Національний університет біоресурсів
і природокористування України

ЗБІРНИК

ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ
XV МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
«ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»

з нагоди 94-ї річниці від дня народження
доктора технічних наук, професора, академіка АН ВШ України,
Обухової Віолетти Сергіївни
(1926-2005)

10 березня 2020 року

м. Київ

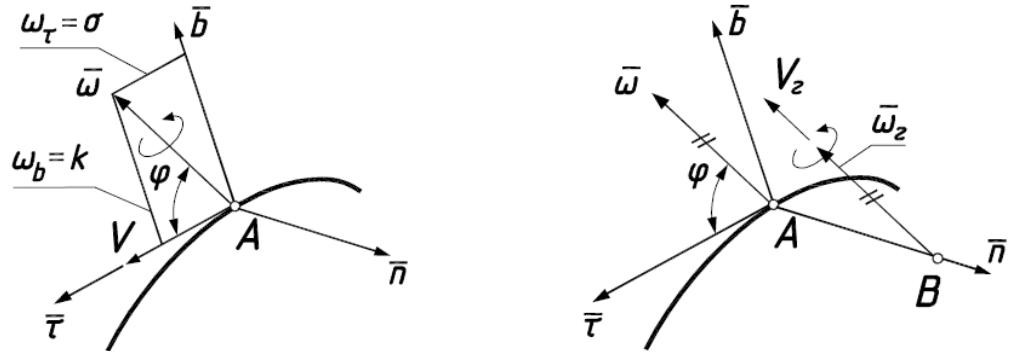
УДК 514.18

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНОЮ КІНЕМАТИКОЮ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА

Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Рух супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна розглядати, як рух твердого тіла, кінематика якого визначається диференціальними характеристиками кривої. Оскільки тригранник рухається вздовж кривої, то його переміщення можна розглядати, як суму двох складових рухів: поступального вздовж орта дотичної $\bar{\tau}$ із швидкістю V і обертального навколо миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$ з кутовою швидкістю ω (рис. 1,а). Ці два рухи можна звести до гвинтового руху навколо миттєвої осі обертання і ковзання $\bar{\omega}_г$, тобто до кінематичного гвинта (рис. 1,б). Однопараметрична множина осей кінематичного гвинта по відношенню до нерухомої системи координат утворює нерухомий аксоїд, а по відношенню до системи рухомого тригранника – рухомий.



а б

Рис. 1. Варіанти розкладання поступального і обертального рухів тригранника Френе просторової кривої: а) обертальний рух навколо вектора Дарбу і поступальний вздовж орта дотичної; б) обертальний рух навколо миттєвої осі обертання і ковзання і поступальний вздовж неї

Миттєва вісь обертання $\bar{\omega}$ розташована в спрямній площині тригранника і складає кут φ із ортом $\bar{\tau}$ (рис. 1,а). Величина і напрям даного вектора, який носить назву вектора Дарбу, залежить від значень кривини k і скруту σ кривої в точці A розташування тригранника, причому його проекція на орт $\bar{\tau}$ чисельно рівна скрутові σ, а на орт бінормалі $\bar{b}$ - кривині k. Звідси можна знайти модуль вектора Дарбу $\bar{\omega}$, тобто чисельне значення кутової швидкості ω (в подальшому прийнято, що швидкість руху тригранника по кривій рівна одиниці: *V=1 м/с:*

$$\left|\bar{\omega}\right| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2}\,. \qquad (1)$$

Обертальний і поступальний рухи тригранника можна замінити одним гвинтовим рухом. Він буде обертатися навколо нової осі $\overline{\omega}_г$ з тією ж кутовою швидкістю ω і ковзати вздовж неї із новою швидкістю $V_г$:

$$V_г = V\sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}\ . \qquad (2)$$

Нова вісь $\overline{\omega}_г$ називається миттєвою віссю обертання і ковзання, або кінематичним гвинтом (рис. 1,б). Вона паралельна вектору Дарбу і зміщена вздовж додатного напряму головної нормалі $\overline{n}$ тригранника на відстань [1]:

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \qquad (3)$$

Якщо задана просторова крива параметричними рівняннями, то завжди можна знайти залежності кривини і k і скруту σ в будь-якій поточній точці кривої. Цими двома характеристиками визначається кінематика супровідного тригранника в даній точці: кут φ, тобто напрям кінематичного гвинта в системі тригранника, величина кутової швидкості ω обертання тригранника (1), швидкість його ковзання (2) вздовж вектора кінематичного гвинта і відстань AB (3). В загальному випадку всі ці величини будуть змінними і залежатимуть від точки на кривій, в якій в даний момент знаходиться тригранник. Отже, положення вектора кінематичного гвинта в системі тригранника буде змінюватися по мірі його руху вздовж кривої. Рух осі кінематичного гвинта в системі тригранника, множина положень якої утворює рухомий аксоїд, цілком визначений: він повертається на кут φ навколо головної нормалі $\overline{n}$ і ковзає вздовж неї згідно (3). При такому русі лінійчата поверхня (рухомий аксоїд, який рухається разом із тригранником, але в його системі є нерухомим) утворюється відомим способом, характерним для побудови коноїда: пряма лінія (вісь кінематичного гвинта) перетинає напрямну пряму (головну нормаль тригранника) під прямим кутом, ковзає вздовж неї і одночасно обертається навколо неї. Розглянемо окремі випадки напрямної кривої, коли рухомий аксоїд має наперед задану форму.

Випадок перший. Нехай кут φ і відстань AB будуть сталими величинами. В такому випадку рухомий аксоїд вироджується у пряму лінію. Згідно рис. 1,а вираз для кута φ запишеться:

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{k}{\sigma}. \qquad (4)$$

Розв’яжемо систему двох рівнянь (3) і (4) відносно кривини k і скруту σ:

$$k = \frac{\sin^2\varphi}{AB}; \qquad \sigma = \frac{\sin 2\varphi}{2AB}. \qquad (5)$$

Просторовою кривою, у якої кривина і скрут є сталими, є гвинтова лінія. Кутова швидкість обертання тригранника при його русі по гвинтовій лінії розраховується за формулою (1) і теж є сталою.

В праці [2] наведено твердження, згідно якого нерухомим аксоїдом кривої укосу є полярний торс її горизонтальної проекції, а рухомим – його розгортка. Горизонтальною проекцією гвинтової лінії є коло, отже полярний торс вироджується у пряму лінію – вісь гвинтової лінії. Відповідно і рухомий аксоїд теж буде прямою лінією.

Випадок другий. Нехай кут φ і відстань AB будуть змінними величинами, але кутова швидкість ω обертання тригранника буде сталою.

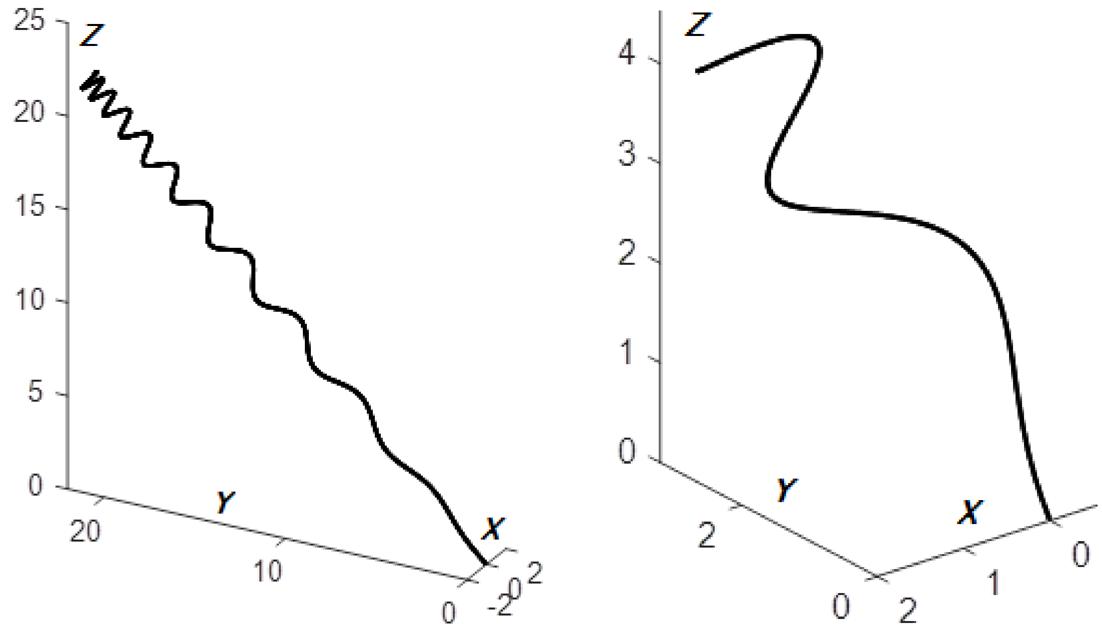
Для знаходження розшукуваної кривої окрім кутової швидкості ω потрібно задати ще одну величину або закономірність її зміни: кривину k, скрут σ або ж відстань AB. Задамо закономірність зміни відстані AB. Нехай вона буде лінійною у функції довжини дуги s розшукуваної кривої: $AB=as$. Розв'яжемо наступну систему рівнянь відносно кривини k і скруту σ:

$$\sqrt{k^2+\sigma^2}=\omega; \qquad AB=\frac{k}{k^2+\sigma^2}=as. \qquad (6)$$

Результатом розв'язку системи (6) є наступні залежності кривини k і скруту σ:

$$k=a\omega^2 s; \qquad \sigma=\omega\sqrt{1-a^2\omega^2 s^2}\,. \qquad (7)$$

Залежності (7) є натуральними рівняннями просторової кривої. Для її побудови потрібно перейти від натуральних до параметричних рівнянь. Для цього потрібно застосовувати чисельні методи. Наявність підкореневого виразу у рівнянні (7) свідчить про те, що крива існує при обмеженому значенні довжини дуги s. На рис. 2 за допомогою чисельних методів побудовано просторові криві за натуральними рівняннями (7).



а б

Рис. 2. Просторові криві, побудовані за натуральними рівняннями (7):
а) a=0,01, ω=2, s=0…50; б) a=0,05, ω=2, s=0…10

Випадок третій. Нехай рухомим аксоїдом буде гвинтовий коноїд сталого кроку. В цьому випадку кут φ і відстань AB повинні змінюватися за лінійним законом, що відповідає рівномірному обертанню і переміщенню осі кінематичного гвинта навколо і вздовж головної нормалі, яка є віссю гвинтового коноїда. В такому випадку система двох рівнянь набуває вигляду:

$$\frac{k}{k^2+\sigma^2}=as; \qquad \mathrm{Arctg}\,\frac{k}{\sigma}=bs. \qquad (8)$$

Результатом розв’язку системи (8) є наступні залежності кривини k і скруту σ:

$$k=\frac{\sin^2 bs}{as}; \qquad \sigma=\frac{\sin 2bs}{2as}. \qquad (9)$$

На рис. 3 за допомогою чисельних методів побудовано просторову криву за натуральними рівняннями (9), яка показана із різних точок зору.

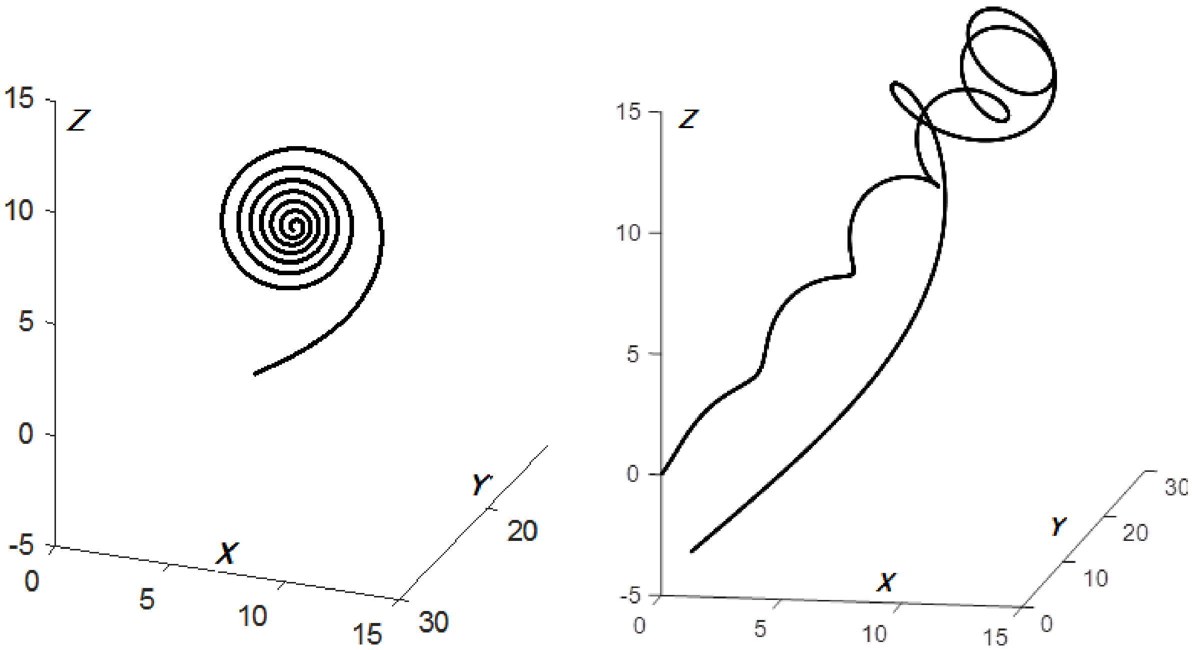


Рис. 3. Просторова крива, побудована за натуральними рівняннями (9) при *a=0,04*, *b=0,03* і показана із різних точок зору

В знаменниках натуральних рівнянь (9) присутня довжина дуги кривої s, а в чисельниках – вирази синуса, абсолютне значення якого не може бути більше одиниці. В силу цього по мірі зростання довжини дуги s як кривина k, так і скрут σ наближатимуться до нуля, тобто сама крива асимптотично наближатиметься до прямої лінії.

Література

1. Панчук К.Л. Элементы кинематической геометрии кривой линии / К.Л. Панчук // Омский научный вестник. Омск: ОГТУ, 2005. № 2 (31). С. 68–69.

2. Пилипака С.Ф. Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе просторової кривої укосу / С.Ф. Пилипака, І.Ю. Грищенко, В.М. Бабка, Т.А. Кресан, Т.П. Федорина // Вісник Херсонського національного технічного університету. Херсон, 2019. № 2 (69). Частина 3. С. 265–273.