Національний університет біоресурсів
і природокористування України

ЗБІРНИК

ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ
XIV МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
«ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»

з нагоди 93-ї річниці від дня народження
доктора технічних наук, професора, академіка АН ВШ України,
Обухової Віолетти Сергіївни
(1926-2005)

29 березня 2019 року

м. Київ

УДК 519.6

ГЕОМЕТРИЧНІ АСПЕКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

А.П. Мотайло
Херсонська державна морська академія

Як відомо, широке коло аналітичних методів диференціально-геометричного походження застосовують при розв'язанні задач математичної фізики [1]. Залишаючись підпорядкованою аналізу, геометрія спрощує математичний формалізм та поглиблює фізичне розуміння понять, ідей, методів розв'язання крайових задач.

Численні проблеми геометрії, варіаційного числення та механіки тісно пов'язані з крайовими задачами для нелінійних еліптичних рівнянь. Взаємозв'язок між геометрією та аналітичними методами розв'язання еліптичних крайових задач вивчається автором [2].

При розв'язанні чисельними методами прикладних задач математичної фізики, зокрема методом скінченних елементів, геометричні аспекти застосовують, як правило, при дискретизації розрахункової області, побудові системи базисних функцій на скінченному елементі (СЕ) та візуалізації результатів обчислень [3].

У роботі [4] запропоновано методи оцінки ефективності обчислювальних характеристик базисних функцій на СЕ різної топології та дано геометричну інтерпретацію критеріїв визначення найкращих систем вузлових координатних функцій, які отримані аналітично. Даний спосіб класифікації систем базисних функцій отримав подальший розвиток у роботі [5] при визначенні інтерполяційних властивостей систем вузлових координатних функцій на СЕ у формі октаедра. При цьому геометричні аспекти застосовано лише при представленні базисних функцій поверхнями нульового рівня для асоціації їх з відповідною системою рівнянь. Отже, актуальною є задача визначення геометричного змісту інтерполяційних якостей різних систем базисних функцій на СЕ у формі октаедра.

Мета роботи – дати геометричну інтерпретацію критеріїв визначення найкращого скінченно-елементного базиса на октаедрі за локальними характеристиками: величини визначника та числа обумовленості матриці Грама.

Наявність різних систем базисних функцій на октаедрі є результатом неоднозначності розв'язання задачі інтерполювання функцій у 3D на цьому носієві. Як наслідок, це потребує вирішення питання про ефективність використання певного базису октаедра.

Визначимо СЕ у формі октаедра як трійку сімейств [4]:

$$\left\{ f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n} f_i N_i(x,y,z), m\le n \right\},$$

де $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$ – степені свободи, $N_i(x, y, z)$ – вузлові координатні функції, (x_j, y_j, z_j) – вузли інтерполяції, m – кількість вузлів інтерполяції, n – кількість степенів свободи, R^n – евклідів простір із нормою $\| f\| = \sqrt{(f, f)}$.

У випадку лагранжевої інтерполяції, яку застосовано у роботі [5] для побудови систем базисних функцій октаедра, $n = m = \{6,7\}$.

Розглянемо дві довільні функції $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} f_i N_i(x, y, z)$ та $g(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} g_i N_i(x, y, z)$, які визначаються вузловими значеннями. Запишемо їх у вигляді векторів у просторі базисних функцій:

$$\vec{f} = f(x, y, z) = (N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \ldots, N_n(x, y, z))(f_1, f_2, \ldots, f_n)^T;$$
$$\vec{g} = g(x, y, z) = (N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \ldots, N_n(x, y, z))(g_1, g_2, \ldots, g_n)^T.$$

Знайдемо їх скалярний добуток:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = f^T \cdot g =$$
$$= (f_1, f_2, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} N_1(x, y, z) \\ N_2(x, y, z) \\ \vdots \\ N_n(x, y, z) \end{pmatrix}(N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \ldots, N_n(x, y, z))\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} =$$
$$= (f_1, f_2, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} (N_1, N_1) & (N_1, N_2) & \ldots & (N_1, N_n) \\ (N_2, N_1) & (N_2, N_2) & \ldots & (N_2, N_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (N_n, N_1) & (N_n, N_2) & \ldots & (N_n, N_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) G \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця $G = G(N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \ldots, N_n(x, y, z))$ є матрицею Грама для вузлових координатних функцій $N_i(x, y, z)$. Її властивості визначають якість відповідного базиса.

Відмітимо, що система функцій $\{N_i(x, y, z)\}_{i=\overline{1,n}}$ утворює базис простору функціоналів $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} f_i N_i(x, y, z)$ над геометричним (евклідовим) простором, якщо функції $N_i(x, y, z)$ є лінійно незалежними. Як відомо [6], співвідношення $\det G \neq 0$ є необхідною та достатньою умовою лінійної незалежності функцій $N_i(x, y, z)$.

Геометрично визначник Грама системи базисних функцій $\{N_i(x,y,z)\}_{i=\overline{1,n}}$ дорівнює квадрату об'єму гіперпаралелепіпеда $\Pi(N_1,N_2,...,N_n)=\left\{u:u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i N_i, 0\le\alpha_i\le 1\right\}$, побудованого на векторах даної системи, причому об'єм гіперпаралелепіпеда не перевищує добутку довжин його ребер. Отже, система базисних функцій $\{N_i(x,y,z)\}_{i=\overline{1,n}}$ є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли об'єм гіперпаралелепіпеда відмінний від нуля.

Різні базиси можна порівнювати за допомогою числа обумовленості матриці Грама у нормі матриці, яка є індуцированою векторною нормою в R^n:

$$cond(G)=\|G\|\cdot\|G^{-1}\|.$$

Якщо λ_i, $(i=\overline{1,n})$ – власні числа матриці G, упорядковані за абсолютною величиною, тобто $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...\ge|\lambda_n|$, то числом обумовленості у спектральній нормі (L^2-нормі) матриці G, яка є індуцированою евклідовою нормою вектора, є величина:

$$cond(G)=\|G\|_2\cdot\|G^{-1}\|_2=\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|.$$

Дане відношення характеризує видовження гіпереліпсоїду $G_f=\{Gf:\|f\|_2=1,\ f\in R^n\}$, де $\|f\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}f_i^2}$, який є образом одиничної сфери у просторі векторів на imG (образ матриці G), або нерівноцінність різних систем базисних функцій $\{N_i(x,y,z)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Згідно властивостям числа обумовленості матриці маємо: $cond(G)\ge 1$. Отже, найкращими серед систем вузлових координатних функцій є ті, для яких $cond(G)=1$, тобто $|\lambda_1|=|\lambda_2|=...=|\lambda_n|=1$. В цьому випадку гіпереліпсоїд є гіперсферою радіуса 1 у просторі R^n.

Враховуючи, що $\det(G)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$, можна стверджувати, що найкращими інтерполяційними якостями буде наділена система функцій $\{N_i(x,y,z)\}_{i=\overline{1,n}}$, для якої визначник матриці Грама дорівнює квадрату об'єму гіперкуба із ребром одиничної довжини. При цьому система базисних функцій $\{N_i(x,y,z)\}_{i=\overline{1,n}}$ має бути ортонормованою в області Ω, тобто задовольняти умові: $(N_i,N_j)=\delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $(x,y,z)\in\Omega$.

За даними роботи [5] встановлено, що за двома характеристиками у вигляді визначника та числа обумовленості матриці Грама серед поліноміальних та тригонометричних базисів СЕ у формі октаедра найкращими інтерполяційними властивостями наділений тригонометричний базис шестивузлової моделі багатогранника. На рис.1 зображено поверхню нульового рівня базисної функції, що асоційована із вузлом 1 у вершині октаедра $\Omega = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \le 1\}$ з координатами (1,0,0):

$$N_1 = \frac{1}{6}\left(1 + 2\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| + 3\sin\frac{\pi x}{2} - \left|\sin\frac{\pi y}{2}\right| - \left|\sin\frac{\pi z}{2}\right|\right), \text{ де } (x, y, z) \in \Omega .$$

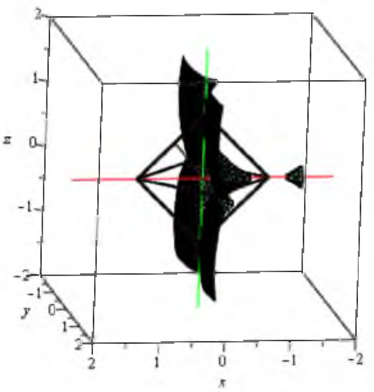

Рис.1. Поверхня $N_1(x, y, z) = 0$ тригонометричного базису октаедра

Для даної лінійно-незалежної системи базисних функцій, яка не є ортонормованою, отримаємо такі результати:

1) об'єм гіперпаралелпіпеда $V(N_1, N_2, ..., N_6) = \sqrt{\det G} \approx 1.28 \cdot 10^{-3}$;

2) ексцентриситет гіпереліпсоїда $G_f = \{Gf : \|f\|_2 = 1, f \in R^6\}$:

$$\varepsilon(G) = cond(G) = \|G\|_2 \cdot \|G^{-1}\|_2 = 3.86 .$$

Висновки. У даній роботі дано геометричну інтерпретацію критеріїв визначення найкращого скінченно-елементного базиса на СЕ у формі октаедра за локальними характеристиками у вигляді визначника та числа обумовленості матриці Грама. Результати порівняльного аналізу систем базисних функцій октаедра, який проведено у роботі [5], представлено у термінах гіперповерхонь.

Література

1. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир. 1984. 303 с.

2. Бакельман И. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука. 1965. 340 с.

3. Румянцев А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности. Калининград: Российский госуниверситет им. И. Канта, 2010. 95 с.

4. Пинежанинов Ф., Пинежанинов. П. Свойства базисных функций [Електронний ресурс]. URL: http://www.exponenta.ru/soft/mathemat/pinega/a2/a2.asp.

5. Мотайло А. П., Хомченко А. Н. Порівняльний аналіз базисів октаедра. *Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції "Новітні наукові досягнення – 2013". Серія: Математика* (Болгарія, Софія, 17-25 березня 2013 р.). Софія. "Бял ГРАД-БГ" ООД, 2013. Т. 21. Математика. Фізика. Сучасні інформаційні технології С. 28–33.

6. Якубович В., Старжинский В. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. - 718 с.