкцію мостової системи повинні входити узгоджені між собою агроміст та координатно-транспортна система поля. Агроміст включає:

- ферму (остов) агромота з рейковим шляхом по всій довжині ферми;
- технологічний (робочий) модуль, який переміщається по рейковому шляху вздовж ферми і несе робочі органи, датчики, проміжне енергетичне обладнання;
- рушій з електроприводом і трансмісією для переміщення ферми моста з системою орієнтації ферми відносно поля;
- комплект робочих органів для здійснення всіх технологічних процесів;
- силове обладнання та систему керування.

Координатно-транспортна система поля, яка взаємодіє з рушієм агромота, повинна мати:

- фіксовану на полі систему опор для координації та організації руху;
- інфраструктуру енергопостачання;
- систему зрошення;
- транспортну систему з спеціалізованими транспортними засобами.

Відомі агрокомплекси для культивації міжрядь рослин, які виконують технологічні операції при русі комплексу в обидві сторони. Для цього культиваторні лапи мають двохсторонню заточку. Для обробки міжрядь використовуються нерухомі культиваторні лапи, а для обробки проміжку між рослинами в рядку – рухомі культиваторні лапи, що здійснюють у потрібний момент коливальний рух в напрямі, перпендикулярному до напрямку руху комплексу [106]. Даний агромотостовий комплекс спирається на самохідні опорні теліжки із прикріпленими до несучих брусів нерухомими і рухомими культиваторними лапами. Обробіток міжрядь забезпечується нерухомими лапами, в рядках – рухомими.

Недоліком даного комплексу є те, що привід рухомих лап в напрямку перпендикулярному до напрямку руху комплексу для обробки ґрунту в проміжках між рослинами здійснюється складними гідравлічними і механічними пристроями. Для того, щоб рухома лапа спрацювала у потрібний момент, пропонується вздовж рядків натягувати дроти з нанесеними на них реперними нитками, що відповідають проміжку між рослинами. При русі комплексу рухома культиваторна лапа спрацює від сигналу датчика, який подає його при взаємодії з реперною міткою на натягнутому дроті. Привід рухомих культиваторних лап здійснюється від автономної гідросистеми, що включає гідронасос і мотор-редуктор. Крім того, необроблена ділянка ґрунту навколо рослини має вигляд прямокутника, який не зовсім точно окреслює рослину.

Ми поставили собі за завдання спростити механізм приводу культиваторних лап і більш точно обробляти ґрунт навколо рослини.

Поставлене завдання досягається тим, що культиваторній лапі у вигляді плоскої смуги шириною b і обмеженою по довжині дугою радіуса r ,

проведеною із центра лапи, надається обертальний рух навколо осі, який погоджується із прямолінійним рухом комплексу.

Розглянемо спочатку кочення кола по прямій лінії без ковзання (рис. 3.19).

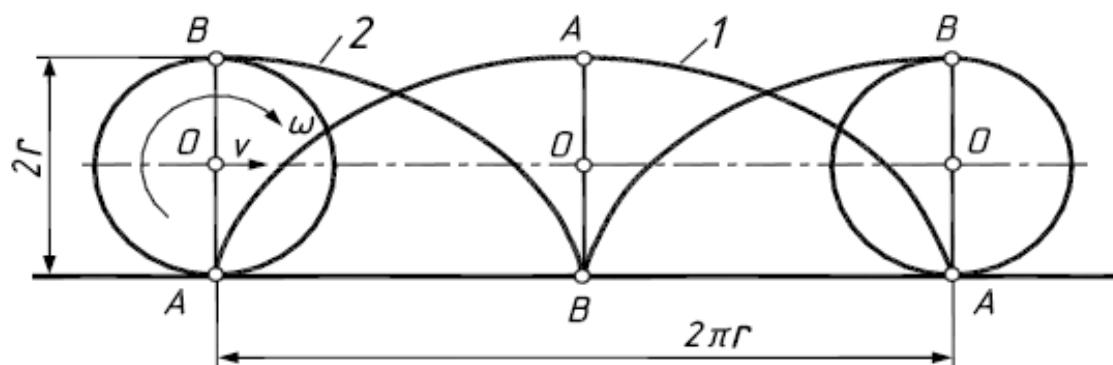


Рис. 3.19. Траєкторія руху точок A і B на колі, що котяться по прямій лінії без ковзання

Відомо, що точка A , яка знаходиться на колі, опише при цьому циклоїду 1, ширина однієї вітки якої дорівнює $2\pi r$, а висота - $2r$ (рис. 3.19). Діаметрально протилежна точка B опише свою циклоїду 2. Якщо всі ці точки сполучити між собою відрізком AB , то при коченні колеса він поступово проходить певні положення показані на рис. 3.20. Множина положень відрізка AB огинає теж циклоїду 3, але вдвічі меншу від циклоїд – траєкторій точок A і B (рис. 3.20, рис. 3.7,б). Кутова швидкість обертання ω відрізка AB і швидкість v центра O у прямолінійному напрямі перебувають при цьому у певному співвідношенні.

Якщо обертання відрізка AB розглядати не у вертикальній площині, а у горизонтальній із заданим співвідношенням v і ω , то будучи зануреним у ґрунт, він його обробить у певних межах, показаних на рис. 3.20.

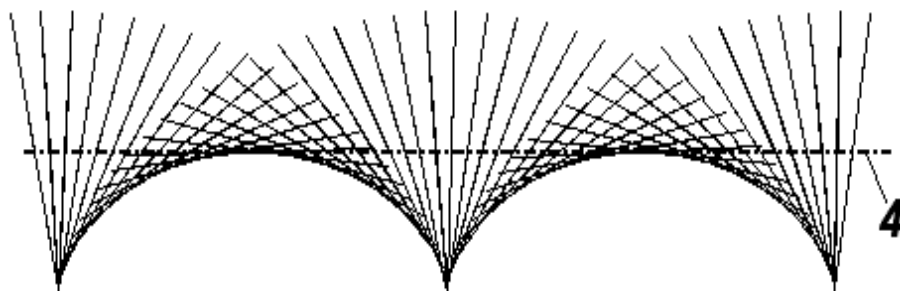


Рис. 3.20. Однопараметрична множина відрізків утворених додаванням обертального руху відрізка навколо вертикальної осі і поступального руху осі в прямолінійному напрямі та обвідна крива

Траєкторія поступального руху вертикальної осі обертання у прямолінійному напрямі зображена штрих-пунктирною лінією 4. Якщо на відстані $2r$ від цієї прямої задати паралельну траєкторію прямолінійного руху 5 ще однієї осі з обертальним рухом відрізка навколо неї, але у протилежну сторону, то утвориться ділянка обробленого ґрунту із областями необробленого у вигляді кривих 6, подібних до еліпсів, які утворені циклоїдами (рис. 3.21). В

центрі цих необроблених областей можуть бути розташовані рослини 7, відстань між якими рівна πr .

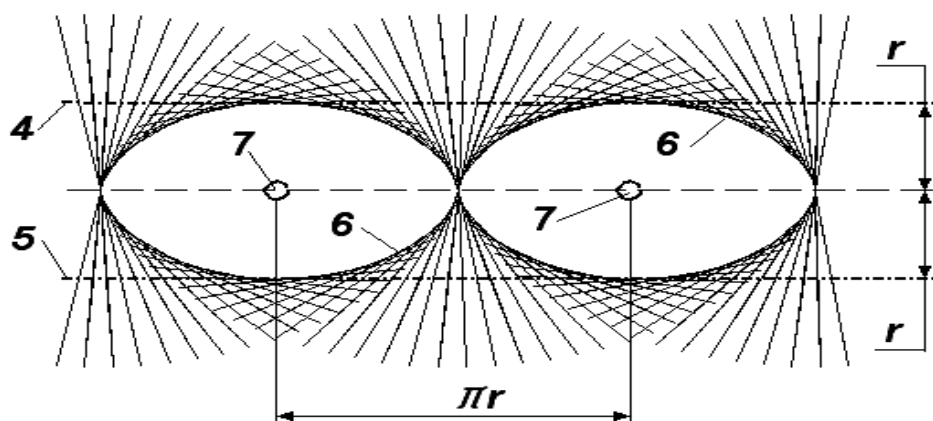


Рис. 3.21. Ділянки необробленого ґрунту навколо рослин

Відрізком обробляти ґрунт не можна, тому пропонується замінити його культиваторною лапою 8 у вигляді плоскої смуги шириною b і обмеженою по довжині дугами кола радіуса r (рис. 3.22).

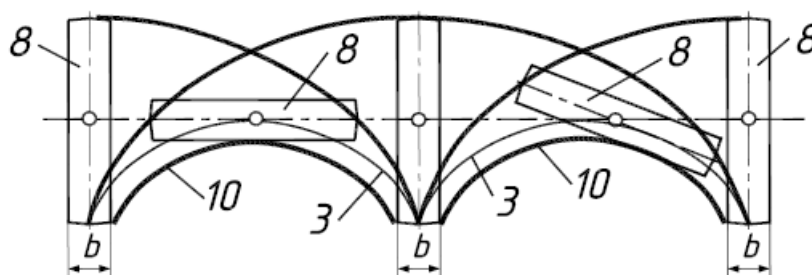


Рис. 3.22. Окремі положення лапи шириною b при її обертальному і поступальному рухах

Лапа із усіх сторін заточена. До її центра жорстко прикріплена вертикальна циліндрична стійка 9, з допомогою якої надається обертальний рух навколо осі стійки. В зв'язку із тим, що лапа 8 має ширину b , контур необроблюваної області змінюється. На рис. 3.23 показано окремі положення лапи 8 при її поступальному і обертальному переміщеннях.

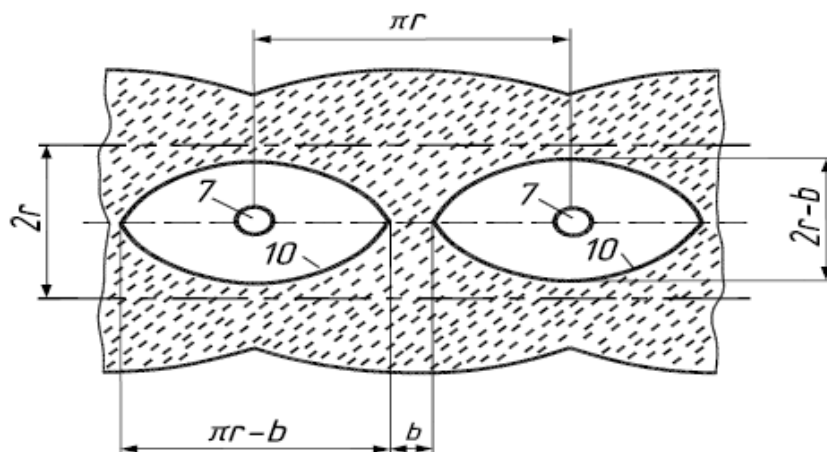


Рис. 3.23. Контури і розташування необроблюваних ділянок ґрунту

Крива 10, що обмежує необроблювану ділянку, паралельна попередній циклоїді 3 і віддалена від неї на відстань $b/2$. Таким чином величину площі необробленого ґрунту обмеженої кривими 10, можна зменшувати до потрібних розмірів за рахунок збільшення ширини лапи b . На рис. 3.23 видно, що її довжина визначається із виразу $\pi r - b$, а ширина рівна $2r - b$.

Сама ґрунтообробна лапа, яка є робочим органом, зображена на рис. 3.24.

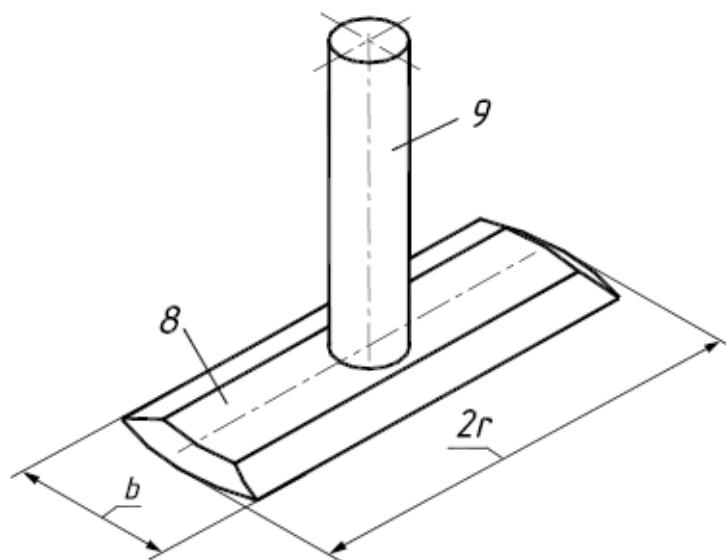


Рис. 3.24. Лапа для обробітку ґрунту

На початку розділу згідно сформульованого твердження було встановлено, що між прямолінійною швидкістю v осі обертання лапи 8, її кутовою швидкістю обертання ω і величиною r (відстань від осі до округлої крайки лапи, в твердженні ця величина позначена літерою a) існує залежність $v = 2r\omega$, яка забезпечує окреслену форму необроблюваного ґрунту. Якщо лапи 8 через стійки 9 приєднати до бруса 11, як показано на рис. 3.25, і забезпечити співвідношення між поступальною швидкістю v бруса 11 і кутовими швидкостями стійок 9, як позначено на рис. 3.25 за допомогою редукторів 12, то лапи оброблять ґрунт (на рис. 3.25 заштриховано), залишивши не ушкодженими рослини 7. При цьому міжрядкова відстань дорівнює $4r$.

Міжрядкову відстань можна зменшити, розташовуючи попарно культиваторні лапи не в один ряд на брусі 11, як показано на рис. 3.25, а в шахматному порядку на паралельних брусах, як показано на кінематичній схемі (рис. 3.26).

Забезпечення залежності $v = 2r\omega$ здійснюється через привід культиваторних лап від опорних коліс 13 комплексу, що рухається по коліях 14 без проковзування і буксовки. Крутний момент від колеса 13 за допомогою, наприклад, ланцюгової передачі 15 передається на вал 16. За допомогою конічних шестерень 17 редуктора обертальний рух передається на одну із культиваторних лап 8. Друга культиваторна лапа, яка знаходиться в парі з

першою, отримує обертальний рух з такою ж кутовою швидкістю ω в протилежну сторону завдяки циліндричній передачі за допомогою однакових зубчатих коліс 18.

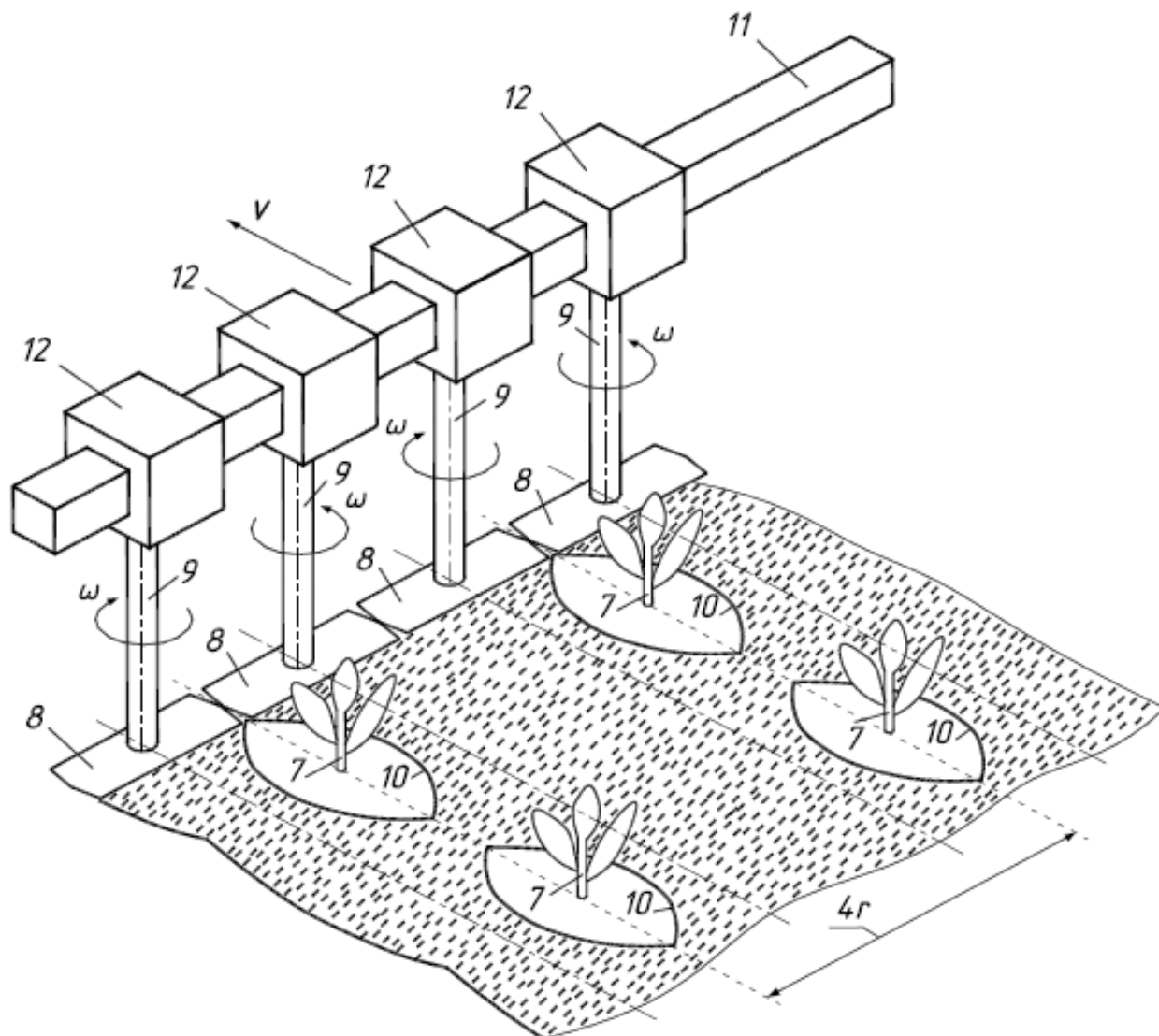


Рис. 3.25. Розміщення лап на брусі агромоста

Загальне передаточне число ланцюгової і конічної передач повинне бути таким, щоб виконувалася залежність $v=2r\omega$. Швидкість руху комплексу при цьому не матиме значення, оскільки при її збільшенні відповідно збільшуватиметься кутова швидкість обертання культиваторних лап, тобто величина необробленої області навколо рослини не залежить від швидкості руху комплексу, як і від його руху вперед чи назад.

Розрахунок параметра r культиваторної лапи 8 здійснюється наступним чином. Якщо відстань між рослинами в рядку задана і дорівнює a , то згідно рис. 3.21 можна записати $a=\pi r$, звідки $r=a/\pi$, де $\pi=3,14$. Ширина b ножа вибирається в залежності від бажаних розмірів необробленої області між рослинами (рис. 3.23).

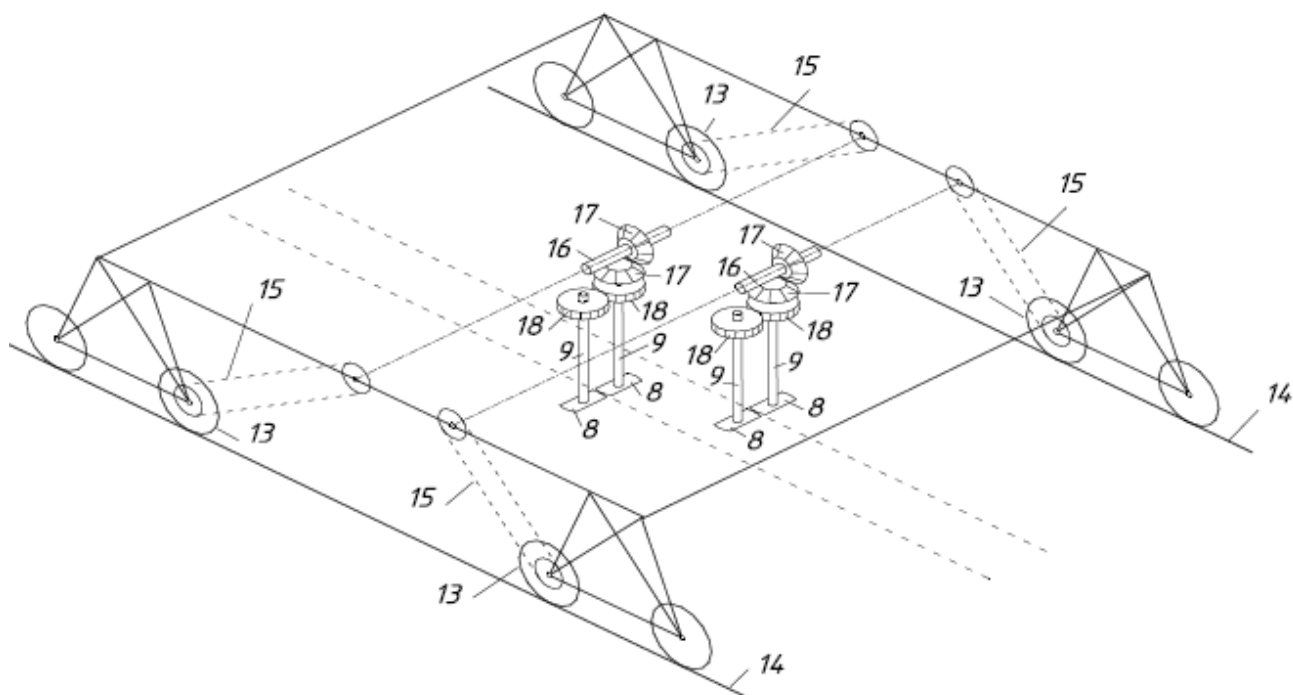


Рис. 3.26. Кінематична схема агромоста

Якщо культиваторну лапу замінити заточеним з усіх боків трикутним відсіком шириною $2r$, товщиною b , висотою h , рівній глибині залягання коренів культури (рис. 3.27), то агроміст може бути використаний для підгортання рослин. При цьому трикутний відсік, обертаючись навколо жорстко закріпленої осі при поступальному русі комплексу буде утворювати однопараметричну множину площин показану на рис. 3.4,б.

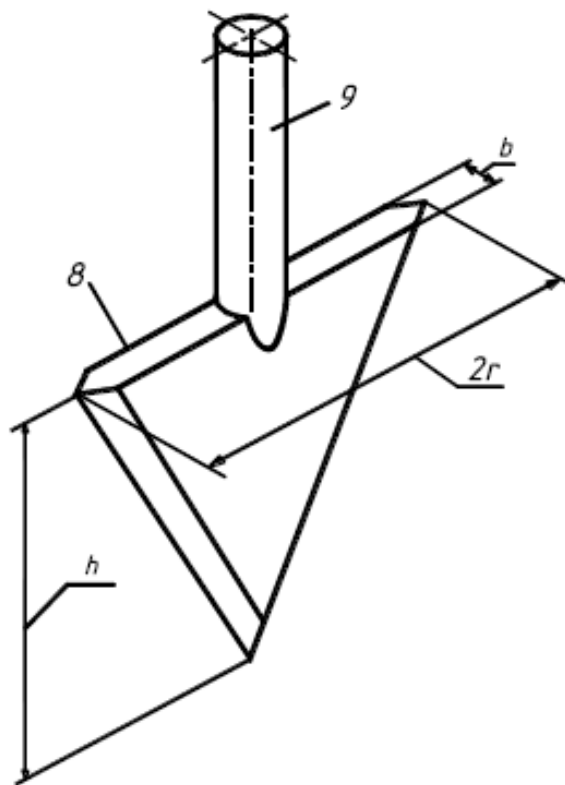


Рис. 3.27. Робий орган у формі трикутного відсіку для підгортання культур

Конструкції робочих органів, кріплення їх на агромоству і розрахунок всіх необхідних параметрів захищено патентом на корисну модель [105].

РОЗДІЛ 4.

КОНСТРУЮВАННЯ ТОРСІВ ЗА ЗАДАНОЮ НАПРЯМНОЮ КРИВОЮ, ЯКА Є ГЕОДЕЗИЧНОЮ ЛІНІЄЮ ПОВЕРХНІ

При конструюванні торсів однопараметричною множиною площин, яка утворюється обертанням площини навколо орта дотичної напрямної кривої при русі тригранника по ній, з'являється можливість надавати цій кривій певні властивості. В розділі 2 було розглянуто конструювання торса, віднесеного до ліній кривини. Для цього закономірність повороту площини описувалася виразом $\sigma + \varepsilon' = 0$. Звідси визначалася залежність $\varepsilon = \varepsilon(s)$. Через цю залежність визначається геодезична кривина напрямної кривої (1.43): $k_\varepsilon = k \cos \varepsilon$. Цей результат ми отримали за допомогою визначника (2.90). Можна поставити вимогу, щоб геодезична кривина була сталою: $k \cos \varepsilon = \text{const}$. Оскільки геодезична кривина напрямної кривої дорівнює кривині кривої на розгортці торса, то напрямна крива сталої геодезичної кривини перетвориться в коло на розгортці торса. Якщо ж геодезична кривина дорівнює напрямної кривої дорівнює нулю, то на розгортці торса вона перетвориться в пряму. Крива нульової геодезичної кривини називається геодезичною лінією поверхні.

4.1. Властивості геодезичних ліній розгортної поверхні

На фізичній моделі побудувати геодезичну криву на розгортній поверхні дуже просто: накреслити на аркуші паперу пряму лінію і потім зігнути цей аркуш у поверхню. Пряма лінія перетвориться у криву на поверхні і набуде якоїсь певної кривини. Проте ця кривина з'являється виключно за рахунок нормальної складової, а геодезична кривина залишається рівною нулю. Для того, щоб виконалася вимога $k \cos \varepsilon = 0$, необхідно кутів ε надати сталою значення: $\varepsilon = 90^\circ$. Отже напрямний вектор прямолінійної твірної торса буде знаходитися у спрямній площині тригранника Френе. Знайдемо, чому дорівнює кут γ (рис. 1.10). Спочатку за напрямну лінію візьмемо плоску криву. Згідно (2.215) $\cos \gamma = 0$, отже $\gamma = 90^\circ$. Це означає, що напрямний вектор прямолінійної твірної торса збігатиметься із ортом бінормалі тригранника Френе. Таким чином, торс, у якого плоска напрямна крива є геодезичною кривою, буде циліндром, у якого всі твірні перпендикулярні площині, в якій знаходиться площина. Якщо ми будь-яку циліндричну поверхню переріжемо площиною, перпендикулярною до твірних, то плоска крива перерізу буде геодезичною лінією циліндра.

Якщо напрямна крива просторова, то згідно формули (2.215) отримаємо:

$$\cos \gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \quad (4.1)$$

Таким чином, напрям вектора у спрямній площині тригранника залежить від співвідношення кривини і скруту напрямної кривої. Такий вектор у триграннику ми вже розглядали (рис. 1.9). Він є вектором кутової швидкості обертання тригранника. Отже прямолінійна твірна торса, для якого задана напрямна просторова крива є геодезичною лінією, спрямована паралельно вектору кутової швидкості миттєвого обертання тригранника при його русі по напрямній кривій. Для плоскої напрямної кривої цей вектор збігається із ортом бінормалі, бо саме навколо неї повертається тригранник при русі по кривій.

Спрямна площина, в якій знаходиться напрямний вектор прямолінійної твірної торса (рис. 1.9), буде дотична до нього. Нормальним вектором до цієї площини буде орт головної нормалі тригранника. Таким чином однопараметрична множина площин, яка огинає торс, заданий напрямною просторовою кривою, яка є геодезичною лінією для цього торса, утворюється просто: це множина положень спрямних площин тригранника.

Із точки на площині можна у всі сторони можна провести безліч прямих ліній. Аналогічно і на поверхні, зокрема, на торсі із точки у всі сторони можна провести геодезичні лінії. Вони є найкоротшою відстанню між двома точками на поверхні. На практиці геодезичну лінію між двома точками поверхні можна знайти за допомогою натягу між ними гнучкої розтяжної нитки, а в теоретичному плані - потрібно розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку. Однак слід мати на увазі, що найкоротша відстань теж може бути різною і залежатиме від кута в початковій точці. Сказане можна пояснити на прикладі кругового циліндра, для якого геодезичною кривою є гвинтова лінія. На розгортці вона перетворюється у пряму (рис. 1.4). Вона виходить із початкової точки під кутом β і за один повний оберт піднімається на певну висоту (крок гвинтової лінії). Проте можна підібрати такий кут руху із початкової точки, що вона зробить два повних оберти і попаде в ту ж саму точку. В обох випадках гвинтові лінії будуть геодезичними, але довжина їх буде різною.

Окрім найкоротшої відстані між точками поверхні, геодезична лінія характеризується тим, що її головна нормаль в кожній точці збігається із нормаллю до поверхні. Ця властивість використовується в задачах армування оболонок за допомогою ниток. Якщо нитка намотана по геодезичній лінії, то вона не сповзатиме зі свого місця при виникненні напружень в оболонці і працюватиме на розтяг. Ще одна властивість геодезичних ліній - кінематична. Якщо частинка на певній швидкості зустрічається із поверхнею, то далі вона рухається по геодезичній лінії, тобто здійснює інерційний рух, і тільки сила ваги частинки згодом змушує відхилитися її від цього курсу, причому чим більша швидкість частинки, тим більш точно її траєкторія руху наближається до геодезичної лінії. Ця властивість може бути покладена в основу проектування поверхонь робочих органів за бажаною траєкторією руху частинок технологічного матеріалу по них [54].

Намагання частинки рухатися по геодезичній лінії поверхні можна продемонструвати на прикладі руху частинки по похилій площині μ (рис. 4.1,а). Чим більша початкова швидкість V частинки при вступі її на площину в

заданому напрямі, тим більше траєкторія її руху наближається до прямої лінії, яка є геодезичною для площини. Складова сили ваги змушує частинку відхилитися від прямолінійного напрямку руху, однак при криволінійній траєкторії виникає відцентрова сила, яка змушує частинку наближатися до прямолінійного напрямку. Зважаючи на те, що для частинки масою m ця сила F_e має вираз $F_e = mV^2k$, де k – кривина траєкторії, стає зрозуміло, що вирішальну роль в формуванні траєкторії відіграє швидкість V руху частинки. Чим більша швидкість частинки, тим більше траєкторія її руху наближається до прямої лінії. Для поверхні відбувається те ж саме, з тією різницею, що відцентрова сила, яка змушує траєкторію частинки наближатися до геодезичної лінії, виникає від геодезичної складової кривини. Вона діє в дотичній до поверхні площині (рис. 4.1,б), тобто рух точки по поверхні в околі точки A можна розглядати, як рух по дотичній до поверхні площині μ . Наприклад, для циліндричної поверхні, яка показана на рис. 4.1,б, граничною траєкторією руху частинки буде гвинтова лінія, тобто геодезична для циліндра. У ґрунтообробних робочих органах частинки ґрунту змушені примусово рухатися по поверхні з приблизно сталою швидкістю, рівною швидкості руху агрегату. При великих швидкостях їх траєкторії практично можуть збігатися із геодезичними лініями. Тому для великих робочих швидкостей ґрунтообробних знарядь складання диференціальних рівнянь руху частинок можна замінити відшукуванням геодезичних ліній в заданому напрямі вступу частинки на поверхню [54].

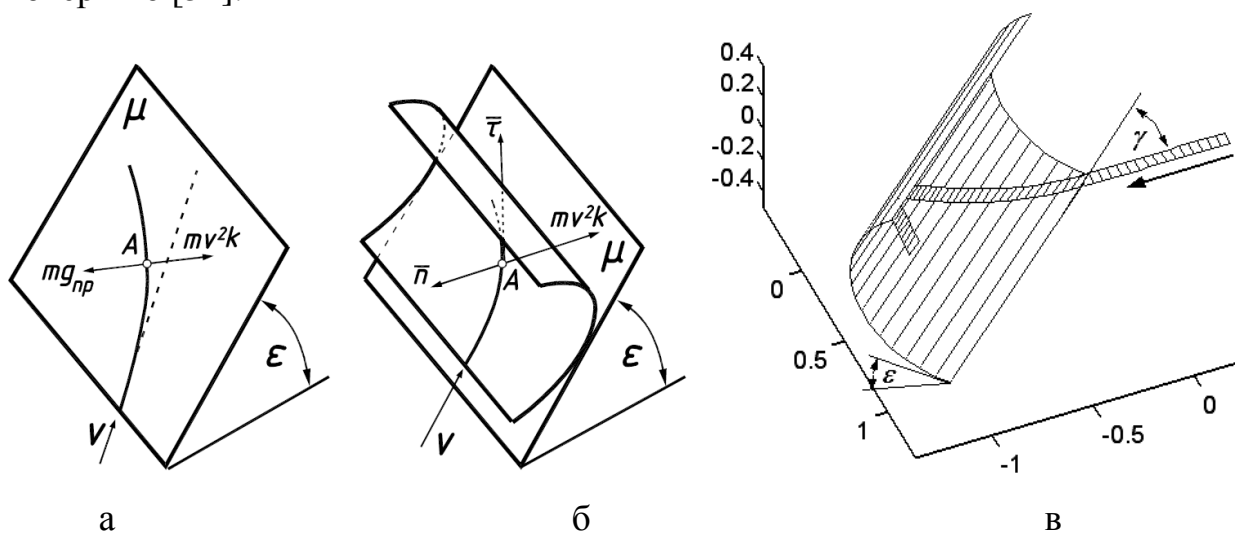


Рис. 4.1. Ілюстрації до руху частинки по геодезичних лініях на поверхні при їх великих швидкостях:

- а) рух частинки по похилій площині;
- б) рух частинки по внутрішній поверхні циліндра;
- в) визначення геодезичної лінії в заданому напрямі паперовою стрічкою

Ідея застосування кінематичних властивостей геодезичної лінії продемонстрована на прикладі руху гнучкої (наприклад, паперової) стрічки по поверхні циліндра в заданому напрямі (рис. 4.1,в). Стрічка, якій властива певна пружність, змушена рухатися по геодезичній лінії незалежно від її швидкості.

Ця властивість може бути використана для практичного знаходження геодезичної лінії на поверхні в заданому напрямі. Якщо скиба ґрунту має певну пружність (наприклад, переплетена корінням рослин) і вступає на полицю плуга, то вона подібно стрічці, намагатиметься рухатися по геодезичній лінії. Цьому сприятимуть два фактори: пружність скиби і швидкість її руху.

Ця властивість може бути покладена в основу проектування поверхонь робочих органів за бажаною траєкторією руху частинок технологічного матеріалу по них, тобто в розв'язуванні оберненої задачі – конструюванні поверхні за заданою геодезичною лінією [54].

4.2. Аналітичний опис торсів із геодезичною лінією на їх поверхні

В підрозділі (1.4) було розглянуто неперервне згинання кругового циліндра із просторовою кривою на ньому, яка перетворюється у коло на його розгортці (рис. 1.28). Знайдемо геодезичну кривину цієї кривої за формулою (1.45). Проекції одиничного вектора нормалі до поверхні циліндра (1.92), знайдені за формулою (1.46), мають вигляд:

$$\left\{ \sin(pv); \quad -\cos(pv); \quad 0 \right\}. \quad (4.2)$$

Нам потрібні проекції одиничного вектора нормалі до поверхні циліндра вздовж просторової кривої (1.95), яка описана у функції незалежної змінної t . Здійснивши перехід до змінної t за першим виразом (1.94), ми отримаємо проекції одиничного вектора нормалі до поверхні циліндра (1.92) вздовж просторової кривої (1.95):

$$\left\{ \sin \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \quad -\cos \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \quad 0 \right\}. \quad (4.3)$$

Перші похідні параметричних рівнянь (1.95) кривої на поверхні циліндра запишуться:

$$\begin{aligned} x' &= -R \sin t \cos \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\ y' &= -R \sin t \sin \left[\frac{p}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\ z' &= R \cos t. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Підстановкою виразів (4.4) у формулу (1.11) знаходимо похідну довжини дуги кривої (1.95):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R. \quad (4.5)$$

Знаходимо другі похідні, які входять до формули (1.45):

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{P}{r} \sin^2 t \sin \left[\frac{P}{r} (R \cos t + c_1) \right] - R \cos t \cos \left[\frac{P}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\ y'' &= \frac{P}{r} \sin^2 t \cos \left[\frac{P}{r} (R \cos t + c_1) \right] - R \cos t \sin \left[\frac{P}{r} (R \cos t + c_1) \right]; \\ z'' &= -R \sin t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Підстановка (4.3), (4.4), (4.6) і (4.5) з огляду на те, що $dt/ds=1/R$ дає значення геодезичної кривини кривої (1.95) на поверхні циліндра: $k_2=1/R$. Отриманий результат є очікуваним, оскільки він є кривиною кола радіуса R на розгортці циліндра і як такий, що не змінюється при неперервному згинанні циліндра.

Оскільки геодезична лінія торса на його розгортці перетворюється у пряму, то можна на розгортці через задану точку із координатами x_0, y_0 провести прямі лінії. Після згинання розгортки у торс ці прямі лінії перетворяться на геодезичні. Розглянемо це на прикладі конуса, описаного параметричними рівняннями (1.109). Вони дозволяють будувати проміжні положення при його згинанні зміною кута ε_{32} нахилу твірних. При $\varepsilon_{32}=\varepsilon$ ми отримаємо початкове положення конуса, при $\varepsilon_{32}=0$ – розгортку. Таким чином початкове положення конуса опишеться рівняннями:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{k} + u \cos \varepsilon \right) \cos (ks); \\ Y &= \left(\frac{1}{k} + u \cos \varepsilon \right) \sin (ks); \\ Z &= u \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Параметричні рівняння розгортки при $\varepsilon_{32}=0$ набувають вигляду:

$$\begin{aligned} X_p &= \left(\frac{1}{k \cos \varepsilon} + u \right) \cos (sk \cos \varepsilon); \\ Y_p &= \left(\frac{1}{k \cos \varepsilon} + u \right) \sin (sk \cos \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Параметричні рівняння прямої лінії на площині, яка проходить через точку з координатами x_0, y_0 під кутом α до осі OX , мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + w \cos \alpha ; \\y &= y_0 + w \sin \alpha ,\end{aligned}\tag{4.9}$$

де w – незалежна змінна, довжина прямої лінії.

Для того, щоб побудувати геодезичну лінію на поверхні конуса (4.7), потрібно знайти її внутрішнє рівняння. Оскільки і розгортка (4.8) і пряма (4.9) розташовані у спільній площині OXY , ми прирівнюємо відповідні рівняння:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k \cos \varepsilon} + u\right) \cos (sk \cos \varepsilon) &= x_0 + w \cos \alpha ; \\ \left(\frac{1}{k \cos \varepsilon} + u\right) \cos (sk \cos \varepsilon) &= y_0 + w \sin \alpha .\end{aligned}\tag{4.10}$$

Розв'язавши рівняння (4.10) як систему відносно u і s , отримаємо залежності $u=u(w)$ $s=s(w)$:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{1}{k \cos \varepsilon} + \sqrt{w^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2w(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)} ; \\ s &= \pm \frac{1}{k \cos \varepsilon} \text{Arc cos } \frac{x_0 + w \cos \alpha}{\sqrt{w^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2w(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)}}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Підстановка виразів (4.11) у (4.7) замість відповідних змінних дасть параметричні рівняння геодезичних ліній на поверхні конуса. На рис. 4.2 побудовані геодезичні лінії на конусі з кутом нахилу твірних $\varepsilon=60^\circ$.

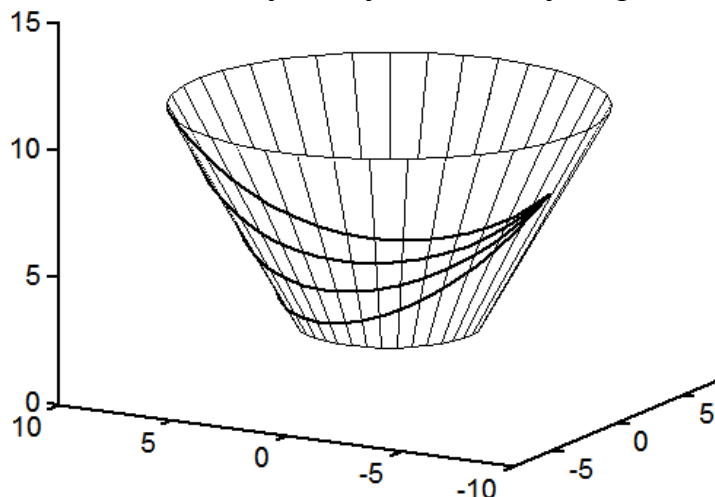


Рис. 4.2. Геодезичні лінії на поверхні конуса

Геодезичні лінії побудовані із точки на поверхні конуса в деяких напрямках із зміною кута α з інтервалом в 10^0 .

Якщо в рівняннях (4.9) за сталу прийняти w , а за змінну кут α , то вони опишуть коло радіуса w . Відповідно і у внутрішніх рівняннях (4.11) потрібно поступити так само. Тоді на поверхні конуса будуть побудовані замкнені криві – лінії сталої геодезичної кривини (рис. 4.3). Їх геодезична кривина відома: $k_g = 1/w$.

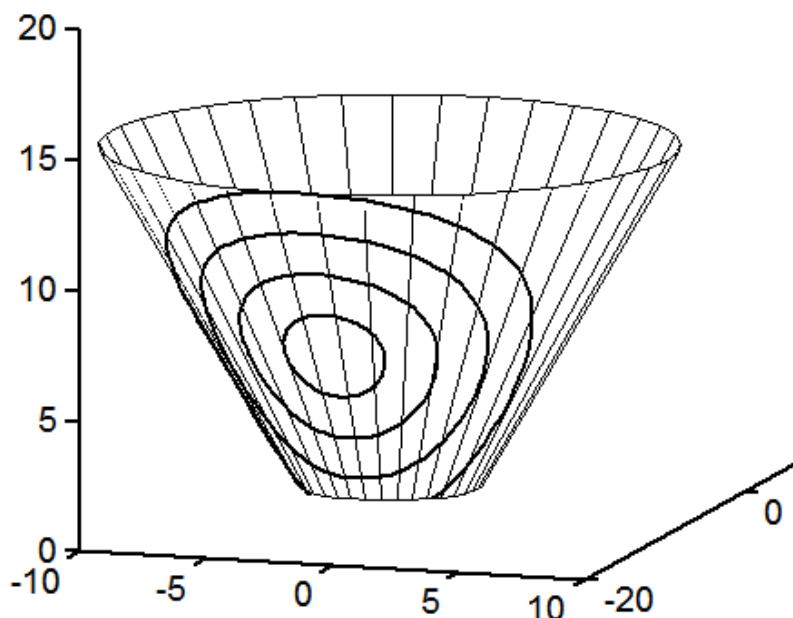


Рис. 4.3. Лінії сталої геодезичної кривини на поверхні конуса, в які перетворилися кола на його розгортці

Взагалі лінії сталої геодезичної кривини на торсі можуть бути і незамкненими. Прикладом служить торс-гелікоїд. Його гвинтові лінії на розгортці перетворюються у кола. Отже гвинтові лінії є лініями сталої геодезичної кривини і при цьому вони не замкнені.

В праці [109] показана можливість віднесення конуса до сітким ортогональних ліній із двох сімей взаємно перпендикулярних геодезичних ліній. Параметричні рівняння конуса наведені у вигляді:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \alpha; \\ Y &= r \sin \alpha; \\ Z &= r \operatorname{tg} \beta, \end{aligned} \tag{4.12}$$

де β – кут нахилу твірних конуса до основи;

r , α – незалежні змінні поверхні, причому r – радіус паралелі конуса на певній висоті Z , α – кут повороту точки конуса при її русі по паралелі.

На відміну від рівнянь конуса (4.7), в рівняннях (4.12) немає напрямної кривої. Через те розгортку потрібно шукати, виходячи не із незмінності геодезичної кривини кривої, а із незмінності закономірності зростання кута між прямолінійними твірними. Розгортка конуса (4.12) має вигляд:

$$X_p = \frac{r}{\cos \beta} \cos(\alpha \cos \beta);$$

$$Y_p = \frac{r}{\cos \beta} \sin(\alpha \cos \beta).$$
(4.13)

Задамо на розгортці пряму лінію паралельну, наприклад, осі OX_p на відстані b від неї ($Y_p=b$). Підставивши до останнього рівняння (4.13) замість Y_p значення b , одержимо внутрішнє рівняння прямої на розгортці (4.13) у вигляді:

$$r = \frac{b \cos \beta}{\sin(\alpha \cos \beta)}.$$
(4.14)

Тепер знайдемо на розгортці (4.13) ортогональну сітку прямих ліній, паралельних осям OX_p і OY_p . Прийемо наступні позначення:

$$\frac{r}{\cos \beta} = \rho; \quad \alpha \cos \beta = \varepsilon.$$
(4.15)

В такому випадку рівняння розгортки (4.13) запишуться наступним чином:

$$X_p = \rho \cos \varepsilon;$$

$$Y_p = \rho \sin \varepsilon.$$
(4.16)

Із перетворених рівнянь розгортки конуса (4.16) видно, що координатними лініями є концентричні кола і промені, що виходять із початку координат. Тобто маємо полярну систему координат. За відомими формулами переходу знаходимо залежності $\rho = \rho(X_p, Y_p)$ і $\varepsilon = \varepsilon(X_p, Y_p)$:

$$\rho = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2};$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{Y_p}{X_p}.$$
(4.17)

Підставивши вирази для ρ і ε із (4.17) в (4.15), розв'яжемо відносно r і α :

$$r = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2} \cos \beta;$$

$$\alpha = \frac{1}{\cos \beta} \operatorname{arctg} \frac{Y_p}{X_p}.$$
(4.18)

Рівняння (4.18) є внутрішніми рівняннями переходу від ортогональної сітки координатних ліній полярної системи до ортогональної сітки координатних ліній прямокутної системи. При підстановці (4.18) до (4.12) і (4.13) одержимо параметричні рівняння конуса і його розгортки відповідно, але вже із потрібною сіткою координатних ліній. Зокрема, параметричні рівняння конуса запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{X_p^2 + Y_p^2} \cos \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \operatorname{arctg} \frac{Y_p}{X_p} \right); \\ Y &= \sqrt{X_p^2 + Y_p^2} \cos \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \operatorname{arctg} \frac{Y_p}{X_p} \right); \\ Z &= \sqrt{X_p^2 + Y_p^2} \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Незалежними змінними в рівняннях (4.19) є X_p і Y_p . Координатні лінії на розгортці є прямими, причому одна сім'я паралельна осі OX , а друга – осі OY . На поверхні конуса вони утворюють ортогональну сітку геодезичних ліній. На рис. 4.4 за рівняннями (4.19) побудовано конус для $\beta = \pi/3$.

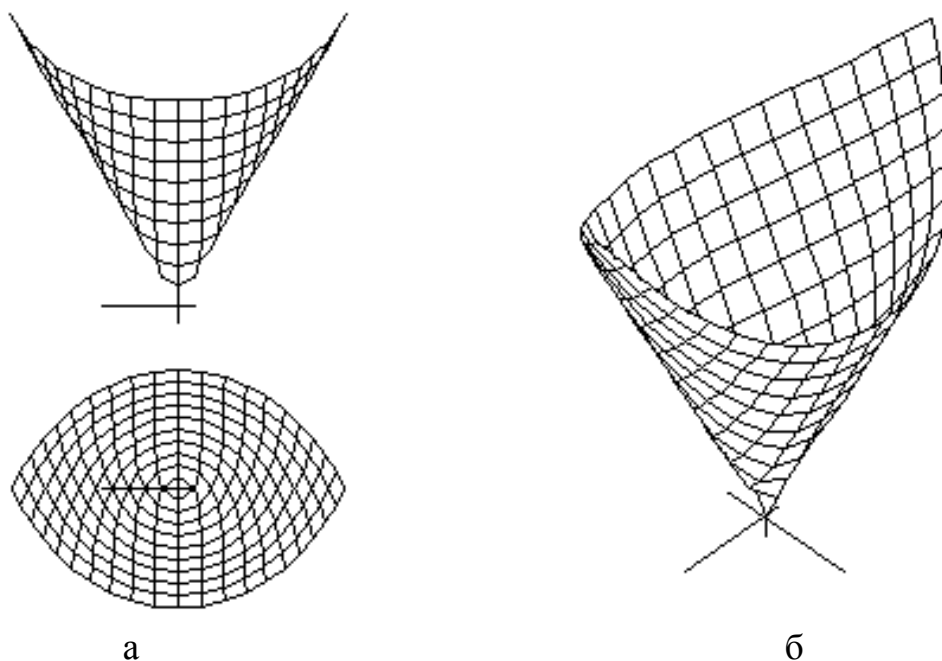


Рис. 4.4. Зображення конуса, у якого дві сім'ї взаємно ортогональних координатних ліній є геодезичними лініями:

- а) фронтальна і горизонтальна проекції поверхні;
- б) аксонометричне зображення

На прикладі конуса показано можливість задавати на розгортці прямі лінії і кола, які після згинання її у конус перетворюються у лінії сталої геодезичної

кривини, при цьому прямі, які є лініями нульової геодезичної кривини, перетворюються у геодезичні лінії на поверхні.

Розглянемо конструювання торса за заданою геодезичною лінією, за яку будемо брати просторову криву (для плоскої кривої це завжди будуть циліндричні поверхні, про що зазначалося раніше). Конструювання можна здійснювати двома способами: за допомогою однопараметричної множини дотичних площин, для яких нормальним вектором є орт головної нормалі супровідного тригранника напрямної кривої або ж за допомогою внутрішньої геометрії поверхонь. Розглянемо обидва способи на прикладі просторової кривої (2.84).

Перший спосіб. Нормальним вектором окремої площини із однопараметричної множини є вектор головної нормалі кривої (2.84), який заданий напрямними косинусами $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$ в (2.88):

$$\begin{aligned} N_x = \cos \alpha_n &= -\frac{\cos 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\ N_y = \cos \beta_n &= \frac{\sin 2s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}; \\ N_z = \cos \gamma_n &= -\frac{\sin s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Напрячний вектор прямолінійної твірної торса будемо шукати за формулою (2.32). Для цього знаходимо нормальний вектор нескінченно близької суміжної площини диференціюванням вектора (4.20):

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{ds} &= \frac{(6 - \cos 2s)\sin 2s}{2(1 + \sin^2 s)^{3/2}}; \\ \frac{dN_y}{ds} &= \frac{12 \cos 2s - \cos 4s - 3}{4(1 + \sin^2 s)^{3/2}}; \\ \frac{dN_z}{ds} &= -\frac{\cos s}{(1 + \sin^2 s)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Напрячний вектор l , m , n прямолінійної твірної торса знаходимо, як векторний добуток векторів (4.20) і (4.21). Після приведення до одиничного, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{4 \sin^3 s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}; \\
 m &= \frac{3 \cos s - \cos 3s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}; \\
 n &= \frac{4}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Параметричні рівняння торса, який проходить через просторову криву (2.84) і яка є для нього геодезичною лінією, згідно (1.114) запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= 0,5 \cos^2 s + u \frac{4 \sin^3 s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}; \\
 Y &= 0,5(s - \sin s \cos s) + u \frac{3 \cos s - \cos 3s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}; \\
 Z &= \sin s + u \frac{4}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

На рис. 4.5 за рівняннями (4.24) побудовано відсік торса із фрагментом ребра звороту.

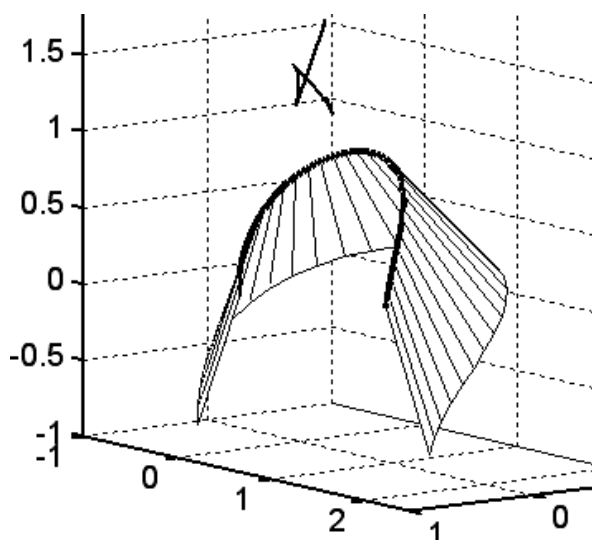


Рис. 4.5. Відсік торса, для якого напрямна крива є геодезичною лінією

Побудуємо розгортку відсіку торса, зображеного на рис. 4.5. Напрямна крива перетвориться на розгортці в пряму лінію. Її довжина буде такою ж, як і на торсі. Якби напрямна крива була задана у функції довільного параметра, то її довжину потрібно було б визначати за відомою формулою. В нашому випадку вона задана у функції натурального параметра s , тому рівняння розгортки спрощується, оскільки не потрібно інтегрувати вираз (1.11) для знаходження довжини дуги напрямної кривої:

$$\begin{aligned} X_p &= s + u \cos \varphi ; \\ Y_p &= u \sin \varphi , \end{aligned} \quad (4.24)$$

де φ – кут, під яким прямолінійна твірна торса перетинає напрямну криву.

Вираз для знаходження цього кута знайдемо як кут між двома векторами: напрямним вектором (4.22) прямолінійної твірної торса і дотичним вектором до напрямної кривої (2.84). Він знаходиться диференціюванням рівнянь (2.84) і у виразах (2.88) позначений через $\cos \alpha_\tau$, $\cos \beta_\tau$, $\cos \gamma_\tau$. Оскільки обидва вектори є одиничними, то косинус кута між ними визначиться із виразу:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= l \cos \alpha_\tau + m \cos \beta_\tau + n \cos \gamma_\tau = \\ &= -\frac{4 \sin^4 s \cos s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}} + \frac{3 \cos s - \cos 3s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}} \sin^2 s + \frac{4 \cos s}{\sqrt{26 - 6 \cos 2s}} = \\ &= \frac{9 \cos s - \cos 3s}{2\sqrt{26 - 6 \cos 2s}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

За відомим косинусом кута φ знаходимо його синус і підставляємо в (4.24). Параметричні рівняння розгортки запишуться:

$$\begin{aligned} X_p &= s + u \frac{9 \cos s - \cos 3s}{2\sqrt{26 - 6 \cos 2s}} ; \\ Y_p &= u \frac{(\cos 2s - 3)^{3/2}}{\sqrt{12 \cos 2s - 52}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

На рис. 4.6 за рівняннями (4.26) побудовано розгортку відсіку торса, зображеного на рис. 4.5.

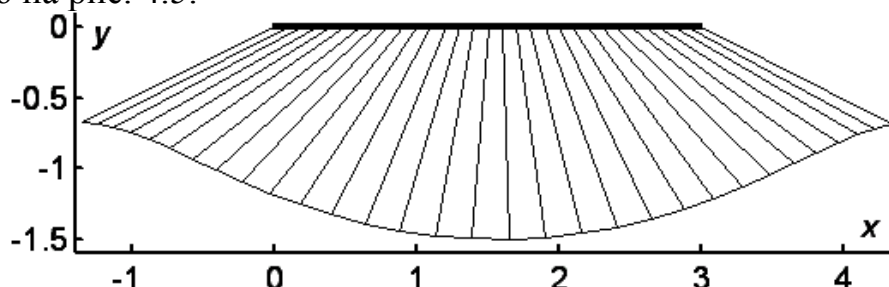


Рис. 4.6. Розгортка відсіку торса, зображеного на рис. 4.5

Другий спосіб. Як зазначалося раніше, прямолінійна твірна торса, у якого напрямна крива є геодезичною лінією, спрямована вздовж вектора миттєвої осі обертання тригранника (рис. 1.9). Цей вектор розташований в спрямній площині тригранника і його положення в ній залежить від співвідношення кривини кривини і скруту напрямної кривої в поточній точці. Якщо позначити кут між вектором миттєвої осі обертання тригранника ω (тобто твірною торса) і ортом τ , то можна записати:

$$\cos \varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \quad (4.27)$$

Таким чином проекції одиничного напрямного вектора прямолінійної твірної на орти тригранника запишуться:

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \\ \rho_n &= 0; \\ \rho_b &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Результат (4.28) можна отримати із вразів (2.82) при підстановці в них значення кута $\varepsilon=90^\circ$. Саме при $\varepsilon=90^\circ$ дотична до торса площина (рис. 1.10) стає спрямною площиною тригранника, про що йшлося раніше.

Знайдемо проекції вектора (4.28) на осі нерухомої системи координат. Підставимо (4.28) в (2.86) і отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_x = l &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_b; \\ \rho_y = m &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_b; \\ \rho_z = n &= \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_b. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Підставимо у (4.29) вирази кривини і скруту із (2.85), напрямних косинусів із (2.88) і після спрощень отримаємо результат, який повністю збігається із (4.22).

Побудову розгортки здійснюємо за рівняннями (4.24), причому для визначення синуса і косинуса кута φ скористаємося виразами (4.27). Підстановка в них кривини і скруту із (2.85) дає точно такий же результат, як і (4.25), отриманий в першому способі. Таким чином, обидва способи приводять до однакових результатів.

Розглянемо ще один приклад побудови торса, у якого геодезичною лінією буде крива, розташована на круговому циліндрі. Її форма залежить від кута підйому β . При $\beta=const$ циліндричною лінією буде гвинтова лінія. Задаючи залежність $\beta=\beta(s)$, де s – довжина дуги, можна будувати різні циліндричні лінії. Це, в свою чергу, дає можливість отримати узагальнені параметричні рівняння торса, до яких входить залежність $\beta=\beta(s)$.

Параметричні рівняння лінії на поверхні кругового циліндра з радіусом R основи мають вигляд [114]:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\y &= R \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\z &= \int \sin \beta \, ds .\end{aligned}\tag{4.30}$$

Побудову торса будемо здійснювати другим способом. Оскільки прямолінійна твірна розташована в спрямній площині тригранника Френе і її положення залежить від кривини і скруту кривої в даній точці, нам потрібна знайти перші, другі і треті похідні рівнянь (4.30). Вони мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}x' &= -\cos \beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\y' &= \cos \beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\z' &= \sin \beta; \\x'' &= \beta' \sin \beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) - \frac{1}{R} \cos^2 \beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\y'' &= \beta' \sin \beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) - \frac{1}{R} \cos^2 \beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\z'' &= \beta' \cos \beta; \\x''' &= \frac{3\beta'}{2R} \sin 2\beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) + \\&\quad + \left(\frac{1}{R^2} \cos^3 \beta + \beta'^2 \cos \beta + \beta'' \sin \beta \right) \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\y''' &= \frac{3\beta'}{2R} \sin 2\beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) - \\&\quad - \left(\frac{1}{R^2} \cos^3 \beta + \beta'^2 \cos \beta + \beta'' \sin \beta \right) \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right); \\z''' &= \beta'' \cos \beta - \beta'^2 \sin \beta .\end{aligned}\tag{4.31}$$

Знайдемо кривину k і скрут σ кривої (4.30) за формулами (1.13), (1.14), оскільки крива задана параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги:

$$k = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta}; \quad (4.32)$$

$$\sigma = \frac{(R^2 \beta'' \operatorname{ctg} \beta + 3R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta) \sin 2\beta}{2R(R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta)}. \quad (4.33)$$

За формулами (2.87) знаходимо необхідні напрямні косинуси (згідно формул (4.29) їх потрібно шість):

$$\cos \alpha_\tau = -\cos \beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right);$$

$$\cos \beta_\tau = \cos \beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right);$$

$$\cos \gamma_\tau = \sin \beta;$$

$$\cos \alpha_b = \frac{1}{\sqrt{R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta}} \left[\begin{array}{l} R \beta' \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) + \\ + \sin \beta \cos^2 \beta \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) \end{array} \right];$$

$$\cos \beta_b = \frac{1}{\sqrt{R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta}} \left[\begin{array}{l} R \beta' \sin \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) - \\ - \sin \beta \cos^2 \beta \cos \left(\frac{1}{R} \int \cos \beta \, ds \right) \end{array} \right]; \quad (4.34)$$

$$\cos \gamma_b = \frac{\cos^3 \beta}{\sqrt{R^2 \beta'^2 + \cos^4 \beta}}.$$

Узагальнені параметричні рівняння торса, для якого циліндрична крива (4.30) є геодезичною лінією, запишуться:

$$\begin{aligned}
X &= R \cos \left(\frac{l}{R} \int \cos \beta \, ds \right) + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_b \right); \\
Y &= R \sin \left(\frac{l}{R} \int \cos \beta \, ds \right) + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_b \right); \\
Z &= \int \sin \beta \, ds + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_b \right),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Для того, щоб побудувати поверхню, необхідно задати залежність $\beta = \beta(s)$. Програма для побудови поверхні теж складається в загальному вигляді. Для конкретної поверхні вводяться вирази $\beta = \beta(s)$, їх похідні та та інтеграли, що входять до рівнянь (12). Розглянемо приклади.

Приклад 1. $\beta = \text{const}$. Зважаючи на те, що $\beta' = \beta'' = 0$ вирази для кривини (4.32) і скруту (4.33) набувають вигляду:

$$k = \frac{\cos^2 \beta}{R}; \tag{4.36}$$

$$\sigma = \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}. \tag{4.37}$$

Напрямні косинуси (4.34) запишуться:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_\tau &= -\cos \beta \sin \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
\cos \beta_\tau &= \cos \beta \cos \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
\cos \gamma_\tau &= \sin \beta; \\
\cos \alpha_b &= \sin \beta \sin \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
\cos \beta_b &= -\sin \beta \cos \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
\cos \gamma_b &= \cos \beta.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Підстановка виразів (4.36), (4.37), (4.38) у (4.35) дасть параметричні рівняння поверхні, для якої гвинтова лінія буде геодезичною:

$$\begin{aligned}
 X &= R \cos \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
 Y &= R \sin \left(\frac{\cos \beta}{R} s \right); \\
 Z &= s \sin \beta + u.
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Як і слід було очікувати, поверхнею виявився циліндр, у якого прямолінійні твірні паралельні осі OZ .

Рівняння розгортки торсів, описаних параметричними рівняннями (4.35), теж є узагальненими і мають вигляд (4.24), де вирази для синуса і косинуса кута φ наведені в (4.27). Для циліндра (4.39) параметричні рівняння розгортки запишуться:

$$\begin{aligned}
 X_p &= s + u \sin \beta; \\
 Y_p &= u \cos \beta.
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Циліндр, у якого всі гвинтові лінії є геодезичними і які на розгортці перетворюються на прямі, показано на рис. 1.27.

Приклад 2. $\beta=as$, де a – стала величина. Тоді $\int \cos \beta ds = \frac{1}{a} \sin as$;

$\int \sin \beta ds = -\frac{1}{a} \cos as$; $\beta' = a$; $\beta'' = 0$. Підставивши ці вирази в (4.32), (4.33), (4.34) і далі у (4.35), ми отримаємо рівняння поверхні, яка побудовна на рис. 4.7.

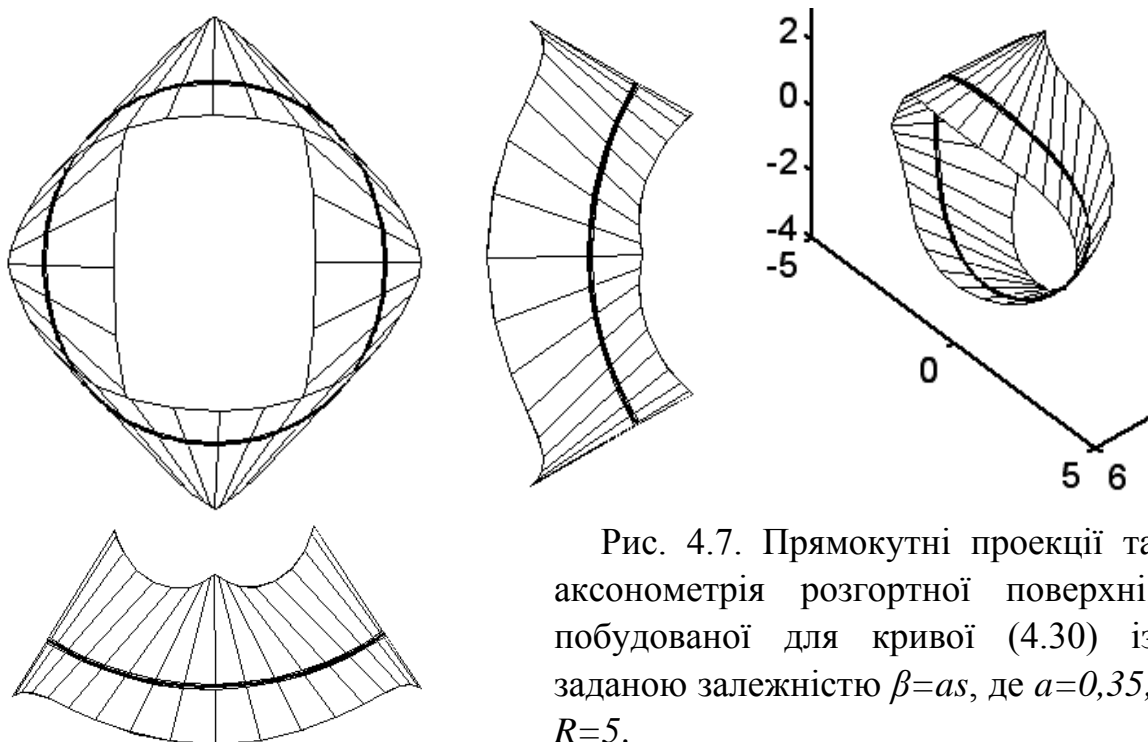


Рис. 4.7. Прямокутні проєкції та аксонометрія розгортної поверхні, побудованої для кривої (4.30) із заданою залежністю $\beta=as$, де $a=0,35$; $R=5$.

На рис. 4.8 побудовано розгортку смуги торса, зображеного на рис. 4.7.

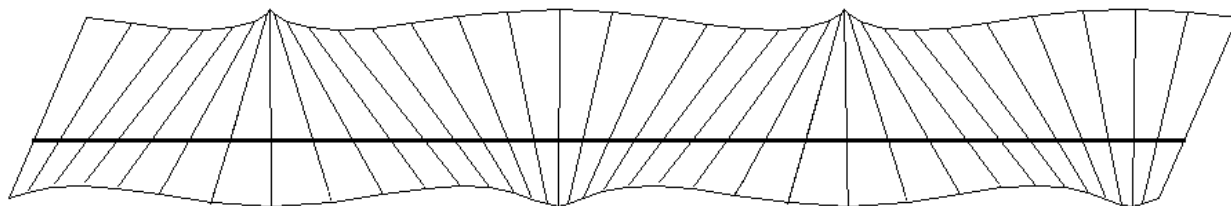


Рис. 4.8. Розгортка смуги торса, зображеного на рис. 4.7

Приклад 3. При $\beta = \text{Arctg}(as)$ побудовано поверхню на рис. 4.9. Горизонтальною проекцією геодезичної лінії в обох останніх прикладах є дуга кола, оскільки сама крива розташована на коловому циліндрі.

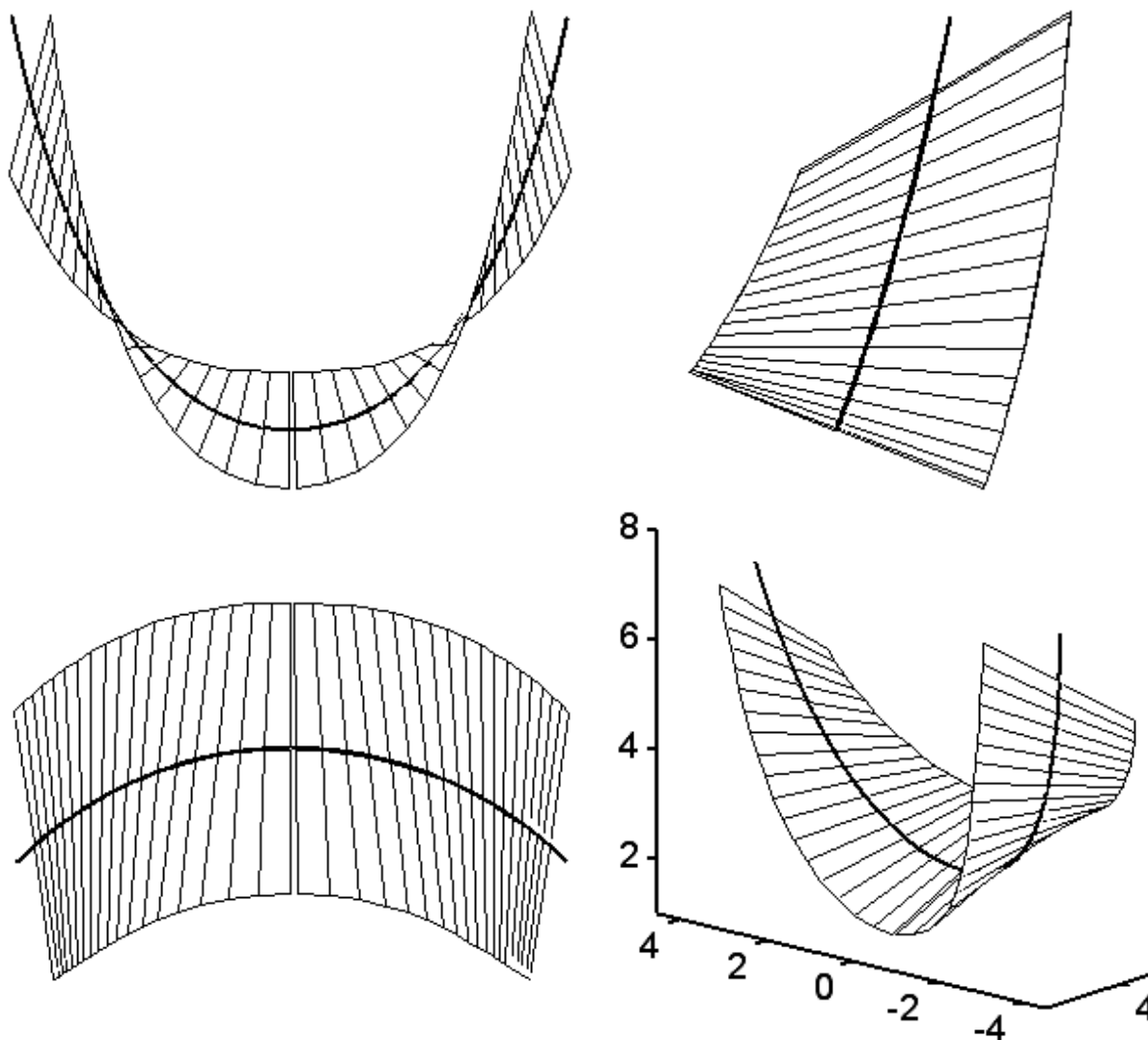


Рис. 4.9. Поверхня, для якої крива (4.30) при $\beta = \text{Arctg}(as)$ є геодезичною лінією; $a=0,5$; $R=5$

Розгортка смуги торса, показаного на рис. 4.9, побудована на рис. 4.10.

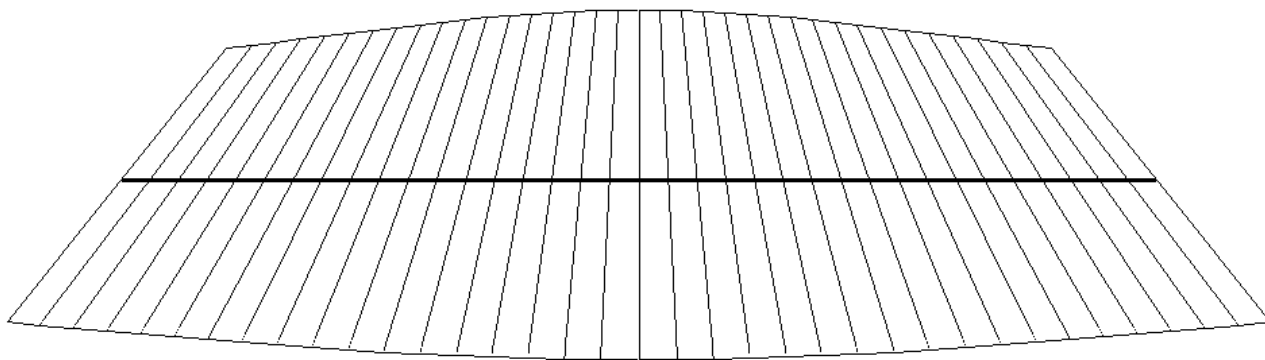


Рис. 4.10. Розгортка смуги торса, показаного на рис. 4.9

4.3. Проектування полиці плуга із розгортної поверхні за заданою геодезичною лінією – граничною траєкторією руху скиби

Робота плуга залежить від типу полиці, що на ньому встановлена. Вона може бути циліндричною, культурною, напівгвинтовою, гвинтовою [25]. Від неї залежить ступінь кришіння, перевертання, укладання скиби. Існують способи проектування полиць названих типів. Якщо ґрунт пружний, задернований, то його рух по полиці відрізняється від руху скиби із крихкого ґрунту. Траєкторію руху пружної скиби по полиці плуга можна з деяким наближенням порівняти із рухом паперової стрічки, якщо її примусово подавати на полицю в заданому напрямі (рис. 4.1,в). Реальна траєкторія скиби відрізнятиметься від описаної на прикладі паперової стрічки, оскільки під дією сили ваги вона відхилятиметься вниз по полиці. Таким чином, описану траєкторію можна вважати за граничну траєкторію руху скиби, яка може бути для неї реальною у випадку абсолютно пружного ґрунту. Відповідно проектування полиці можна вести за бажаною граничною траєкторією руху скиби.

Метод проектування полиці із розгортної поверхні за заданою геодезичною лінією запропонував проф. Л.В. Гячев [42]. Якщо взяти точку на поверхні, то у заданому напрямку пройде тільки одна геодезична лінія. Аналітичне знаходження геодезичних на поверхні зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку. Проектування полиці плуга за заданою геодезичною лінією, якою є узагальнена гвинтова лінія із сталим відношенням кривини до скруту, здійснено в праці [26].

Важливою властивістю геодезичних ліній є те, що із ними зв'язаний рух матеріальних частинок по поверхнях. Чим більша швидкість руху матеріальної частинки по поверхні, тим більшою мірою її траєкторія наближається до геодезичної лінії поверхні. Якщо уявити таку ситуацію, що на частинку не діє сила гравітації і вона рухається прямолінійно (наприклад, в стані невагомості) то при зустрічі із поверхнею вона змінить свою траєкторію і буде рухатися по геодезичній лінії поверхні. Акад. П.М. Василенко вказував на те, що у випадку руху матеріальної точки по інерції замість розв'язання диференціального рівняння руху точки для визначення траєкторії цього руху можна скористатися розв'язанням диференціального рівняння геодезичної лінії [20]. Сила ваги, що

діє на частинку, вносить свої корективи в її рух по поверхні. Але зважаючи на те, що вага частинки постійна, а швидкість можна змінювати, то виходить, що із зростанням швидкості частинки відцентрова сила, що на неї діє і змушує частинку рухатися по геодезичній лінії, зростає в квадратичній залежності за формулою $F = mV^2k$, де m – маса частинки, V – швидкість, k – кривина траєкторії в поточній точці. Тоді при великих швидкостях відцентрова сила зростає настільки, що масою частинки можна певною мірою знехтувати, тобто траєкторія руху частинки наближається до геодезичної лінії поверхні. Знаючи геодезичну лінію полиці, можна стверджувати, що при високих швидкостях оранки або ж при пружному ґрунті траєкторія руху скиби наближатиметься до геодезичної лінії, але не може проходити вище. Таким чином, знаходження геодезичних ліній поверхонь ґрунтообробних органів і інших знарядь, по яких рухається оброблюваний матеріал, дає уявлення про можливі траєкторії руху по них цього матеріалу.

Якщо взяти певну просторову криву і поставити завдання побудувати таку розгортну поверхню, щоб дана крива була для цієї поверхні геодезичною лінією, то таку поверхню можна побудувати тільки одну. Отже просторова крива однозначно задає розгортну поверхню, для якої вона буде геодезичною лінією. Вибір просторової кривої за основу проектування полиці з розгортної поверхні доцільний з технологічних міркувань, оскільки дає змогу забезпечити потрібну траєкторію руху скиби. З іншої сторони, акад. П.М. Заїка вказує на те, що проектування полиць із розгортних поверхонь становить особливий інтерес, оскільки деформація скиби на такій поверхні відбувається одноманітно вздовж кожної твірної і це не призводить до її розривів і складок [45]. Проф. Л.В. Гячев [42] зауважує, що вид бажаної закономірності зміни кривини по дузі траєкторії для полиць різного типу нині не вивчений і потребує експериментальних досліджень. Як один із можливих варіантів, Л.В. Гячев запропонував за граничну траєкторію руху скиби (геодезичну лінію поверхні) брати узагальнену гвинтову лінію, у якої відношення кривини до скруту є величина стала. Ми розглянемо можливість проектування полиці за заданою гвинтовою лінією на круговому циліндрі, яка буде для полиці геодезичною. Зміною форми кривої можна отримати відповідну розгортну поверхню полиці, для якої ця крива буде геодезичною лінією, тобто граничною траєкторією руху скиби.

В розумінні широкого загалу гвинтова лінія – це зазвичай лінія на поверхні кругового циліндра, що є основою утворення гвинтових поверхонь сталого кроку, які широко використовуються під технічною назвою шнеків, а також як формоутворюючі поверхні різьб (нарізей) різноманітного призначення та інших гвинтових пристроїв. В загальному випадку лінію на поверхні кругового циліндра з основою радіуса R і віссю Ox можна записати параметричними рівняннями у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= f(t); \\ y &= -R \sin(t); \\ z &= -R \cos(t), \end{aligned} \tag{4.41}$$

де t – незалежна змінна (кут повороту точки кривої навколо осі OX циліндра з основою R);

$f(t)$ – закономірність переміщення точки вздовж осі OX при одночасному обертальному русі навколо цієї осі.

Знаки „-“ в рівняннях (4.41) вказують на те, що поворот точки при утворенні лінії на поверхні циліндра відбувається за годинниковою стрілкою при спостереженні її руху із додатнього напрямку осі OX . Це має значення при конструюванні відсіку поверхні полиці.

Гвинтову лінію сталого кроку отримаємо із рівнянь (4.41) при лінійній залежності $f=c \cdot t$, де c – стала величина. Її приймемо за геодезичну криву поверхні полиці плуга, яку потрібно спроектувати, тобто за граничну траєкторію руху скиби. Такою поверхнею буде поверхня кругового циліндра. Її параметричні рівняння (4.39) були отримані нами, коли лінія на поверхні була задана у функції натурального параметра – довжини дуги кривої. В нашому випадку незалежною змінною є кут повороту t , однак спосіб побудови поверхні залишається незмінним. Сталу c визначимо із припущення, що паперова стрічка, яка моделює рух частини скиби (рис. 4.1,в), вступаючи на циліндричну поверхню під кутом γ до леза лемеша, далі рухатиметься по гвинтовій (геодезичній) лінії, перетинаючи твірні циліндра під цим же кутом γ .

Гвинтова лінія на циліндрі після його розгортання на площину опишеться параметричними рівняннями прямої у вигляді:

$$\begin{aligned} x_p &= f = c \cdot t; \\ y_p &= R \cdot t. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Отже на розгортці потрібно забезпечити такий же кут γ , під яким гвинтова лінія (4.41) перетинатиме твірні циліндра, які паралельні осі OX . Виходячи із умови, що $y'_p/x'_p = \operatorname{tg} \gamma$, знайдемо чисельне значення сталої c : $c = R \operatorname{ctg} \gamma$. На рис. 4.11 гвинтова лінія циліндра є прямою на розгортці, позначена цифрою 1 і нахилена до осі OX_p (твірних циліндра) під кутом γ .

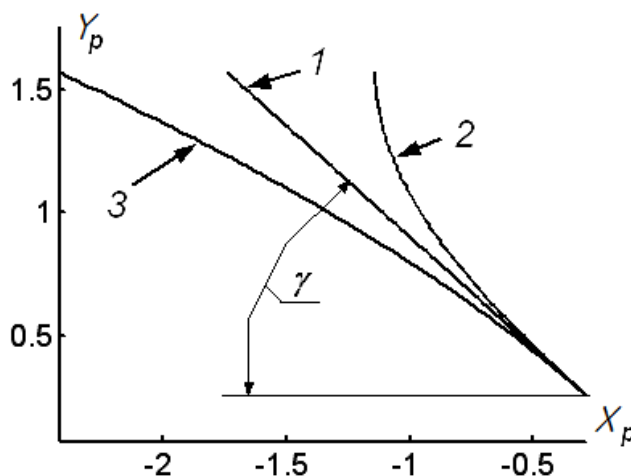


Рис. 4.11. Лінії на розгортці кругового циліндра, які є основою для проектування поверхонь полиць

На рис. 4.1, в циліндричний відсік обмежений дугами кіл – кривими поперечного перерізу циліндра. Для того, щоб леміш був нахилений до дна борозни під кутом ε , початкове значення змінної t в рівняннях кривої (4.41) повинне бути рівне цьому куту, тобто $t_0 = \varepsilon$.

Для конструювання поверхні, для якої крива (4.1) повинна бути геодезичною лінією, скористаємося теорією внутрішньої геометрії поверхонь, тобто другим способом, описаним в підрозділі 4.2. Для цього потрібно мати перші, другі і треті похідні рівнянь напрямної кривої (4.41). Диференціюємо їх по змінній t і отримуємо:

$$\begin{aligned} x' &= f'; & y' &= -R \cos(t); & z' &= R \sin(t); \\ x'' &= f''; & y'' &= R \sin(t); & z'' &= R \cos(t); \\ x''' &= f'''; & y''' &= R \cos(t); & z''' &= -R \sin(t). \end{aligned} \quad (4.43)$$

За формулами (1.9) і (1.10) знаходимо вирази кривини і скруту кривої (4.1):

$$k = \frac{R \sqrt{R^2 + f'^2 + f''^2}}{(R^2 + f'^2)^{3/2}}; \quad (4.44)$$

$$\sigma = - \frac{f' + f'''}{R^2 + f'^2 + f''^2}. \quad (4.45)$$

За формулами (2.87) знаходимо вирази необхідних напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_\tau &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{f'}{\sqrt{R^2 + f'^2}}; \\ \cos \beta_\tau &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{-R \cos t}{\sqrt{R^2 + f'^2}}; \\ \cos \gamma_\tau &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{R \sin t}{\sqrt{R^2 + f'^2}}; \\ \cos \alpha_b &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = - \frac{R}{\sqrt{R^2 + f'^2 + f''^2}}; \\ \cos \beta_b &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{f'' \sin t - f' \cos t}{\sqrt{R^2 + f'^2 + f''^2}}; \\ \cos \gamma_b &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{f'' \cos t + f' \sin t}{\sqrt{R^2 + f'^2 + f''^2}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Параметричні рівняння торса, для якого крива (4.41) є геодезичною кривою, запишуться:

$$\begin{aligned} X &= f + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \alpha_b \right); \\ Y &= -R \sin t + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \beta_b \right); \\ Z &= -R \cos t + u \left(\frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_\tau + \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \cos \gamma_b \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

У випадку, коли за геодезичну криву прийнято циліндричну лінію (4.41) із залежністю $f=c \cdot t$, тобто гвинтову лінію сталого кроку, то відповідною поверхнею буде круговий циліндр, що проходить через цю лінію і має твірні, паралельні осі OX .

Наступний етап – потрібно правильно зорієнтувати поверхню полиці в нерухомій системі координат $OXYZ$ по відношенню до її напрямку руху у цій системі. Якщо прийняти, що поверхня полиці рухається в напрямі осі OY , а скиба – назустріч їй по поверхні, як показано на рис. 4.1,в, то всі твірні циліндра разом із геодезичною лінією потрібно повернути в горизонтальних площинах на кут $(\gamma - 90^\circ)$. Після цього параметричні рівняння поверхні полиці запишуться:

$$\begin{aligned} X_n &= X \cos(\gamma - 90^\circ) - Y \sin(\gamma - 90^\circ); \\ Y_n &= X \sin(\gamma - 90^\circ) + Y \cos(\gamma - 90^\circ); \\ Z_n &= Z, \end{aligned} \quad (4.48)$$

в яких вирази для X , Y , Z взято із (4.47).

За рівняннями (4.48) було побудовано відсік циліндричної поверхні при $\gamma=42^\circ$ і $R=0,5$. Сталу c знайшли із виразу $c = R \operatorname{ctg} \gamma = 0,5553$. На рис. 4.12 в проєкціях показано циліндричну поверхню, обмежену з боків гвинтовими лініями сталого кроку, що є для поверхні геодезичними. Стрілками показано напрям вступу скиби на поверхню. Геодезична лінія, яка є верхньою граничною траєкторією руху скиби, починається із передньої точки леза лемеша і зображена потовщеною. Цією лінією в даному випадку є частина гвинтової лінії сталого кроку на циліндрі, вісь якого повернута на кут γ по відношенню до осі OY (рис. 4.12). На горизонтальній проєкції показано кут γ , який є кутом установки леза лемеша до стінки борозни. Якби скиба була абсолютно пружною і мала ширину леза, то вона при русі по зображеному відсіку поверхні набула б його форми, тобто проєкції поверхні можна було б вважати за проєкції скиби нульової товщини.

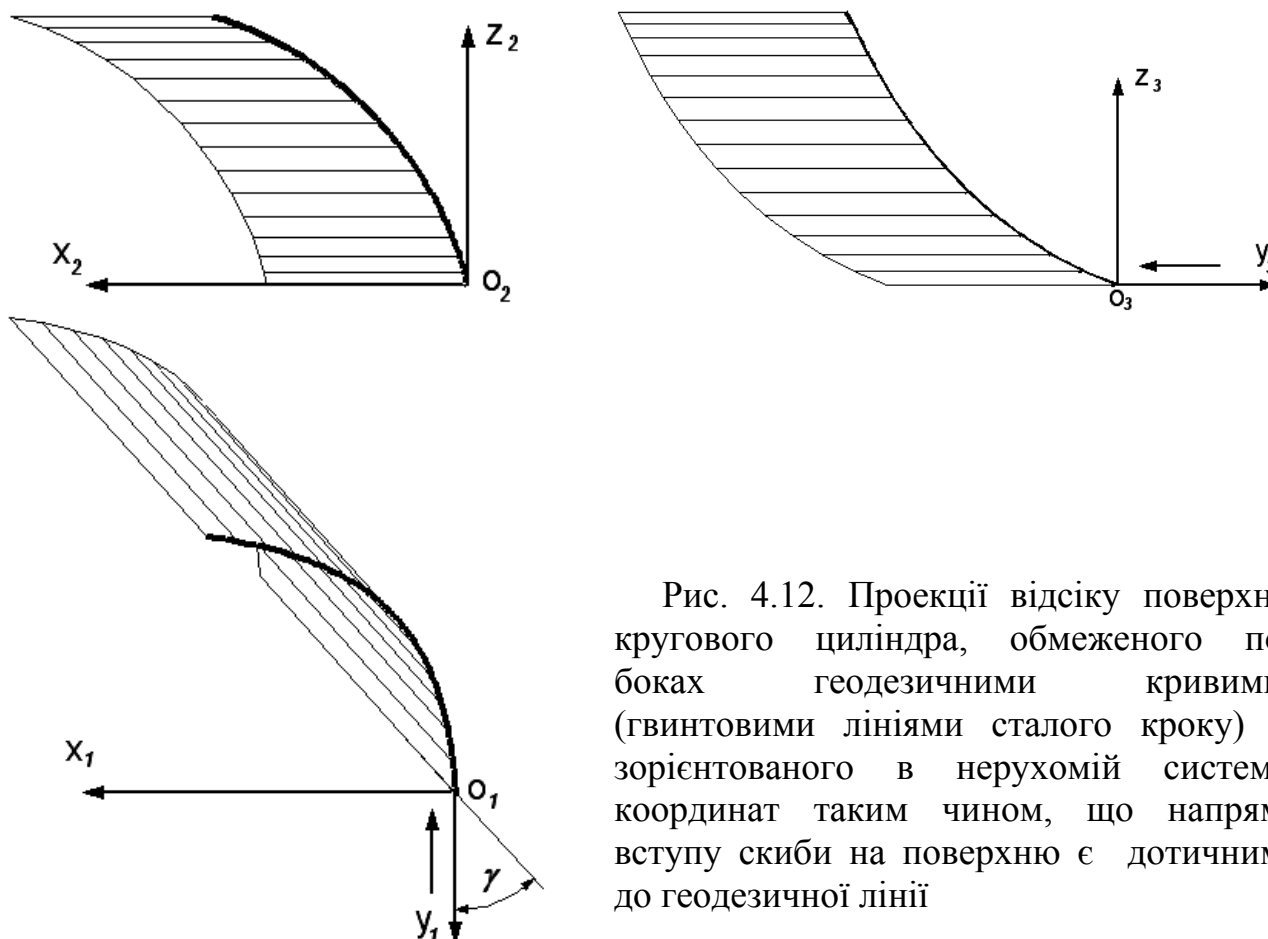


Рис. 4.12. Проекції відсіку поверхні кругового циліндра, обмеженого по боках геодезичними кривими (гвинтовими лініями сталого кроку) і зорієнтованого в нерухомій системі координат таким чином, що напрям вступу скиби на поверхню є дотичним до геодезичної лінії

Наступний етап в проектуванні полиці – вирізання із відсіку поверхні куска потрібної форми. Цей кусок задається лобовим контуром. Лобовий контур накладається на фронтальну проекцію, причому його можна масштабувати (рис. 4.13). При цьому потрібно додати поверхню правіше від геодезичної лінії. З теоретичної точки зору ця частина полиці не повинна працювати, оскільки геодезична лінія є граничною траєкторією скиби, тобто скиба має рухатися лівіше і нижче геодезичної лінії. Однак проф. Л.В. Гячев в своїй праці [42] вказує на те, що напрямок вступу скиби на леміш залежить від низки чинників і може різнитися з теоретичним кутом γ на 7-11%. На рис. 4.13 показані також інші геодезичні лінії поверхні, які виходять із середини леза лемеша та його кінця. Вони між собою паралельні, оскільки на розгортці перетворюються у паралельні прямі.

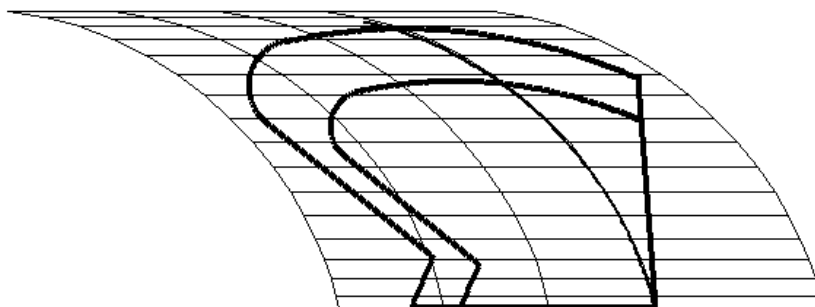


Рис. 4.13. Лобовий контур полиці, накладений на фронтальну проекцію поверхні

Потрібний відсік полиці одержимо в перетині проекціовального циліндра у формі лобового контура на фронтальній площині проєкцій із самою поверхнею полиці. Це означає, що потрібно знайти лінію перетину вказаних поверхонь. Оскільки лобовий контур складається із чотирьох відрізків прямих і двох дуг кіл, відповідно і ліній перетину буде стільки ж, тобто шість. Через кожен відрізок проходить фронтально-проєкціовальна площина. Лінію перетину її із поверхнею знаходимо наступним чином. Запишемо фронтальну проєкцію площини рівнянням прямої $Z_n = a \cdot X_n + b$, де сталі a і b визначаємо із умови проходження прямої через крайні точки відрізка. Далі в це рівняння підставляємо вирази Z_n і X_n із (4.48), до яких в свою чергу входять рівняння (4.47). Розв'язавши отримане рівняння відносно u , одержимо внутрішнє рівняння лінії у формі $u = u(t)$. Підстановка цієї залежності у (4.48) дасть параметричні рівняння відповідної лінії перетину. Знаходження ліній перетину всіх чотирьох площин із поверхнею полиці здійснюється однією підпрограмою, до якої вводяться дві сталі a і b та межі зміни параметра t , що відповідають конкретній площині від початку до кінця відрізка.

Складніше знайти лінію перетину із поверхнею полиці проекціовального циліндра, що відповідає одній із дуг кіл на лобовому контурі. Складність полягає в тому, що в межах заданої дуги прямолінійна твірна поверхні може перетинатися в одній або двох точках із відповідним проекціовальним циліндром, радіус основи якого позначимо через r . Алгоритм знаходження залежності $u = u(t)$ або внутрішнього рівняння кривої перетину циліндра із поверхнею подібний до описаного в попередньому прикладі алгоритму на знаходження кривої перетину площини із поверхнею полиці. Рівняння кола радіуса r , через яке проходить фронтально-проєкціовальний циліндр, і центр якого зміщений відносно осей нерухомої системи координат на відрізки x_u і z_u , запишеться:

$$(X_n - x_u)^2 + (Z_n - z_u)^2 = r^2. \quad (4.49)$$

Підставивши вирази X_n і Z_n із (4.48) в (4.49), одержимо квадратне рівняння, розв'язком якого відносно u буде:

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (4.50)$$

$$a = n^2 + (l \sin \gamma + m \cos \gamma)^2;$$

$$\text{де } b = 2[n(z - z_u) - (l \sin \gamma + m \cos \gamma)(x_u - x \sin \gamma - y \cos \gamma)]; \quad (4.51)$$

$$c = x_u^2 - r^2 + (z - z_u)^2 + (x \sin \gamma + y \cos \gamma)(x \sin \gamma + y \cos \gamma - 2x_u).$$

Вирази l , m , n , що входять до (4.51), є одиничним напрямним вектором прямолінійної твірної торса і визначаються за формулами (4.29). Вирази $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ є параметричними рівняннями (4.41) напрямної кривої.

Одержану в (4.50) залежність $u=u(t)$ підставляємо в (4.48) і таким чином отримуємо параметричні рівняння просторової кривої на поверхні полиці, в яку пертворюється дуга кола на фронтальній проекції, тобто на лобовому контурі. Слід зазначити, що межі зміни параметра t , а також знак перед коренем в (4.50) проблематично визначити, якщо не використовувати зображення на моніторі. Ці параметри визначаємо підбором, будуючи потрібну дугу вказаним способом на фронтальній проекції. Може бути випадок, що крива, яка відповідає заданій дузі кола, складається із двох частин, отриманих при різних знаках в (4.50) перед коренем.

Вирізання відсіку поверхні за заданим лобовим контуром потрібно для того, щоб побудувати цей відсік на розгортці. До цього ми теж будували розгортки відсіків або смуг торса, але вони були обмежені координатними лініями. Наприклад, на розгортках відсіків и смуг довжина всіх прямолінійних твірних була однаковою, тобто там не було вирізання. При вирізанні контур заготовки на розгортці має потрібну форму. Цей контур описується внутрішнім рівнянням лінії на поверхні, яке є спільним і для поверхні, і для розгортки. Складність вирізання полягає в тому, що може бути не одне внутрішнє рівняння, а декілька, як унашому випадку. Крім того, якщо внутрішнє рівняння є квадратним, то в межах однієї ділянки лінії контуру буває потрібно міняти знак перед коренем. При якому значенні змінної t міняти знак допомагає визначити зображення на моніторі.

Вказаним способом було вирізано із циліндричної поверхні полицю за меншим лобовим контуром, який показано на рис. 4.13. Проекції полиці із нанесеною на неї граничною траєкторією руху скиби та прямолінійними твірними показано на рис. 4.14.

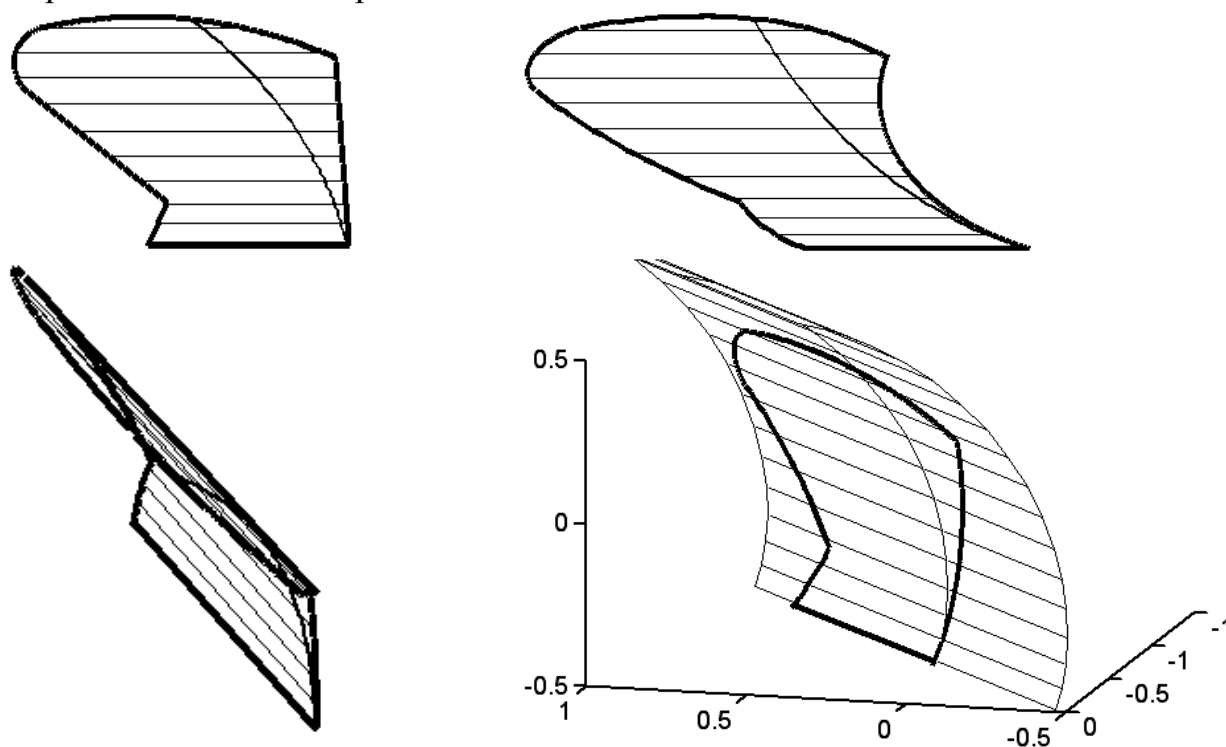


Рис. 4.14. Проекції та аксонометрія полиці із нанесеною на неї граничною траєкторією руху скиби

Якщо припустити, що скиба рухатиметься по граничній траєкторії, якою в даному випадку є гвинтова лінія сталого кроку, то кришіння її відбуватиметься тільки при вступі на леміш. При подальшому русі скиби по полиці вона ковзатиме на її поверхні подібно тому, як ковзають гвинтові поверхні в різьбових з'єднаннях. В цьому випадку робота полиці подібна до роботи косоного клина і відрізнятиметься тим, що вона ще й перевертає скибу.

Щоб поліпшити кришіння скиби, задамо граничну траєкторію її руху по полиці у вигляді гвинтової лінії змінного кроку. Тоді на розгортці циліндра вона зображатиметься кривою лінією (криві 2, 3 на рис. 4.11). Якщо криву на розгортці циліндра задати так, щоб вона була над прямою (крива 2, рис. 4.11), то в просторі утвориться гвинтова лінія змінного кроку, який зменшується при русі по ній. У випадку розташування кривої під прямою (крива 3, рис. 4.11) крок гвинтової лінії збільшуватиметься. Якби гвинтові поверхні із змінним кроком працювали з матеріалом в обмеженому об'ємі (в кожусі), то матеріал або пресувався б, або розтягувався. Для полиці умови роботи не такі, але певну аналогію можна провести. Чим більше криві відходять від прямої на рис. 4.11, тим більше проектувана полиця відрізнятиметься від циліндричної.

За криву 2 (рис. 4.11) ми взяли синусоїду у вигляді $f=d\sin(e\cdot t)$, у якої сталі d і e вибираються за умови, щоб крива більшою чи меншою мірою наближалася до прямої і щоб виконувалася умова $y'_p/x'_p = \operatorname{tg} \gamma$ при $t_0=\varepsilon$. Зокрема, для полиці, яка була побудована за описаною методикою, було прийнято $d=1,15$ і $e=0,5$. На рис. 4.15 показано проекції і аксонометричне зображення полиці на поверхні, у якої гранична траєкторія руху скиби є гвинтовою лінією змінного кроку, який зменшується по ходу скиби. Із рисунка видно, що поверхня не є циліндричною, оскільки твірні не паралельні. Таким чином ковзання скиби по поверхні неможливе і вона кришитиметься протягом всієї траєкторії руху по полиці. Якщо полиця, побудована за кривою 2 (рис. 4.11), умовно стискає скибу, то для кривої 3 вона умовно її розтягуватиме. За криву 3 було взято графік гіперболічного синуса: $f=1,15\sinh(0,5t)$. Проекції полиці для цієї залежності і її аксонометричне зображення на поверхні показане на рис. 4.16.

Для побудови полиць за різними залежностями $f=f(t)$, які задають форму циліндричної напрямної кривої, яка є геодезичною лінією для проектуваної поверхні полиці, ми використовували узагальнені параметричні рівняння. Такий підхід зручний тим, що у комп'ютерну програму вноситься залежність $f=f(t)$ і її похідні і побудова поверхні відбувається за закладеним алгоритмом.

Порівнюючи поверхні полиць на рисунках 4.15 і 4.16, а також їх аксонометричні зображення, можна зробити висновок, що вони суттєво відрізняються між собою. Якщо в полиці, яка умовно стискає скибу при її русі по поверхні, прямолінійні твірні розташовані подібно конічній поверхні і звуження відбувається в сторону крила полиці (рис. 4.15), то для полиці, яка умовно розтягує скибу, звуження відбувається в протилежну сторону (рис. 4.16). Напевно, що для такої полиці ймовірний розрив скиби, що є неприйнятним з точки зору агротехнічних вимог. У полиці, зображеної на рис. 4.15, розташування прямолінійних твірних поверхні подібно до швидкісної

поверхні, зображеної на рис. 1.72,д в праці [45] на стор. 171. Це свідчить про те, що запропонований підхід по теоретичному проектуванню полиці плуга дає результати, близькі до випробуваних на практиці полиць для швидкісної оранки.

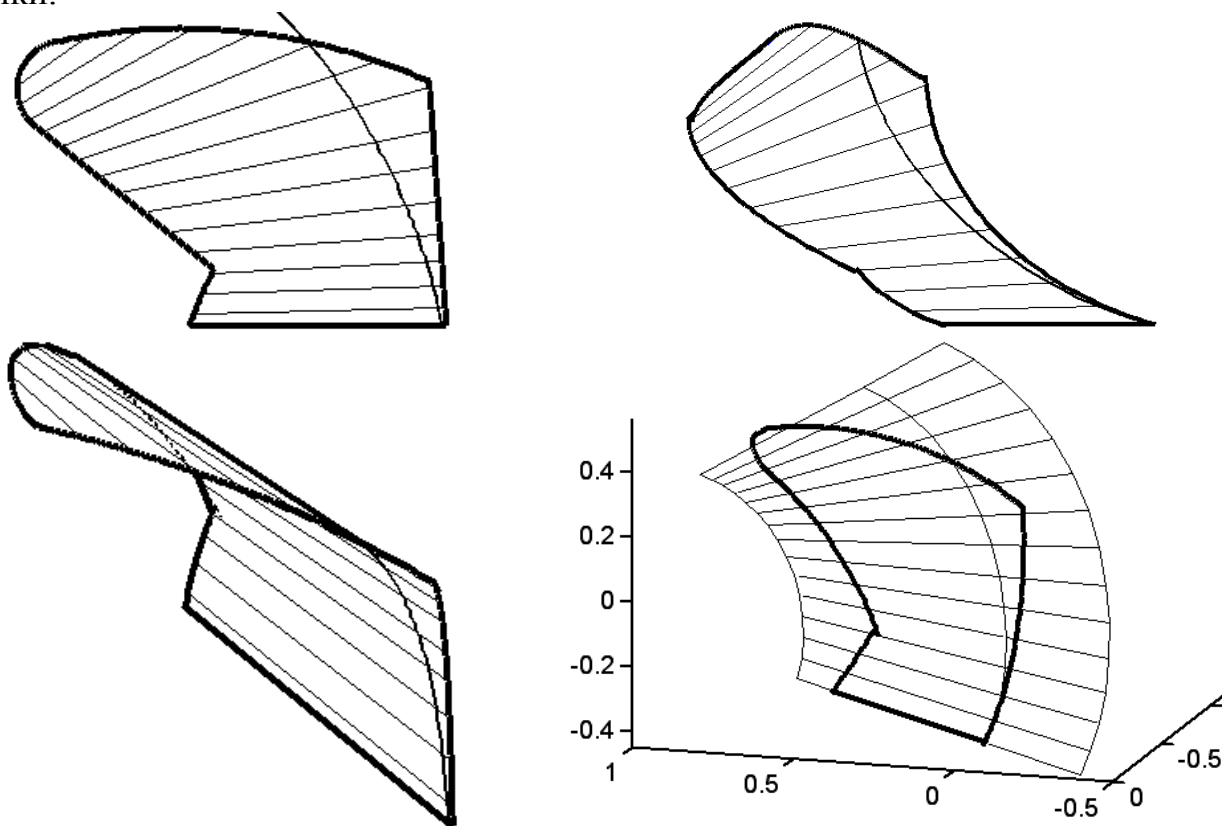


Рис. 4.15. Проекції і аксонометрія полиці, для якої залежність $f=f(t)$ описується рівнянням $f=1,15\sin(0,5t)$

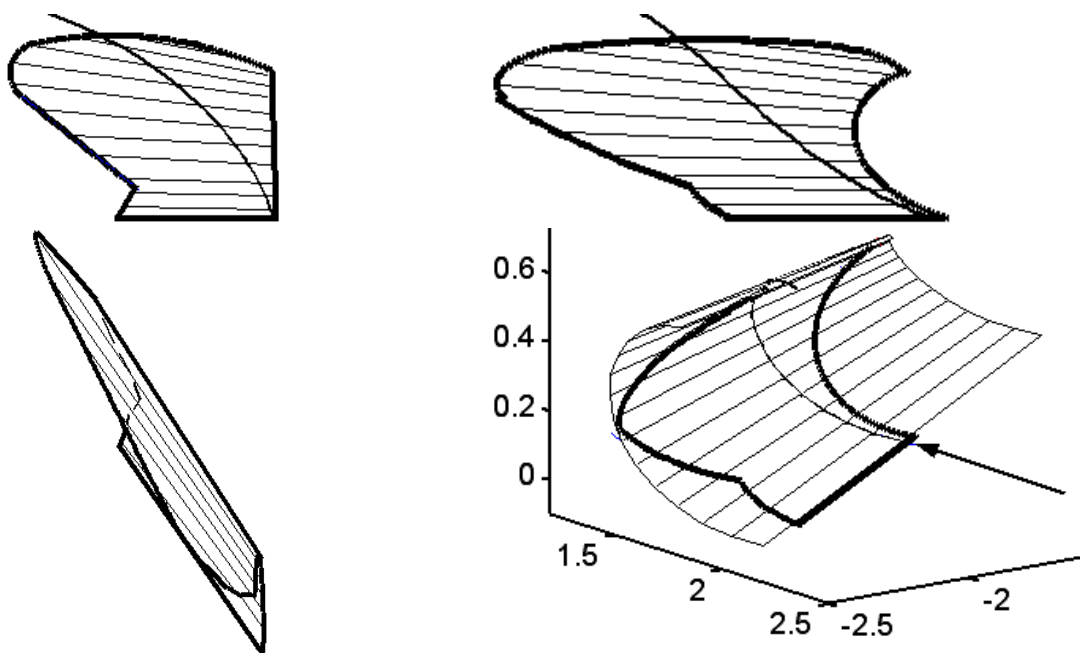


Рис. 4.16. Проекції і аксонометрія полиці, для якої залежність $f=f(t)$ описується рівнянням $f=1,15\sinh(0,5t)$

Для проектування поверхні полиці необхідно мати шаблони її перерізів площинами, перпендикулярними лезу лемеша. Для цього скористаємося рівняннями поверхні (4.47) до повороту її на кут $(\gamma-90^\circ)$. В цьому випадку нижня твірна (лезо) розташована паралельно осі OX . В першому рівнянні (4.47) надамо для X сталого значення h ($X=h$) і розв'яжемо відносно u :

$$u = \frac{(h - f)\sqrt{k^2 + \sigma^2}}{\sigma \cos \alpha_\tau + k \cos \alpha_b}. \quad (4.52)$$

Вираз (4.52) є внутрішнім рівнянням перерізу поверхні. Якщо його підставити в друге і третє рівняння (4.47) і приєднати $X=h$, то ми одержимо параметричні рівняння плоского перерізу поверхні, розташованому на відстані h від початку леза. На рис. 4.17 побудовані перерізи поверхонь полиць, зображених на рисунках 4.15 і 4.16, які проходять через початок і кінець леза, коли воно проєкціюється в точку і ближче до спостерігача знаходиться початок леза. Для циліндричної поверхні перерізами будуть однакові кола радіуса R , які збігатимуться, тому ми їх не показали. Якщо для поверхні полиці, зображеної на рис. 4.15, крива перерізу, який проходить через початок леза, розташована правіше (рис. 4.17,а), то для наступної (рис. 4.16) – навпаки – лівіше (рис. 4.17,б).

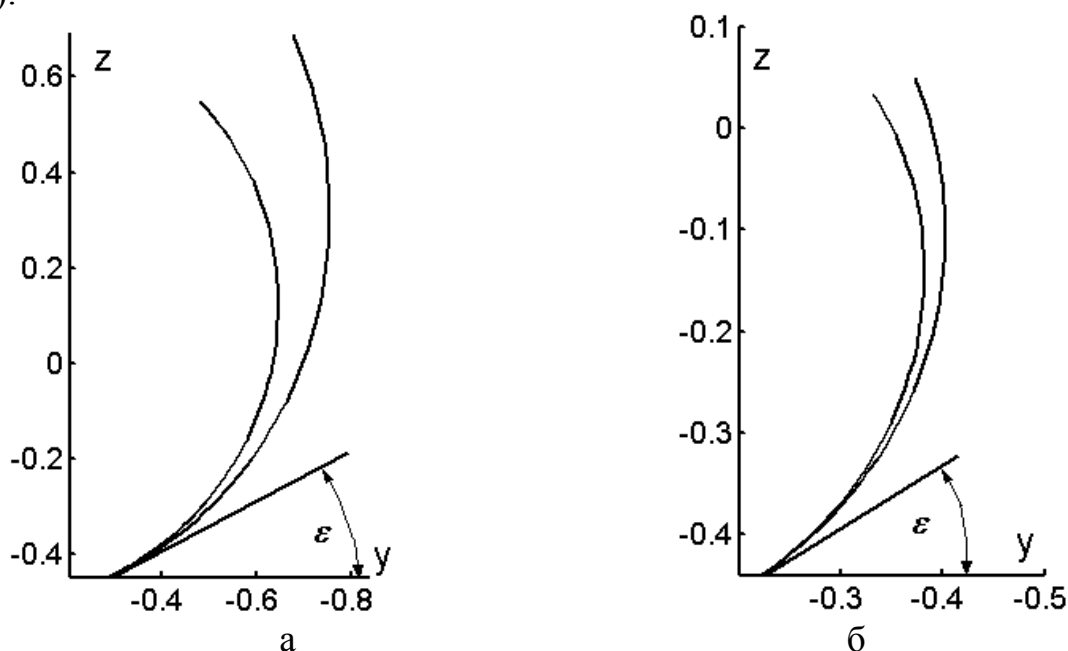


Рис. 4.17. Криві перерізів поверхонь полиць площиною, перпендикулярною лезу:

- а) полиці, зображеної на рис. 4.15;
- б) полиці, зображеної на рис. 4.16

При побудові викройки полиці скористаємося тим фактом, що геодезична лінія перетворюється у пряму на її розгортці. Побудову розгортки будемо здійснювати, проводячи множину прямолінійних твірних, що перетинають пряму, в яку перетворилася геодезична лінія на площині, під тим же кутом, що і

в просторі. При цьому твірну потрібно провести у відповідній точці прямої, тобто потрібно заміряти довжину дуги геодезичної лінії на поверхні і відкласти її на прямій. Кут φ (4.27), під яким твірна перетинає геодезичну лінію, відомий: він залежить від співвідношення кривини і скруту геодезичної лінії. Виходячи із цього, можна записати рівняння поверхні (4.41) в розгортці:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \sqrt{R^2 + f'^2} dt + u \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \\ Y_p &= u \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

За рівняннями (4.53) можна побудувати розгортку поверхні (4.41), на якій у відповідній точці твірна перетинатиме пряму під тим же кутом φ , що і на поверхні в просторі геодезичну криву. Внутрішнє рівняння кривої на поверхні не змінюється при згинанні останньої, тому для отримання плоского контуру полиці на розгортці потрібно в (4.53) підставити внутрішнє рівняння відповідної лінії $u=u(t)$. Наприклад, щоб побудувати криву, яка відповідає дузі кола на лобовому контурі, необхідно її рівняння (4.50) підставити в (4.53) і змінювати параметр t в тих же межах, що і в просторі. Таку операцію потрібно провести шість раз: чотири рази для ліній, які на фронтальній проекції полиці є прямими (насправді це криві, що обмежують контур полиці в просторі) і два рази для кіл, що теж окреслюють плоский лобовий контур.

При користуванні рівняннями (4.53) потрібно застосовувати чисельні методи, оскільки інтегрування виразу для знаходження довжини дуги геодезичної лінії не завжди може бути виконане. В нашому випадку це можливе для циліндричної поверхні полиці, коли геодезичною кривою є гвинтова лінія сталого кроку, задана залежністю $f=c \cdot t$. Параметричні рівняння розгортки, коли крива задана у функції натурального параметра s , паведені в (4.40), де кут β виступає аналогом кута φ в нашому випадку. Кривина і скрут її сталі, тому вона перетинає геодезичну криву на поверхні і пряму на розгортці під сталим кутом φ . За описаним алгоритмом на рис. 4.18 побудована розгортка циліндричної полиці, зображеної на рис. 4.14 в проекціях і аксонометрії.

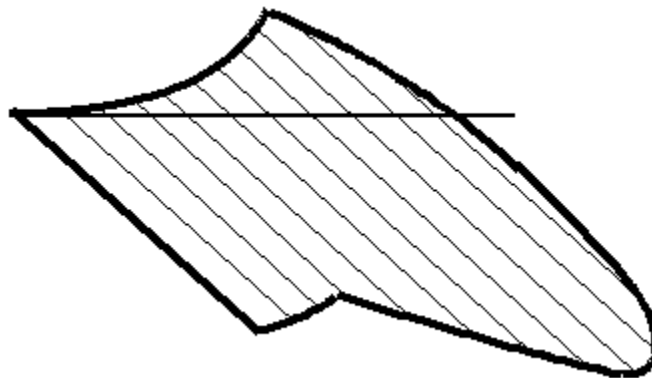


Рис. 4.18. Розгортка циліндричної полиці, зображеної на рис. 4.14

Розгортку поверхні полиці при залежності $x=1,15 \cdot \sin(0,5 \cdot t)$ подібним чином побудувати неможливо, оскільки неможливо проінтегрувати вираз для знаходження довжини дуги геодезичної лінії на поверхні. В цьому випадку потрібно застосовувати чисельні методи. З їх допомогою була побудована розгортка поверхні, зображеної на рис. 4.15 в проекціях і аксонометрії.

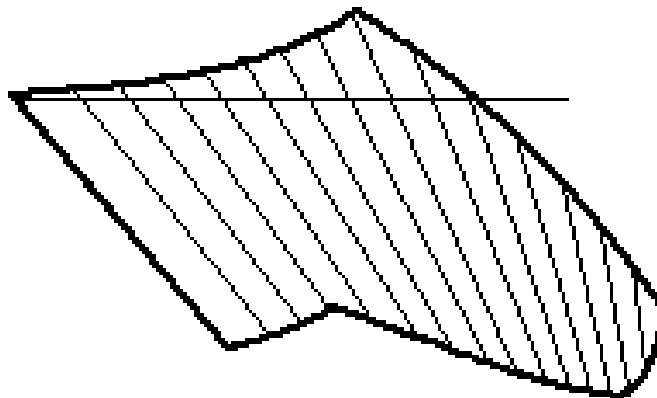


Рис. 4.19. Розгортка циліндричної полиці, зображеної на рис. 4.15

Як видно із рис. 4.15, прямолінійні твірні в даному випадку уже не є паралельними. Інтенсивність зміни напрямку твірних поверхні залежить від того, наскільки інтенсивно напрямна лінія 2 на рис. 4.11 відхиляється від прямолінійного напрямку, тобто від прямої 1.

РОЗДІЛ 5

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ КРИВІ ДЛЯ ОПИСУ ПОТРІБНОГО КОНТУРУ НА РОЗГОРТЦІ ТОРСА ЗА ЗАДАНИМ ТОЧКОВИМ РЯДОМ ТА В ІНШИХ ЗАДАЧАХ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Є два підходи при моделюванні кривих. Перший пов'язаний з методами точного аналітичного опису кривих, що належать поверхні; у другому підході використовуються наближені методи інтерполяції та апроксимації, серед яких велике розповсюдження отримали кускові моделі. Криві у цьому випадку розглядаються як множина з'єднаних між собою елементарних дуг [152]. Функції, що описують ці криві, як правило, багатократно диференційовані. Змодельовані криві мають задовольняти умовам, що до них пред'являються: проходити через задані точки, мати задані кути нахилу дотичних, заданий порядок гладкості тощо. До таких кривих відносяться також сплайни [1, 5, 33, 129,159]. В основі моделювання таких кривих досить поширені куски або сегменти дуг поліномів. Плоскі обводи із дуг кривих другого порядку є основою для геометричного моделювання поверхонь у літакобудуванні. Це обумовлено простотою, наочністю, зручністю [23]. Моделювання плоских кривих із сегментів ліній другого порядку висвітлено в працях [78, 68,162]. З розвитком методів прикладної геометрії і засобів обчислювальної техніки почалося моделювання плоских обводів із кусків поліномів вищих порядків. Їх „склеювання” може відбуватися по першому, другому і при необхідності, по вищих порядках гладкості (для практичних задач достатній другий порядок гладкості).

До окремого напрямку моделювання плоских кривих за заданим точковим рядом необхідно віднести їх дискретне геометричне моделювання, яке зводиться до загушення точкового ряду із необхідною щільністю. При цьому крива є регулярною, не виходить за межі заданого коридору, однак відсутнє її аналітичне рівняння. Цей напрям ґрунтовно розробляється в Мелітопольській школі [79, 80], а також представниками Київської школи прикладної геометрії [130]. Ще один напрям моделювання кривих – статико-геометричний метод, при якому враховуються певні сили, що впливають на криву [46, 131]. Відомі підходи по формуванню плоских обводів за їх заданою кривиною [10]. Потреби практики ставлять вимогу проведення просторових кривих через задані точкові ряди. Інтерполяція точкового ряду в просторі передбачає використання обчислювальних алгоритмів за допомогою комп'ютерної техніки. Раніше такі задачі розв'язували графічними або графоаналітичними методами [40, 150] і при цьому не стояло питання неперервності кривини і скруту, оскільки точність графічних побудов, а тим більше без рівнянь кривих, не дозволяла цього зробити. Застосування обчислювальних алгоритмів для інтерполяції просторового точкового ряду може йти у двох напрямках. Перший – це кусочна інтерполяція дугами відомих кривих. При цьому можна досягнути першого і другого порядку гладкості по кривині, але скрут буде змінюватися скачкоподібно в точках спряження дуг [65]. Другий напрям – інтерполяція неперервними кривими [21, 67]. При цьому

задача зводиться до відшукування сталих коефіцієнтів перед аргументом у рівняннях кривих. Кривина і скрут в цьому випадку є неперервними.

Найбільш поширеними способами інтерполяції точкового ряду є побудова інтерполяційних кривих на основі алгебраїчних кривих. В першу чергу це відноситься до поліномів. По суті поліноміальна крива є графіком сумарної функції, складові якої є алгебраїчними кривими різного різного степеня, до якого піднесено аргумент. Максимальна величина степеня на одиницю менша від числа точок, через які має проходити інтерполяційна крива. Недоліком такої інтерполяції є непрогнозована поведінка інтерполяційної кривої, яка схильна до осциляцій, причому цей недолік напряму зв'язаний із степенем полінома, тобто із кількістю заданих точок.

На особливу увагу заслуговує спосіб утворення плоских кривих додаванням графіків функцій, які не ведуть до ускладнення сумарної функції. Конструювання кривих вказаним способом розглянуто в працях [34, 135]. В праці [34] пропонується додавати графіки двох функцій для отримання сумарного графіка і таким чином розширити формоутворюючі можливості такого способу. Введенням певного коефіцієнта перед складовими функціями можна отримати в результаті їх додавання цілу множину кривих – плавний перехід від однієї складової функції до другої. В праці [135] пропонується додавати графіки функції нормального розподілу Гаусса з метою забезпечення проходження сумарного графіка через задані точки. Число складових графіків визначається числом точок, через які має пройти сумарний графік, тобто інтерполяційна крива. При цьому важливе значення має дзвоноподібна форма графіка окремої складової функції. Це зводить до мінімуму вплив кожної наступної складової суми на загальне значення функції в конкретній точці. І саме головне – це те, що всі складові, число яких росте прямо пропорційно числу точок, через які потрібно забезпечити проходження кривої, є однотипними функціями. Якщо ж взяти за складові графіки інших математичних залежностей (поліноми, степеневі рівняння, дробово-раціональні функції, тригонометричні і інші поширені криві), то при великій кількості точок поведінка сумарного графіка вказаних функцій є мало прогнозованою: виникають осциляції при інтерполяції точкового ряду або ж значне відхилення від заданих точок при апроксимації.

5.1. Дослідження і вибір складових функцій для побудови інтерполяційної кривої як суми їх графіків

Найбільш близькими працями до досліджень даного розділу є праці Ю.В. Сидоренко [4, 135, 136]. Вона в за складові функції для утворення плоских інтерполяційних кривих взяла графіки кривих нормального розподілу Гаусса. Вони мають дзвоноподібний вигляд і в порівнянні із поліномами сумарна крива їх графіків менш схильна до осциляції в силу причин, зазначених раніше. Ця позитивна особливість наглядно показана в роботі [4].

Нами було вивчено поведінку графіків також інших дзвоноподібних кривих при різних значеннях сталої a перед аргументом функції (рис. 5.1.).

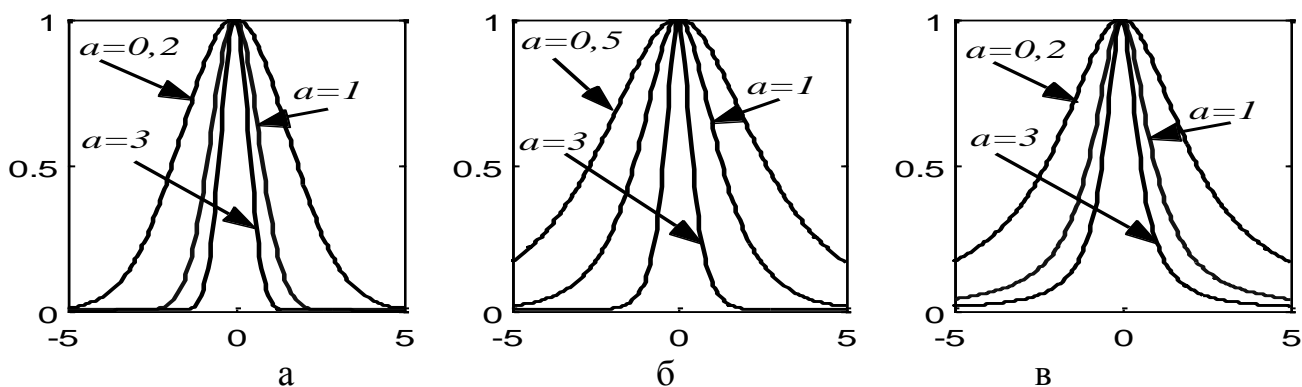


Рис. 5.1. Функції із дзвоноподібними графіками при різних значеннях a :
 а) графік функції Гаусса $y = \exp(-ax^2)$;
 б) графік гіперболічного секанса $y = \operatorname{sech}(ax)$;
 в) графік дробово-раціональної функції $y = 1/(1+ax^2)$.

Серед побудованих графіків при $a=1$ функція Гаусса для великих значень x найбільш щільно наближається до осі абсцис, чим решта кривих. Щоб краще зрозуміти, чому сумарна крива таких графіків менше схильна до осциляції (по відношенню до інших кривих), розглянемо криву, що є сумою двох функцій Гаусса, зміщених вздовж осі Ox на певну величину h . Рівняння сумарної функції має вигляд:

$$y = y_1 + y_2; \quad y_1 = c_1 e^{-ax^2}; \quad y_2 = c_2 e^{-a(x-h)^2}, \quad (5.1)$$

де c_1, c_2 – сталі величини, що задають максимальне значення координати y вершини кожної складової.

Графіки функцій y_1, y_2 та y показані на рис. 5.2.

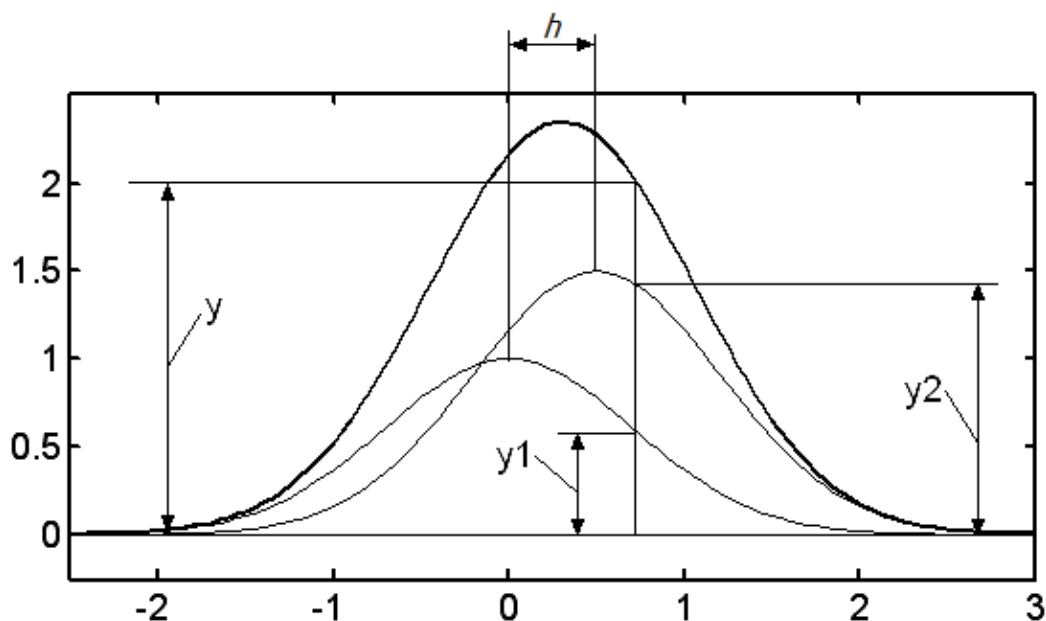


Рис. 5.2. Графіки складових функцій Гаусса при $a = 1$; $c_1 = 1$; $c_2 = 1,5$; $h = 0,5$ та їх сумарний графік

Враховуючи механізм утворення сумарної кривої, представлений на рис. 5.2, можна припустити, що дзвоноподібні графіки однакової висоти, зміщені вздовж осі Ox на сталий крок h , дадуть в сумі синусоїдну криву. На рис. 5.3 побудовані такі криві для функцій Гаусса і гіперболічного секанса при коефіцієнті $a = 1$ і рівних інших умовах.

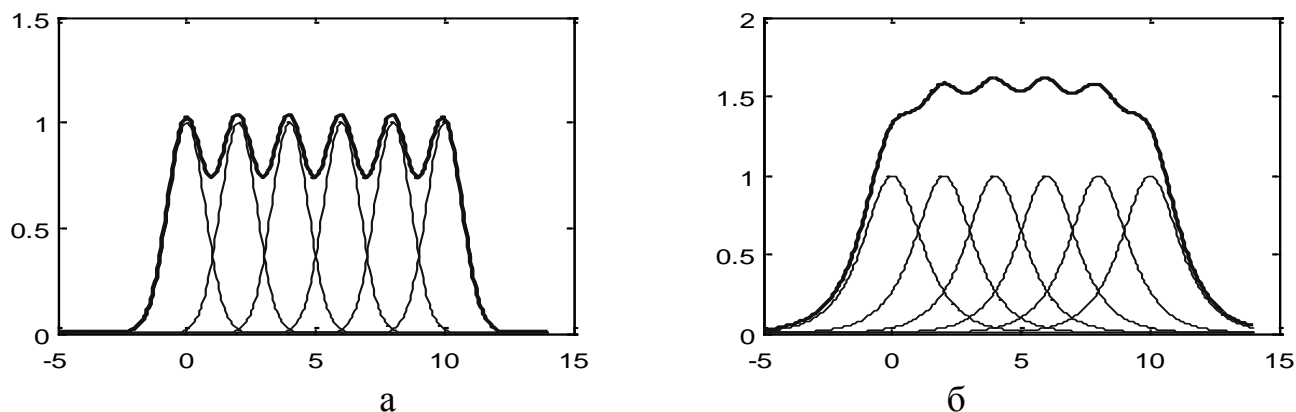


Рис. 5.3. Сумарна крива функцій із дзвоноподібними графіками, зміщеними на однаковий інтервал (при $a=1$):

а) для функції Гаусса;

б) для функції гіперболічного секанса

Як видно із рис. 5.3, амплітуда сумарної синусоїдної кривої більша для суми функцій Гаусса. Це пояснюється, тим, що серед графіків дзвоноподібних функцій, представлених на рис. 3.1, саме графіки функцій Гаусса найбільш швидко і найбільш щільно наближаються до осі абсцис при зміні параметра x . Змінюючи інтервал зміщення складових графіків, можна добитися такого положення, при якому ділянка сумарної лінії виглядає майже ідеальною прямою, паралельною осі абсцис (рис. 5.4).

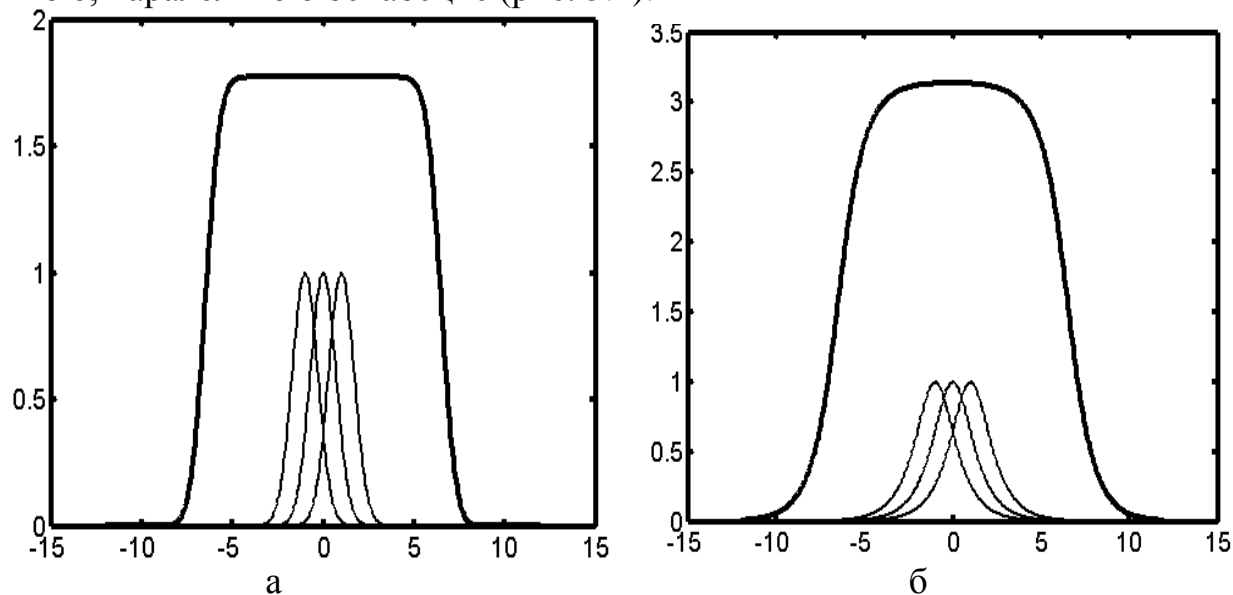


Рис. 5.4. Сумарні графіки складових дзвоноподібних кривих, зміщених на крок $h=1$:

а) складові - графіки функції Гаусса $y = \exp(-x^2)$;

б) складові - графіки гіперболічного секанса $y = \operatorname{sech}(x)$

Перевіримо, чи можна додаванням графіків гіперболічного секанса добитися прямолінійної ділянки, яка буде не паралельною до осі абсцис. Для цього зробимо рівномірне зміщення графіків вздовж осі абсцис, у яких висота змінюється по лінійному закону. На рис. 5.5 показані сумарні криві із різним кроком зміщення.

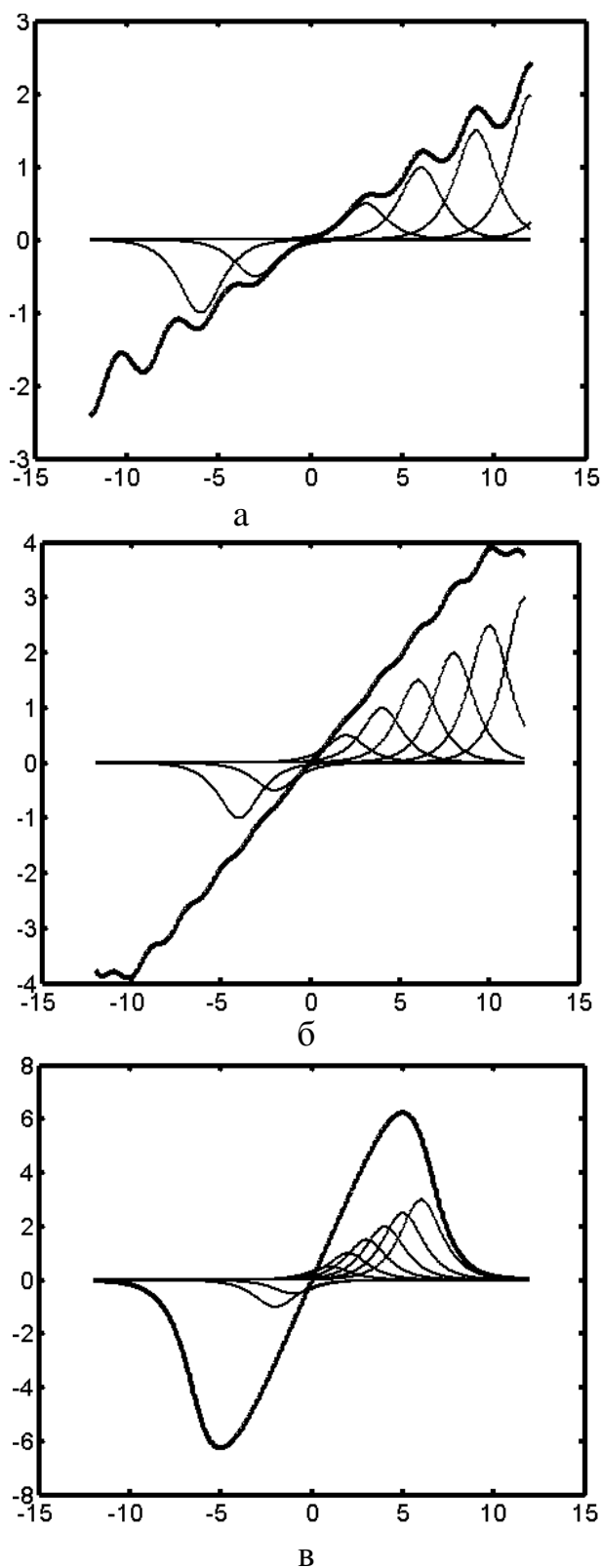


Рис. 5.5. Графіки суми функції гіперболічного секанса із різним кроком зміщення:

а) $h=3$;

б) $h=2$;

в) $h=1$

заданий ряд точок. Задамо, наприклад, 6 точок по прямій лінії під кутом до осі абсцис.

Приклад. Розв'яжемо дві лінійні системи по 6 рівнянь при конкретному заданому значенні $a = 0,3$ і заданих шести точках: $1(11; 1)$, $2(12; 2)$, $3(13; 3)$, $4(14; 4)$, $5(15; 5)$, $6(16; 6)$. Підстановка координат точок в (5.3) і (5.4) дає системи, розв'язком яких є невідомі коефіцієнти. Розв'язання систем рівнянь можна здійснювати в будь-яких математичних програмах. Для нашого випадку обчислення здійснювалися в системі „*MatLab*”, де і проводилася подальша робота. Після знаходження коефіцієнтів c_i , d_i при заданому $a = 0,3$ параметричні рівняння (5.2) прийняли вигляд:

$$\begin{aligned} x &= 6,1393 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 1)) + 24,1920 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 2)) - \\ &- 89,8618 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 3)) + 155,4307 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 4)) - \\ &- 150,1774 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 5)) + 75,2847 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 6)); \\ y &= -24,0177 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 1)) + 70,8532 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 2)) - \\ &- 114,1459 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 3)) + 131,1459 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 4)) - \\ &- 103,5161 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 5)) + 45,1277 \cdot \operatorname{sech}(0,3 \cdot (t - 6)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Проведений аналіз показав, що інтерполяційна функція на основі суми графіків гіперболічного секанса при зменшенні коефіцієнта a перед аргументом дає пряму лінію раніше, ніж аналогічна функція на основі суми кривих Гаусса при тих же значеннях a . На рис. 5.6 побудовано інтерполяційні криві, які проходять через точковий ряд, розташований на прямій лінії, яка нахилена до осі Ox під певним кутом при значенні сталої $a = 1$. Побудова здійснювалася за параметричними рівняннями із знайденими коефіцієнтами, одержаними внаслідок розв'язку систем лінійних рівнянь (на прикладі рівнянь (5.3), (5.4)).

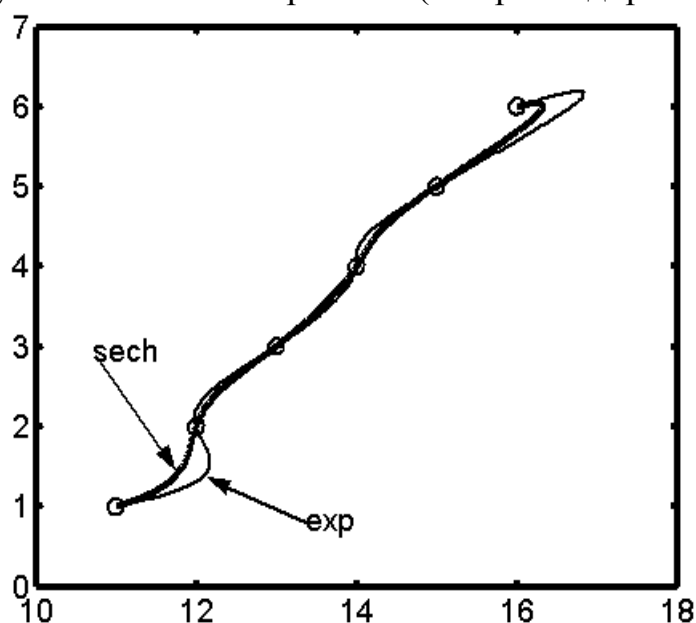


Рис. 5.6. Інтерполяційні криві на основі функцій Гаусса і гіперболічного секанса, графіки яких мають дзвоноподібний вигляд при $a = 1$

Було досліджено вплив сталої a для обох видів інтерполяційних кривих на точність інтерполяції точкового ряду при розташуванні точок на прямій лінії. На рис. 5.7 побудовано інтерполяційні криві для двох зазначених підходів, причому криві будувалися при однакових значеннях сталої a .

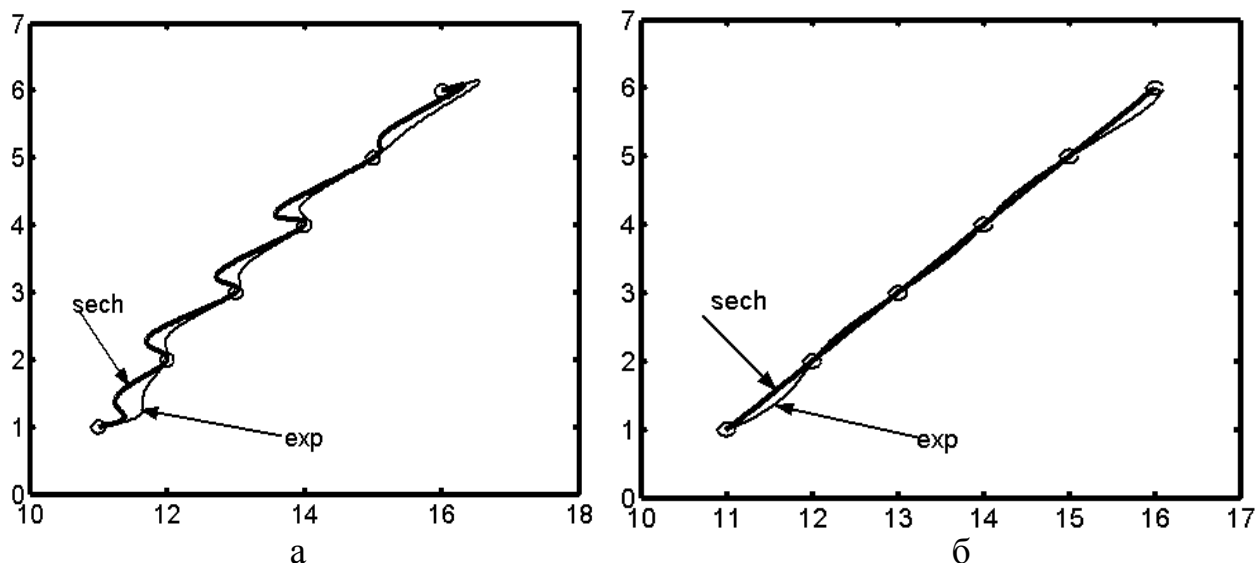


Рис. 5.7. Інтерполяційні криві на основі функцій, графіки яких мають дзвоноподібний вигляд:

- а) $a=2$;
- б) $a=0,3$

Проведений аналіз показав, що інтерполяційна функція на основі суми графіків гіперболічного секанса при зменшенні коефіцієнта a перед аргументом дає пряму лінію раніше, ніж аналогічна функція на основі суми кривих Гаусса при тих же значеннях a (рис. 5.7).

Для перевірки можливості поєднання прямолінійних і криволінійних ділянок був розв'язаний тестовий приклад для 20 точок, які лежать на трьох прямих. Результати обчислень в системі *MatLab* представлено на рис. 5.8.

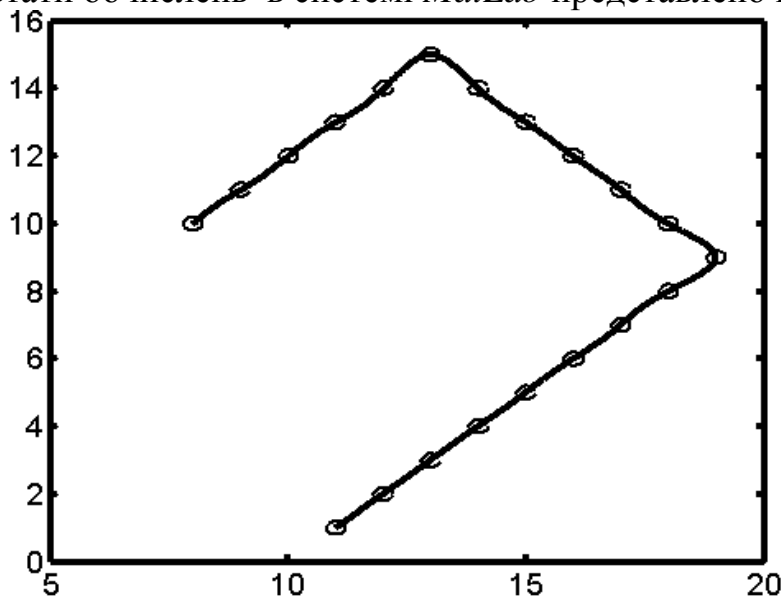


Рис. 5.8. Інтерполяційна крива, проведена через 20 заданих точок, які знаходяться на трьох прямолінійних відрізках

Виходячи із міркувань, що інтерполяційна функція на основі суми графіків гіперболічного секанса дає пряму лінію раніше ніж аналогічна функція на основі суми кривих Гаусса, а також беручи до уваги компактну форму запису, було вирішено використовувати її в подальших дослідженнях.

Перевагою інтерполяційної кривої, яка задана параметричними рівняннями, від аналогічної кривої, яка задана рівнянням у явній формі, є можливість моделювати замкнені криві або ж сполучати задані точки у будь-якому порядку. Нами було задано шість точок, номери яких вказували порядок сполучення (рис. 5.9).

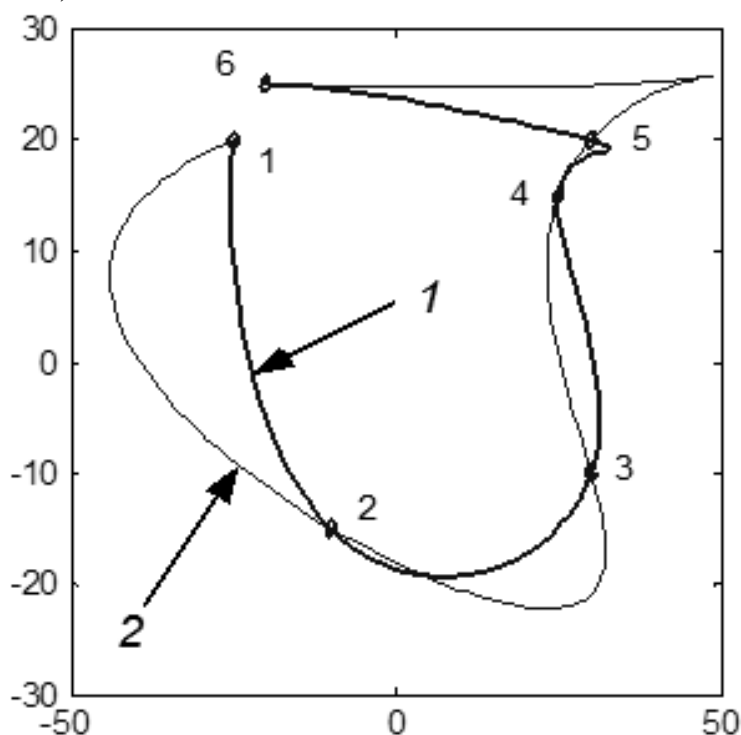


Рис. 5.9. Вплив на форму інтерполяційної кривої різними способами параметризації

Знайшовши коефіцієнти інтерполяційної кривої (5.2) розв'язуванням двох лінійних систем (5.3) і (5.4), ми побудували криву 1 (рис. 5.9), у якої за незалежну змінну було прийнято параметр t – порядковий номер точки. Із рисунка видно, що між точками 4 і 5 виникла осциляція. Щоб запобігти цьому небажаному явищу, в [136] запропоновано взяти за параметр наростаючу довжину ламаної, яка враховує нерівномірну відстань між сусідніми точками. Ми взяли параметр, пропорційний довжині ламаної, але при цьому уникнути осциляції не вдалося: вона виникла між точками 5 і 6 (рис. 5.9, крива 2). Слід зауважити, що криві на рис. 5.9 побудовані при значенні сталої $a=1$. Очевидно, що зміною величини a теж можна впливати на графік інтерполяційної кривої. На рис. 5.10 побудовані криві, на форму яких додатково впливали різними значеннями сталої a в точках 4 і 5. Візуально можна зробити висновок, що крива 1 є найбільш прийнятною.

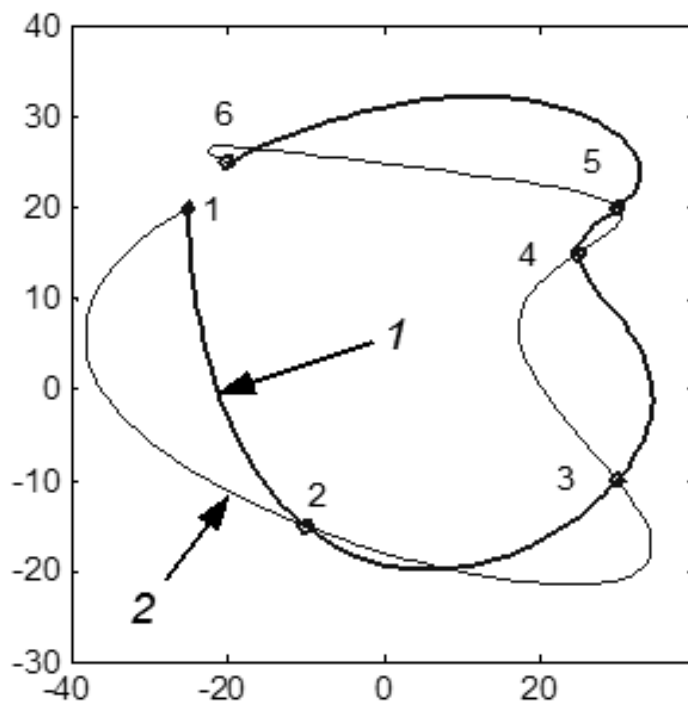


Рис. 5.10. Вплив на форму інтерполяційної кривої значенням сталої a перед аргументом функції

Для оцінки інтерполяційної кривої ми виходили із наступних міркувань. Якщо взяти відому криву і виділити на ній дискретний ряд точок, то ідеальна інтерполяційна крива, проведена через ці точки, мала б повністю збігтися із заданою кривою. Однак цього не буде. В такому випадку можна певним чином оцінювати величину відхилення інтерполяційної кривої від заданої між вузлами.

За задану криву ми взяли коло радіуса 10 одиниць і виділили на ньому 15 точок через рівний інтервал. Знайшовши в рівняннях (5.2) коефіцієнти $c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n$ як результат розв'язку двох систем лінійних рівнянь за описаним способом, ми побудували інтерполяційну криву, причому сталій a надавали різних значень (рис. 5.11).

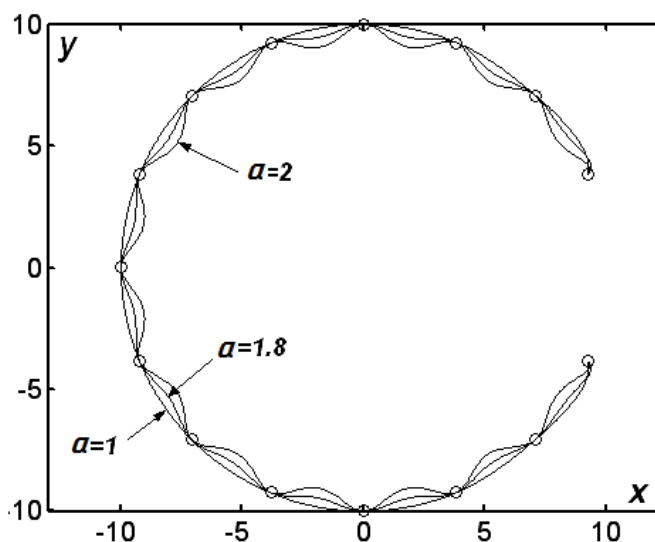


Рис. 5.11. Інтерполяційні криві, побудовані за рівняннями (5.2) при різних значеннях сталої a , що проходять через точковий ряд, розташований на колі

Як видно із рис. 5.11, значення сталої a суттєво впливає на інтерполяційну криву, причому із її зростанням збільшуються осциляції. При $a=1$ крива дуже подібна до кола. Дослідження показали, що зменшення коефіцієнта a краще наближає інтерполяційну криву до кола, на якому розташований точковий ряд. Наприклад, при $a=0,1$ інтерполяційна крива і коло візуально збігаються (рис. 5.12).

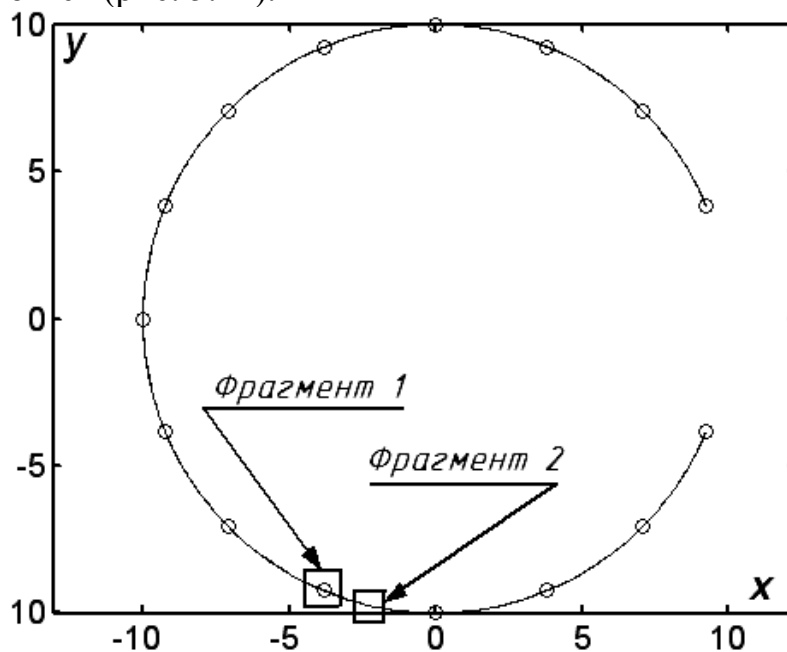


Рис. 5.12. Інтерполяційні крива, побудовані за рівняннями (5.2) при значенні сталої $a=0,1$, яка проходять через точковий ряд, розташований на колі

Однак таке зменшення сталої a має певну межу, після якої починається зворотній процес (рис.5.13).

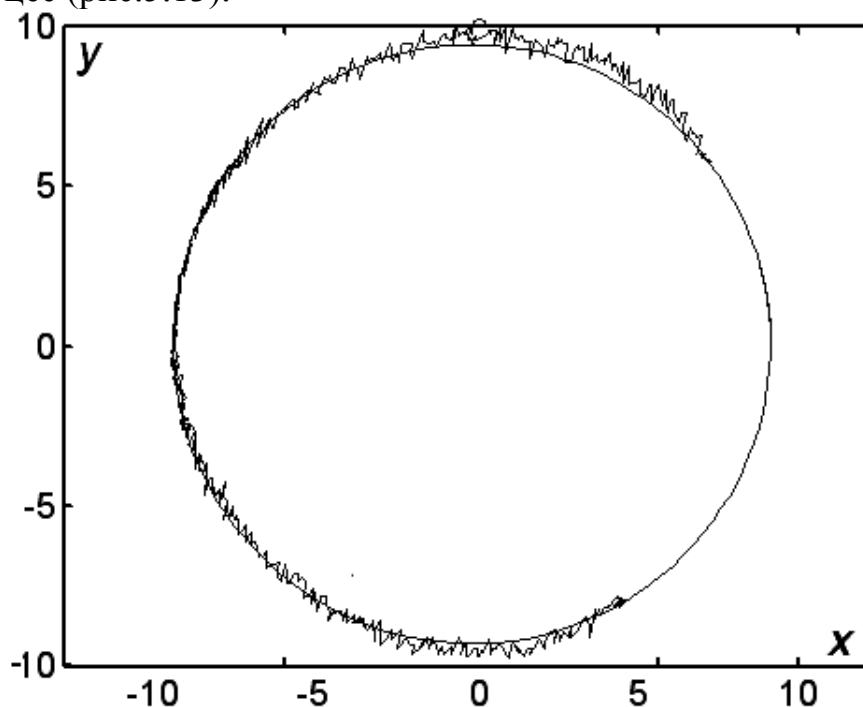


Рис. 5.13. Інтерполяційні крива, побудовані за рівняннями (5.2) при значенні сталої $a=0,016$

Для знаходження оптимального значення сталої a ми вирішили дослідити графік кривини інтерполяційної кривої. Кривину визначали за відомою формулою (1.9) при $z=z'=z''=0$, взявши перші і другі похідні рівнянь (5.2). На рис. 5.14 побудовано графіки кривини інтерполяційних кривих, зображених на рис. 5.11.

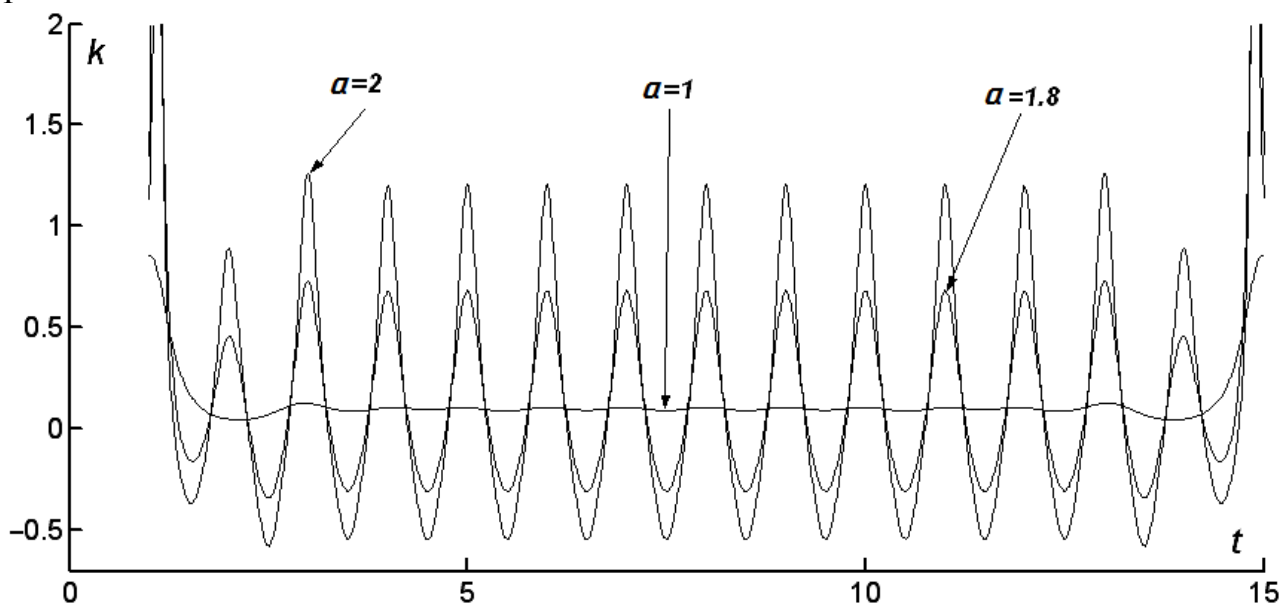


Рис. 5.14. Графіки кривини кривих, зображених на рис. 5.11

Із рис. 5.14 видно, що найбільш точно до графіка кривини кола ($k=0,1$) наближається графік, побудований при $a=1$. Це і зрозуміло, оскільки на рис. 5.11 саме крива при $a=1$ найбільш точно заміняє коло. Виникає питання: яке значення сталої a потрібно взяти, щоб отримати найкраще наближення? Для цього ми побудували графіки кривини, змінюючи сталу a у сторону зменшення (рис. 5.15).

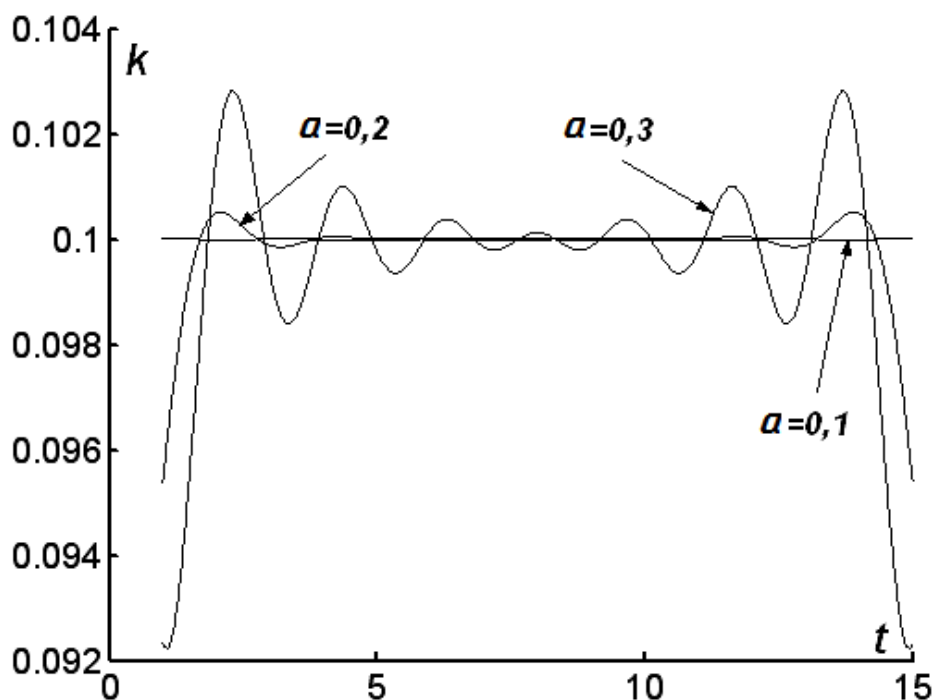


Рис. 5.15. Графіки зміни кривини при різних значеннях сталої a

Із рис. 5.15 видно, що найкращий результат досягається при значенні сталої $a=0,1$. При цьому кривина лінії практично дорівнює $0,1$, що відповідає колу заданого радіуса. При інших значеннях сталої a ($a=0,2$; $a=0,3$) коливання графіка кривини теж; незначне. Дослідження показали, що подальше зменшення сталої p недоцільне, оскільки може початися погіршення наближення кривої до кола (рис. 5.13).

На рис. 5.12 побудоване коло і його наближення інтерполяційною кривою при $a=0,1$. Візуально ці криві збігаються. Щоб оцінити, як наближається інтерполяційна крива до кола, нами було взято два фрагменти (рис. 5.12): один в околі заданої точки, другий – між заданими точками. Зображення цих фрагментів при багатократному збільшенні показано на рис. 5.16.

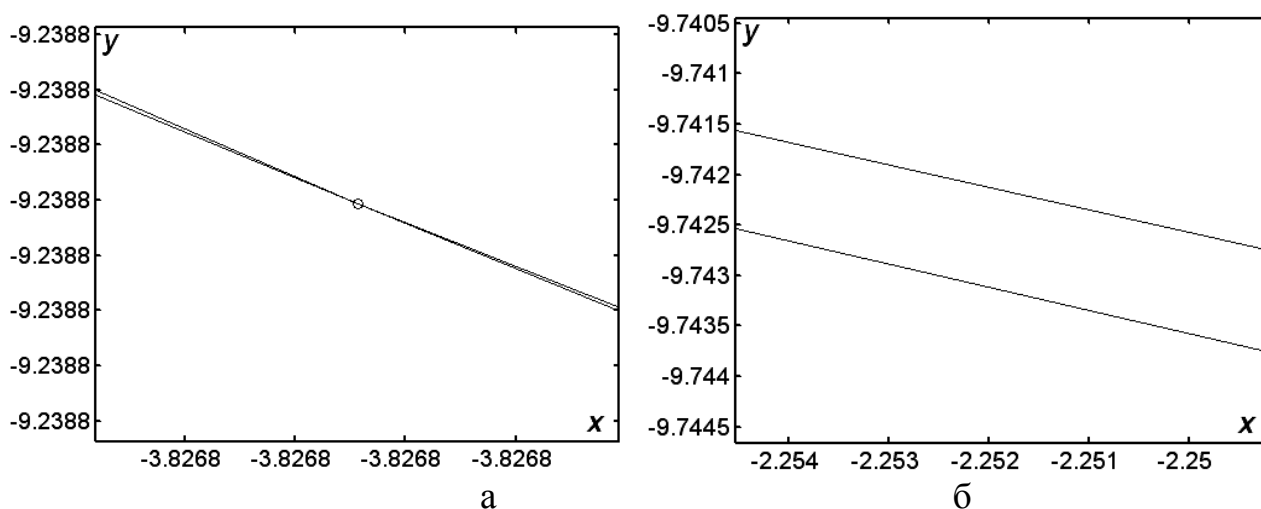


Рис. 5.16. Збільшені фрагменти кола і інтерполяційної кривої:

- а) фрагмент взято в околі заданої точки;
- б) фрагмент взято між заданими точками

За цими фрагментами певним чином можна судити про точність наближення інтерполяційної кривої до кола. Із рис. 5.16,б видно, що найбільша відстань між колом і інтерполяційною кривою знаходиться між заданими точками і становить приблизно $0,001$ лінійної одиниці при радіусі кола 10 лінійних одиниць. Це вказує на велику точність інтерполяції.

В праці [146] розглянуто інтерполяцію точкового ряду на тестовому прикладі дискретно представленої кривої (ДПК) за заданими координатами десяти точок (табл. 5.1).

Таблиця 5.1. Координати точок тестової ДПК

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	20	45	53	57	62	74	89	95	100
y	0	0	-47	335	26	387	104	0	100	0

Автором праці [146] розглянуто різні способи інтерполяції ДПК за допомогою алгоритмів, закладених у поширені системи комп'ютерної математики. В їх основі лежить використання алгебраїчних кривих: поліномів, сплайнів, дробово-раціональних кривих. Автор робить висновок, що застосування цих видів інтерполяції не дає бажаного результату. Зробимо

порівняння інтерполяції точкового ряду (табл. 5.1) поліномом і інтерполяційною кривою на основі суми функцій гіперболічного секанса.

Степінь полінома буде на одиницю менший від числа точок, через які має пройти крива:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_9 x^9. \quad (5.6)$$

Підставимо по черзі в (5.6) координати всіх десяти точок із табл. 5.1 і одержимо систему десяти лінійних рівнянь.

Розв'язком системи будуть значення десяти невідомих коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_9$:

$$b = \left\{ \begin{array}{cccc} 0; & 156456.850 & 3966196; & -23827.2562 & 0877762; \\ 1492.10704 & 51178582; & & -50.9849196 & 62155754; \\ 1.04939798 & 89085476; & & -0.01340260 & 414904959; \\ 0.00010416 & 0000355875 & 83; & -4.51763500 & 3471402 * 10^{-7}; \\ 8.39271025 & 9937338 & * 10^{-10} & & \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

Аналізуючи отримані коефіцієнти (5.7) полінома (5.6) приходимо до висновку, що їх значення за абсолютною величиною знаходяться у великому діапазоні дійсних чисел, що вимагає для операцій із ними відповідних електронних ресурсів. Для малопотужних обчислювальних машин побудова інтерполяційної кривої за розглянутим алгоритмом стає проблематичною.

На рис. 5.17 за рівнянням (5.6) з підстановкою в нього знайдених коефіцієнтів (5.7) побудовано інтерполяційну криву, яка має на початку такий екстремум, який змусив показати саму криву у зменшеному масштабі вздовж осі Oy .

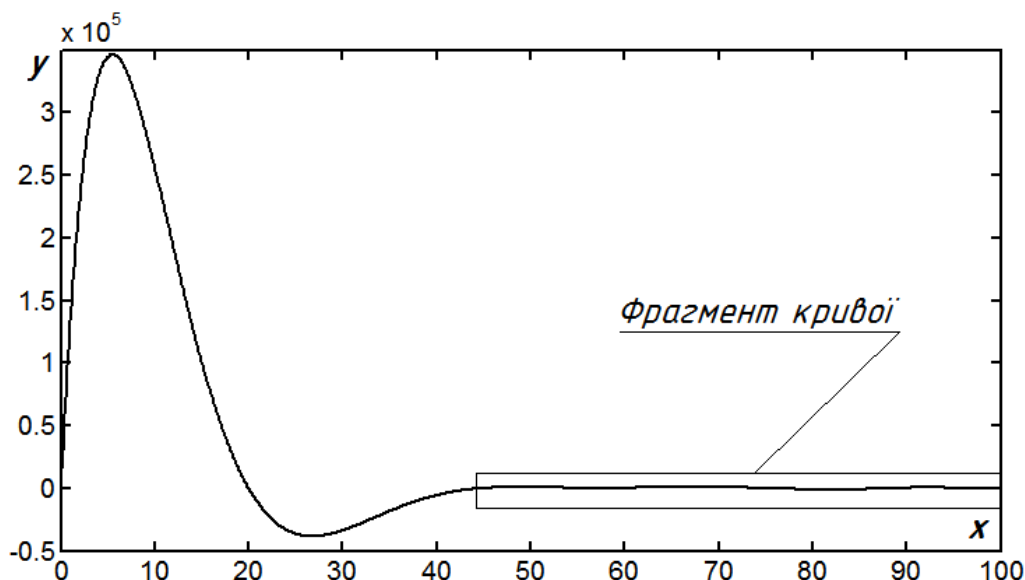


Рис. 5.17. Інтерполяційна крива, побудована за рівняннями (5.6), яка проходить через точковий ряд, координати якого задано в табл. 5.1

Побудуємо інтерполяційну криву на цьому ж само точковому ряді за рівняннями (5.2). Коефіцієнти c і d , отримані внаслідок розв'язку систем (5.3) і (5.4) при $a=0,5$, мають наступні значення:

$$c = \left\{ \begin{array}{ccccc} 35.8327 ; & -214.4113; & 351.2788; & -267.9846; & 172.29; \\ -27.6349; & -126.3872; & 278.046; & -245.7517; & 183.2027 \end{array} \right\}$$

$$d = \left\{ \begin{array}{ccccc} -7451 ; & 24613 ; & -44984 ; & 59882 ; & -63371 ; \\ 54746; & -37053; & 18671 ; & -637; & 1113 \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Коефіцієнти c і d в (5.8) співрозмірні, що не потребує великої точності обчислень. Крім того, до параметричних рівнянь (5.2), як і до рівняння полінома (5.6), входить однакова кількість складових функцій, однак функції в (5.2) є однотипними на відміну від (5.6), де показник степеня кожної наступної функції зростає.

На рис. 5.18 побудовано інтерполяційну криву за рівняннями (5.2) з підстановкою в них коефіцієнтів (5.8), а також виконано лінійну інтерполяцію.

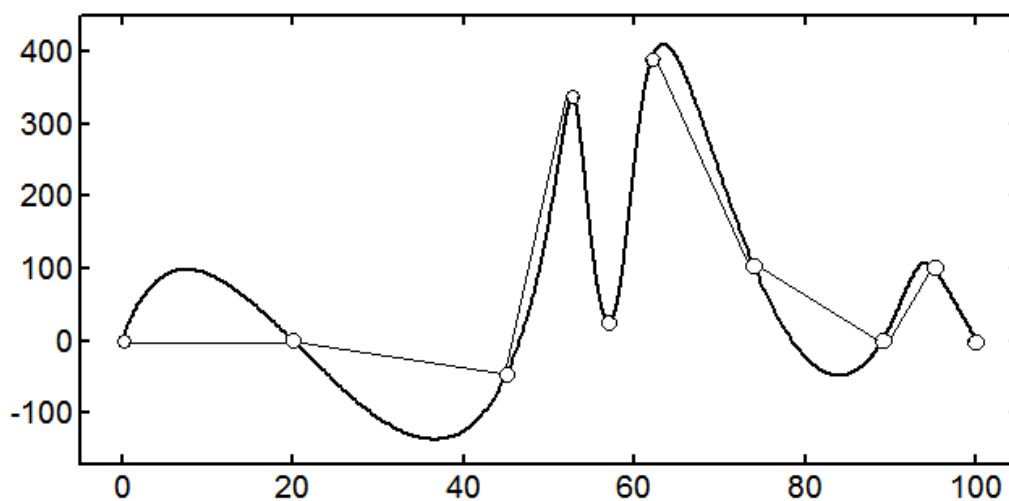


Рис. 5.18. Інтерполяційна крива, побудована за рівняннями (5.2), яка проходить через точковий ряд, координати якого задано в табл. 5.1

Деякі відрізки лінійної інтерполяції майже збігаються із дугами інтерполяційної кривої, тому вони не показані. Якщо порівняти рисунки 5.17 і 5.18, то можна побачити, що на рис. 5.18 є деякі екстремуми, проте вони на значно менші, чим осциляції на рис. 5.17. Взагалі, якщо сумістити графіки (5.17) і (5.18) на одному рисунку із спільним масштабом, то інтерполяційна крива (рис. 5.18) на спільному рисунку виглядатиме прямою, паралельною осі Ox . Це свідчить про те, що інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса не схильна до осциляцій на відміну від інтерполяційної кривої, якою є поліном. Крім того, кількість точок ДПК не впливає на осциляції на відміну від полінома.

Про несхильність інтерполяційної кривої на основі суми функцій гіперболічного секанса до значних осциляцій свідчить і фрагмент, виділений на рис. 5.17. В порівнянні із сплеском ординати інтерполяційного полінома в лівій частині графіка на рис. 5.17 права частина зображена майже прямою. На рис. 5.19, де цей фрагмент зображено окремо і в іншому масштабі вздовж осі Oy , показано дві інтерполяційні криві: 1 — інтерполяційний поліном, 2 — інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса. Як видно

із рисунка, на обмеженій ділянці ДПК інтерполяційна крива на основі суми функцій гіперболічного секанса на цій обмеженій ділянці в сенсі осциляцій теж виграє.

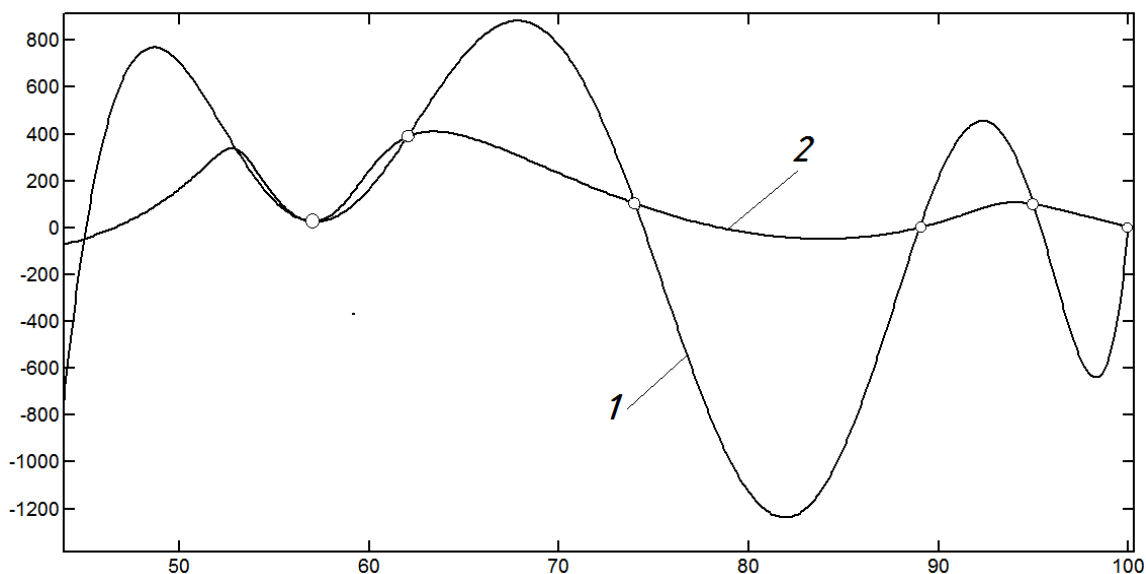


Рис. 5.19. Інтерполяційні криві (1 – поліном 9-го порядку (5.6); 2 - крива на основі суми функцій гіперболічного секанса (5.2)) на фрагменті ДПК, виділеному на рис. 17

На рис. 5.20 побудовано інтерполяційні криві на основі суми функцій гіперболічного секанса. Координати x точкового ряду було взято із табл. 5.1, а координата y для всіх точок була прийнята рівною 5, тобто точковий ряд в цьому випадку є прямолінійним. Інтерполяційна крива дуже добре наближена до прямої (на рис. 5.20 позначена цифрою 1). При значенні $x=57$ для ординати y було надано два значення: $y=-5$ і $y=-15$. Відповідні інтерполяційні криві на рис. 5.20 позначено цифрами 2 і 3.

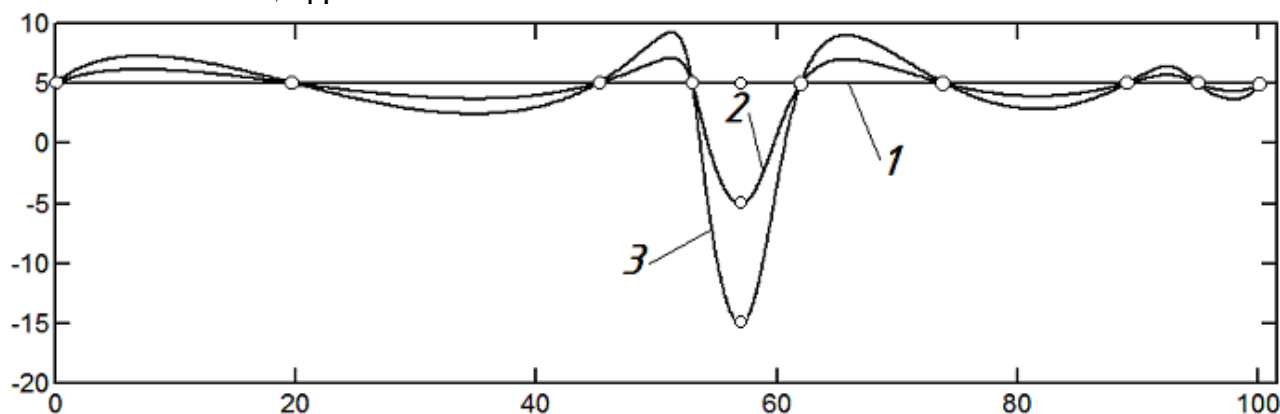


Рис. 5.20. Інтерполяційні криві, у яких або всі точки лежать на прямій (позначено цифрою 1), або одна точка знаходиться за межами прямої (позначено цифрами 2, 3)

Завдяки природі інтерполяційної кривої на основі суми функцій гіперболічного секанса осциляції кривої затухають по мірі віддалення від точки, де відбулося збурення (точки зі значеннями $y=-5$ і $y=-15$).

Якщо ж побудувати поліном (5.6) на таких же точкових рядах, то осциляції по мірі віддалення від точки, де відбулося збурення, зростають (рис. 5.21). Так як і на рис. 5.17 найбільші осциляції спостерігаються на початку точкового ряду, проте в даному випадку вони набагато менші.

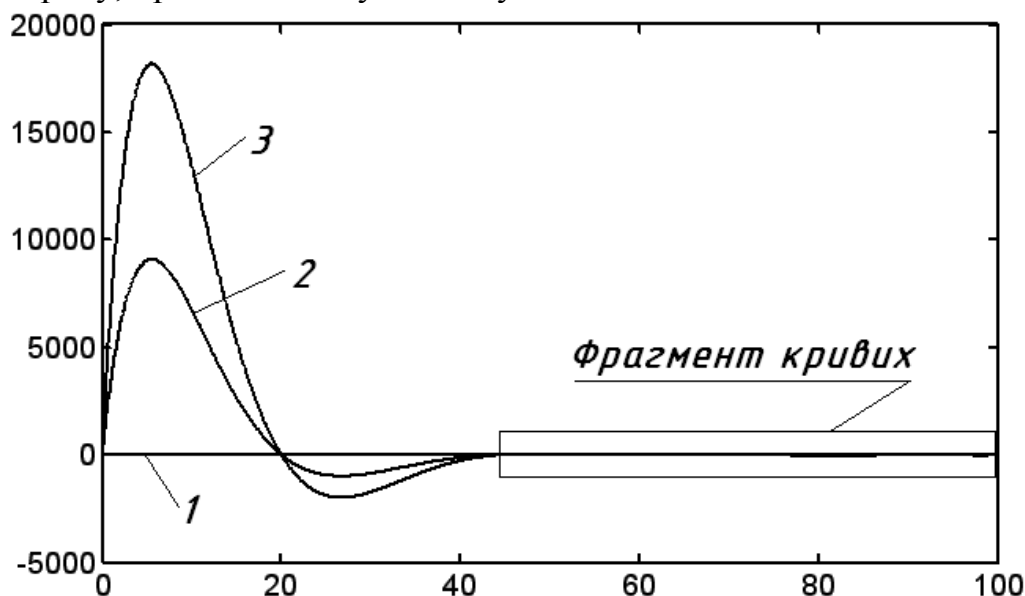


Рис. 5.21. Поліноміальні інтерполяційні криві, у яких або всі точки лежать на прямій (позначено цифрою 1), або одна точка знаходиться за межами прямої (позначено цифрами 2, 3)

На рис. 5.22 зображено зображено фрагмент кривих у збільшеному масштабі вздовж осі Ox , який виділено на рис. 5.21.

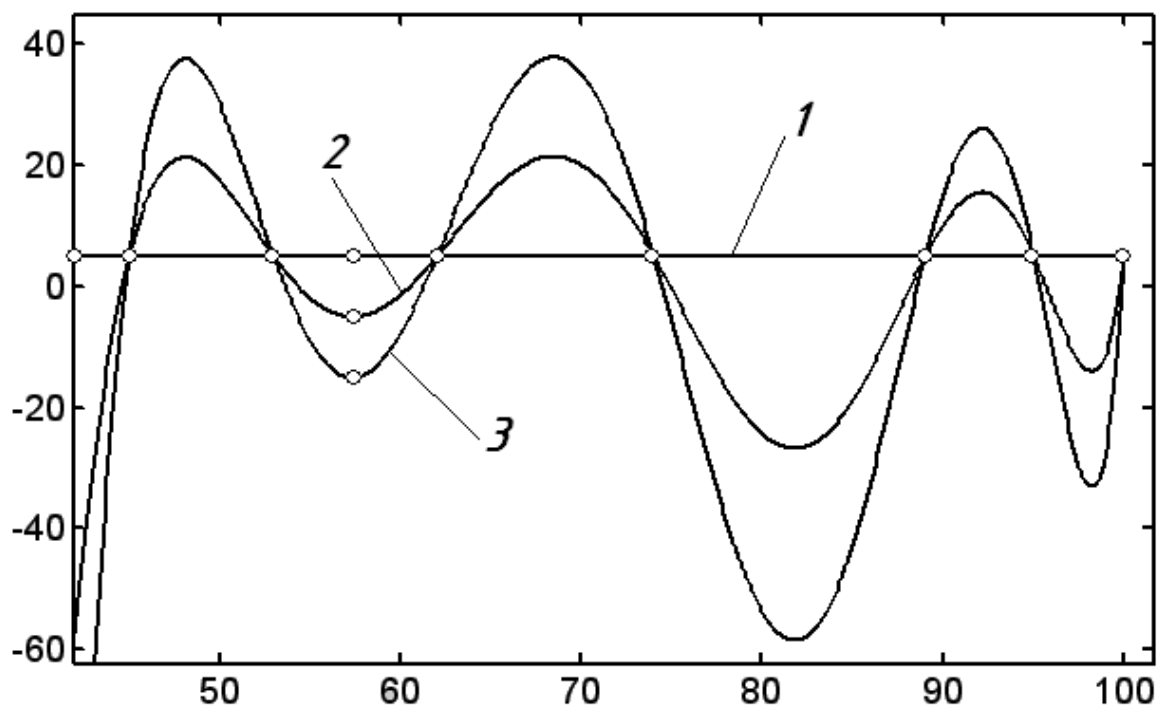


Рис. 5.22. Збільшений фрагмент (рис. 5.21) інтерполяційних поліноміальних кривих 9-го порядку, у яких або всі точки лежать на прямій (позначено цифрою 1), або одна точка знаходиться за межами прямої (позначено цифрами 2, 3)

В межах виділеного фрагменту осциляції поліноміальної кривої теж більші, ніж осциляції інтерполяційної кривої на основі суми функцій гіперболічного секанса. Із рис. 5.20 добре видно, що осциляції за величиною значно менші за екстремум в точці збурення, а на фрагменті (рис. 5.22) - навпаки.

Можна перейти від явного рівняння полінома (5.6) до параметричних рівнянь. Для цього запишемо два рівняння у функції незалежної змінної t :

$$\begin{aligned} x &= e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + \dots + e_9 t^9; \\ y &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_9 t^9. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В цьому випадку незалежна змінна t є порядковим номером точки в точковому ряді. Підставимо одиницю замість t в рівняння (5.9), тобто порядковий номер першої точки, а в ліві частини – відповідні значення x і y в цій точці. Повторивши таку дію по відношенню до всіх десяти точок, ми отримаємо дві системи лінійних рівнянь з десятьма невідомими коефіцієнтами в кожній. Розв'язком цих систем будуть значення коефіцієнтів $e_0, e_1, e_2 \dots e_9, b_0, b_1, b_2 \dots b_9$.

За параметричними рівняннями (5.9) було побудовано інтерполяційну криву за заданим точковим рядом у табл. 5.1 (рис. 5.23). Порівнюючи отриманий результат із кривою, побудованою за явним рівнянням полінома (5.6) за тим же точковим рядом (рис. 5.17), можна зробити висновок, що осциляції значно поменшали, натомість крива виходить за межі точкового ряду вздовж осі Ox .

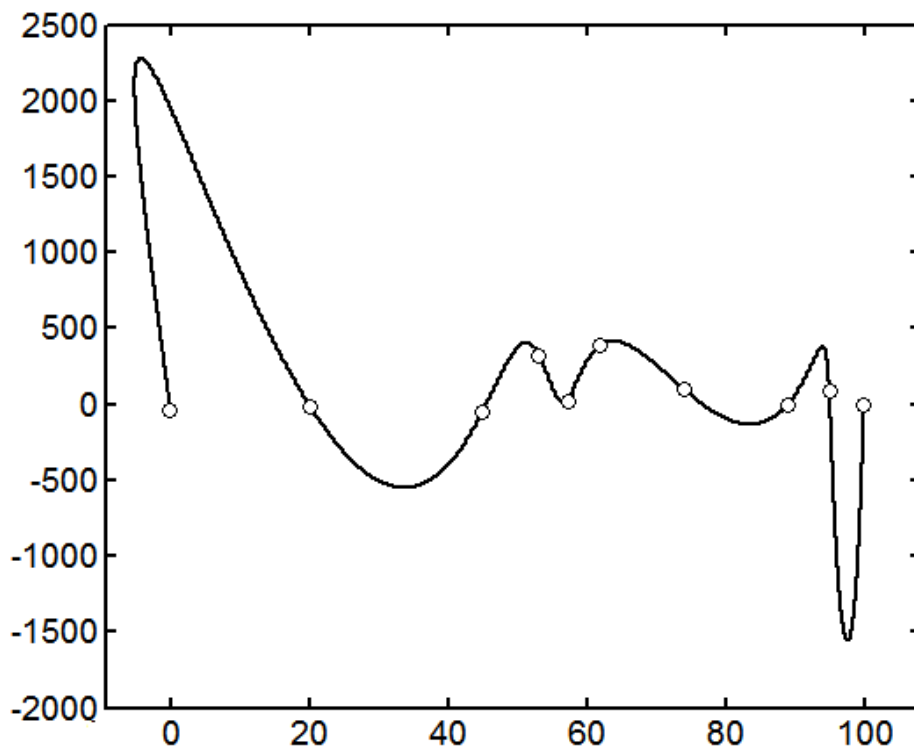


Рис. 5.23. Інтерполяційна крива, побудована за параметричними рівняннями (5.9), яка проходить через заданий точковий ряд (табл. 5.1)

Такий підхід дозволяє будувати інтерполяційні криві при будь-якому порядку проходження кривої через задані точки, а не тільки в порядку зростання координати x , як при явному рівнянні (5.6). На рис. 5.24 побудовано дві інтерполяційні криві: цифрою 1 позначено криву, зображену на рис. 5.23, а цифрою 2 – криву при заміні місцями крайніх точок. Крива виходить із останньої точки і йде через другу і наступні і з передостанньої прямує до першої. На ділянці з другої до передостанньої точки криві практично збігаються.

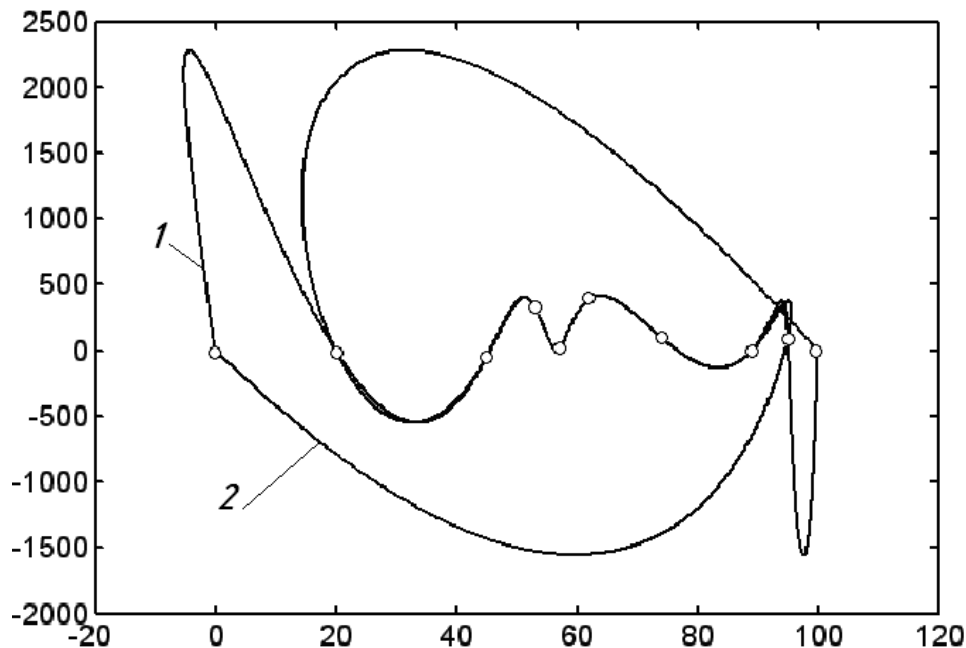


Рис. 5.24. Інтерполяційна крива, що проходить через точковий ряд (табл. 1), у якому перша і остання точки поміняні місцями

На рис. 5.25 побудовано криву при заміні місцями 5 і 6 точок.

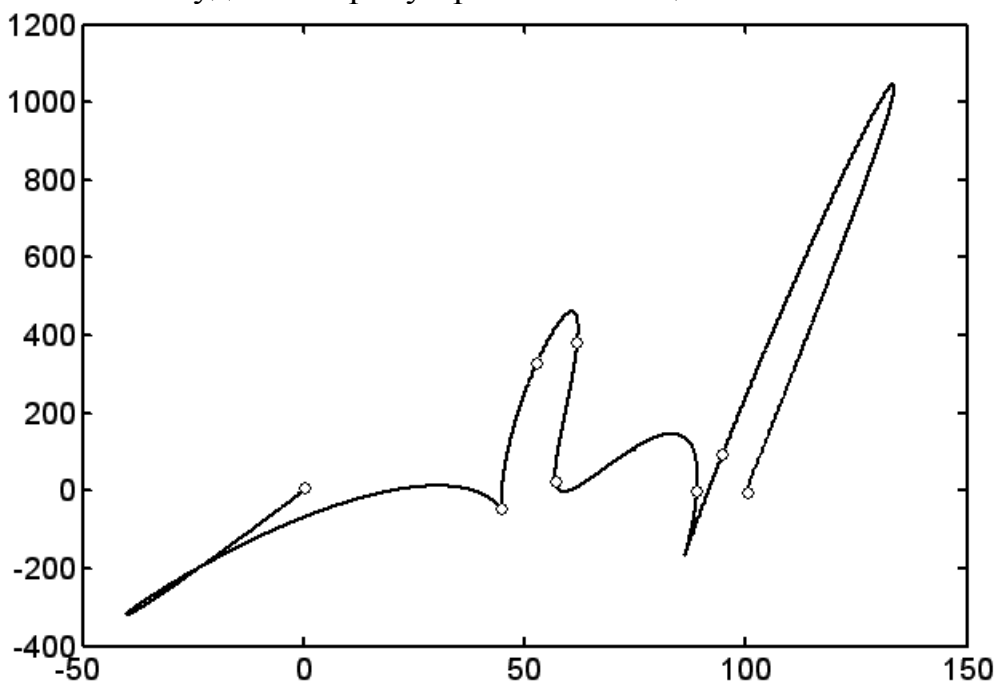


Рис. 5.25. Інтерполяційна крива, що проходить через точковий ряд (табл. 1), у якому п'ята і шоста точки поміняні місцями

Інтерполяційну криву за параметричними рівняннями (5.9) випробувано на прямолінійному точковому ряду із точками збурення. Інтерполяційні криві на основі суми функцій гіперболічного секанса для такого точкового ряду побудовані на рис. 5.20. Рівняння (5.9) дають криві, зображені на рис. 5.26.

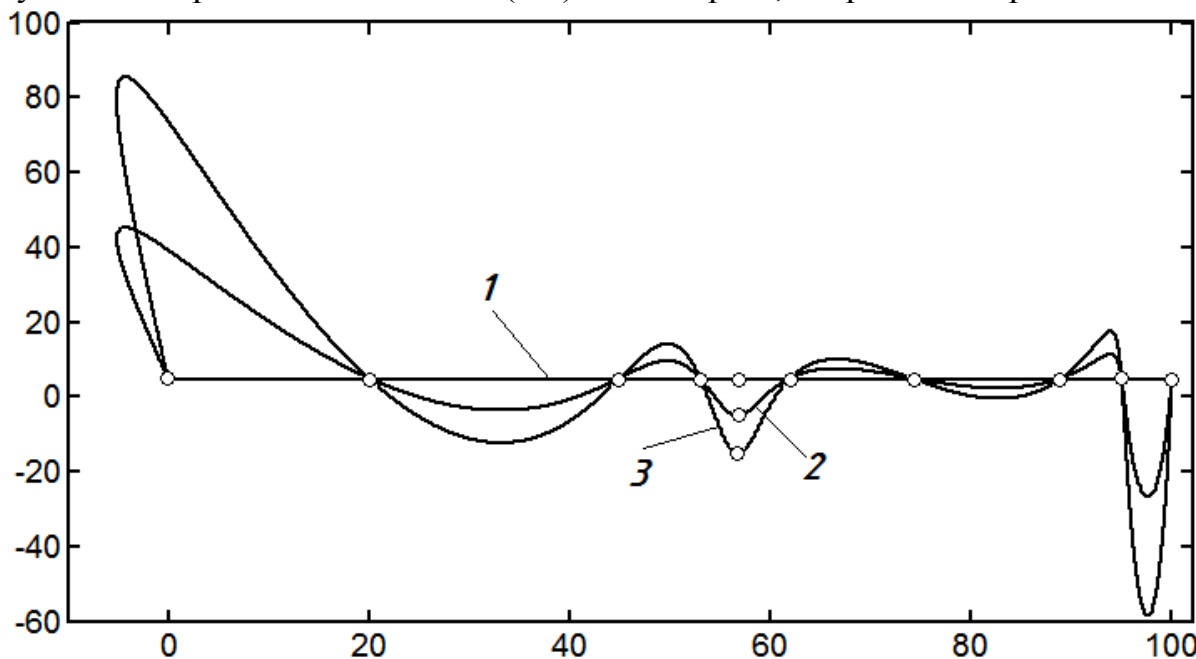


Рис. 5.26. Інтерполяційні криві, побудовані за рівняннями (5.9), у яких або всі точки лежать на прямій (позначено цифрою 1), або одна точка знаходиться за межами прямої (позначено цифрами 2, 3)

Порівняння інтерполяційних кривих на основі полінома і на основі суми функцій гіперболічного секанса показує, що останні криві кращі, оскільки менш схильні до осциляції і на величину небажаних екстремумів не впливає кількість точок у точковому ряду. Однак якщо точки розташовані нерівномірно, то інтерполяційна крива суттєво змінюється. На рис. 5.27 це показано на прикладі інтерполяції точкового ряду, розташованого на колі нерівномірно за допомогою суми функцій гіперболічного секанса.

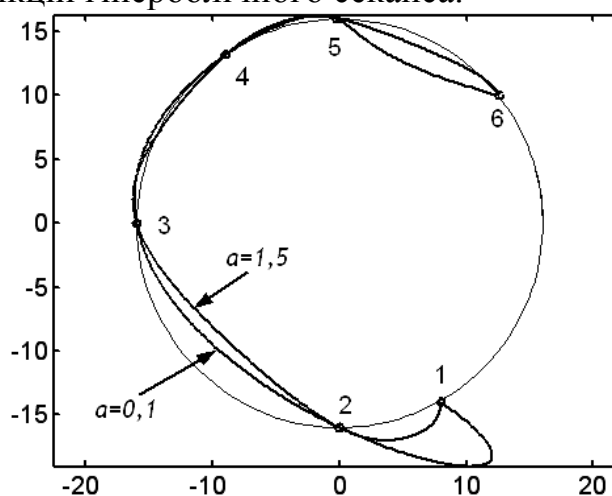


Рис. 5.27. Інтерполяційна крива, яка проходить через шість точок, нерівномірно розташованих на колі

Із рис. 5.27 видно, що при двох значеннях коефіцієнта a ($a = 0,1$ і $a = 1,5$), при яких інтерполяційні криві практично не відрізнялися при рівномірному розташуванні точок, при нерівномірному вони суттєво відрізняються і притому не збігаються із колом. Сказане стосується і кривих, що проходять через точки із зміненим розташуванням на колі (рис. 5.28).

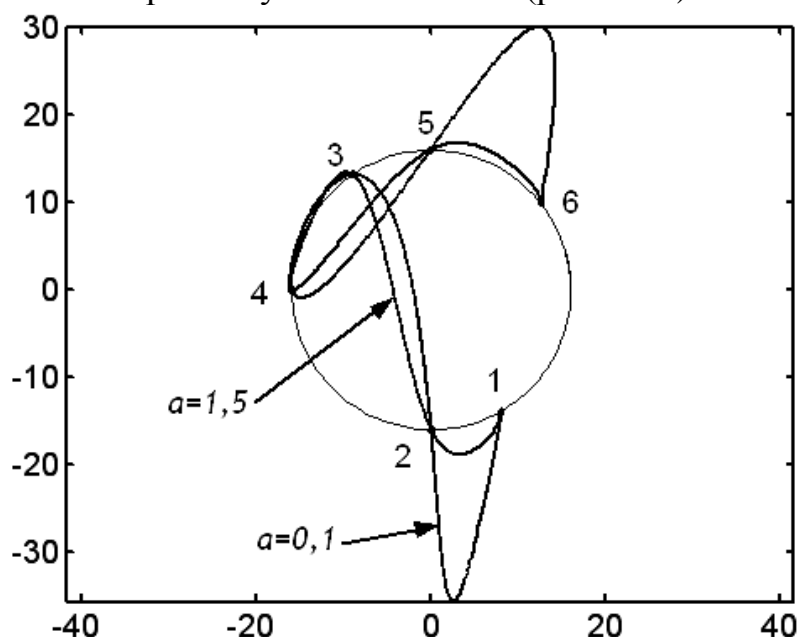


Рис. 5.28. Інтерполяційна крива, яка проходить через шість точок, нерівномірно розташованих на колі, при зміні порядку проходження (точки 3 і 4 поміняні місцями)

5.2. Управління інтерполяційною кривою на основі суми графіків гіперболічного секанса напрямом дотичних в заданих точках

В підрозділі 5.1 було показано, що коефіцієнт a перед аргументом впливає на форму інтерполяційної кривої. Це стосується двох випадків:

- коефіцієнт однаковий у всіх n складових інтерполяційної функції і при корегуванні форми кривої набуває іншого, але знову ж таки однакового зазначення для всіх складових;
- коефіцієнт для різних складових, тобто для різних точок має різне значення. В цьому випадку корегування формою кривої здійснюється зміною коефіцієнта в одній або декількох точках.

В зв'язку з цим виникає задача управління формою кривої таким чином, щоб у заданих точках вона мала потрібний напрям. Цього можна досягнути, задавши у кожній або у потрібних точках дотичну. Перепишемо рівняння (5.2), задавши в кожній точці свій коефіцієнт (при цьому замість $t_1 \dots t_n$ запишемо конкретне значення змінного параметра в кожній точці – її номер):

$$\begin{aligned}
 x &= c_1 \cdot \operatorname{sech} [a_1 \cdot (t - 1)] + c_2 \cdot \operatorname{sech} [a_2 \cdot (t - 2)] + \dots + \\
 &\quad + c_n \cdot \operatorname{sech} [a_n \cdot (t - n)]; \\
 y &= d_1 \cdot \operatorname{sech} [a_1 \cdot (t - 1)] + d_2 \cdot \operatorname{sech} [a_2 \cdot (t - 2)] + \dots + \\
 &\quad + d_n \cdot \operatorname{sech} [a_n \cdot (t - n)],
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

де $c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n$ – постійні коефіцієнти перед функціями;

$a_1 \dots a_2$ – постійні коефіцієнти перед аргументом функції;

t – змінний параметр, який в заданих точках приймає ціле значення (1, 2, 3 і т. д.) за номером точки. Кут нахилу дотичної до кривої в будь-якій її точці визначається через тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'}. \quad (5.11)$$

Знаходимо похідні параметричних рівнянь (5.10):

$$\begin{aligned} x' &= -c_1 \frac{a_1 \operatorname{sh} [a_1 (t - 1)]}{\operatorname{ch}^2 [a_1 (t - 1)]} - c_2 \frac{a_2 \operatorname{sh} [a_2 (t - 2)]}{\operatorname{ch}^2 [a_2 (t - 2)]} - \dots - c_n \frac{a_n \operatorname{sh} [a_n (t - n)]}{\operatorname{ch}^2 [a_n (t - n)]}; \\ y' &= -d_1 \frac{a_1 \operatorname{sh} [a_1 (t - 1)]}{\operatorname{ch}^2 [a_1 (t - 1)]} - d_2 \frac{a_2 \operatorname{sh} [a_2 (t - 2)]}{\operatorname{ch}^2 [a_2 (t - 2)]} - \dots - d_n \frac{a_n \operatorname{sh} [a_n (t - n)]}{\operatorname{ch}^2 [a_n (t - n)]}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Підставивши (5.12) у (5.11), можна визначити тангенс кута α або ж і сам кут. Однак у нас задача обернена: маючи n заданих точок і n кутів, що задають напрям дотичної в цих точках, необхідно знайти всі коефіцієнти. Розглянемо самий простий випадок, коли задано дві точки $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ і кути α_1 і α_2 нахилу дотичних в цих точках. Підставимо в рівняння (5.10) по чергово координати точок A і B і відповідне значення аргументу t . Одержимо:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2 \operatorname{sec} h(a_2); & x_2 &= c_2 + c_1 \operatorname{sec} h(a_1); \\ y_1 &= d_1 + d_2 \operatorname{sec} h(a_2); & y_2 &= d_2 + d_1 \operatorname{sec} h(a_1). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Якщо в рівняннях (5.13) прийняти коефіцієнти a_1 і a_2 рівними, наприклад, одиниці, то верхні два рівняння складають систему із двома невідомими і нижні також, причому всі рівняння є лінійними. Розв'язком цих рівнянь будуть коефіцієнти c_1, c_2, d_1, d_2 , які забезпечать проходження графіка функції через задані точки A і B , однак кути α_1 і α_2 при цьому будуть довільними. Підстановка відповідного аргументу у рівняння (5.12), а потім у вираз (5.11) дає:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{d_2}{c_2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{d_1}{c_1}. \quad (5.14)$$

Доповнивши рівняння (5.13) двома рівняннями (5.14), у яких кути α_1 і α_2 задані, одержимо систему із шести рівнянь, з якої потрібно визначити шість невідомих коефіцієнтів. Слід зазначити, що дана система буде нелінійною, що значно ускладнює її розв'язання.

Щоб пересвідчитися в достовірності одержаної системи, розглянемо тестовий приклад. Задамо кути $\alpha_1 = -60^\circ$ та $\alpha_2 = 30^\circ$ і побудуємо криві, які в кінцевих точках матимуть відповідні дотичні. Для цього візьмемо коефіцієнти d_1, c_1 і d_2, c_2 , такими, щоб задовольняли рівняння (5.14), а a_1 і a_2 – довільними. За параметричними рівняннями (5.10) побудуємо криві, обмежившись першими двома членами. На рис. 5.29 побудовані криві, які показані потовщеними при зміні аргументу в межах від 1 до 2 з певним кроком (наприклад 0,01).

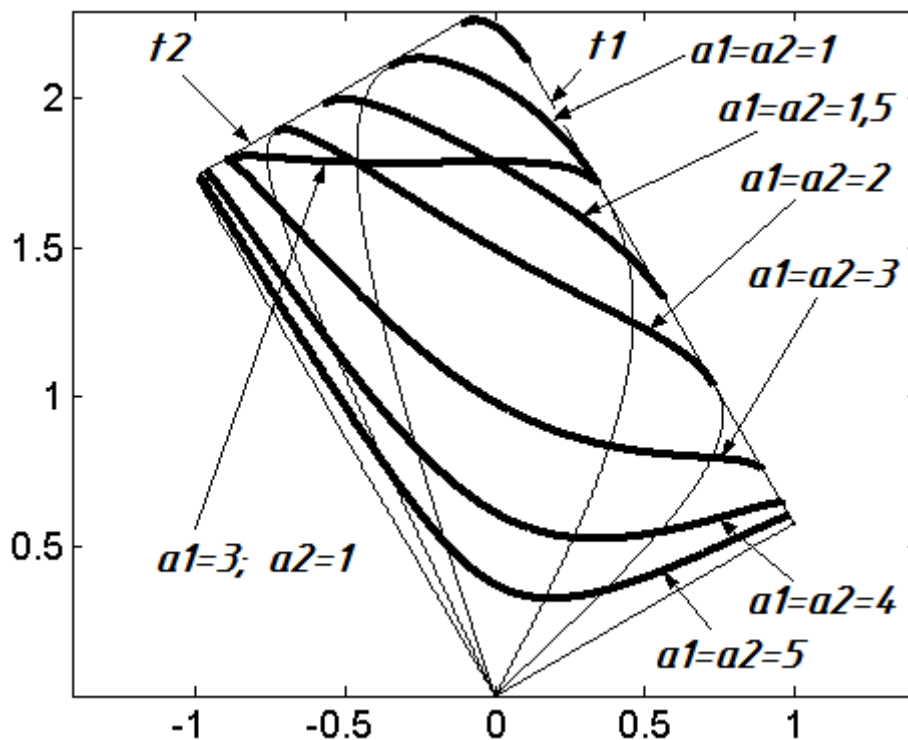


Рис. 5.29. Графіки інтерполяційних функцій із заданим напрямом дотичної на кінцях кривої при $c_1 = 1$; $c_2 = -1$; $d_1 = 0,5774$; $d_2 = 1,7321$ і різними значеннями коефіцієнта a

Як видно із рис. 5.29, прослідковується певна закономірність у розташуванні кривих. По-перше, всі вони знаходяться в прямокутнику і в кінцевих точках торкаються до дотичних t_1 і t_2 , проведених відповідно під кутом -60° і 30° до осі Ox . По-друге, вони можуть мати або не мати точки перегину. На рис. 5.29 дві криві (при $a_1=a_2=1$ і $a_1=a_2=2$) показані ще і за межами точок дотику тонкими лініями, звідки видно, що при необмеженій зміні аргументу t вони прямують у початок координат. Це має своє пояснення. При явному заданні інтерполяційної функції при необмеженому зростанні або зменшенні аргументу значення функції прямує до нуля (рис. 5.3, 5.4). При параметричному заданні за таких же умов кожна із функцій $x=x(t)$ і $y=y(t)$ теж прямуватиме до нуля. Це означає, що після проходження через крайні задані точки (або після дотику до прямих, заданих кутами α_1 і α_2) криві прямуватимуть до початку координат. Спостерігається також ситуація, показана на рис. 5.11, тобто по мірі збільшення величини коефіцієнтів $a_1=a_2$ у кривої з'являються точки перегину і вона все більше середньою частиною наближається до початку координат. При цьому дотичні t_1 і t_2 у точках дотику не здаються

такими тому що крива, торкнувшись до дотичної, відразу ж повертається назад і її кривина у точці дотику настільки велика, що візуально побачити криву у точці дотику неможливо. При досить великих значення $a_1 = a_2$ вітки кривої взагалі збігаються із сторонами прямокутника, які виходять із початку координат, утворюючи таким чином не криву, а ламану лінію із прямим кутом. Слід зазначити, що при інших значеннях кутів α_1 і α_2 всі криві будуть знаходитися в межах паралелограма (рис. 5.30). На цьому рисунку тонкими лініями показані криві, які побудовані при $a_1 \neq a_2$. Отже, можна зробити висновок, що при заданих кутах α_1 і α_2 (тобто заданих коефіцієнтах c_1, c_2, d_1, d_2) криві не будуть виходити за межі відповідного паралелограма при будь-яких комбінаціях a_1 і a_2 і необмежених значення зміни аргументу t . Таким чином можна сформулювати твердження.

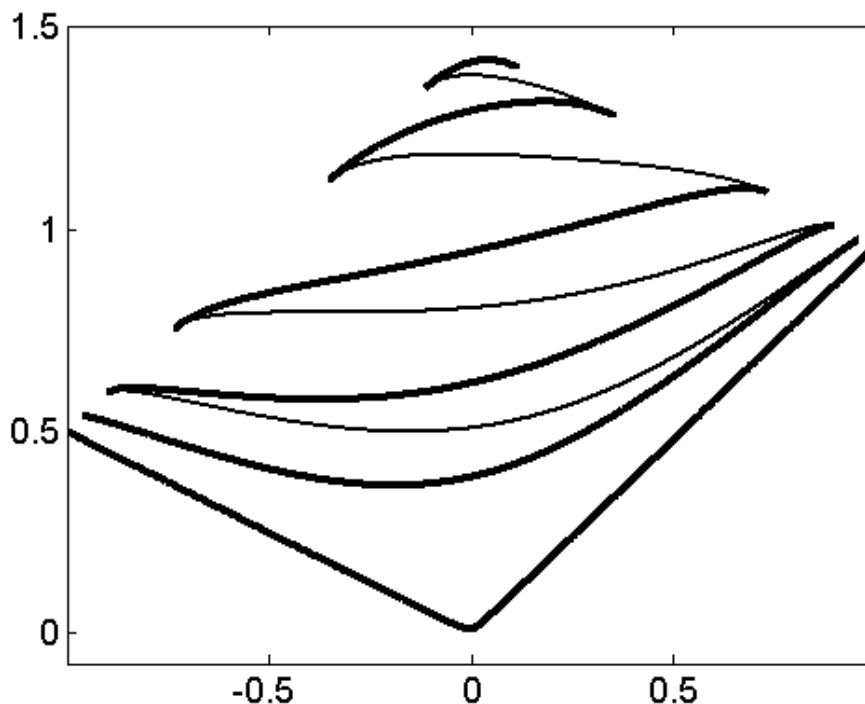


Рис. 5.30. Інтерполяційні криві не виходять за межі паралелограма при будь-яких комбінаціях коефіцієнтів a_1 і a_2 і заданих коефіцієнтах c_1, c_2, d_1, d_2 , які визначають кути нахилу сторін паралелограма

Твердження. Якщо інтерполяційна функція на основі суми графіків гіперболічного секанса має тільки дві складові, тобто описується параметричними рівняннями виду:

$$x = c_1 \cdot \operatorname{sech} [a_1 \cdot (t - 1)] + c_2 \cdot \operatorname{sech} [a_2 \cdot (t - 2)];$$

$$y = d_1 \cdot \operatorname{sech} [a_1 \cdot (t - 1)] + d_2 \cdot \operatorname{sech} [a_2 \cdot (t - 2)],$$

то вся множина кривих, яка може бути побудована при зміні параметра t в області дійсних чисел при будь-яких комбінаціях коефіцієнтів a_1, a_2 не вийде за межі паралелограма, у якого кути між сторонами визначаються коефіцієнтами c_1, c_2, d_1, d_2 .

Для уточнення скажемо, що ці кути знаходяться за формулами (5.14), а вся множина кривих торкається сторін паралелограма.

Аналізуючи криві на рис. 5.29, 5.30, можна зробити висновок, що вони придатні для інтерполяції при малих значеннях коефіцієнтів a_1 і a_2 (наприклад, менших 1,5). Для більших коефіцієнтів у кривій з'являються точки перегину, а дотична сприймається як хорда із-за великої кривини кривої в точці дотику. Раніше було зроблено висновок і про іншу межу коефіцієнтів a , значення якої становить біля 0,01 оскільки при менших значеннях інтерполяційна крива втрачає гладкість (рис. 5.13).

Було проведено також дослідження властивостей іншої інтерполяційної кривої, яка є сумою графіків функцій Гаусса. Виявилось, що вони ведуть себе аналогічно. На рис. 5.31 показані попарно криві на основі сум функцій гіперболічного секанса і Гаусса, що мають спільні дотичні на кінцях. Дві криві взято із рис. 5.29 (при $a_1=a_2=1,5$ і $a_1=a_2=3$) і побудовано відповідні криві Гаусса (при цьому коефіцієнти перед аргументом будуть інші – 0,856 і 1,309 відповідно, оскільки це інша функція). І хоча криві дещо не збігаються, поведінка їх однакова – криві на основі функцій Гаусса теж не виходять за межі певного паралелограма.

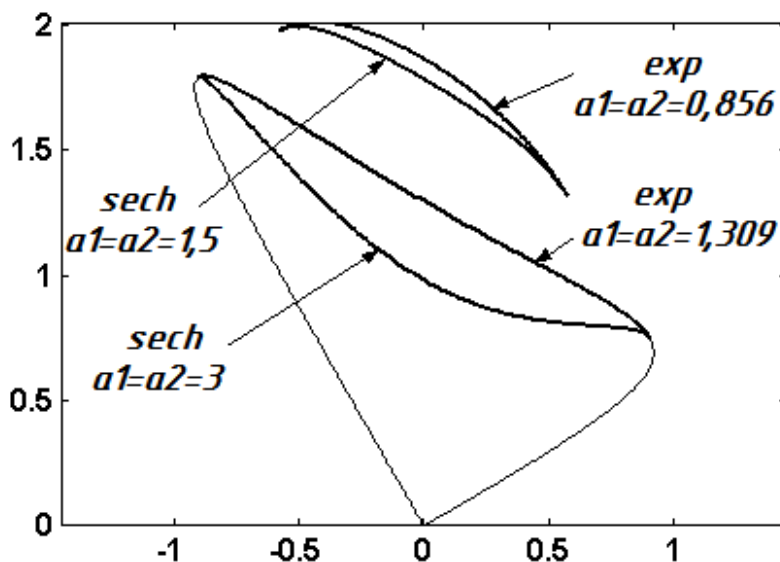


Рис. 5.31. Порівняння кривих на основі суми графіків секанса гіперболічного і функції Гаусса, які мають спільні дотичні в кінцевих точках

Проаналізувавши поведінку кривих, можна передбачити їх часткову непридатність для інтерполяції точкового ряду із заданням напрямку дотичної в окремих точках, оскільки при розв'язуванні системи нелінійних рівнянь коефіцієнти a_1 , a_2 можуть вийти за межі бажаних величин (1,5 ... 0,01).

Розглянемо приклад. Візьмемо дві точки $A(1; 3)$, $B(-1; 4)$ і поставимо задачу знайти інтерполяційну криву, яка б проходила через ці точки і торкалася до дотичних, проведених в них під кутом -60° і 30° до осі Ox . Підставивши задані значення координат точок і кутів у вирази (5.13), (5.14), одержимо нелінійну систему із шести рівнянь (система наведена нижче, як тіло файл-функції „*nelin*”). Нижче наводимо текст програми для розв'язування системи і побудови кривої в середовищі *MatLab* (знаком процента позначені коментарі).

% Виклик файл-функції 'nelin' для розв'язування системи нелінійних рівнянь з початковими наближеннями коренів, рівними 0,1

```
[x,f]=fsolve('nelin',[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]);
a(1)=x(1); a(2)=x(2); b(1)=x(3); b(2)=x(4); c(1)=x(5); c(2)=x(6);
```

% Побудова кривої після знаходження коефіцієнтів при зміні незалежного аргумента в межах від 1 до 2 з кроком 0,005

```
t=[1:0.005:2];
x=b(1)*sech(a(1)*(t-1))+ b(2)*sech(a(2)*(t-2));
y=c(1)*sech(a(1)*(t-1))+ c(2)*sech(a(2)*(t-2));
plot(x,y)
```

% Вивід в командне вікно значень коефіцієнтів та величини похибки f

```
a(1), a(2), b(1), b(2), c(1), c(2), f
```

% Файл-функція 'nelin', яка задає систему нелінійних рівнянь

```
function F =nelin(x)
F(1) = x(3)+x(4)*sech(x(2))-1;           %  $x_1$ 
F(2) = x(5)+x(6)*sech(x(2))-3;         %  $y_1$ 
F(3) = x(3)*sech(x(1))+x(4)+1;         %  $x_2$ 
F(4) = x(5)*sech(x(1))+x(6)-4;         %  $y_2$ 
F(5) = x(6)/x(4)+1.7321;                % тангенс кута  $\alpha_1$ 
F(6) = x(5)/x(3)-0.5774;                % тангенс кута  $\alpha_2$ 
```

Результатом роботи програми є необхідні дані для побудова кривої, яка проходить через задані точки $A(1; 3)$, $B(-1; 4)$ із заданими дотичними в них (на рис. 5.32 ця крива позначена написом „ $\pi/6$ ”, що відповідає куту нахилу дотичної в точці B). Задамо інше значення кута α_2 , наприклад 0° . Програма розв'язує систему нелінійних рівнянь і будує криву, позначену на рис. 5.32 цифрою „0”. Дослідження показали, що програма працює ефективно при зміні кута α_2 в межах $0^\circ \dots 60^\circ$. Якщо задати кут α_2 поза межами вказаного інтервалу, то *MatLab* дає повідомлення про те, що обчислювальний процес виявився таким, що не сходиться. Отже, можна говорити про обмежені можливості інтерполяційної кривої на основі гіперболічного секанса у тому випадку, коли ставити умову не тільки проходження її через задані точки, а і мати в цих точках заданий напрям дотичних. Очевидно, сказане буде справедливим для трьох і більше точок, оскільки число нелінійних рівнянь збільшується на три для кожної додаткової точки. При цьому слід зауважити, що вирази (5.14) для трьох і більше точок значно ускладнюються.

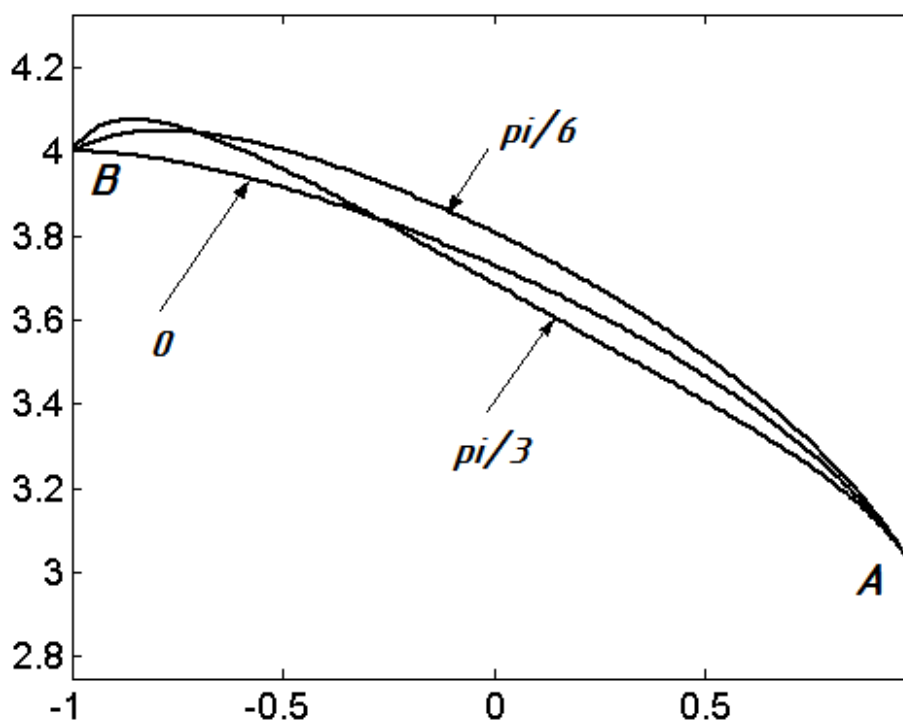


Рис. 5.32. Порівняння кривих на основі суми графіків секанса гіперболічного із спільною дотичною в точці A і різними кутами дотичної в точці B

Для прикладу наведемо вирази тангенсів кутів нахилу для трьох точок. Щоб одержати вираз для тангенса першого кута, необхідно у похідні (5.12) замість параметра t підставити його значення для першої точки – одиницю, а потім зайти вираз за формулою (5.11). Аналогічно розшукують вирази для тангенса другого і третього кутів. Після певних спрощень наведемо їх вирази:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{a_2 c_2 \operatorname{sh}(-a_2) \operatorname{ch}^2(-2a_3) + a_3 c_3 \operatorname{sh}(-2a_3) \operatorname{ch}^2(-a_2)}{a_2 d_2 \operatorname{sh}(-a_2) \operatorname{ch}^2(-2a_3) + a_3 d_3 \operatorname{sh}(-2a_3) \operatorname{ch}^2(-a_2)}; \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{a_1 c_1 \operatorname{sh}(a_1) \operatorname{ch}^2(-a_3) + a_3 c_3 \operatorname{sh}(-a_3) \operatorname{ch}^2(a_1)}{a_1 d_1 \operatorname{sh}(a_1) \operatorname{ch}^2(-a_3) + a_3 d_3 \operatorname{sh}(-a_3) \operatorname{ch}^2(a_1)}; \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{a_1 c_1 \operatorname{sh}(2a_1) \operatorname{ch}^2(a_2) + a_2 c_2 \operatorname{sh}(a_2) \operatorname{ch}^2(2a_1)}{a_1 d_1 \operatorname{sh}(2a_1) \operatorname{ch}^2(a_2) + a_2 d_2 \operatorname{sh}(a_3) \operatorname{ch}^2(2a_2)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Таким чином, якщо ми хочемо провести інтерполяційну криву через три точки із заданою дотичною в кожній із них, потрібно розв'язати 9 рівнянь, що складають нелінійну систему. Три рівняння (5.15) потрібно долучити до системи (5.3) і (5.4), в яких коефіцієнти a будуть невідомими (a_1 , a_2 і a_3). Однак, як зазначалось раніше, така система якщо і може бути розв'язана, то в дуже обмежених випадках. При збільшенні числа точок вирази тангенсів кутів ще більше ускладнюються, що робить розв'язання системи практично

неможливим. Отже інтерполяційна крива добре працює на умову проходження через задані точки (їх число може бути досить великим і обмежується можливостями комп'ютера в розв'язанні відповідної кількості рівнянь у системі) і практично не працює, коли до умови проходження долучається умова на пряму дотичних в заданих точках.

5.3. Інтерполяційні криві на основі суми функцій гіперболічного секанса для просторового точкового ряду та поєднання плоских і просторових ліній

Конструювання інтерполяційної кривої за допомогою параметричних рівнянь (5.2) на основі суми функцій гіперболічного секанса зводиться до розв'язування двох незалежних систем лінійних рівнянь, число яких у системі дорівнює числу точок, через які проходить крива. Два рівняння (5.2) доповнимо третім:

$$z = e_1 \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - 1)] + e_2 \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - 2)] + \dots + e_n \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - n)]. \quad (5.16)$$

Для знаходження коефіцієнтів $e_1 \dots e_n$ потрібно розв'язати ще одну лінійну систему рівнянь аналогічно попереднім двом. Таким чином, маючи n точок з трьома координатами x, y, z в кожній, ми повинні скласти три лінійних системи по n рівнянь у кожній. Їх розв'язком будуть коефіцієнти $c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n, e_1 \dots e_n$ у параметричних рівняннях (5.2), (5.16). Таким чином, параметричні рівняння просторової інтерполяційної кривої запишуться:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \operatorname{sech} [a(t - t_1)] + c_2 \operatorname{sech} [a(t - t_2)] + \dots + c_n \operatorname{sech} [a(t - t_n)]; \\ y &= d_1 \operatorname{sech} [a(t - t_1)] + d_2 \operatorname{sech} [a(t - t_2)] + \dots + d_n \operatorname{sech} [a(t - t_n)]; \\ z &= e_1 \operatorname{sech} [a(t - t_1)] + e_2 \operatorname{sech} [a(t - t_2)] + \dots + e_n \operatorname{sech} [a(t - t_n)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Для перевірки можливостей поєднання різного роду точкових рядів було взято тестовий приклад, у якому 30 точок рівномірно розподілили наступним чином: 5 точок розташовані на відрізку прямої загального положення, 14 точок розташовані на колі в горизонтальній площині (плоска крива) і 11 точок взяли на гвинтовій лінії (просторова крива).

Розв'язання трьох лінійних систем із 30 рівнянь у кожній і побудову лінії за рівняннями (2.17) здійснювали за допомогою системи *MatLab*. Результати роботи програми показано на рис. 5.33, причому побудова інтерполяційної лінії здійснювалося при різних значеннях коефіцієнта a перед аргументом (0,2; 0,4 і 0,8). Ділянка 1 – 6 лінії інтерполірує прямолінійний відрізок, точки з 6-ої по 19-у лежать на колі, а з 19-ої до 30-ої – на гвинтовій лінії. Із рис. 5.33,а видно, що лінії, побудовані при різних значеннях коефіцієнта a збігаються в середній частині і певним чином розходяться на кінцях лінії. Це ж підтверджує і графік

зміни кривини (рис. 5.34). Із нього видно, що в середній частині інтерполяційних ліній графіки їх кривини майже збігаються, а по кінцях лінії мають значні розходження.

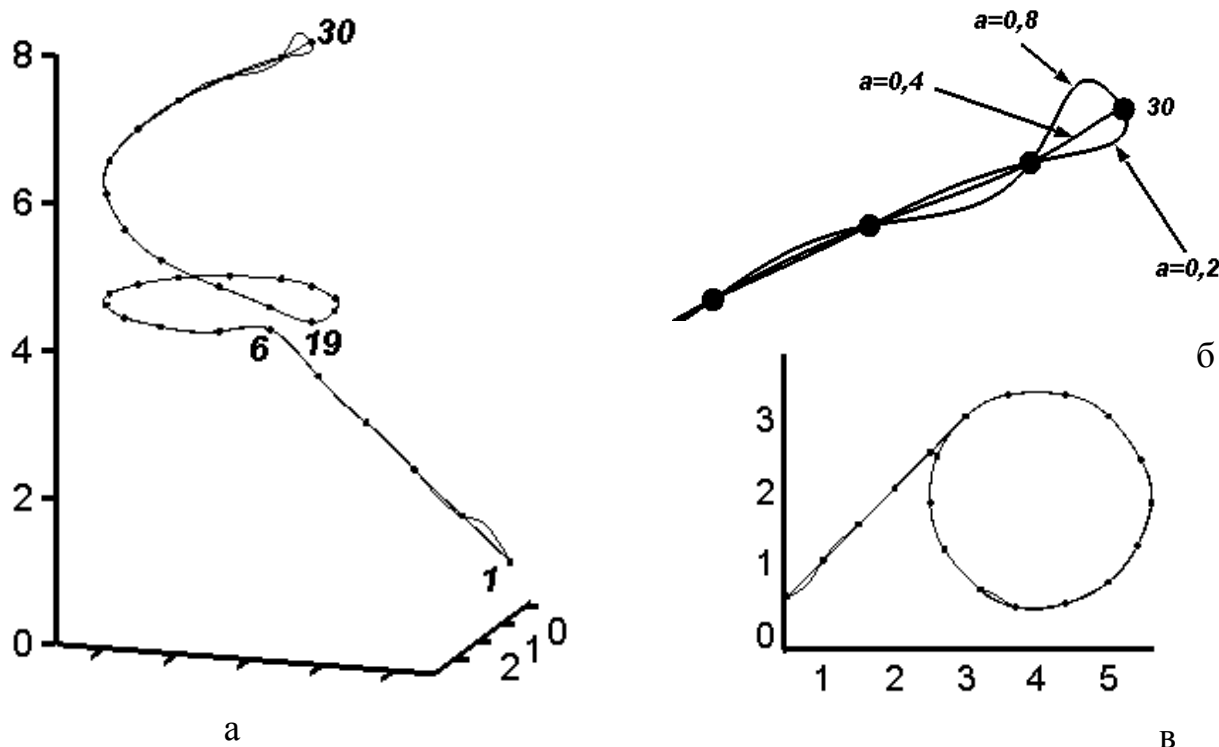


Рис. 5.33. Інтерполяційні лінії, проведені через заданий точковий ряд у просторі:

- а) аксонометричне зображення лінії;
- б) збільшений фрагмент в околі 30-ої точки;
- в) горизонтальна проекція лінії

Така поведінка інтерполяційної лінії має своє пояснення. Раніше було сказано, що при зміні аргументу інтерполяційної функції від $-\infty$ до $+\infty$ обидва кінці кривої прямують до початку координат, причому поворот кривої в напрямі початку координат відбувається зразу ж після проходження крайніх точок заданого ряду. Цей поворот добре видно на рис. 5.33,б в околі 30-ої точки. Щоправда, при $a=0,4$ повороту не видно, однак він там є і починається відразу ж після проходження точки.

Кривину і скрут просторової кривої знаходили за відомими формулами. При цьому потрібно було мати перші, другі і треті похідні інтерполяційної кривої. Перші похідні наведено у (5.12). Оскільки всі похідні інтерполяційної функції включають однотипні складові, то ми наведемо другу і третю похідні тільки для n -го виразу із суми функцій $x=x(t)$ (при цьому вважаємо, що коефіцієнт a у всіх складових однаковий):

$$x'' = c_n a^2 \frac{\operatorname{sh}^2 [a(t-n)] - 1}{\operatorname{ch}^3 [a(t-n)]}. \quad (5.18)$$

$$x''' = c_n a^3 \frac{5 - \operatorname{sh}^2[a(t-n)]}{\operatorname{ch}^4[a(t-n)]}. \quad (5.19)$$

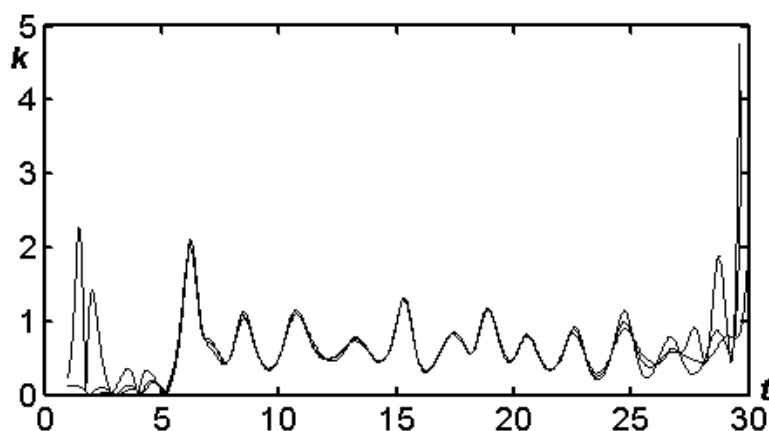


Рис. 5.34. Графік кривини просторової лінії, яка складається із різних ділянок при різних значеннях коефіцієнта a (0,2; 0,4; 0,8)

Параметричні рівняння (5.17) задають просторову криву, а без останнього – плоску, яка є горизонтальною проекцією просторової кривої. На рис. 5.35 наведено графіки кривини просторової інтерполяційної лінії і її горизонтальної проекції. Як видно із рис. 5.35, графіки на певному проміжку збігаються. Це стосується ділянки плоскої кривої (між точками 6 ... 19). На початку графіка (що відповідає прямолінійній ділянці інтерполяційної кривої від точки 1 до точки 6) кривина близька до нуля і коливається в певних межах. Що ж стосується відповідної ділянки просторової лінії, то її кривина теж коливається в певних межах, залишаючись додатною і близькою до сталого значення, що відповідає гвинтовій лінії.

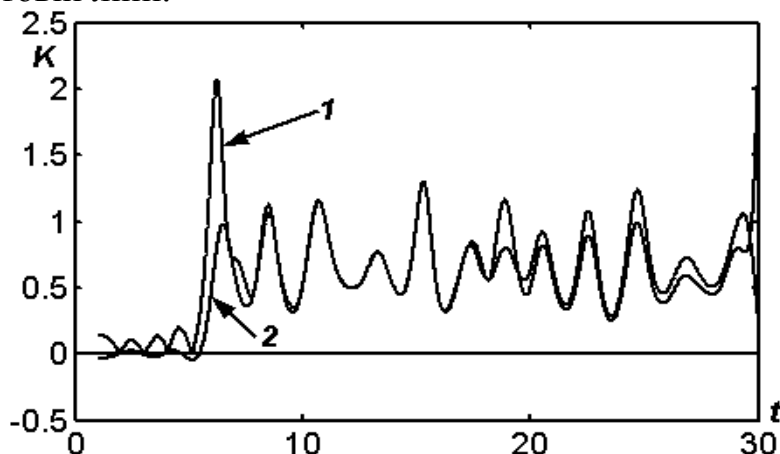


Рис. 5.35. Графіки кривини просторової кривої (позначено цифрою 1) і її горизонтальної проекції при $a=0,4$ (позначено цифрою 2)

Можливість конструювання просторових кривих за заданим точковим рядом при допомозі суми однотипних функцій гіперболічного секанса дозволяє отримувати неперервні криві заданої конфігурації. Вони можуть бути

напрямами при конструюванні поверхнь. Важливим фактором є їх неперервність, що дозволяє отримувати неперервні поверхні. В другому розділі розглядалося конструювання торсів за заданою прямою лінією. Щоб торс був віднесений до ліній кривини, необхідно, щоб його прямолінійна твірна була розташована в нормальній площині супровідного тригранника прямої кривої. Але може бути так, що пряму криву потрібної форми неможливо задати відомими функціями. В такому випадку пряму криву можна представити у дискретному вигляді (ДПК), і після цього побудувати інтерполяційну криву. Сказане продемонструємо на побудові нерозгортної трубчастої поверхні за заданою осью лінією. Каркасом такої поверхні є множина кіл сталого радіуса, які розташовані у нормальній площині прямої кривої. Твірна крива поверхні, якою є коло радіуса R , буде знаходитися у нормальній площині інтерполяційної кривої (рис. 5.36).

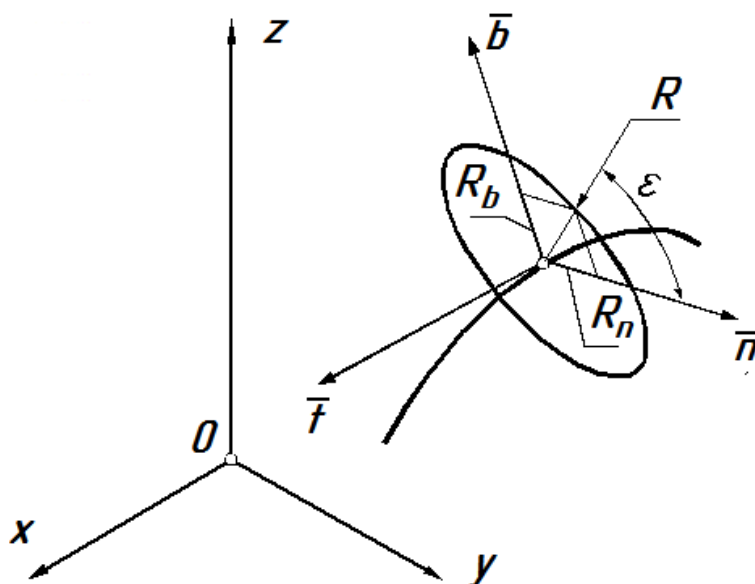


Рис. 5.36. Твірне коло трубчастої поверхні в нормальній площині супровідного тригранника прямої кривої, якою є інтерполяційна крива

Параметричні рівняння твірного кола в системі тригранника запишуться:

$$\begin{aligned} R_t &= 0; \\ R_n &= R \cos \varepsilon; \\ R_b &= R \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.20)$$

де R_t , R_n , R_b – проєкції радіуса кола на відповідні орти;

ε - незалежна змінна (кут повороту точки кола в нормальній площині навколо його центру у вершині тригранника).

Рівняння трубчастої поверхні в проєкціях на осі нерухомої системи координат запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= x_n + R_x; \\
 Y &= y_n + R_y; \\
 Z &= z_n + R_z,
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

де $x_n=x_n(t)$; $y_n=y_n(t)$; $z_n=z_n(t)$ – параметричні рівняння інтерполяційної напрямної кривої (5.17), побудованої на основі точкового ряду;

R_x , R_y , R_z – проекції радіус-вектора твірного кола на осі нерухомої системи координат.

Проекції R_x , R_y , R_z знаходимо через напрямні косинуси (2.87) за формулами (2.86), у яких літеру « ρ » потрібно замінити на « R ».

Для знаходження виразів напрямних косинусів (2.87) використовували перші і другі похідні інтерполяційної кривої (вирази (5.12) і (5.18)).

Інтерполяційну криву конструювали таким чином, щоб трубчаста поверхня була зображена у вигляді деякого вузла (рис. 5.37) або ж у вигляді вузла, що зв'язує дві трубчасті поверхні (рис. 5.38).

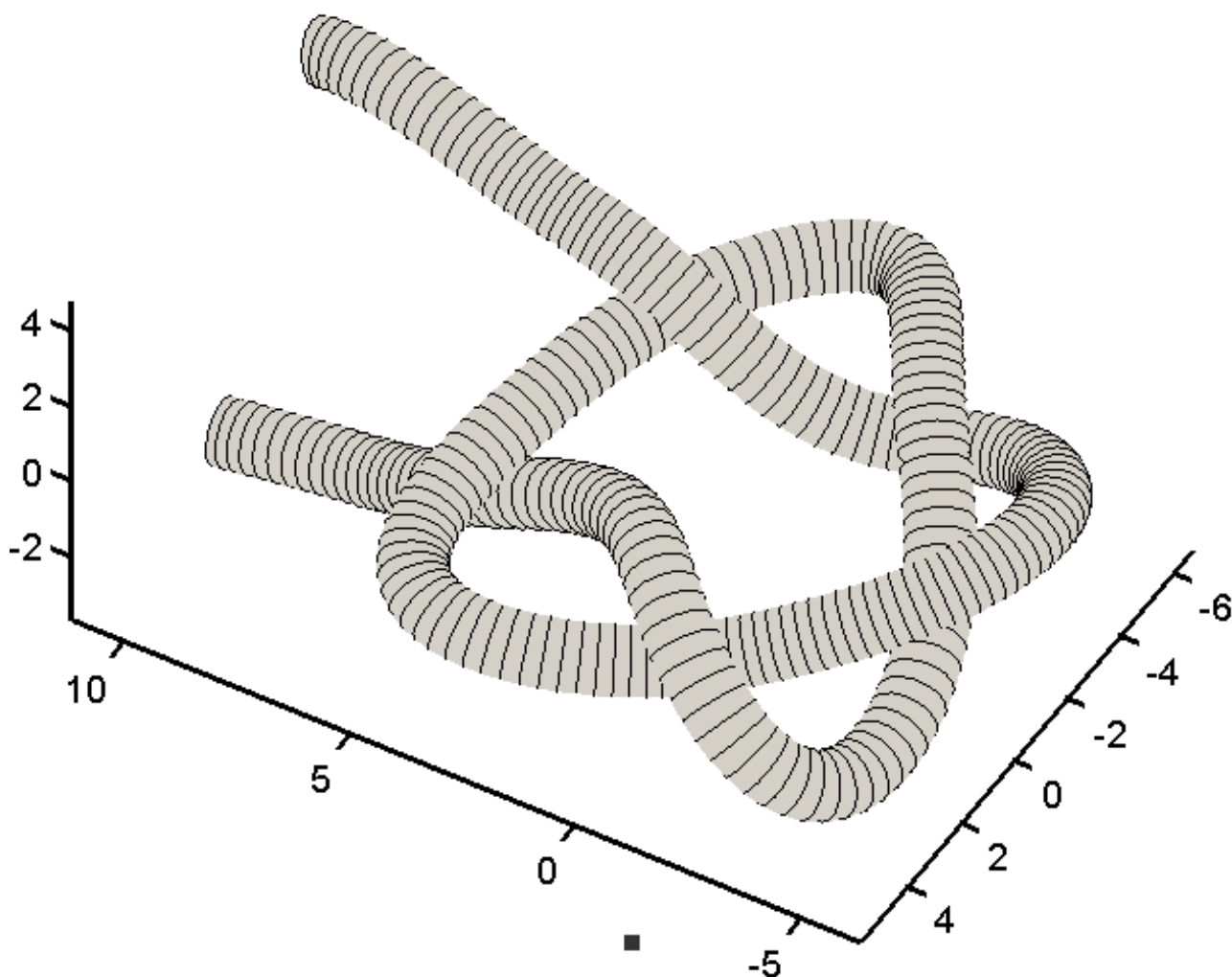


Рис. 5.37. Трубчаста поверхня, зав'язана у певний вузол, форму якого задає напрямна просторова інтерполяційна крива, яка є віссю цієї поверхні

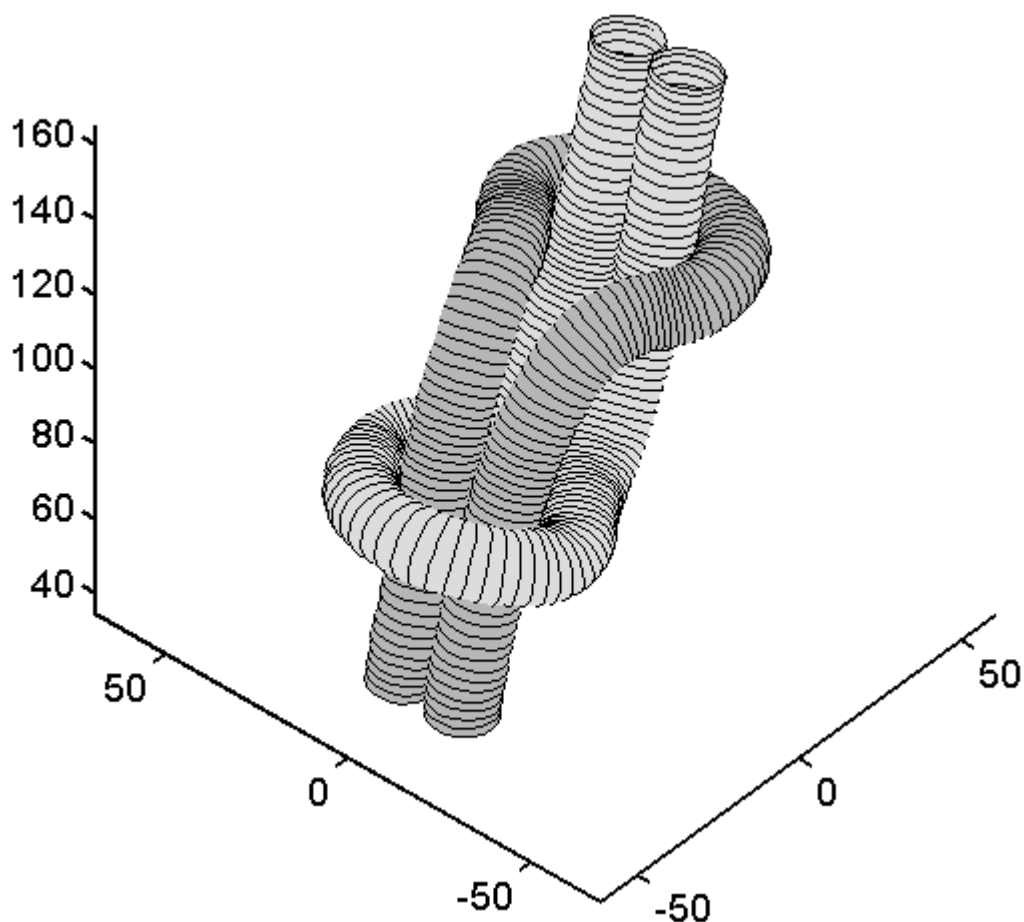


Рис. 5.38. Трубчасті поверхні, з'єднані вузлом, форму якого задають напрямні просторові інтерполяційні криві, які є осями цих поверхонь

В кінці першого розділу була розглянута побудова контурів плоских заготовок для виготовлення підпорних витків звужуючого шнека кормозбирального комбайна. Із торса однакового нахилу твірних, який проходить через напрямну гвинтову лінію змінного кроку, вирізався відсік таким чином, щоб зовнішня крайка поверхні розташовувалася на циліндрі заданого радіуса. Для цього знаходилося внутрішнє рівняння цієї лінії, як результат перетину циліндра із торсом. При підстановці цього рівняння у параметричні рівняння розгортки було отримано криву, яка окреслювала зовнішній контур заготовки витка. Аналогічно ми поступали при вирізанні відсіку торса за заданим лобовим контуром полиці плуга в четвертому розділі. Однак у цьому випадку виникли певні проблеми. По перше, контур описувався шістьма кривими, для кожної із яких потрібно було визначати межі. По друге, при знаходженні лінії перетину із поверхнею полиці проєкціювального циліндра виникла ситуація, коли одну частину спільної кривої отримували із математичної залежності із знаком «+» в ній, а другу – із знаком «-». Цих незручностей можна уникнути, якщо описати потрібний контур інтерполяційною кривою. Розглянемо сказане на прикладі вирізання відсіку із заданим контуром на поверхні циліндра і знаходження його на розгортці.

Параметричні рівняння циліндра радіуса R , описаного у функції незалежних змінних u і v , мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= R \sin v; \\ Y &= R \cos v; \\ Z &= u. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Розгортка циліндра (5.22) описується параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X_p &= Rv; \\ Z_p &= u. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Задамо точковим рядом (15 точок) контур відсіку, який ми хочемо вирізати із циліндра. На рис. 5.39,а показано тільки його половину, оскільки друга половина є симетричною.

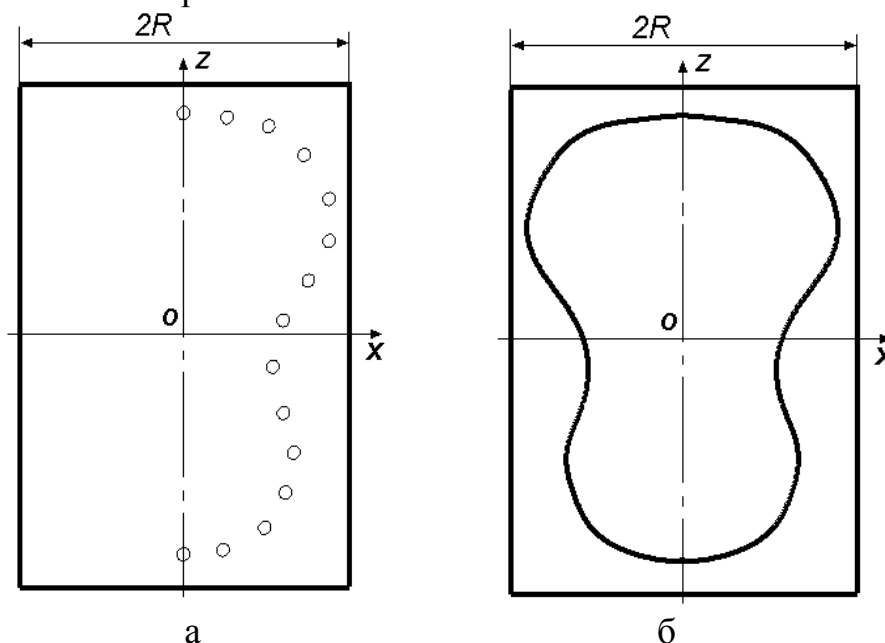


Рис. 5.39. Заданий контур на фронтальній проекції циліндра:
а) дискретно представлена крива п'ятнадцятьма точками;
б) інтерполяційна крива, що відповідає точковому ряду на рис. 5.39,а

Припустимо, що ми прошиваємо вертикальний циліндр іншим горизонтальним циліндром, у якого поперечний переріз має форму нанесеного контуру. Внутрішнє рівняння лінії перетину цих циліндрів потрібно було б шукати прирівнюванням їх рівнянь. Але рівняння дискретно представленої кривої відсутнє, отже нам потрібно іншим чином знайти внутрішнє рівняння лінії перетину у вигляді $u=u(t)$, $v=v(t)$. Для цього прирівняємо відповідні рівняння (5.2) і (5.22):

$$\begin{aligned} R \sin v &= c_1 \sec h[a(t - t_1)] + c_2 \sec h[a(t - t_2)] + \dots + c_{15} \sec h[a(t - t_{15})]; \\ u &= d_1 \sec h[a(t - t_1)] + d_2 \sec h[a(t - t_2)] + \dots + d_{15} \sec h[a(t - t_{15})]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Друге рівняння в (5.24) уже є залежністю $u=u(t)$. Із першого рівняння (5.24) знайдемо залежність $v=v(t)$:

$$v = \arcsin(c_1 \sec h[a(t - t_1)] + c_2 \sec h[a(t - t_2)] + \dots + c_{15} \sec h[a(t - t_{15})]). \quad (5.25)$$

Підстановка внутрішніх рівнянь $u=u(t)$ із (5.24) і $v=v(t)$ із (5.25) у рівняння розгортки циліндра (5.23) дасть параметричні рівняння кривої, що обмежує половину розгортки відсіку. Побудувавши симетричну криву та зсунувши ці криві вліво і вправо на потрібну відстань, отримаємо розгортку бічної поверхні циліндра, у якого зроблено наскрізний отвір, показаний на рис. 5.39,б. На рис. 5.40 побудована розгортка циліндра із контуром заданого отвору.

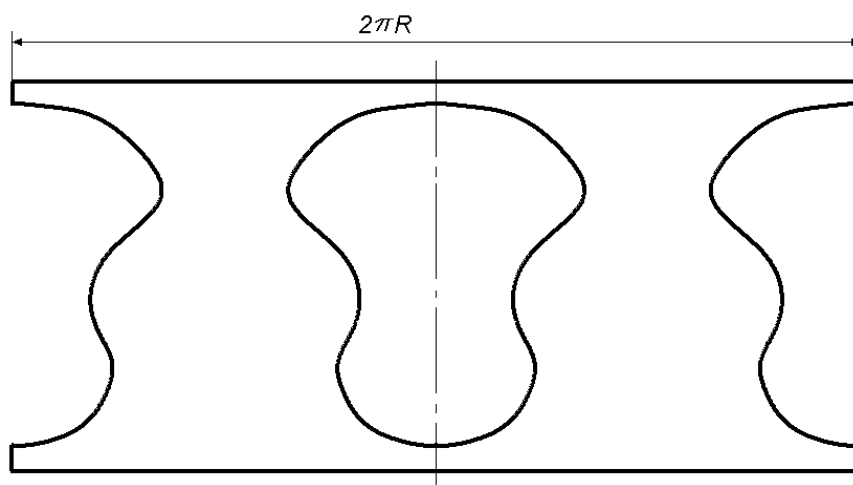


Рис. 5.40. Розгортка бічної поверхні циліндра із контуром наскрізного отвору, форма якого представлена на рис. 5.39,б

Слід зазначити, що і в зворотному порядку теж можна будувати відсік на проекції циліндра, якщо його конфігурація задана на розгортці. Для прикладу ми взяли ту ж саму форму відсіку (рис. 5.39,а), і побудували цей відсік на розгортці циліндра (рис. 5.41).

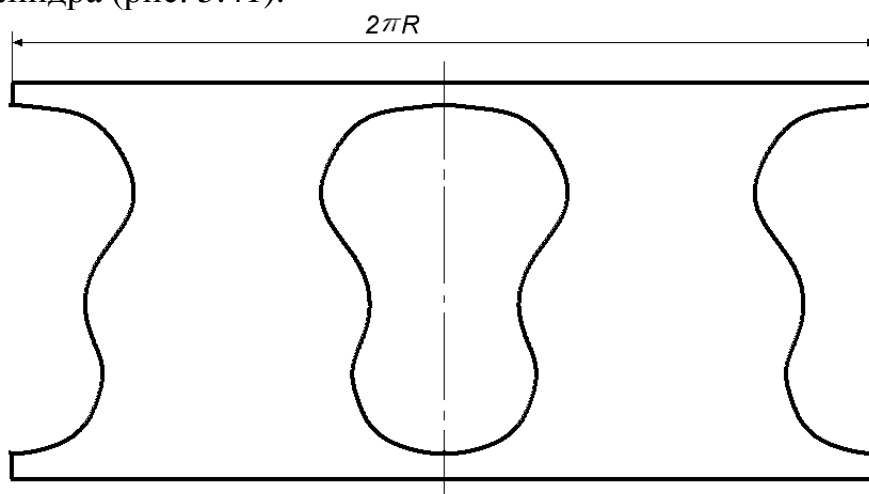


Рис. 5.41. Розгортка бічної поверхні циліндра із нанесеним відсіком у формі, показаний на рис. 5.39,а

Тепер внутрішнє рівняння кривої, що обмежує відсік, одержимо, прирівнявши відповідні рівняння (5.2) і (5.23). Отримаємо:

$$v = \frac{1}{R} \{c_1 \operatorname{sech} h[a(t - t_1)] + c_2 \operatorname{sech} h[a(t - t_2)] + \dots + c_{15} \operatorname{sech} h[a(t - t_{15})]\};$$

$$u = d_1 \operatorname{sech} h[a(t - t_1)] + d_2 \operatorname{sech} h[a(t - t_2)] + \dots + d_{15} \operatorname{sech} h[a(t - t_{15})].$$
(5.26)

Підставивши вирази для u і v із (5.26) в (5.22), одержимо параметричні рівняння кривої, що описують контур наскрізного отвору на поверхні циліндра. Цей контур побудовано на фронтальній проекції циліндра на рис. 5.42.

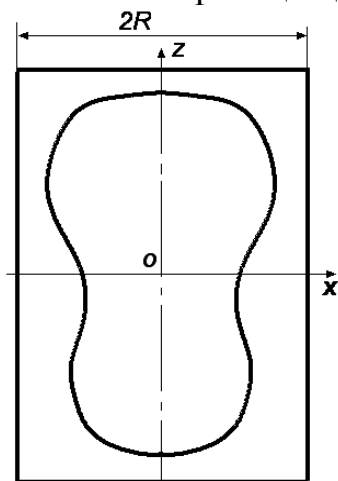


Рис. 5.42. Крива на поверхні циліндра, яка відповідає інтерполяційній кривій на його розгортці (рис. 5.41)

На рис. 5.37, 5.38 побудовано нерозгортні трубчасті поверхні, у яких осями є напрямні інтерполяційні криві. Можна і по іншому моделювати нерозгортні поверхні, точний аналітичний опис яких зробити неможливо. В першу чергу це відноситься до ділянки рельєфу земної поверхні або рельєфу конкретного поля.

При обробітку сільськогосподарських культур можна прийняти припущення, що агрегат рухається по полю по еквідистантних лініях. Оскільки місцезнаходження агрегату, оснащеного GPS-приймачем, можна записати через рівні проміжки часу (при цьому вважатимемо швидкість його руху постійною), то точки із записаними координатами місцеперебування агрегату будуть розташовані вздовж траєкторії рівномірно, приблизно на однакових відстанях одна від одної. Таким чином, буде записана інформація про координати точок, які рівномірно розподілені по всьому полю. Якщо взяти один прохід агрегату, то через записані точки можна провести просторову інтерполяційну криву, яка опише траєкторію руху агрегату, тобто криву, яка розташована на поверхні поля. Отже поверхню поля можна змоделювати каркасом інтерполяційних кривих, проведених на певній відстані одна від одної.

Розглянемо тестовий приклад. Візьмемо поверхню конуса, основою якого є еліпс із півосями b і $\sqrt{2}b$. Рівняння конуса запишемо у вигляді [153]:

$$Z = c \frac{\sqrt{2X^2 + Y^2}}{\sqrt{2b}}, \quad (5.27)$$

де c – постійна, від якої залежить висота конуса. Координатними лініями при такій параметризації конуса будуть плоскі криві перерізів конуса взаємно перпендикулярними вертикальними площинами, отже на горизонтальній проекції сітка координатних ліній буде прямокутною і утвореною сім'ями прямих ліній. У такому ж вигляді цю поверхню ми будемо моделювати чисельними методами, щоб потім порівняти зображення.

Якщо у рівнянні (5.27) задати для X якесь постійне значення, то воно опише плоску криву, розташовану в площині, паралельній координатній площині XOY . Візьмемо на цій кривій, наприклад, 15 точок (при значеннях від -7 до 7 з інтервалом в одиницю). Через одержаний точковий ряд проведемо плоску інтерполяційну криву, рівняння якої має вигляд:

$$\begin{aligned} y &= d_1 \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - 1)] + d_2 \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - 2)] + \dots + \\ &+ d_n \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - n)]; \\ z &= e_1 \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - 1)] + e_2 \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - 2)] + \dots + \\ &+ e_n \cdot \operatorname{sech}[a \cdot (t - n)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

де a - постійний коефіцієнт перед аргументом;

t - змінний параметр, який в заданих точках приймає ціле значення (1, 2 ... 15) за номером точки, а між точками – дробове;

$d_{1...15}, e_{1...15}$ - коефіцієнти, які знаходяться за умови проходження кривої (5.28) через заданий ряд точок.

Взявши нове постійне значення X (наприклад, збільшивши його на одиницю), повторимо весь алгоритм і побудуємо наступну інтерполяційну криву. Таким чином, ми можемо одержати одну сім'ю плоских перерізів поверхні, але вона побудована не за рівняннями (5.27), а за рівняннями (5.28), які інтерполюють заданий ряд точок при $b=5, c=5$ (рис. 5.43).

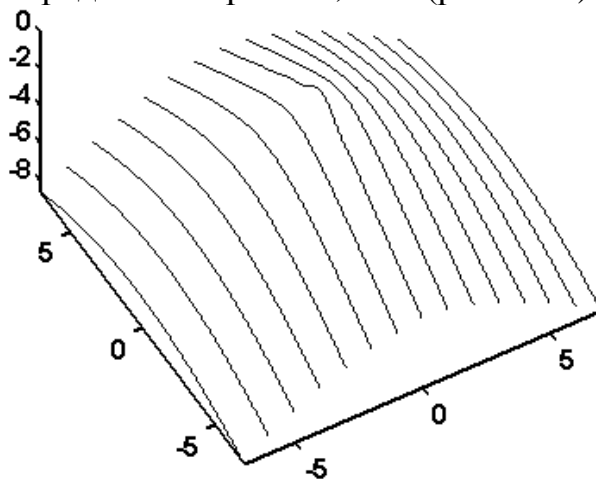


Рис. 5.43. Апроксимація поверхні однією сім'єю інтерполяційних кривих

Аналогічно побудуємо другу сім'ю інтерполяційних кривих при сталих значеннях Y , доповнивши рівняння $z = z(t)$ із (5.28) рівнянням $x = x(t)$:

$$x = c_1 \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - 1)] + c_2 \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - 2)] + \dots + c_n \cdot \operatorname{sech} [a \cdot (t - n)]. \quad (5.29)$$

Ми одержали сітку кривих, яка не є поверхнею, а лише її апроксимує, проходячи через задані точки у вузлах сітки (рис. 5.44).

Порівнюючи рис. 5.44 і 5.45 можна відзначити досить високу точність апроксимації поверхні за допомогою інтерполяційних кривих. Візуально різницю можна замітити в околі вершини конуса, яка є особливою точкою. На апроксимованій поверхні (рис. 5.44) особлива точка відсутня. В цьому випадку інтерполяційні криві, що проходять через вершину, моделюють відрізки прямих, тобто показано можливість поєднання прямолінійних і криволінійних ділянок інтерполяційної лінії.

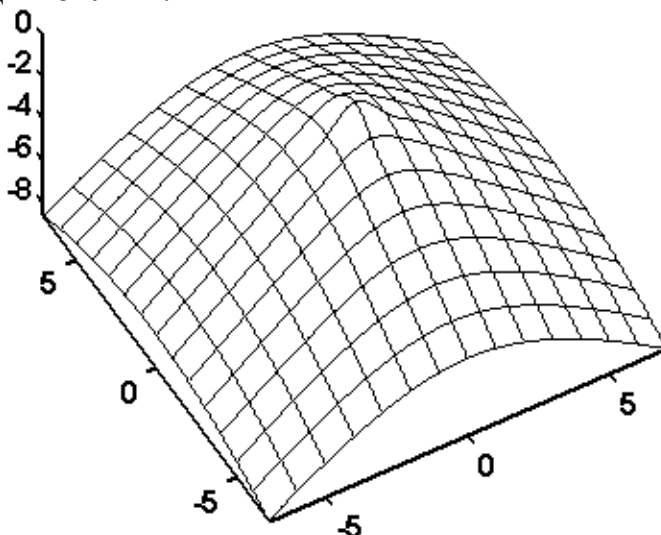


Рис. 5.44. Апроксимація поверхні конуса (5.27) сіткою із двох сімей інтерполяційних кривих

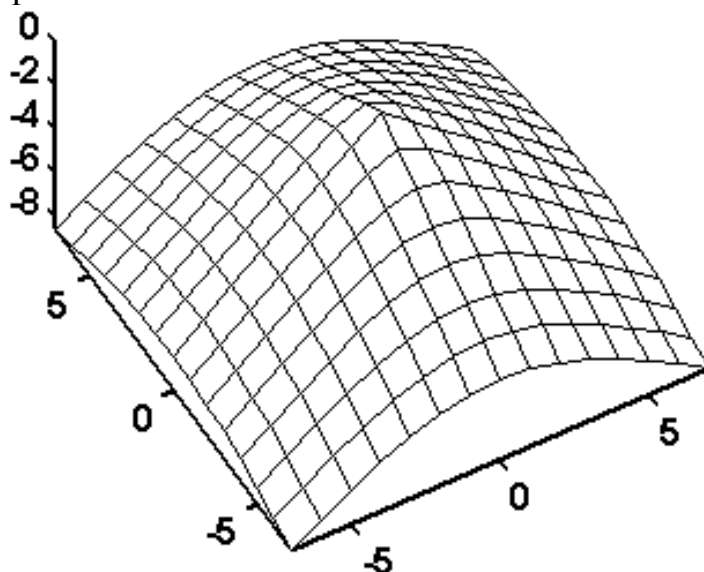


Рис. 5.45. Поверхня, побудована за рівнянням (5.27)

Слід зазначити, що при об'єднанні рівнянь (5.28) і (5.29) з'являється можливість побудови просторових кривих, які мають проходити через заданий просторовий ряд точок. Покажемо це на прикладі. Конус (5.27) можна задати параметричними рівняннями [153]:

$$\begin{aligned} X &= au \cos t; \\ Y &= bu \sin t; \\ Z &= cu. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Якщо у рівняннях конуса (5.30) при $a = \sqrt{2}b$ зв'язати дві змінні u і t будь-якою залежністю (наприклад, $u=0,2t$), то на його поверхні буде побудована просторова крива. Її рівняння запишуться:

$$\begin{aligned} x &= 0,2tb \cos t; \\ y &= 0,2\sqrt{2}bt \sin t; \\ z &= 0,2ct. \end{aligned} \quad (5.31)$$

На рис. 5.46 побудована поверхня за рівнянням (5.27) і просторова крива на ній за рівняннями (5.31).

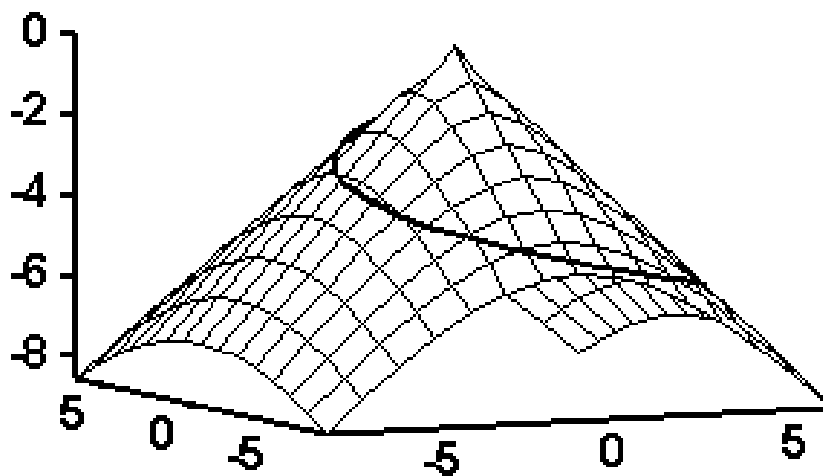


Рис. 5.46. Поверхня конуса і крива на ньому, побудовані за рівняннями (5.27) і (5.31) відповідно

Для порівняння побудуємо цю ж криву чисельними методами за допомогою інтерполяційної функції. Для цього візьмемо на кривій (5.31) певну кількість точок (наприклад, 30) і знайдемо їх координати.

За відомими координатами точок знаходимо коефіцієнти в окремих доданках інтерполяційних функцій (5.28), (5.29). Наведемо знайдені коефіцієнти:

$$c_{1...30} = \begin{bmatrix} -1.5144 & 2.5320 & -2.3263 & 2.0775 & -1.2319 & 1.1473 & -0.5073 & 0.5764 \\ -0.2472 & 0.2115 & -0.2616 & -0.0609 & -0.4202 & & -0.2532 & -0.6472 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & -0.3092 \quad -0.9201 \quad -0.1137 \quad -1.3044 \quad 0.5383 \quad -2.0382 \quad 2.0437 \quad -3.7040 \\
 & 5.2124 \quad -7.4972 \quad 11.4401 \quad -14.7796 \quad 20.1385 \quad -19.1569 \quad 13.8055]; \\
 d_{1...30} = & [0.6482 \quad -1.7138 \quad 1.5848 \quad -1.3785 \quad 1.0539 \quad -0.5365 \quad 0.7178 \quad 0.0304 \\
 & 0.6243 \quad 0.3538 \quad 0.5810 \quad 0.4849 \quad 0.4544 \quad 0.4558 \quad 0.1677 \quad 0.3234 \\
 & -0.3265 \quad 0.2103 \quad -1.0912 \quad 0.3569 \quad -2.2931 \quad 1.2191 \quad -4.3760 \quad 3.6595 \\
 & -8.3216 \quad 9.0565 \quad -15.1684 \quad 16.6452 \quad -18.2156 \quad 9.5884]; \\
 e_{1...30} = & [1.4807 \quad -2.5364 \quad 2.4437 \quad -2.0764 \quad 1.3429 \quad -1.1422 \quad 0.5305 \quad -0.6578 \\
 & 0.1110 \quad -0.4688 \quad -0.0964 \quad -0.4323 \quad -0.1897 \quad -0.4893 \quad -0.1950 \quad -0.6426 \\
 & -0.0801 \quad -0.9597 \quad 0.2685 \quad \quad -1.6181 \quad 1.1208 \quad -3.0218 \quad 3.0734 \quad - \\
 & 6.0347 \quad 7.3239 \quad \quad -12.1470 \quad 15.1782 \quad -20.7090 \quad 19.6740 \quad -13.4272].
 \end{aligned}$$

Підстановка цих коефіцієнтів в (5.28), (5.29) дасть інтерполяційні функції $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, які забезпечать проходження просторової кривої через задані точки і яка є певною заміною кривої (5.31). На рис. 5.47 чисельними методами побудовано каркас поверхні і просторову криву на ньому уже з іншої точки зору, ніж на рис. 5.46.

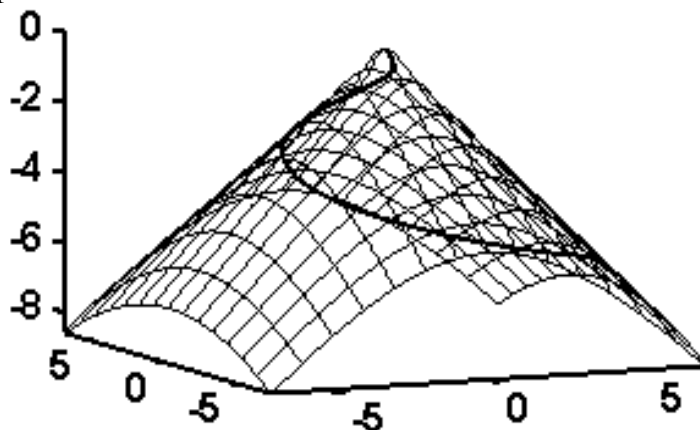


Рис. 5.47. Каркас поверхні і крива, побудовані чисельними методами за заданими дискретними рядами точок

Оскільки в цьому випадку поверхня замінена сіткою, то невидимі частини її теж видно. Візуально криві на рис. 5.46 і 5.47 подібні. При накладанні їх одна на одну вони збігаються і тільки при багатократному збільшенні можна побачити, що це різні криві. Наведемо графіки їх кривини і скруту. На рис. 5.48,а показано графік кривини кривої, побудованої за рівняннями (5.31), а на рис. 5.48,б – за рівняннями (5.28), (5.29). Межі зміни параметрів $v=0...6$ і $t=1...30$ на графіках 5.48,а і 5.48,б відповідають заданій ділянці кривої.

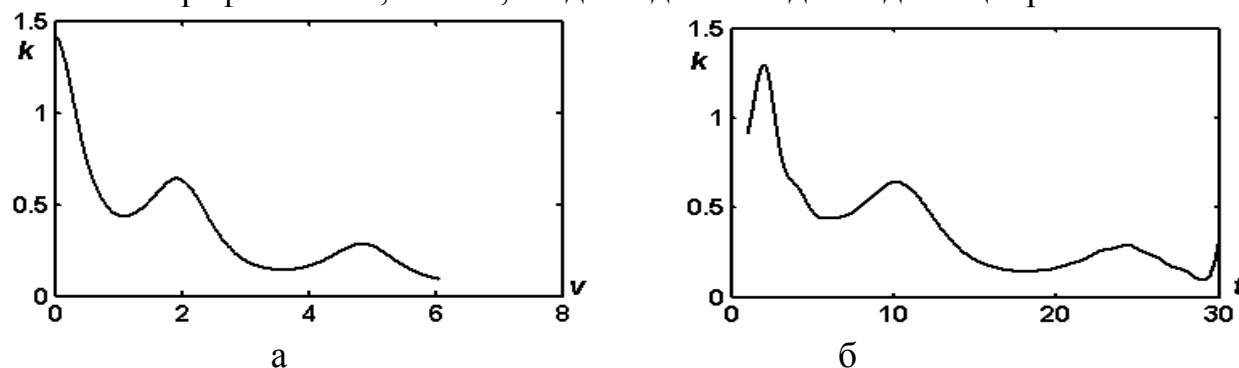


Рис. 5.48. Графіки кривини для кривої на поверхні конуса

На рис. 5.49,а показано графіки скруту кривої на конусі.

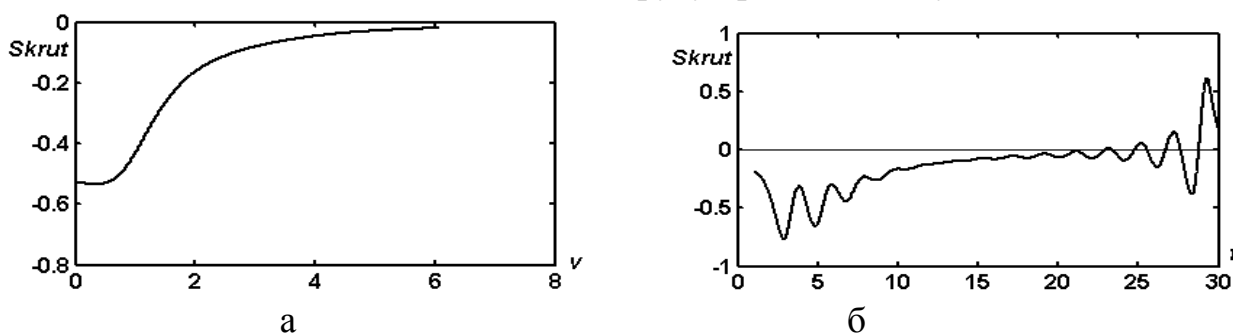


Рис. 5.49. Графіки скруту для кривої на поверхні конуса:

а) графіки для кривої, побудованої за рівняннями (5.31);

б) графіки для інтерполяційної кривої, побудовані за рівняннями (5.28), (5.29)

Із рівняння графіків видно, що для кривої, заданої рівняннями (5.31) вони змінюються більш плавно, чого і слід було чекати. Для інтерполяційної кривої спостерігаються певні коливання на кінцях ділянки кривої, особливо характерно це для графіка скруту. Однак на самих кривих візуально виявити цю відмінність не вдається.

Поверхня конуса в нашому випадку апроксимована сіткою із сімей плоских інтерполяційних кривих, яка на горизонтальній проекції виглядає прямокутною. Однак побудова просторової інтерполяційної кривої свідчить про те, що апроксимація поверхні може бути здійснена при довільній формі сітки не тільки із плоских, а і з просторових кривих.

5.4. Побудова сітки із інтерполяційних ліній на поверхні ділянки реального поля

Для моделювання рельєфу поля був проведений експеримент по визначенню координат окремих точок поля. Ділянку було вибрано в Обухівському районі Київської області з характерними утвореннями рельєфу і значним перепадом висоти [153]. Запис координат точок поля здійснювався портативним комп'ютером за допомогою спеціального програмного забезпечення із GPS-приймача.

Відстань між окремими точками була прийнята близько 20 м, однак коливалася в значних межах, оскільки заміри здійснювалися в „ручному” режимі. При кожному проході робили заміри координат біля тридцяти точок поля. Масиви цих точок в географічних координатах, а також програмне забезпечення їх запису у відповідному форматі поміщено в додатку А. Довгота і широта були переведені в ортогональні координати реального масштабу множенням їх на коефіцієнти 1186,6 м і 1853,5 м відповідно.

На рис. 5.50 показана горизонтальна проекція і контури ділянки поля. Потовщеними лініями показані траєкторії проходу, які намагалися роботи паралельними. В точках, в яких траєкторію проходу перетинають тонкі лінії, здійснювався запис координат з GPS-приймача.

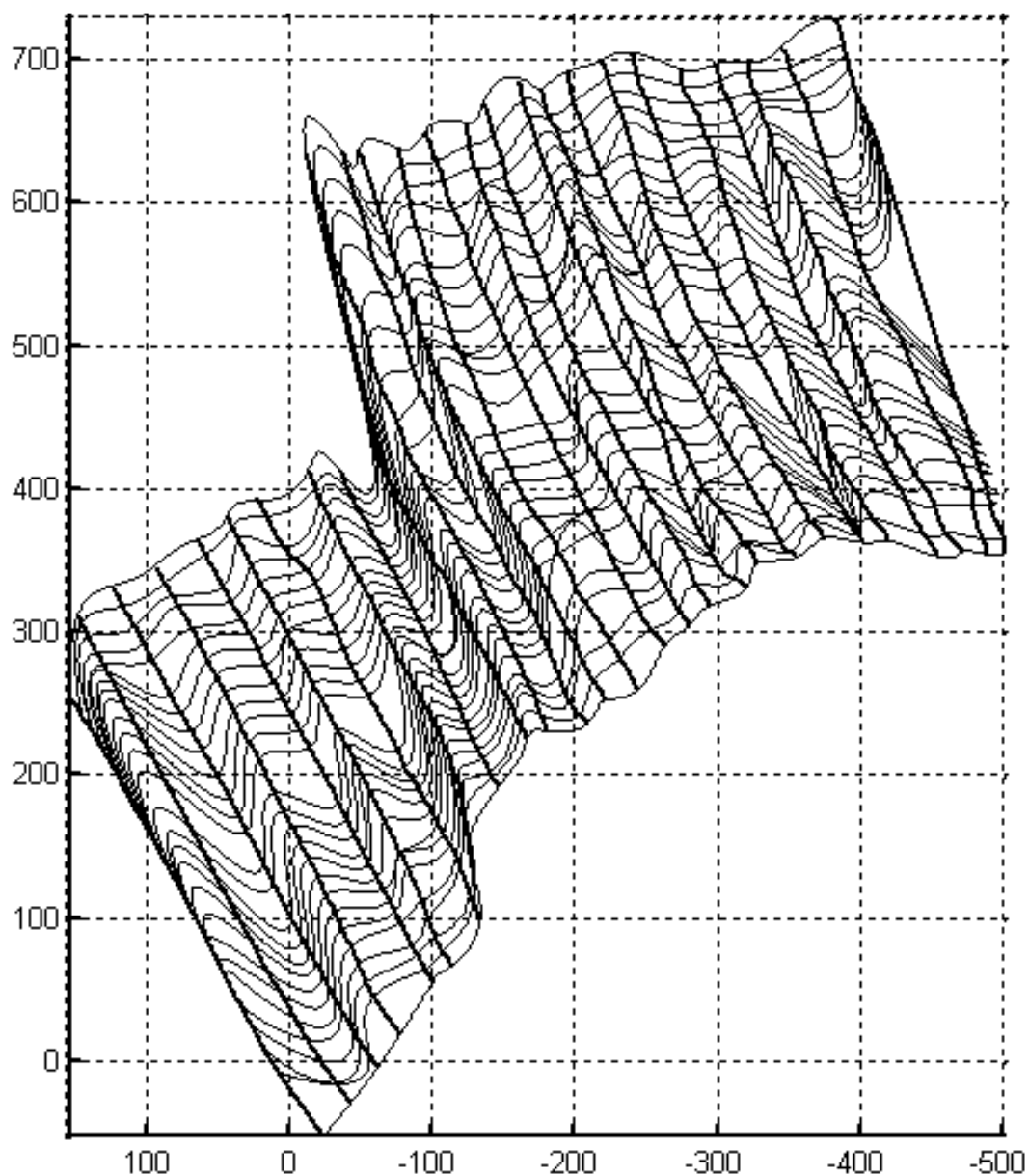


Рис. 5.50. Горизонтальна проекція ділянки поля, яку моделювали за точковими рядами, одержаними із GPS-приймача

З конфігурації поля видно, що воно складається ніби із двох частин, причому ці частини розділені між собою певним звуженням. Це робить розподіл точок по тонких інтерполяційних лініях дещо нерівномірним. Щоб мати уявлення про характер рельєфу, на рис. 5.51 сітку показано в аксонометрії.

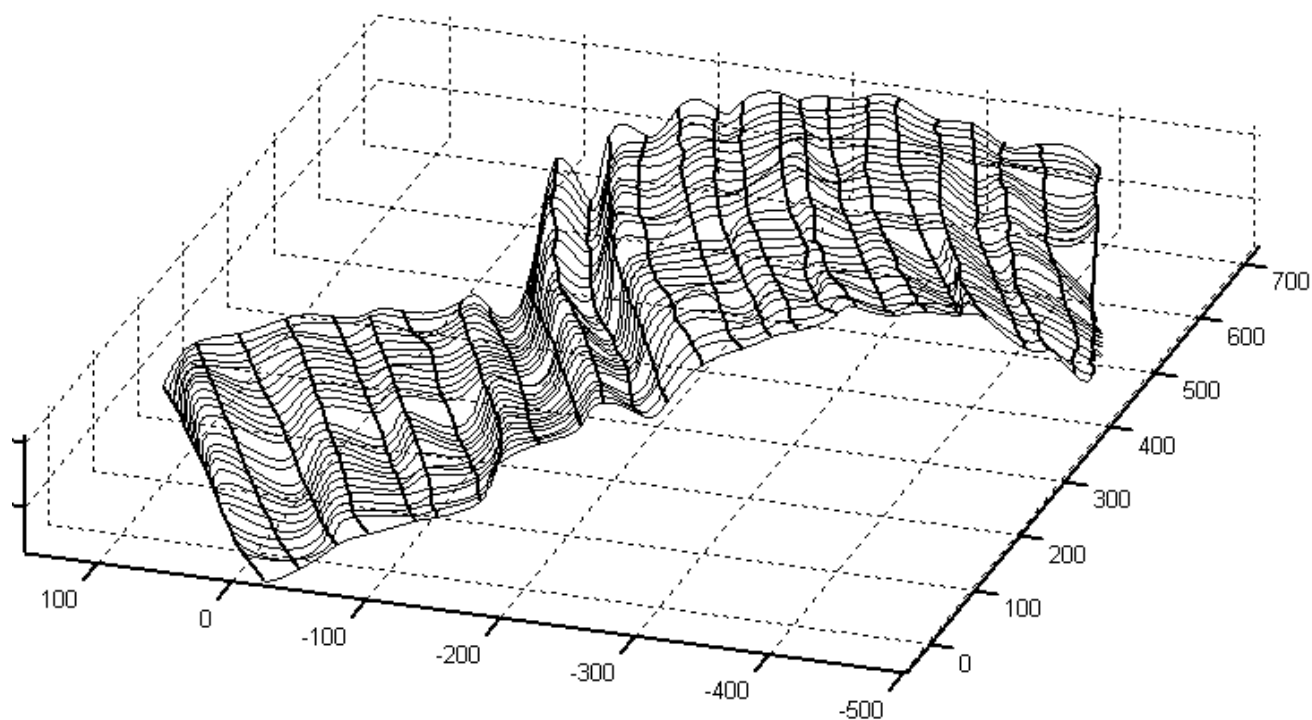


Рис. 5.51. Сітка, що моделює поверхню поля, в аксонометрії

Із рис. 5.51 видно, що правіше від звуження частини знаходиться хребет, який є вододілом, а ще правіше – тальвег. На рис. 5.52 це характерне формоутворення рельєфу показано в збільшеному масштабі.

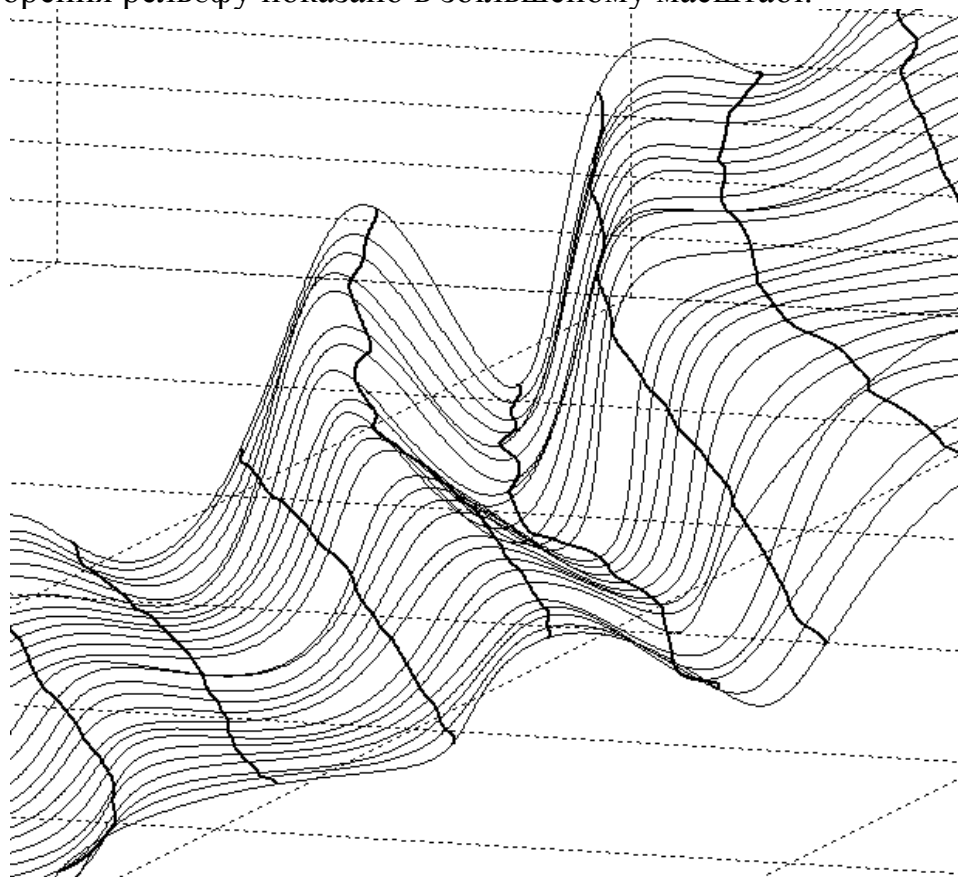


Рис. 5.52. Рельєф ділянки поля в збільшеному масштабі

Сітка, зображена на рис. 5.52, подібна до сітки на поверхні рельєфу, отриманої в праці [145] засобами картографування із застосуванням геоінформаційних технологій. Відмінність полягає в тому, що на рис. 5.52 розміри клітин сітки значно відрізняються своїми розмірами. Пояснюється це тим, що при проведенні експерименту замір координат точок здійснювали не через рівні проміжки часу, а ручним натисканням клавіші через приблизно однакові відстані вздовж проходу (потовщеної лінії). Відстань між проходами теж визначалася на око. Це означає, що експеримент був проведений самий простий без додаткового програмного забезпечення. Якщо вибрати точку зору на побудовану сітку так, щоб горизонтальні площини спроекціювалися в пряму лінію, то її зображення набуває вигляду, який показано на рис. 5.53. Аналізуючи зображення сітки на рис. 5.50 ... 5.53, можна зробити певний аналіз рельєфу представленої ділянки, а також побачити її контури.

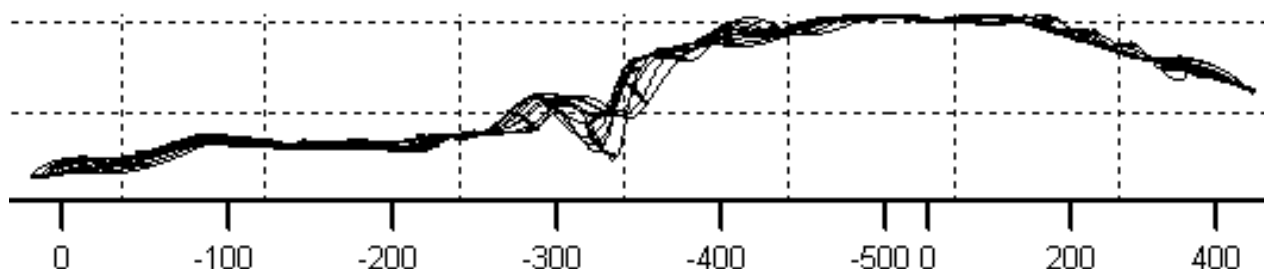


Рис. 5.53. Сітка на поверхні рельєфу поля при її розташуванні так, що горизонтальні площини проєкціюються прямими лініями

Масив координат точок кожного проходу було збережено в окремому файлі. На основі даних окремого файла була побудована інтерполяційна просторова крива для кожного проходу, тому ці лінії більше подібні до прямих, аніж тонкі. Хвилеподібний характер тонких ліній пояснюється нерівномірністю замірів вздовж проходу і нерівномірністю ширини поля.

Координати всіх проходів було об'єднано в спільний масив у файлі *MatLab* (табл. 5.1). Це дає змогу упорядковувати масив за певною ознакою. Зокрема було упорядковано загальний масив координат за ознакою зростання координати Z (табл. 5.2). Це дає можливість виявити із загального масиву точки із висотою над рівнем моря в заданих межах і після обробки цього окремого виділеного масиву будувати на сітці лінії рівня.

Таблиця 5.1

Фрагмент масиву точок, за якими була побудована модель рельєфу поля на рис. 5.51

x	149,96	138,28	125,86	99,72	88,23	78,22	70,62	61,91	52,64	43,93
y	23,26	17,32	11,27	-2,02	-8,66	-13,8	-18,1	-23,14	-28,12	-32,63
z	29,1	29,2	29,3	29,5	29,7	29,8	29,9	30	30,1	30,1

Таблиця 5.1 (продовження)

x	36,52	22,61	15,76	5,00	-3,89	346	334,39	325,49	318,63	302,69
y	-36,7	-44,5	-48,53	-56,13	-62,77	93,12	86,38	80,81	77,01	67,16
z	30,2	30,3	30,4	30,6	30,7	36,2	36,1	36,3	36,3	36,2

Таблиця 5.1 (продовження)

x	293,24	280,82	269,14	257,47	245,23	234,30	222,99	211,13	199,08
y	62,30	56,60	50,43	44,26	38,09	33,11	27,29	20,29	14,71
z	36,2	36,1	35,9	35,8	35,5	35,3	35,1	34,8	34,5

Таблиця 5.1 (продовження)

x	187,58	175,17	164,6	153,11	141,80	129,01	116,22	104,91	92,31	80,45
y	9,26	3,44	-2,61	-8,31	-14,24	-21,00	-26,46	-32,63	-37,7	-43,9
z	34,2	34,2	34	33,9	33,7	33	33	32,7	32,1	32

Таблиця 5.1 (продовження)

x	67,84	55,42	45,04	19,28	364,79	354,04	332,35	321,41	309,92	299,54
y	-49,2	-54,7	-59,5	-78,1	64,08	57,91	45,8	39,99	32,99	27,05
z	31,7	31,4	31,3	31,3	34,2	34,1	34,1	33,8	33,8	33,7

Таблиця 5.1 (продовження)

x	288,61	277,11	265,62	254,31	243,38	231,89	219,47	193,52	181,10
y	21,36	16,14	10,09	3,92	-1,90	-8,31	-14,71	-29,07	-35,12
z	33,5	33,4	33,2	33,0	32,7	32,4	32,1	31,4	31,3

Таблиця 5.1 (продовження)

x	169,6	158,3	146,25	138,65	128,27	120,3	112,51	104,91	96,94	81,37
y	-40,6	-46,3	-52,33	-55,89	-62,06	-66,33	-70,48	-74,64	-78,55	-86,5
z	31,0	30,8	30,6	30,2	30,1	30,0	29,8	29,7	29,5	29,3

Таблиця 5.1 (продовження)

x	74,33	64,32	55,42	380,73	374,06	365,16	346,62	334,76	322,34
y	-90,3	-95,64	-100,74	-113,91	-108,10	-102,76	-98,01	-93,86	-83,77
z	29,2	29,3	29,3	33,1	33,3	33,3	33,1	33	32,7

Таблиця 5.2

Фрагмент масиву точок із табл. 5.1, впорядкований по координаті Z

x	149,96	138,28	74,33	125,86	81,37	64,32	55,42	99,72	96,94	88,23
y	23,26	17,32	-90,3	11,27	-86,5	-95,6	-100,74	-2,02	-78,55	-8,66
z	29,1	29,2	29,2	29,3	29,3	29,3	29,3	29,5	29,5	29,7

Таблиця 5.2 (продовження)

x	104,91	78,22	112,51	70,62	61,91	120,3	52,64	43,93	128,27	36,52
y	-74,64	-13,9	-70,48	-18,2	-23,14	-66,33	-28,12	-32,63	-62,06	-36,78
z	29,7	29,8	29,8	29,9	30,0	30,0	30,1	30,1	30,1	30,2

Таблиця 5.2 (продовження)

x	138,65	22,61	15,76	5,0	146,25	-3,89	158,3	169,6	45,04	19,28
y	-55,89	-44,5	-48,5	-56,1	-52,33	-62,77	-46,28	-40,58	-59,57	-78,08
z	30,2	30,3	30,4	30,6	30,6	30,7	30,8	31,0	31,3	31,3

Таблиця 5.2 (продовження)

x	181,1	55,42	193,52	67,84	80,45	92,31	219,47	231,89	310,85	104,91
y	-35,1	-54,7	-29,07	-49,2	-43,9	-37,73	-14,71	-8,31	-78,32	-32,63
z	31,3	31,4	31,4	31,7	32,0	32,1	32,1	32,4	32,6	32,7

Таблиця 5.2 (продовження)

x	243,38	322,34	129,01	116,22	254,31	334,76	380,73	346,62	265,62
y	-1,9	-83,77	-21,0	-26,46	3,92	-93,86	-113,91	-98,01	10,09
z	32,7	32,7	33,0	33,0	33,0	33,0	33,1	33,1	33,2

Таблиця 5.2 (продовження)

x	374,06	365,16	277,11	288,61	141,8	299,54	321,41	309,92	153,11
y	-108,1	-102,76	16,14	21,36	-14,24	27,05	39,99	32,99	-8,31
z	33,3	33,3	33,4	33,5	33,7	33,7	33,8	33,8	33,9

Таблиця 5.2 (продовження)

x	164,6	354,04	332,35	187,58	175,17	364,79	199,08	211,13	222,99	234,3
y	-2,61	57,91	45,8	9,26	3,44	64,08	14,71	20,29	27,29	33,11
z	34,0	34,1	34,1	34,2	34,2	34,2	34,5	34,8	35,1	35,3

Таблиця 5.2 (продовження)

x	245,23	257,47	269,14	334,39	280,82	346,62	302,69	293,24	325,49	318,63
y	38,09	44,26	50,43	86,38	56,6	93,15	67,16	62,3	80,81	77,01
z	35,5	35,8	35,9	36,1	36,1	36,2	36,2	36,2	36,3	36,3

Проте подібна спроба для представленої поверхні показала, що такі лінії в основному близькі або збігаються із лініями проходу. Це можна зрозуміти із рис. 5.53, бо на ньому видно, що для основного числа проходів (за виключенням центральної частини) координата Z (висота над рівнем моря) практично однакова.

В табл. 5.1 наведено неупорядкований фрагмент загального масиву точок, а в табл. 5.2 – той же фрагмент, але впорядкований за координатою Z .

Як видно із таблиць 5.1, 5.2, замір висоти над рівнем моря відбувався із градацією в 0,1 м. Упорядкований масив (табл. 5.2) можна розділити на окремі масиви в заданих межах зміни висоти і обробляти кожен із них наявними засобами *MatLab*.

Модель рельєфу ділянки поля, зображена на рис. 5.50 – 5.53 є сітчастим каркасом, але не є поверхнею. Розглядаючи таку модель із різних точок зору ми бачимо її прозорою. Це певною мірою затрудняє візуальну оцінку будови рельєфу і не сприяє реалістичному сприйняттю. Усунути цей недолік можна шляхом апроксимації сітчастого каркасу поверхнею. Для цього було застосовано конструювання поверхні способом додавання функцій, розглянутому в [32]. Суть його полягає в наступному (ми узагальнимо матеріал [32] на просторові криві).

Нехай в просторі ми маємо дві просторові криві l і m (рис. 5.54). Прямолінійною твірною будемо сполучати відповідні точки. Ці точки на кривих мають бути приведені до спільного параметру t , тобто для конкретного значення параметра t на кривих l і m повинно бути визначено по одній точці. Наприклад, для розгортної поверхні відповідність точок визначається паралельністю дотичних, проведених в цих точках. При цьому дуже непросто встановити таку відповідність спільним значенням параметра t . В нашому випадку ця відповідність встановлюється дуже просто. В кожному проході ціле значення параметра t відповідає номеру точки на інтерполяційній кривій. Отже, прямолінійні твірні будуть сполучати точки на кривих із однаковими порядковими номерами (при умові, що параметр t буде змінюватися з кроком, рівним одиниці).

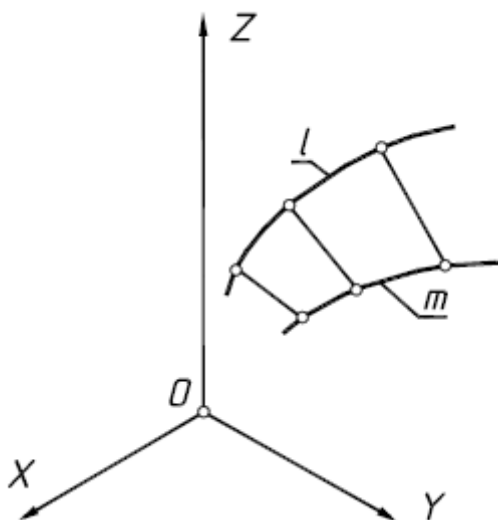


Рис. 5.54. До конструювання лінійчатої поверхні за заданими напрямними просторовими кривими

Параметричні рівняння лінійчатої поверхні запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= (1 - u) x_l + u x_m; \\
 X &= (1 - u) y_l + u y_m; \\
 X &= (1 - u) z_l + u z_m,
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

де $x_l=x_l(t)$; $y_l=y_l(t)$; $z_l=z_l(t)$ – рівняння напрямної кривої l ;

$x_m=x_m(t)$; $y_m=y_m(t)$; $z_m=z_m(t)$ – рівняння напрямної кривої m ;

u – другий незалежний параметр поверхні, який змінюється в межах від нуля до одиниці (при виході параметра u за ці межі поверхня (5.32) вийде за межі смуги між двома напрямними кривими).

Для побудови смуги лінійчатої поверхні між сусідніми проходами була написана програма, яка реалізує алгоритм за рівняннями (5.32). На рис. 5.55 на контурі поля з допомогою програми побудовано три смуги: без загушення вздовж прямолінійних твірних; із загушенням вздовж прямолінійних твірних і із загушенням в обох напрямках. В додатку Б поміщено текст програми для побудови плоскої інтерполяційної кривої за заданими 10 точками.

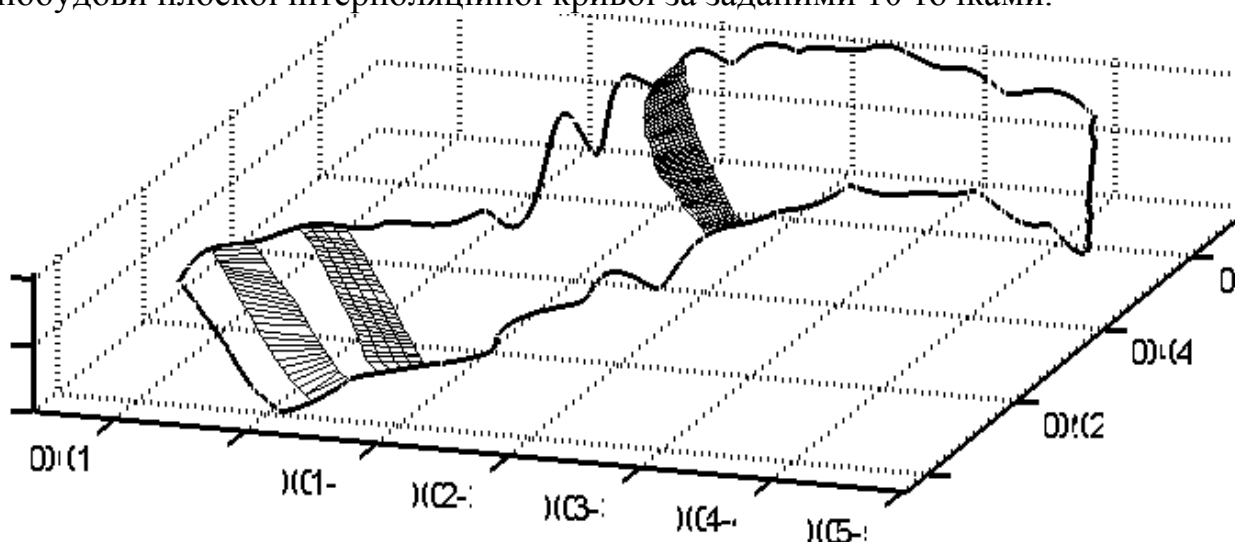


Рис. 5.55. Контур поля із нанесеними смугами лінійчатих поверхонь

На рис. 5.56 показано останню смугу у збільшеному масштабі.

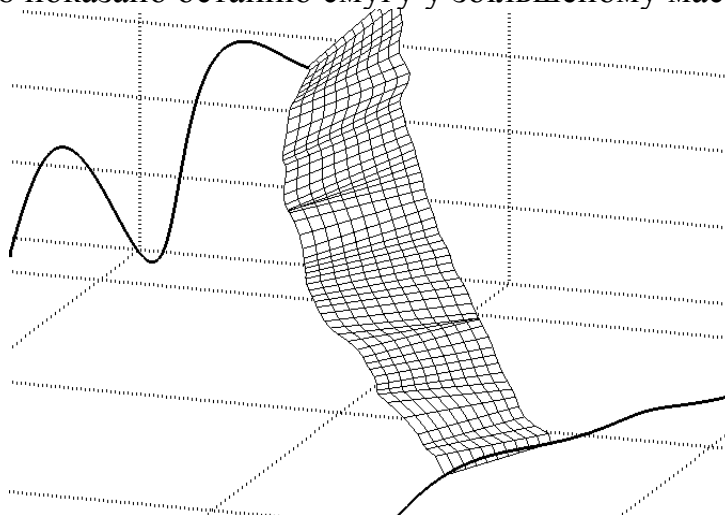


Рис. 5.56. Смуга загущеної лінійчатої поверхні у збільшеному масштабі

На рис. 5.57 поверхня ділянки поля повністю апроксимована смугами лінійчатих поверхонь без загушення. На ній добре видно нерівномірності зняття координат вздовж проходів, а також огріхи при ручному зніманні: в декількох місцях сусідні прямолінійні твірні перетинаються в одній точці на кривій проході. Це означає, що при зніманні координат була допущена помилка: від великої кількості точок і одноманітної роботи в деяких точках було двічі натиснуто клавішу, тобто дві точки мають однакові координати. Крім того, велика ділянка незаповненої поверхні в крайній смузі справа має своє пояснення: на шляху крайнього проході стояла скирта соломи, тому для збереження кількості точок їх ущільнили по краях.

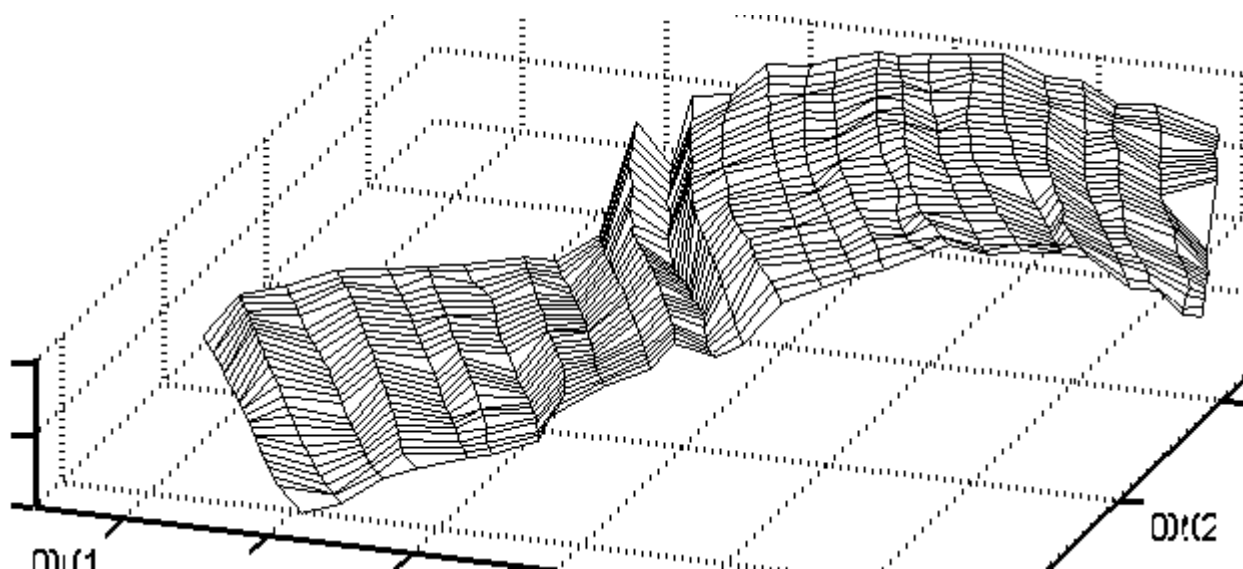


Рис. 5.57. Ділянка поля, апроксимована смугами лінійчатих поверхонь

Варто сказати, що смуги лінійчатих поверхонь можна не тільки ущільнювати, а і розріджувати. На рис. 5.57 наведено ділянку поверхні поля, яка апроксимована розрідженою сіткою (каркасом).

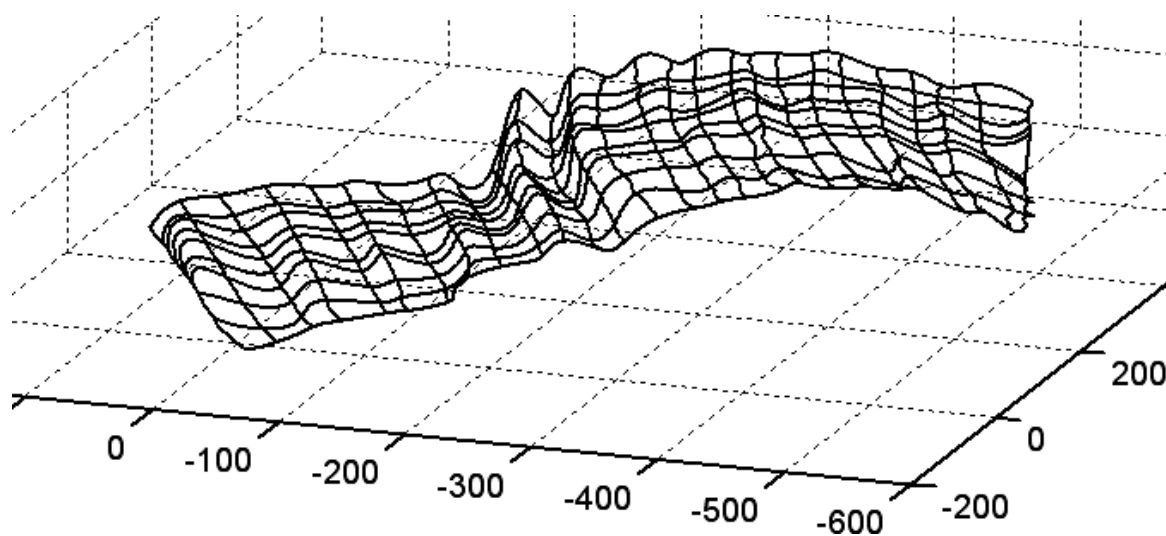


Рис. 5.57. Поле вкрите сіткою (так звана „дротяна” модель)

На рис. 5.58 ця ж сама ділянка апроксимована розрідженими смугами лінійчатих поверхонь.

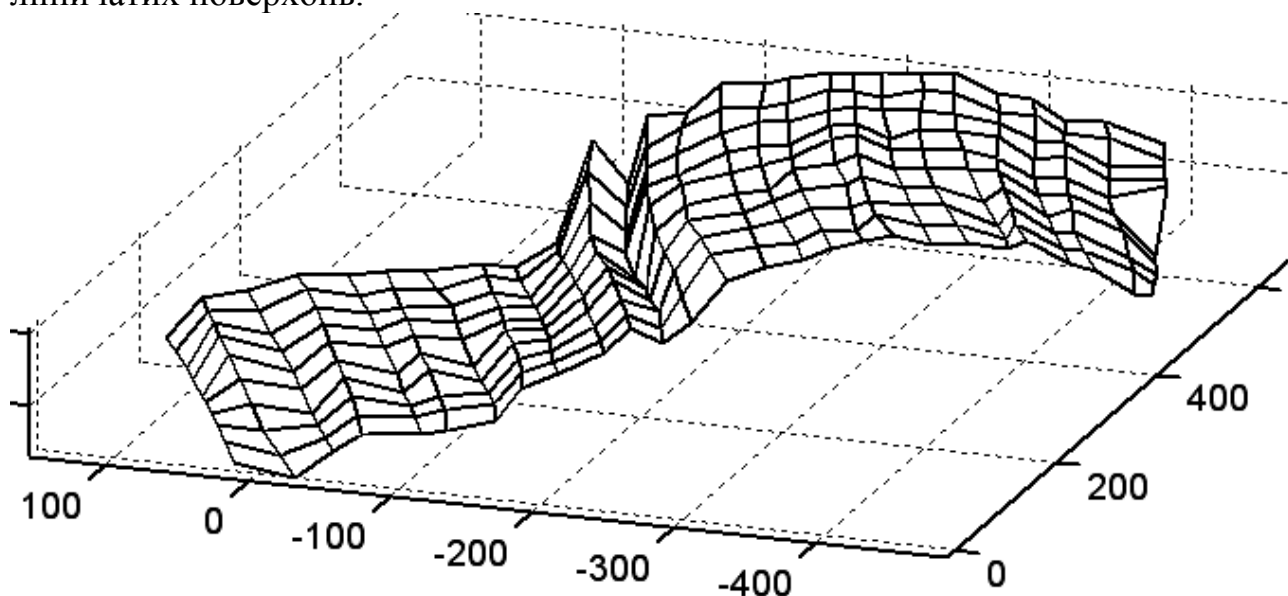


Рис. 5.58. Поле апроксимоване смугами лінійчатих поверхонь

Слід сказати, що між представленими моделями існує суттєва різниця: перша сприймається, як прозора (так звана „дротяна”) модель, а друга (так звана „полігональна”) із врахуванням видимості. В підтвердження цього на рис. 5.57 крізь сітку ми бачимо координатні лінії, а на рис. 5.58 їх не видно. На закінчення наведемо ще одну модель рельєфу поля, поверхня якого апроксимована смугами лінійчатих поверхонь, загущених вздовж інтерполяційних кривих (рис. 5.59). В цьому випадку поверхня сприймається більш реалістично із-за більш рівномірного розташування координатних ліній на ній.

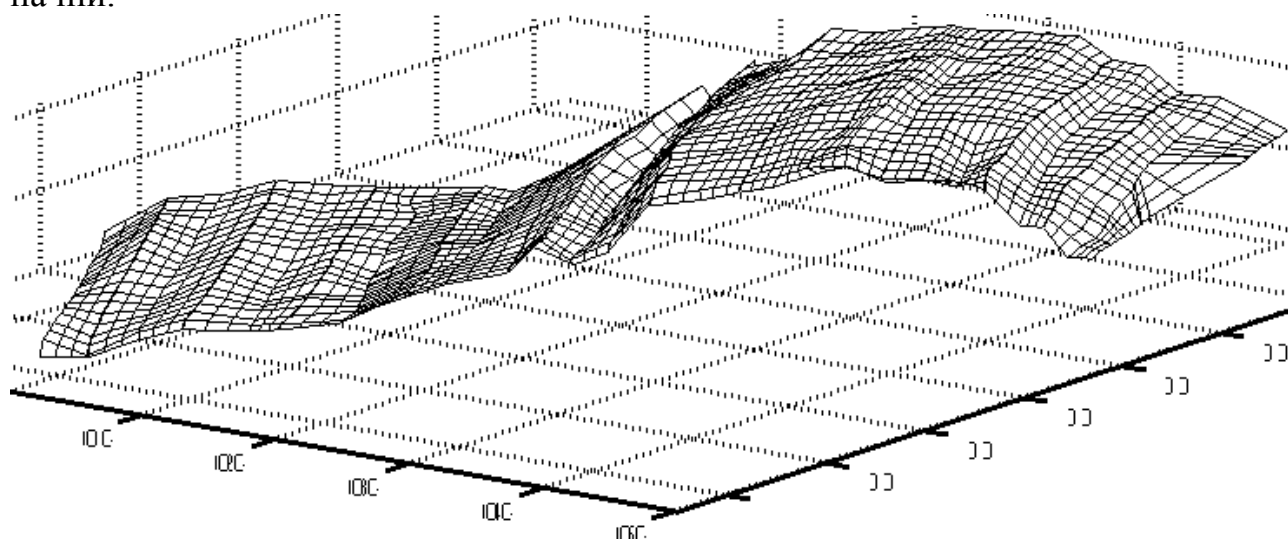


Рис. 5.59. Ділянка поля, апроксимована смугами лінійчатих поверхонь, загущених в обох напрямках

В роботі [38] показана можливість описання контуру цілого материка на поверні кулі інтерполяційними кривими. За приклад було взято Африку. Із

карти земної поверхні було знято координати (довготу і широту) окремих точок контуру материка.

Для побудови кривої було взято 60 точок, рівномірно розподілених вздовж контуру материка. Перших десять точок в координатах земної поверхні наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Географічні координати точок ділянки контуру Африки в градусах

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
довгота, град.	44	46	48	49	51	51	47	43	40	37
широта, град.	1	3	4	7	11	12	11	11	13	18

Градуси переведемо в радіани за наведеною формулою (5.33) і запишемо в табл. 5.4:

$$\text{рад} = \frac{\text{град} \cdot \pi}{180}. \quad (5.33)$$

Таблиця 5.4

Географічні координати точок ділянки контуру Африки в радіанах

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
довгота, рад	0,77	0,81	0,84	0,87	0,89	0,89	0,83	0,77	0,71	0,66
широта, рад	0,02	0,05	0,09	0,14	0,19	0,21	0,20	0,20	0,24	0,33

Дані таблиці 5.4 описують точковий ряд в сферичних координатах. Якщо прийняти довготу за x , а широту за y , то можна на площині побудувати прообраз сферичного відсіку, заданого точковим рядом. Для цього було застосовано інтерполяційну криву на основі суми графіків гіперболічного секанса. Для зручності роботи весь контур розбили на дві ділянки по 30 точок (можливі і інші варіанти) і по черзі описали кожну ділянку інтерполяційною кривою. На рис. 5.60 побудовано плоский прообраз сферичного відсіку двома інтерполяційними кривими на основі графіків секанса гіперболічного за рівнянням (5.2) при знайдених сталих $c_{1...30}$, $d_{1...30}$. Цей контур є наближеним зображенням материка, оскільки поверхня сфери є нерозгортною і її неможливо відобразити на площину без спотворення. Існує наука картографія, яка вивчає різні способи відображення поверхні сфери на площину, щоб отримати географічні карти, однак ідеального варіанту, при якому не відбувалося б спотворень, не існує.

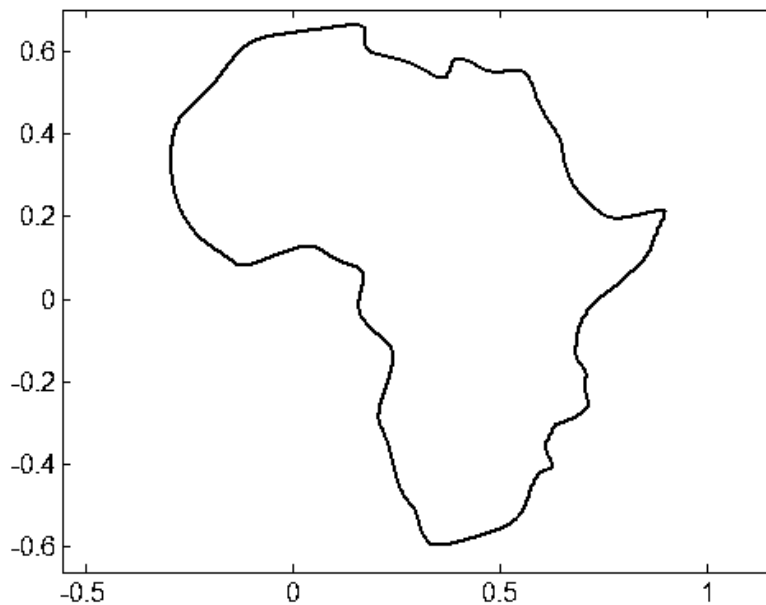


Рис. 5.60. Плоский замкнений контур - прообраз материка Африка, побудований за допомогою інтерполяційних кривих на основі суми функцій гіперболічного секанса

Наступний етап – знаходження поверхні обмеженої даним точковим рядом на сфері. Такий підхід точніше опише контур материка і його точність залежатиме від точності інтерполяції. Запишемо параметричні рівняння сфери радіуса R :

$$\begin{aligned} X &= R \cos(u) \cos(v); \\ Y &= R \cos(u) \sin(v); \\ Z &= R \sin(u), \end{aligned} \tag{5.34}$$

де u, v – незалежні змінні поверхні (широта і довгота).

В рівняння (5.34) замість незалежних змінних u і v підставимо знайдені функції $u=u(t)$ і $v=v(t)$, які ми отримали в результаті розв'язку систем лінійних рівнянь по знаходженню параметричних рівнянь інтерполяційних кривих. Слід зазначити, що ці рівняння є внутрішніми і не має значення, на якій поверхні буде описано контур – на розгортній чи нерозгортній. Перед цим було розглянуто приклад, коли контур відсіку було задано на розгортній поверхні (циліндрі). Для нашого випадку слід мати на увазі, що рівняння $u=x$ відповідає широті, а друге – $v=y$ – довготі. Цей приклад показує більш широкі можливості застосування розглянутих інтерполяційних кривих. Суть такого підходу полягає в наступному. Лінію на поверхні з незалежними змінними u і v можна задати, зв'язавши ці дві змінні певною функціональною залежністю: $u=u(v)$, $v=v(u)$ або ж через третю змінну t : $u=u(t)$, $v=v(t)$. Останній варіант ми використовуємо при знаходженні внутрішніх параметричних рівнянь лінії на поверхні за заданим точковим рядом у внутрішніх криволінійних координатах.

На рис. 5.61,а побудовано сферичний відсік контуру за рівняннями (5.34) при підстановці в них інтерполяційної кривої $u=u(t)$, $v=v(t)$, отриманої за

точковим рядом на кулі в кутових координатах. На рис. 5.61,б цей же відсік показано на поверхні кулі.

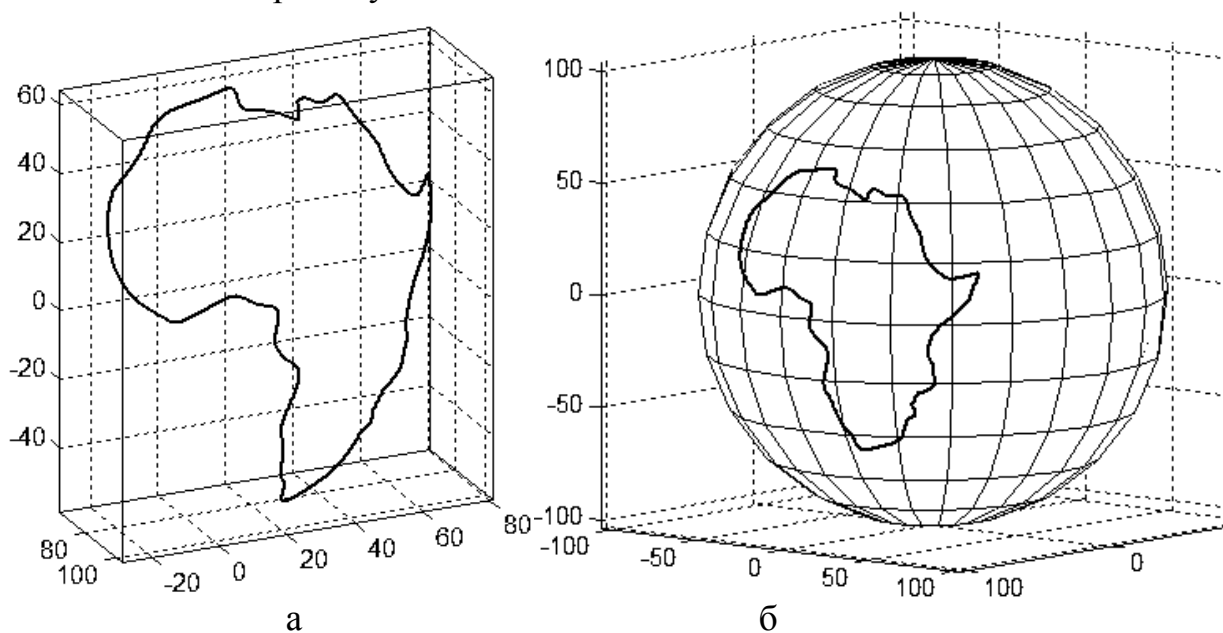


Рис. 5.61. Сферичний відсік, який описує контури Африки:

а) просторова модель контуру відсіку;

б) відсік на поверхні кулі

Наведений приклад побудови контуру Африки переконливо показує досить високу точність інтерполяції точкового ряду за відсутності осциляції.

Монографія написана за матеріалами дисертаційних досліджень Кресан Т.А. і Грищенко І.Ю. під керівництвом Пилипаки С.Ф. Основні наукові результати опубліковано в наступних працях авторів [21, 38, 39, 55 – 57, 89, 91, 98, 105, 107-127, 153 - 156].

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
2. Алимов Р.У. Развертка торсов общего вида / Р.У. Алимов, А.С. Садриддинов // Доклады АН УзССР. – Ташкент: Изд. ФАН УзССР, 1978. – № 6. – С. 24–28.
3. Анпилогова В.А. О построении торсовой поверхности с направляющими кубическими параболой / В.А. Анпилогова, Н.Г. Кухарчук // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1979. – № 27. – С. 80 – 82.
4. Бадаєв Ю.І. Реалізація інтерполяційного методу Гаусс-функції та порівняльний аналіз / Ю.І. Бадаєв, Ю.В. Сидоренко // Прикл. геометрія и інж. графіка. – К.: КНУБА, 1998. – Вип. 63. – С. 33 – 36.
5. Бадаєв Ю.І. Сплайнові векторно-параметричні криві / Ю.І. Бадаєв, О.М. Ковтун // Прикл. геометрія и інж. графіка. – К.: КДТУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 47 – 49.
6. Баджория Г.Ч. Об одном методе построения развертки / Г.Ч. Баджория // Судостроение. – М.: Изд. УДН, 1984. – № 5. – С. 37 – 38.
7. Белько И.В. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев, А.А. Гусак, А.И. Нахимовская, А.П. Рябушко, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
8. Белятынский А.А. Проектирование кривых при строительстве и реконструкции автомобильных дорог / А.А. Белятынский, А.М. Таранов. – К.: Вища школа, 1988. – 302 с.
9. Богушко А.А. Построение разверток торсовых поверхностей с помощью ЭВМ / А.А. Богушко // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1989. – № 47. – С. 49–50.
10. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривою / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.Є. Спіцин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць Харківського держ. університету харчування та торгівлі. – Харків. 2004. – Вип. 5. – С. 30 – 34.
11. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
12. Бубенников А. Б. Кинематические поверхности в математической интерпретации / А.Б. Бубенников // Начертательная геометрия: Сборник трудов ВЗПИ. – М., 1969. – №48. – С.38 – 62.
13. Бубенников А.В. Начертательная геометрия / Бубенников А.В., Громов А.Я. – М.: Высшая школа, 1973. – 416 с
14. Булгаков В.Я. Аналитическое исследование торсов 4-го порядка / В.Я. Булгаков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1972. – №14. – С. 68 – 73.
15. Булгаков В.Я. К вопросу конструирования торсов 4-го порядка / В.Я. Булгаков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1970. – №11. – С. 40 – 44.

16. Булгаков В.Я. Конструирование торсов 4-го порядка по наперед заданным условиям / В.Я. Булгаков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1971. – № 12. – С. 41 – 48.
17. Булгаков В.Я. Об одном способе конструирования торсов 4-го порядка / В.Я. Булгаков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1971. – №13. – С. 37 – 40.
18. Варварица А.Г. Аппроксимация топографической поверхности поверхностью одинакового ската / А.Г. Варварица // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1976. – №21. – С. 39 – 42.
19. Василевський О.В. Конструювання поверхонь торсів з ребром звороту побудованим за методом формоутворюючих поверхонь / О.В. Василевський // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.:КНУБА, 2000. – № 67. – С. 143-145.
20. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. -К.: УАСХН, 1960. -283 с.
21. Верещага В.М. Об одном алгоритме построения пространственных обводов / В.М. Верещага // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1979. – Вып. 28. – С. 107 – 108.
22. Вентцель М.К. Сферическая тригонометрия / Вентцель М.К. – М.: Геодезиздат, 1948. – 154 с.
23. Вірченко Г.А. Проектування плоских обводів з використанням кривих Безье третього порядку / Г.А. Вірченко // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КДТУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 119 – 123.
24. Вознюк В.А. Побудова торса третього порядку за допомогою координатних площин та системи MathCAD / В.А. Вознюк // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.:КНУБА, 2005. – № 75. – С. 165-168.
25. Войтюк Д.Г. Сільськогосподарські машини / Д.Г. Войтюк, Г.Р. Гаврилюк. – К.: Каравела, 2008. – 552 с.
26. Войтюк Д.Г. Проектування полиці плуга із розгортної поверхні за заданою граничною траєкторією руху скиби / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Вісник аграрної науки. –К.:”Аграрна наука”,1998. -№ 1. –С. 47-49.
27. Войтюк Д.Г. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Збірник наукових праць НАУ “Механізація сіль-ськогосподарського виробництва”. –Т.10. –К.: НАУ, 2001. –С. 74-78.
28. Волков В.Я. Поверхность, огибающая однопараметрическое семейство плоскостей, касательных к двум поверхностям термодинамического потенциала / В.Я. Волков // Прикладная многомерная геометрия: Труды МАИ. – М.: МАИ, 1969. – № 187. – С. 83 – 90.
29. Воробкевич Р.И. Аналитическое описание параболических торсов 4-го порядка / Р.И. Воробкевич, В.С. Обухова // Прикладная геометрия и инженерная графика.– К.: Будівельник, 1976.– № 33. – С. 16 – 19.
30. Воробкевич Р.И. Исследование сечений параболического торса касательной плоскостью / Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1985. – № 39. – С. 29–32.

31. Воробкевич Р.И. О двойственных торсах / Р.И. Воробкевич // Вопросы графического отображения: Сборник статей Львовской секции инженерной графики. – Львов: Из-во Львовского государственного университета, 1974. – С. 43 – 48.
32. Воробкевич Р.И. Конструирование поверхностей способом сложения функций, описывающих заданные сечения / Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1986. – Вып. 42. – С. 40 – 42.
33. Воробкевич Р.И. Исследование свойств тригонометрических V-сплайнов / Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1989. – Вып. 48. – С. 73 – 76.
34. Воробкевич Р.И. Формообразование кривых методом сложения неявных функций / Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1990. – Вып. 49. – с. 74 – 76.
35. Воронина А.Н. Построение торсов с ребром возврата в виде кривой четвертого порядка / А.Н. Воронина // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1967. – № 5. – С. 103 – 105.
36. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / Выгодский М.Я. – М.–Л.: ГТТИ, 1949.– 511 с.
37. Гетьман А.Г. Численный метод построения торсовых поверхностей по заданной геодезической линии / А.Г. Гетьман // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1983. – № 35. – С. 52 – 54.
38. Грищенко І.Ю. Описання довільної ділянки на поверхні кулі інтерполяційною кривою / І.Ю. Грищенко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. -Харків: ХДУХТ, 2008. –Вип. 21. – С.
39. Грищенко І.Ю. Побудова розгорток циліндричних відсіків довільної конфігурації аналітичним способом / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Грищенко // Геометричне та комп'ютерне моделювання –Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2009. – Вип. 22.– С. 53 – 57.
40. Громов М. Я. Пространственные кривые в ортогональных проекциях / М.Я. Громов. – М.: ВЗПИ, 1956. – 114 с.
41. Громов М.Я. К геометрии односторонних развертывающихся поверхностей / М.Я. Громов // Вопросы начертательной геометрии и инженерной графики. – Ташкент: Таш. институт инженеров железнодорожного транспорта, 1963. – № 26. – С. 21 – 34.
42. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности / Л.В. Гячев. – Зерноград, 1961. – 317 с.
43. Джанабаев Д.Д. Оценка точности при автоматизированном способе построения развертки торсов, заданных ребром возврата / Д.Д. Джанабаев // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1981. – № 31. – С. 110 – 112.
44. Джанабаев Д.Д. Построение развертки торса с помощью ЭВМ / Д.Д. Джанабаев // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1977. – № 23. – С. 69 – 71.
45. Заїка П.М. Теорія сільськогосподарських машин / П.М. Заїка. – Т. I (ч. 1). Машини та знаряддя для обробітку ґрунту. – Харків: Око, 2001. – 444 с.

46. Іванова Л.С. Згладжуюча апроксимація ДПК на рівномірній сітці методами коригування зовнішніх сил / Л.С. Іванова // Прикл. геометрія и інж. графіка. – К.: КДТУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 93 – 98.

47. Кардашевская Ю.Г. О возможности использования торсов в качестве лемешно-отвальных поверхностей / Ю.Г. Кардашевская // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1972. – № 15. – С. 76 – 81.

48. Кардашевская Ю.Г. Прикладные вопросы изгибания торсовых поверхностей / Ю.Г. Кардашевская // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1965. – № 3. – С. 96–103.

49. Кардашевская Ю.Г. Применение торсовых поверхностей в сельскохозяйственном машиностроении / Ю.Г. Кардашевская // Доклады МИИСП. – М.: МИИСП, 1964. – № 5. – С.71 – 77.

50. Кардашевская Ю.Г. Развертывание тора способом касательных плоскостей / Ю.Г. Кардашевская // Вопросы прикладной геометрии. – М.:Изд. МАИ, 1966. – С. 86 – 91.

51. Карташев А.И. Поверхности одинакового ската: Автореф. канд. техн. Наук / А.И. Карташев. – Л.: Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1954. – 16 с.

52. Кизнер З.И. Семейства плоскостей в гильбертовом пространстве и развертывающиеся поверхности / З.И. Кизнер // Успехи математических наук. – М.: Л., 1971. - № 3. – Т. 26. – С. 201–202.

53. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія / М.І. Кованцов. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.

54. Кремец Я.С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки [Текст]: дис....канд. техн. наук / Я.С. Кремец. – Дніпро, 2017. – 157 с.

55. Кресан (Ананенко) Т.А. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, яка здійснює обертальний і поступальний рухи / Т.А. Кресан // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т.49. – С. 154 -161.

56. Кресан (Ананенко) Т.А. Обвідні циліндри однопараметричної множини положень площини, вісь обертання якої здійснює поступальний криволінійний рух / Т.А. Кресан // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т.51. – С. 161 -168.

57. Кресан (Ананенко) Т.А. Розгортки трьох проєкціювальних циліндрів, що проходять через задану просторову криву / Т.А. Кресан // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ Луцького національного технічного університету, 2010. – Вип. 29. – С. 83-88.

58. Кривошапко С.Н. Построение разверток торсов и складок / С.Н. Кривошапко // Строительство и архитектура . – М.: Изд. вузов,1987. – № 11. – С. 114 – 116.

59. Кривошапко С.Н. Применение торсовых поверхностей в судостроении / С.Н. Кривошапко // Судостроение. – М.: Изд. УДН,1989. –№ 7. – С. 62 – 68.

60. Кривошапко С.Н. Расширение класса торсовых поверхностей / С.Н. Кривошапко // Расчет и проектирование строительных конструкций. – М.: Изд. УДН, 1989. – С. 62 – 68.
61. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки / С.Н. Кривошапко. – М.: Из-во университета дружбы народов, 1991. – 289 с.
62. Кухарчук Н.Г. О гладкости ребра возврата торсовой поверхности, построенной на обводах, лежащих в параллельных плоскостях / Н.Г. Кухарчук // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1980. – № 30. – С. 83 – 85.
63. Лапицкий Ю.В. Построение точных разверток поверхностей одинакового ската методом проф. М.Я. Громова: Учеб. Пособие / Ю.В. Лапицкий. – М.: Изд. ВЗПИ, 1950. – 12 с.
64. Литвин Ф.Л. Некруглые зубчатые колеса. Конструирование, теория зацепления и производство / Ф.Л. Литвин. – М.-Л.: Машгиз, 1950. – 220 с.
65. Лі В.Г. Просторова коробова крива / В.Г. Лі, І.Н. Бурчак // Прикл. геометрія та інж. графіка.- К.: КІБІ, 1993. – С. 84 – 87.
66. Малкіна В.М. Побудова розгортної поверхні за допомогою спеціальних ортонормованих функцій / В.М. Малкіна // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2004.– № 4.– Прикл. геометрія та інж. граф. – Том 24.– С. 77–80.
67. Малько С. В. Конструирование рациональных кривых, заданных точками с параметрами в них, методом наименьших квадратов / С.В. Малько, В.А. Надолинный // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1978. – Вып. 25. – С. 82 – 83.
68. Малько С.В. Аппроксимация упорядоченного точечного обвода кривыми 2-го порядка / С.В. Малько // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1979. – Вып. 27. – С. 41 – 42.
69. Маншеров Э.Э. Конструирование поверхности одинакового ската с помощью направляющей поверхности / Маншеров Э.Э. // Вопросы начертательной геометрии и инженерной графики. – Ташкент: Таш. институт инженеров железнодорожного транспорта, 1970. - № 59. – С. 104–112.
70. Мартиросов А.Л. О развертках торсов 4-го порядка / А.Л. Мартиросов // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1976. – № 22. – С. 93 – 97.
71. Мерцалов Н.И. Зубчатая передача между непересекающимися осями / Н.И. Мерцалов. -М.: ОНТИ, 1932. -38 с.
72. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия / В.И. Милинский -Л.: Кубуч, 1934. - 332 с.
73. Монж Г. Приложные анализы к неометрии / Г. Монж. - М.: Л.: ОНТИ, 1936.- 699 с.
74. Муквич М.М. Конструювання поверхонь технічних форм у системі супровідного тригранника прямої кривої: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.01.01 / М.М. Муквич. – Київський націон. унів. будівн. і архітектури. – Київ, 2009. – 22 с.
75. Мурадов Ш. Конструирование торсовых поверхностей и их общие уравнения / Ш. Мурадов // Тезисы XXIII научно-технической конференции

профессорско-преподавательского состава. Ч. 1. – Ташкент, 1974. – С. 108 – 109.

76. Мурадов Ш. Торсовые поверхности, инцидентные двум заданным коникам / Ш. Мурадов // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1977. – № 24. – С. 45–46.

77. Надикто В.Т. Колійна та мостова системи землеробства / В.Т. Надикто, В.О. Улексін. – Мелітополь: ТОВ «Видавничий будинок ММД», 2008. – 268 с.

78. Надолинный В.А. Коробовая линия кривых второго порядка / В.А. Надолинный // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1973. – Вып. 17. – С. 115 – 119.

79. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КГТУСА, 1995. – Вып. 58. – С. 26 – 29.

80. Найдыш А.В. Згущення точкових рядів на основі кутів суміжності / В.М. Найдыш, В.О. Лебедев // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. – Т. 19. – С. 26 – 31.

81. Несвідомін В.М. Дослідження взаємозв'язку між повною та нормальною кривою ліній кривини торса при його згинанні / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрия та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2009. – № 81. – С. 82-87.

82. Николаева Ю.Н. Алгоритм расчета плоских разверток развертывающихся поверхностей / Ю.Н. Николаева // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1991. – № 51. – С. 83–86.

83. Новак Л. К вопросу о развертываемых поверхностях / Л. Новак // Сакартвелос политехникури інституту: Труды Грузинского политехнического института. – Тбилиси, 1969. – № 6(131). – С. 41–51.

84. Обухова В.С. Аналитический и конструктивный алгоритмы получения ребра возврата параболического торса T^4_3 / В.С. Обухова, Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1983. – № 35. – С. 11 – 14.

85. Обухова В.С. Двуосевые и одноосевые линейчатые поверхности 3- и 4-го порядков / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1971. – № 13. – С.43–53.

86. Обухова В.С. Качение отсеков торсов по своему изгибанию / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К., 1986. – № 41. – С.12–11.

87. Обухова В.С. Классификация торсов T^4 по направляющим конусам и исследование видов их конических сечений / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1985. – № 39. – С.9–12.

88. Обухова В.С. Комп'ютерне моделювання торсових поверхонь методом обкатки пар геометричних фігур / В.С. Обухова, В.М. Несвідомін // Прикл. геометрия та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2004. – № 74. – С. 34-37.

89. Обухова В.С. Конструирование поверхностей одинакового ската как огибающей однопараметрического семейства круговых конусов / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1988. – № 46. – С. 13 – 18.

90. Обухова В.С. Линейчатая поверхность 3-го порядка / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1972. – № 14. – С.30–35.
91. Обухова В.С. Конструирование поверхностей одинакового ската как огибающей однопараметрического семейства круговых конусов / С.Ф. Пилипака, В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1988. – Вып. 46. – С. 13 – 18.
92. Обухова В.С. Линейчатая поверхность 4-го порядка общего вида / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1972. – № 15. – С.23–27.
93. Обухова В.С. Описание торсов 4-го порядка в произвольной координатной системе их бипланар / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1986. – № 42. – С.10–15.
94. Обухова В.С. О конструировании отвальной поверхности с использованием ЭВМ / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1978. – № 25. – С. 83 – 84.
95. Обухова В.С. О некоторых видах алгебраических торсов / В.С. Обухова // Материалы III научно-методической зональной конференции по начертательной геометрии и инж. графике. – Ташкент, 1973. – № 90. – С.3–8.
96. Обухова В.С. Параболический торс / В.С. Обухова, Р.И. Воробкевич // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1981. – № 31. – С. 22 – 26.
97. Обухова В.С. Параметризация и каноническая форма уравнения торса T_3^4 / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1980. – № 30. – С. 17 – 20.
98. Обухова В.С. Построение развертки торса, заданного направляющими кривыми / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1988. – № 45. – С.14–11.
99. Обухова В.С. Про алгебраїчні торси / В.С. Обухова // Питання прикладної геометрії. Матеріали доповідей 30-ї науково-технічної конференції. – К.: КІБІ, 1969. – С. 15 – 17.
100. Обухова В.С. Свёртка плоского отсека в торс с условием перехода линии отсека в заданную кривую сечения торса / В.С. Обухова, С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К., 1987. – № 44. – С.23–26.
101. Обухова В.С. Торсові поверхні з напрямним конусом 2-го порядку / В.С. Обухова, О.Л. Підгорний // Прикл. геометрія і інж. графіка. – К.: КНУБА, 2001. – № 69. – С.6–10.
102. Обухова В.С. Усовершенствованная модель для автоматизированного проектирования торсовых отвальных поверхностей / В.С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1981. – № 32. – С. 13 – 17.
103. Павловский М.А. Теоретическая механика. Статика. Кинематика / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук. – К.: Вища школа, 1989. – 351 с.
104. Павлоцька В.А. Утворення раціональної поверхні торса третього порядку за трьома точками і дотичними них / В.А. Павлоцька // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2003. – № 73. – С. 282-287.
105. Патент на корисну модель 58057 Україна, МПК(2001.01) A01B 49/00 . Агромостовий комплекс для культивування рослин, посаджених рядками / Кресан

Т.А., Пилипака С.Ф., Надикто В.Т.; заявник и патентовласник Національний університет біоресурсів і природокористування України. – № u201011316; заявл. 23.09.2010; опубл. 25.03.2011, Бюл. № 6, 2011 р.

106. Патент на изобретение Российской Федерации 2159996, А01В 49/00. Агромостовой комплекс для культивации и растений, посаженных рядками или квадратно-гнездовым методом / Майсов И.А.; заявитель и патентовладелец И.А. Майсов – № 99113095/13 ; заявл. 15.06.1999 ; опубл. 10.12.2000.

107. Пилипака С.Ф. Конструювання розгортних поверхонь в системі супровідного тригранника Френе прямої кривої та побудова їх розгорток / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КДТУБА, 1997. – Вип.62. – С. 74 – 77.

108. Пилипака С.Ф. Непрерывное изгибание цилиндрических отсеков с общей плоской кривой линией их стыка / С.Ф. Пилипака // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы. Тезисы докладов международной научной конференции. –М.: Изд-во РУДН, 2001. –С. 210-211.

109. Пилипака С.Ф. Рівняння конуса, віднесеного до ортогональної сітки із сімей координатних геодезичних ліній / С.Ф. Пилипака // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 18. –Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С. 16-19.

110. Пилипака С.Ф. Розрахунок заготовки для виготовлення гвинтової поверхні котка / С.Ф. Пилипака, Несвідомін В.М., Пилипака Т.С., Хмеленко О.С. // Електротехніка і механіка. –К., 2008. -№ 1. –С. 71 – 77.

111. Пилипака С.Ф. Торс, як обвідна поверхня множини положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника прямої кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 41. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 26 – 36.

112. Пилипака С.Ф. Апроксимація гвинтового конуса смугами торсів вздовж ліній кривини на його поверхні / С.Ф. Пилипака, Л.С. Бойко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 52. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 31 – 39.

113. Пилипака С.Ф. Рівняння конуса, віднесеного до ортогональної сітки із сімей координатних геодезичних ліній / С.Ф. Пилипака // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 18. –Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С. 16-19.

114. Пилипака С.Ф. Натуральні рівняння кривої, що належить круговому циліндру / С.Ф. Пилипака // Труды Таврической государственной агротехнической академии. – Вып. 4. Прикл. геометрия и инж. графика. Т. 3. – Мелітополь: ТДАТА, 1998. – С.42 - 43.

115. Пилипака С.Ф. Проектирование отвала плуга с линейчатой поверхности по заданной геодезической линии – предельной траектории движения пласта / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кремец, Т.А. Кресан // MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. –Vol 17. Lublin-Preszow. -№ 3. -2015. – С. 103 – 117.

116. Пилипака С.Ф. Утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертальних рухів / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан (Ананенко) // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2009. –Вип. 82. –С. 32-41.

117. Пилипака С.Ф. Дослідження розгортних та супутніх поверхонь, утворених однопараметричними сім'ями площин / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан (Ананенко) // Науковий вісник НУБіП України.–К.: НУБіП України, 2010.– Частина 1. – С. 232 -241.

118. Пилипака С.Ф. Дослідження інтерполяційної функції на основі суми графіків гіперболічного секанса / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Хищенко (Грищенко) // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4. – Т. 21. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. - С. 12 – 15.

119. Пилипака С.Ф. Управління інтерполяційною функцією на основі суми графіків гіперболічного секанса напрямом дотичної в заданих точках / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Хищенко (Грищенко) // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4. – Т. 25. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. - С. 20 – 21.

120. Пилипака С.Ф. Дослідження сукупності положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника просторової кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Праці Таврійського державного агротехнічного університету.– Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – № 4.– Прикл. геометрія та інж. граф.– Том 40.– С. 48–55.

121. Пилипака С.Ф. Изгибания торсов по заданным условиям применительно к моделированию рабочих органов сельхозмашин: Дис . канд. техн. наук: 05.01.01 / С.Ф. Пилипака. – Київський націон. унів. будівн. і архітектури. – Київ, 1987. – 196 с.

122. Пилипака С.Ф. Конструирование винтовых поверхностей из торсов одинакового ската / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: Будівельник, 1987. – № 43. –С. 39-41.

123. Пилипака С.Ф. Конструювання лінійчатих поверхонь за заданою напрямною кривою, котра є спеціальною лінією поверхні / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КДТУБА, 1996.– № 60. – С.87–89.

124. Пилипака С.Ф. Построение кривой торса на его развертке / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1989.– № 47. – С.45–46.

125. Пилипака С.Ф. Торс, як обвідна поверхня множини положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника плоскої кривої / С.Ф. Пилипака, М.М.Муквич // Праці Таврійського державного агротехнічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – № 4.– Прикл. геометрія та інж. граф. – Том 41. – С. 26–35.

126. Пилипака С.Ф. Конструювання розгортних поверхонь в системі супровідного тригранника Френе напрямної кривої та побудова їх розгорток / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КДТУБА, 1997.– № 62. – С.74–77.

127. Пилипака С.Ф. Конструювання торсів однакового нахилу твірних, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин / С.Ф. Пилипака, Г.В. Білоног // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – № 77. – С. 47 – 53.

128. Пилипака Т.С. Аналітичне конструювання просторових та сферичних кривих у функції власної дуги / Т.С. Пилипака // Геометричне та комп'ютерне моделювання. -Харків: ХДУХТ, 2008. – Вип. 21. – С. 100 – 105.

129. Пономарев А.М. Применение метода сплайнов для получения лекал швейных изделий / А.М. Пономарев, Д.П. Крушевская, А.А. Богушко // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1981. – Вип. 32. – С. 34 – 37.

130. Пугачев Е.В. Об одном алгоритме дискретной интерполяции / Е.В. Пугачев // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КДТУБА, 1996. – Вип. 61. – С. 148 – 151.

131. Пустюльга С.І. Вплив формоутворюючого навантаження на моделювання дискретно визначених кривих за допомогою числових послідовностей / С.І. Пустюльга // Сборник научных трудов Киевского национального университета технологий и дизайна: Межведомственный научно-технический сборник. Спецвыпуск. – К.: Випол, 2004. – С. 115 – 120.

132. Рачковская Г.С. Аналитическое описание и компьютерная модель кинематики линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей / Г.С. Рачковская, Ю.Н. Харабаев // Прикл. геометрия та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2002. – № 71. – С. 243 – 246.

133. Рыжов Н.Н. К вопросу конструирования торсов по наперед заданным условиям / Н.Н. Рыжов, Р.У. Алимов // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Будівельник, 1979. –№ 27. – С. 15–17.

134. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение / Савелов А.А. –М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. -292 с.

135. Сидоренко Ю.В. Побудова гладких ліній за допомогою параметризованих функцій Гаусса / Ю.В. Сидоренко // Прикл. геометрия та інж. графіка.- К.: КНУБА, 2001.- Вип. 69. – С. 195 – 198.

136. Сидоренко Ю.В. Комп'ютерна реалізація різних способів параметризації інтерполяційної функції Гаусса / Ю.В. Сидоренко, А.В. Сацкова // Прикл. геометрия та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2003. –Вип. 72. –С.174 – 178.

137. Скидан И.А. Обобщённые цилиндрические координаты и их применение в прикладной геометрии / И.А. Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Будівельник, 1971. – № 13. – С.15–20.

138. Скидан И.А. Поверхности в гиперболических координатах / И.А. Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Буді-вельник, 1976. – № 21. – С.43–45.

139. Скидан И.А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.01.01/ И.А. Скидан. – Моск. автомобильно-дорожный институт. – М., 1989. – 37 с.

140. Скидан И.А. Квазисферические координаты и их применение в прикладной геометрии / И.А. Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.–К.: Будівельник, 1977. –№ 23. – С.38–42.
141. Скидан И.А. Кинематические поверхности в гиперболических координатах / И.А.Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.. – К.: Будівельник, 1972. – № 14. – С. 78 – 82
142. Скидан И.А. Развертка торсов / И.А.Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Будівельник, 1988. – № 46. – С. 25– 26.
143. Скидан И.А. Развертка торсов с ребром возврата на круговом конусе / И.А.Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.: Реф. информ. о законченных научн. исслед. работах в вузах УССР. – К.: Вища школа, 1977. – № 1. – С. 15 – 19.
144. Скидан И.А. Торсы в обобщённых цилиндрических координатах / И.А. Скидан // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Будівельник, 1975.– № 19. – С. 95–99.
145. Соловьев А.Ю. Выделение структурных линий рельефа при крупномасштабном картографировании лавин и водоснежных потоков /А.Ю. Соловьев // Геодезия и картография. – 2001. - №10. – С.47 – 52.
146. Спирицев Д.В. Особенности методов интерполяции на примере пакетов символьной математики / Д.В. Спирицев, А.В. Найдыш // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ, 2016. – Вип. 7. - С. 151 – 156.
147. Старков В.М. Развертывание поверхностей с ребром возврата по методу замены их другими поверхностями: Автореф. дис. канд. техн. наук / В.М.Старков. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1957. – 12 с.
148. Сысоев Н.И. Теоретические основы и расчет сортировки «Змейка» / Н.И. Сысоев // Сельхозмашина. – 1949. - № 8. – С. 5-9.
149. Сулюкманов Ф.С. К вопросу конструирования винтовой развертывающейся поверхности / Ф.С. Сулюкманов // Вопросы прикладной геометрии: Труды МАИ. – М.: Изд. МАИ, 1972. – № 246. – С. 54 – 56.
150. Томаревская Е. С. План и продольный профиль пространственной кривой как комплексный ее чертёж / Е.С. Томаревская // Прикл. геометрия и инж. графика.- К.: Будівельник, 1967. – Вып. 5. – С. 169 – 173.
151. Финников С.П. Дифференциальная геометрия / С.П. Финников. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – 180 с.
152. Фокс А., Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
153. Хищенко І.Ю. Геометричне моделювання рельєфу поля для системи точного землеробства [Текст]: дис...канд. техн. наук / І.Ю. Хищенко (Грищенко). – Київ, 2005. – 174 с.
154. Хищенко І.Ю. Інтерполяційні функції, графіки яких поєднують криволінійні і прямолінійні ділянки / І.Ю. Хищенко (Грищенко) // Прикл. геометрія та інж. графіка.- К.: КНУБА, 2003.- Вип. 73. – С. 215 – 220.

155. Хименко І.Ю. Моделювання рельєфу поля за заданими координатами точкових рядів / І.Ю. Хименко (Грищенко) // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип. 7. – С. 93 – 99.

156. Хименко І.Ю. Інтерполяційні функції, графіки яких поєднують плоскі і просторові лінії / І.Ю. Хименко (Грищенко) // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 282 – 286.

157. Хмеленко О.С. Геометрическая модель и алгоритм конструирования торсических поверхностей для глубокого рыхления почв / О.С. Хмеленко // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1985. – № 40. – С. 102 – 103.

158. Холковський Ю.Р. Побудова поверхні, що огинає однопараметричну множину конусів / Ю.Р. Холковський // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1999. – № 52. – С. 69–75.

159. Хомченко А.Н. Модифікація сплайнів на основі поліномів С.Н. Берштейна / А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулученко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип. 4. – Т. 24. – С. 57 – 61.

160. Цисарж В.В. Математические методы компьютерной графики / Цисарж В.В., Марусик Р.И. – Киев: Факт, 2004. – 464 с.

161. Шарепов-Лапицкий Ю.В. Построение разверток развертывающихся поверхностей методом плоского преобразования их линий кривизны: Автореф. дис. канд. техн. наук / Ю.В. Шарепов-Лапицкий. – М.: МАИ, 1953. – 8 с.

162. Шепель В.П. Проектування спрягаючих плоских кривих складної форми з використанням наборів кривих другого порядку / В.П. Шепель, А.Г. Костюк // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 67. – С. 78 – 81.

163. Якубовский А.М. Некоторые вопросы конструирования поверхностей с помощью трёхгранника Френе / А.М. Якубовский // Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – М., 1967. – Т. XXVI. – Математика. – № 3. – Прикладная геометрия. – С. 23–32.

164. Gaus C.F. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commented / C.F. Gaus. – Gottingensis, 1827. – 197 p.

165. Müller E. Vorlesungen über darstellende Geometrie. III Band / E Müller. – Leipzig, 1931. – 237 s.

166. Schröder J. Darstellende Geometrie. / J. Schröder. – Leipzig, 1901. – 305 s.

ДОДАТОК А. ДАНІ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Фрагмент масиву координат точок поля, знятих з допомогою супутникової навігації і упорядкований за координатою Z.

H=[229.8500 137.5300 13.6000
229.2900 137.1700 13.6000
217.0600 129.9300 13.6000
241.8900 145.4800 13.9000
204.6400 122.5800 13.9000
192.2200 116.5200 14.1000
191.8500 116.2900 14.1000
178.8700 109.2900 14.4000
167.5700 102.6400 14.6000
254.1300 153.1900 14.7000
155.5200 95.5200 14.8000
142.7300 88.6400 15.0000
141.9900 88.1600 15.0000
131.2300 82.3500 15.2000
130.3100 81.8800 15.2000
119.5600 75.7000 15.4000
108.6200 69.7700 15.6000
107.6900 69.3000 15.6000
95.6500 63.2500 15.8000
84.1500 57.0800 15.9000
83.2300 56.6000 15.9000
70.0700 50.1900 16.1000
53.3800 41.8900 16.7000
38.9300 33.8200 16.9000
26.5100 27.0500 17.1000
10.0100 18.3900 17.4000
-6.1200 8.7800 17.6000
-52.4600 -24.0900 18.5000
-29.4700 -43.0700 19.7000
15.2000 -12.8200 19.9000
0.3700 -22.1900 19.9000
-15.2000 -32.9900 19.9000
-15.9400 -33.5800 19.9000
47.8200 5.7000 20.0000
29.4700 -4.5100 20.0000
63.0200 15.3100 20.2000
83.2300 25.9900 20.5000
114.7400 43.1900 20.7000
99.3500 34.6500 20.7000
130.3100 51.5000 20.9000

146.8100	60.0400	21.2000
163.8600	68.8200	21.8000
179.4300	77.2500	22.1000
195.3700	86.3800	22.3000
211.1300	94.5700	22.8000
223.1700	100.9800	23.0000
235.4100	107.5100	23.4000
248.7500	114.3900	23.6000
257.4700	119.0200	23.7000
265.2500	123.1700	23.8000
272.6600	127.4400	23.9000
279.8900	131.2400	24.0000
285.6400	134.3200	24.1000
296.7600	140.3700	24.3000
306.4000	145.0000	24.4000
636.1600	-36.6700	24.4000
311.4000	148.0900	24.5000
618.3600	-42.4800	25.0000
599.6400	-48.7700	25.6000
332.3500	123.1700	26.2000
317.8900	115.9300	26.5000
303.9900	107.7400	26.7000
291.9400	101.3400	26.8000
280.8200	95.5200	26.9000
256.3500	82.7100	27.1000
243.3800	75.5900	27.2000
579.0600	-55.4100	27.3000
230.5900	67.7500	27.6000
217.0600	59.9200	27.9000
200.3700	50.1900	28.3000
137.1700	-119.9700	28.5000
184.8000	41.4100	28.7000
144.2100	-117.4700	28.7000
172.0100	34.8900	28.9000
151.8100	-112.7300	28.9000
160.8900	29.4300	29.0000
159.4100	-108.2200	29.0000
117.8900	-127.0900	29.0000
149.9600	23.2600	29.1000
167.9400	-104.3000	29.1000
138.2800	17.3200	29.2000
74.3300	-90.3000	29.2000
110.8500	-129.5800	29.2000
556.8200	-61.1100	29.2000
125.8600	11.2700	29.3000

81.3700	-86.5000	29.3000
64.3200	-95.6400	29.3000
55.4200	-100.7400	29.3000
87.1200	34.8900	29.3000
175.3500	-100.0300	29.4000
99.7200	-2.0200	29.5000
96.9400	-78.5500	29.5000
100.8400	25.6300	29.5000
77.1100	39.2800	29.5000
66.3600	42.9500	29.5000
183.3200	-95.0500	29.5000
88.2300	-8.6600	29.7000
104.9100	-74.6400	29.7000
145.3200	0.7100	29.7000
145.3200	6.5300	29.7000
134.7600	12.7000	29.7000
111.9600	19.5800	29.7000
190.5500	-91.2500	29.7000
78.2200	-13.8800	29.8000
112.5100	-70.4800	29.8000
100.0900	-134.0900	29.8000
70.6200	-18.1600	29.9000
168.3100	0.2400	29.9000
61.9100	-23.1400	30.0000
120.3000	-66.3300	30.0000
210.7500	-17.4400	30.0000
189.0700	-6.6500	30.0000
197.2200	-87.2200	30.0000
52.6400	-28.1200	30.1000
43.9300	-32.6300	30.1000
128.2700	-62.0600	30.1000
145.6900	-126.1400	30.1000
36.5200	-36.7800	30.2000
138.6500	-55.8900	30.2000
221.5100	-23.2600	30.2000
200.1900	-12.1000	30.2000
217.8000	-76.5400	30.2000
205.5600	-81.4000	30.2000
22.6100	-44.5000	30.3000
168.3100	-124.5900	30.3000
15.7600	-48.5300	30.4000
5.0000	-56.1300	30.6000
146.2500	-52.3300	30.6000
231.5100	-28.3600	30.6000
-3.8900	-62.7700	30.7000

185.7300	-121.6300	30.7000
158.3000	-46.2800	30.8000
243.5600	-34.2900	30.9000
169.6000	-40.5800	31.0000
196.3000	-118.4200	31.0000
45.0400	-59.5700	31.3000
19.2800	-78.0800	31.3000
181.1000	-35.1200	31.3000
253.3900	-40.4600	31.3000
245.2300	-61.9400	31.3000
535.3200	-71.0800	31.3000
55.4200	-54.7000	31.4000
193.5200	-29.0700	31.4000
207.4200	-114.2700	31.5000
67.8400	-49.2400	31.7000
263.5800	-45.9200	31.7000
256.1700	-56.0100	31.7000
274.1500	-51.2600	31.9000
215.5700	-111.6600	31.9000
80.4500	-43.9000	32.0000
92.3100	-37.7300	32.1000
219.4700	-14.7100	32.1000
285.8300	-56.9600	32.1000
265.8100	-49.7200	32.1000
243.3800	-98.7300	32.2000
226.5100	-106.7900	32.2000
298.9900	-67.2800	32.3000
276.3700	-44.3800	32.3000
231.8900	-8.3100	32.4000
299.7300	-78.3200	32.4000
288.0500	-39.0400	32.4000
234.8500	-102.7600	32.4000
310.8500	-78.3200	32.6000
299.7300	-34.6500	32.6000
104.9100	-32.6300	32.7000
243.3800	-1.9000	32.7000
322.3400	-83.7700	32.7000
311.4000	-29.3100	32.7000
323.4500	-24.3300	32.8000
253.0200	-93.2700	32.8000
508.6300	-80.6900	32.8000

Координати точкового ряду на поверхні поля, зняті за допомогою супутникової навігації і записані у форматі спеціального програмного забезпечення

12:50:25, 3009.1242, N, 1832.6375, E, 210.9, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 31
12:50:48, 3009.1317, N, 1832.6442, E, 211.7, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 32
12:51:12, 3009.1396, N, 1832.6508, E, 212.6, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 33
12:51:29, 3009.1456, N, 1832.6552, E, 213.5, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 34
12:51:47, 3009.1523, N, 1832.6607, E, 215.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 35
12:52:03, 3009.1586, N, 1832.6657, E, 216.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 36
12:52:19, 3009.1650, N, 1832.6711, E, 216.9, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 37
12:52:35, 3009.1717, N, 1832.6764, E, 218.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 38
12:52:49, 3009.1776, N, 1832.6806, E, 218.7, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 39
12:53:07, 3009.1847, N, 1832.6871, E, 219.7, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 40
12:53:21, 3009.1907, N, 1832.6921, E, 220.4, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 41
12:53:36, 3009.1966, N, 1832.6979, E, 221.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 42
12:53:52, 3009.2033, N, 1832.7029, E, 221.6, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 43
12:54:09, 3009.2103, N, 1832.7090, E, 222.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 44
12:54:25, 3009.2168, N, 1832.7141, E, 222.1, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 45
12:54:44, 3009.2239, N, 1832.7196, E, 222.1, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 46
12:55:05, 3009.2314, N, 1832.7251, E, 221.9, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 47
12:55:23, 3009.2377, N, 1832.7296, E, 222.7, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 48
12:55:39, 3009.2452, N, 1832.7343, E, 224.0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 49
12:55:57, 3009.2526, N, 1832.7395, E, 224.9, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 50
12:56:10, 3009.2586, N, 1832.7431, E, 224.9, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 51
12:56:23, 3009.2645, N, 1832.7458, E, 224.7, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 52
12:56:44, 3009.2717, N, 1832.7491, E, 225.5, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 53
12:57:00, 3009.2778, N, 1832.7528, E, 226.1, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 54
12:57:13, 3009.2834, N, 1832.7562, E, 226.6, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 55
12:57:30, 3009.2895, N, 1832.7605, E, 227.2, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 56
12:57:45, 3009.2959, N, 1832.7639, E, 227.8, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 57
12:58:00, 3009.3027, N, 1832.7671, E, 228.3, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 58
12:58:15, 3009.3096, N, 1832.7704, E, 228.8, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 59
12:58:38, 3009.3186, N, 1832.7755, E, 229.3, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 60
12:59:53, 3009.3321, N, 1832.7826, E, 229.5, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, Точка: 61

ДОДАТОК Б. ПРОГРАМА ПОБУДОВИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНИМИ 10 ТОЧКАМИ

```
%Формування матриці в циклі для системи із десяти рівнянь з потрібним  
%значенням гіперболічного секанса  
1. p=0.5;  
2. for j=1:1:10  
3. for i=1:1:10  
4. c(j,i)=sech(p*(j-i));  
5. end  
6. end  
7.  
8. % Введення значень координати x  
9. hold on  
10. x(1,1)=0;x(2,1)=20;x(3,1)=45;x(4,1)=53;x(5,1)=57;x(6,1)=62;x(7,1)=74;  
x(8,1)=89;x(9,1)=95;x(10,1)=100;  
11.  
12. % Введення значень координати y  
13. y(1,1)=0;y(2,1)=0;y(3,1)=-47; y(4,1)=335;y(5,1)=26;y(6,1)=387; y(7,1)=104;  
y(8,1)=0; y(9,1)=100; y(10,1)=0;  
14.  
15.  
16. % Знаходження невідомих коефіцієнтів інтерполяційної кривої  
17. xx=[x(1,1);x(2,1);x(3,1);x(4,1);x(5,1);x(6,1);x(7,1);x(8,1);x(9,1);x(10,1)];  
18. a=c(j,i)\xx;  
19.  
20. yy=[y(1,1);y(2,1);y(3,1);y(4,1);y(5,1);y(6,1);y(7,1);y(8,1);y(9,1);y(10,1)];  
21. b=y(i,1)\yy;  
22.  
23. %Побудова інтерполяційної кривої  
24.  
25. t=[1.0:0.01:10];  
26. x1=a(1,1)*sech(p*(t-1));  
27. x2=a(2,1)*sech(p*(t-2));  
28. x3=a(3,1)*sech(p*(t-3));  
29. x4=a(4,1)*sech(p*(t-4));  
30. x5=a(5,1)*sech(p*(t-5));  
31. x6=a(6,1)*sech(p*(t-6));  
32. x7=a(7,1)*sech(p*(t-7));  
33. x8=a(8,1)*sech(p*(t-8));  
34. x9=a(9,1)*sech(p*(t-9));  
35. x10=a(10,1)*sech(p*(t-10));  
36.  
37. xx=x(1,1)+x(2,1)+x(3,1)+x(4,1)+x(5,1)+x(6,1)+x(7,1)+x(8,1)+x(9,1)+x(10,1);  
38.
```

```
39. y1=b(1,1)*sech(p*(t-1));
40. y2=b(2,1)*sech(p*(t-2));
41. y3=b(3,1)*sech(p*(t-3));
42. y4=b(4,1)*sech(p*(t-4));
43. y5=b(5,1)*sech(p*(t-5));
44. y6=b(6,1)*sech(p*(t-6));
45. y7=b(7,1)*sech(p*(t-7));
46. y8=b(8,1)*sech(p*(t-8));
47. y9=b(9,1)*sech(p*(t-9));
48. y10=b(10,1)*sech(p*(t-10));
49.
50. yy=y(1,1)+y(2,1)+y(3,1)+y(4,1)+y(5,1)+y(6,1)+y(7,1)+y(8,1)+y(9,1)+y(10,1);
51.
52.
53. hold on
54.
    plot(xx,yy,'k')
```

Наукове видання

Сергій Федорович Пилипака
Тетяна Анатоліївна Кресан
Ірина Юріївна Грищенко

**ОБВІДНІ ПОВЕРХНІ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МНОЖИНИ ПЛОЩИН:
КОНСТРУЮВАННЯ, ВИРІЗАННЯ ВІДСІКІВ, ПОБУДОВА РОЗГОРТОК**

Монографія

Формат 60x84/16. Тираж 50 пр. Ум.друк.арк. 15,6. Зам.№1142
Видавець і виготовлювач ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ»
03150, Київ, вул. Предславинська, 28
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи ДК №4131 від 04.08.2011 р.