

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕНЕРГЕТИКИ, АВТОМАТИКИ І
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ
КАФЕДРА ЕЛЕКТРОПОСТАЧАННЯ ІМ.ПРОФ. В.М. СИНЬКОВА

**Методичні вказівки до виконання розрахунково-практичної роботи
з дисципліни «Математичні задачі в енергетиці»**

для підготовки фахівців РВО "Перший (бакалаврський)" Галузь знань 14 –
Електрична інженерія Спеціальність 141 – Електроенергетика, електротехніка
та електромеханіка Спеціалізація Електротехніка та електротехнології

Київ-2022

УДК 621.311

Наведено завдання та методичні вказівки до виконання розрахунково-практичної роботи з дисципліни «Математичні задачі в енергетиці» для підготовки фахівців РВО "Перший (бакалаврський)" Галузь знань 14 – Електрична інженерія Спеціальність 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка Спеціалізація Електротехніка та електротехнології

Рекомендовано вченою радою ННІ енергетики і автоматики НУБіП України
№7 від 12.08.2022.

Укладач: О.В. Гай, А.П. Нікіфоров

Рецензенти:

Березюк А.О., к.т.н., доцент, доцент кафедри електротехніки, електромеханіки та електротехнологій НУБіП України

Петренко А.В., к.т.н., доцент, доцент кафедри електропостачання ім. В.М. Синькова НУБіП України

Навчальне видання Методичні вказівки до виконання до виконання розрахунково-практичної роботи з дисципліни «Математичні задачі в енергетиці» для підготовки фахівців РВО "Перший (бакалаврський)" Галузь знань 14 – Електрична інженерія Спеціальність 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка Спеціалізація Електротехніка та електротехнології

Укладач: Гай Олександр Валентинович

Нікіфоров Андрій Петрович

ПЕРЕДМОВА

Управління процесами, що відбуваються в електроенергетичній системі, потребує постійного визначення технічних умов роботи системи, аналізу її поточних і перспективних режимів. Одним із напрямків розв'язання цієї задачі в сучасних умовах є *моделювання* режимів, в тому числі *усталених*. При цьому обчислюються і аналізуються значення основних параметрів режиму - напруги у вузлах електричної мережі, струморозподіл та потокорозподіл в елементах мережі, втрати активної потужності в окремих елементах мережі і сумарні втрати в мережі в цілому тощо. Параметри режиму визначаються на основі схеми заміщення і розрахункової схеми електричної мережі та її параметрів, електричних навантажень споживачів і джерел електроенергії. При моделюванні режимів електричної мережі параметри схеми та частина параметрів режиму відома і незмінна, інша частина параметрів режиму потребує свого визначення в ході розрахунків.

З математичної точки зору задача полягає у формуванні та розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами та невідомими. Це *рівняння усталеного режиму* електричної мережі. Вони визначають аналітичну залежність між заданими, відомими та невідомими параметрами схеми і режиму.

Математична модель електричної мережі складається з двох взаємозв'язаних складових:

- *модель схеми мережі*, яка представляється у формі схем заміщення і розрахункових схем. Описує послідовність з'єднань елементів мережі, їх параметри і властивості.
- *модель режиму роботи* електричної мережі. Представляється як система лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь, які зв'язують задані, відомі і невідомі параметри схеми і режиму. Вони описують найсуттєвіші взаємозв'язки між цими параметрами, відображають дію засадничих законів електротехніки в електричних мережах.

У сучасному розумінні математична модель електричної мережі представляється як *комплекс комп'ютерних програм*, які реалізують методи і алгоритми формування складових математичної моделі і розв'язання відповідних систем рівнянь усталеного режиму.

Основним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму є значення рівнів напруг у вузлах електричної мережі. Для більш повної характеристики режиму виконуються додаткові *заключні обчислення параметрів* режиму. Вони передбачають: розрахунок струмів у вузлах і ділянках електричної мережі (струморозподіл), розрахунок потоків потужності у вузлах і ділянках мережі (потокорозподіл), визначення втрат активної потужності в окремих елементах електричної мережі і сумарних втрат в мережі в цілому, оцінку балансу потужностей в мережі тощо.

Методичний *посібник містить* стислий узагальнений теоретичний матеріал і *докладні* розрахункові приклади формування складових математичної моделі простої електричної мережі. На *наскрізному* прикладі електричної мережі розглянуто складання схеми заміщення мережі, визначення параметрів її елементів і формування розрахункової схеми. Показано формування систем рівнянь усталеного режиму (з комплексними і дійсними складовими). Для їх розв'язання застосовані *прямі* математичні методи (метод Гауса, метод подвійної факторизації) і *ітераційні* методи (методи Зейделя і Ньютона-Рафсона). Основним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму є рівні напруг у вузлах мережі. Заключні обчислення параметрів режиму підтверджують коректність і правильність проведених розрахунків і дозволяють повно оцінити режим роботи електричної мережі.

Розділ 1. Схема заміщення і розрахункова схема електричної мережі.

Обчислення параметрів елементів схеми заміщення

Розглядаються питання розробки складових математичної моделі електричної мережі у вигляді схем заміщення і розрахункових схем.

Керування режимами роботи електроенергетичних систем потребує обробки й аналізу великих обсягів різномірної інформації про конфігурацію електричної мережі, параметри її елементів, параметри режимів роботи електричної мережі тощо. Один із важливих засобів вирішення цієї проблеми - використання математичних моделей об'єктів і процесів в них для отримання, обробки й аналізу інформації, прийняття відповідних рішень щодо керування електроенергетичними системами.

Математична модель являє собою систему алгебраїчних або диференціальних рівнянь, яка описує основні взаємозв'язки між параметрами модельованого об'єкта. У сучасному розумінні вона включає системи рівнянь, що описують об'єкт, методи розв'язання цих рівнянь, алгоритми та комп'ютерні програми, які реалізують відповідні методи. Математична модель електричної мережі для аналізу усталеного режиму її роботи складається із двох взаємозв'язаних елементів.

А). Модель конфігурації мережі. Описує зв'язки між елементами мережі, їх параметри і властивості. Подається здебільшого у вигляді схем заміщення та розрахункових схем. Однією із форм подання моделі конфігурації є також матриця провідностей.

Б). Модель режиму роботи електричної мережі. Подається у вигляді системи рівнянь усталеного режиму. Це алгебраїчні рівняння з комплексними складовими, що зв'язують задані, відомі та невідомі параметри режиму і схеми заміщення.

1.1. Формування схеми заміщення електричної мережі.

Обчислення параметрів її елементів

Схема заміщення електричної мережі формується із схем заміщення елементів мережі (лінії електропередач (ЛЕП), трансформатори, вузли навантажень і генерації тощо) відповідно до послідовності їх з'єднання [3, 7].

Для розрахунків усталеного режиму ділянки ліній електропередач подають Π - подібною схемою заміщення (рис. 1.1, а).

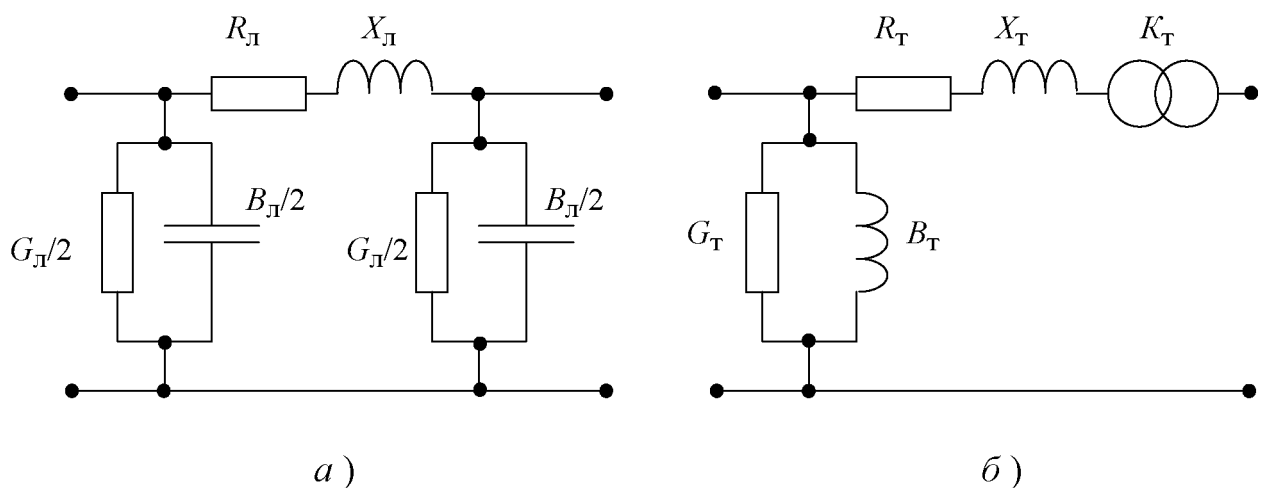


Рис. 1.1. - Схеми заміщення елементів електричної мережі

Схема заміщення ЛЕП складається із повздовжніх параметрів - активний і реактивний опори (R_L , X_L) та поперечних параметрів – активна і реактивна провідність (G_L , B_L). Ці параметри обчислюються на основі довідкових даних (див. Додатки) за формулами:

$$- \text{активний опір ділянки ЛЕП (Ом):} \quad R_L = z_0 l; \quad (1.1)$$

$$- \text{реактивний опір ділянки ЛЕП (Ом):} \quad X_L = x_0 l; \quad (1.2)$$

$$- \text{активна поперечна провідність (См):} \quad G_L = g_0 l; \quad (1.3)$$

$$- \text{реактивна поперечна провідність (См):} \quad B_L = b_0 l. \quad (1.4)$$

У формулах (1.1) - (1.4): l — довжина ділянки ЛЕП, км; r_0, x_0, g_0, b_0 — погонні опори і провідності 1 км проводу. Їх вибирають із довідкової таблиці для проводів відповідних марок. Вибираючи x_0, b_0 , треба враховувати клас напруги ЛЕП, у якій використовується провід. Для мережі ЛЕП напругою 110 кВ і нижче можна знехтувати провідністю $G_{\text{л}}$, а для мережі 35 кВ і менше — і провідністю $B_{\text{л}}$.

При моделюванні визначаються і аналізуються такі параметри режиму ЛЕП:

- напруги у вузлах початку і кінця лінії \dot{U}_i, \dot{U}_j . Якщо ЛЕП під навантаженням, то напруги на початку і в кінці лінії відрізняються $\dot{U}_i \neq \dot{U}_j$;
- струм в лінії $\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}$. Тут Y_{ij} — повздовжня провідність лінії. Це величина, зворотна її опору $Y_{ij} = 1/Z_{ij} = 1/(R_{ij} + jX_{ij})$;
- струми у поперечних провідностях $I_i = U_i * Y_i$; $I_j = U_j * Y_j$;
- потоки потужності в лінії. На початку і в кінці лінії вони відрізняються на величину втрат потужності в лінії. Потік потужності на початку лінії $S_{ij(i)} = \dot{U}_i \cdot \dot{I}_{ij}^*$, в кінці лінії $\dot{S}_{ij(j)} = \dot{U}_j \cdot \dot{I}_{ij}^*$;
- втрати потужності в лінії $\Delta \dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ij(i)} - \dot{S}_{ij(j)}$.

Для двохобмоткових трансформаторів і автотрансформаторів використовують Γ -подібну схему заміщення (рис. 1.1, б). Її параметри розраховують на основі довідкових даних (див. Додатки) за формулами:

$$\text{— активний опір (Ом):} \quad R_{\text{T}} = \Delta P_{\text{к.з}} U_{\text{ном}}^2 / S_{\text{T}}^2; \quad (1.5)$$

$$\text{— реактивний опір (Ом):} \quad X_{\text{T}} = U_{\text{p}} U_{\text{ном}}^2 / 100 S_{\text{m}}; \quad (1.6)$$

$$\text{— активна поперечна провідність (См):} \quad G_{\text{T}} = \Delta P_{\text{x.x}} / U_{\text{ном}}^2; \quad (1.7)$$

$$\text{— реактивна поперечна провідність (См):} \quad B_{\text{T}} = I_{\text{x.x}} S_{\text{T}} / 100 U_{\text{ном}}^2; \quad (1.8)$$

$$\text{— коефіцієнт трансформації:} \quad K_{\text{Tном}} = U_{\text{ном}} / U_{\text{ном}}^{\text{н}}. \quad (1.9)$$

Якщо трансформатор має додаткові регульовальні відгалуження і пристрій регулювання напруги, то коефіцієнт трансформації визначається за формулою:

$$K_T = K_{Тном} \cdot (1 \pm n \cdot \Delta / 100). \quad (1.10)$$

У формулах (1.5)-(1.10): $U_{ном}$, $U_{ном}^{н}$ - номінальна напруга основного вводу обмоток високої (ВН) і низької (НН) напруг трансформатора, кВ; U_p - реактивна складова спаду напруги в трансформаторі, %. При розрахунках параметрів мережі 35 кВ і вище, припускають, що $U_p \approx U_k$; S_T - номінальна потужність трансформатора, МВА; $\Delta P_{к.з.}$, $\Delta P_{х.х}$ - втрати потужності короткого замикання і холостого ходу, МВт; $I_{х.х}$ - струм холостого ходу, %; n - номер регульовального відгалуження, Δ - крок регулювання, %.

Можна використовувати також розрахункові дані R_T , X_T , що наводяться у довідкових таблицях.

При моделюванні визначаються і аналізуються такі параметри режиму трансформаторів:

- напруги на вході і виході трансформатора (обмотки ВН і НН) \dot{U}_B, \dot{U}_H ,

$$\dot{U}_B = K_T \cdot \dot{U}_H;$$

- струми в обмотках трансформатора.

В обмотці ВН $\dot{I}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_H \cdot K_T) \cdot Y_T$, в обмотці НН $\dot{I}_H = \dot{I}_B \cdot K_T$. Тут

$Y_T = 1/Z_T = 1/(R_T + j X_T)$ - повздовжня провідність трансформатора;

- втрати потужності в обмотках трансформатора $\Delta S_T = \dot{I}_B^2 \cdot Z_T$.

Спосіб завдання вузлових *навантажень* в схемах заміщення залежить від виду мережі і мети розрахунків. Навантаження задають постійним по модулю і фазі струмом, постійною потужністю, статичними характеристиками навантажень, постійною провідністю тощо.

Джерела електроенергії (генератори електростанцій (ЕС), батареї статичних конденсаторів (БСК), синхронні компенсатори (СК)) в схемах заміщення задають постійною активною і реактивною потужністю, постійними

активною потужністю і модулем напруги, постійними модулем і кутом напруги.

Повна схема заміщення електричної мережі складається із схем заміщення її елементів, які розташовуються в порядку їх з'єднання у вихідній схемі. Враховуючи класи напруг елементів мережі, схему заміщення можна *спростити* за рахунок нехтування деякими її елементами.

Схема заміщення є основою для формування *розрахункової схеми* електричної мережі, яка містить всю необхідну інформацію для подальшого моделювання режимів. Розрахункова схема описує послідовність з'єднання елементів мережі, їх параметри (опори, провідності, коефіцієнти трансформації тощо), навантаження і генерації у вузлах мережі, напруги в опорних вузлах тощо.

1.2. Приклад формування схеми заміщення електричної мережі

Схема з'єднань електричної мережі має наступний вигляд:

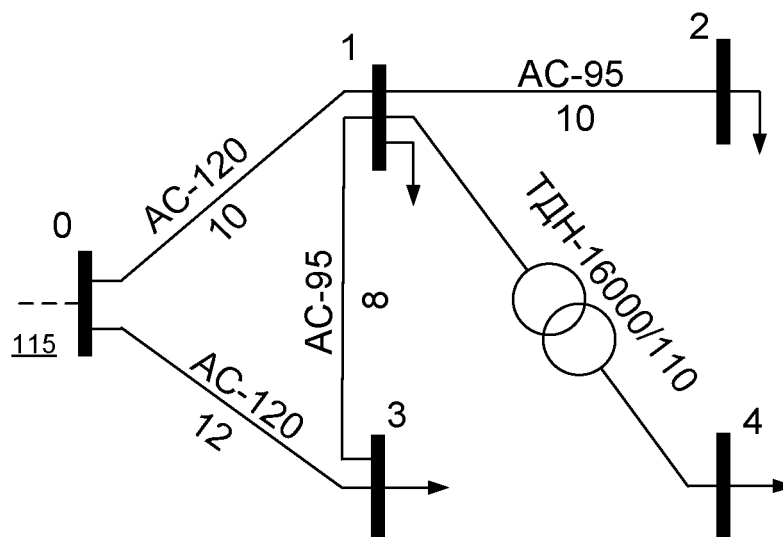


Рис. 1.2. - Приклад схеми електричних з'єднань

Задані потужності навантаження у вузлах мережі:

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = 3 + j2 \text{ МВА};$$

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 5 + j2 \text{ МВА};$$

$$S_3 = P_3 + jQ_3 = 4 + j3 \text{ МВА};$$

$$S_4 = P_4 + jQ_4 = 1 + j0,3 \text{ МВА}.$$

Опорний вузол 0; $U_0 = 115 + j0 \text{ кВ}$.

Опис схеми: Електрична мережа живиться від шин підстанції (опорний вузол 0), включає елементи двох класів напруг:

- 110 кВ – вузли 0,1,2 і 3; ділянки 0-1, 1-2, 0-3, 1-3;
- 35 кВ – вузол 4.

Схема складається із чотирьох ЛЕП–110 кВ і одного понижувального трансформатора. Схема замкнена, має один контур, який утворений лініями 0-1, 1-3, 0-3, і дві радіальні лінії. ЛЕП виконані сталевалюмінієвими дротами марок АС-120 і АС-95. Тип трансформатора – ТДН-16000/110, його потужність 16000 кВА, напруга обмотки ВН - 110 кВ, обмотки НН - 35 кВ.

У вузлах мережі підключені споживачі електроенергії, задані постійними потужностями S_1, S_2, S_3, S_4 .

Повна *схема заміщення* електричної мережі Рис. 1.2. для розрахунків усталених режимів роботи складається із схем заміщення її елементів (рис. 1.3). В схемах заміщення електричних мереж напругою, нижчою за 330 кВ, можна не враховувати параметр g_{ij} – активну складову поперечної провідності ЛЕП. Тоді спрощена схема заміщення заданої мережі 110-35 кВ набуває вигляду, як показано на рис. 1.4.

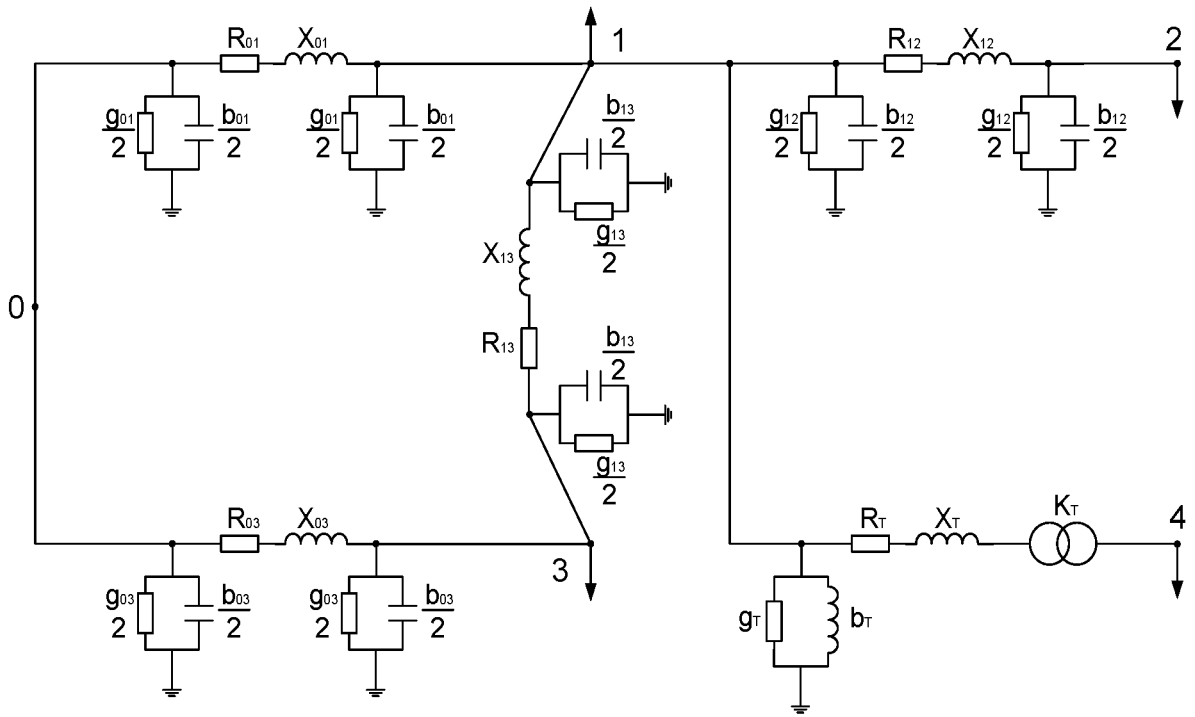


Рис. 1.3. - Повна схема заміщення електричної мережі

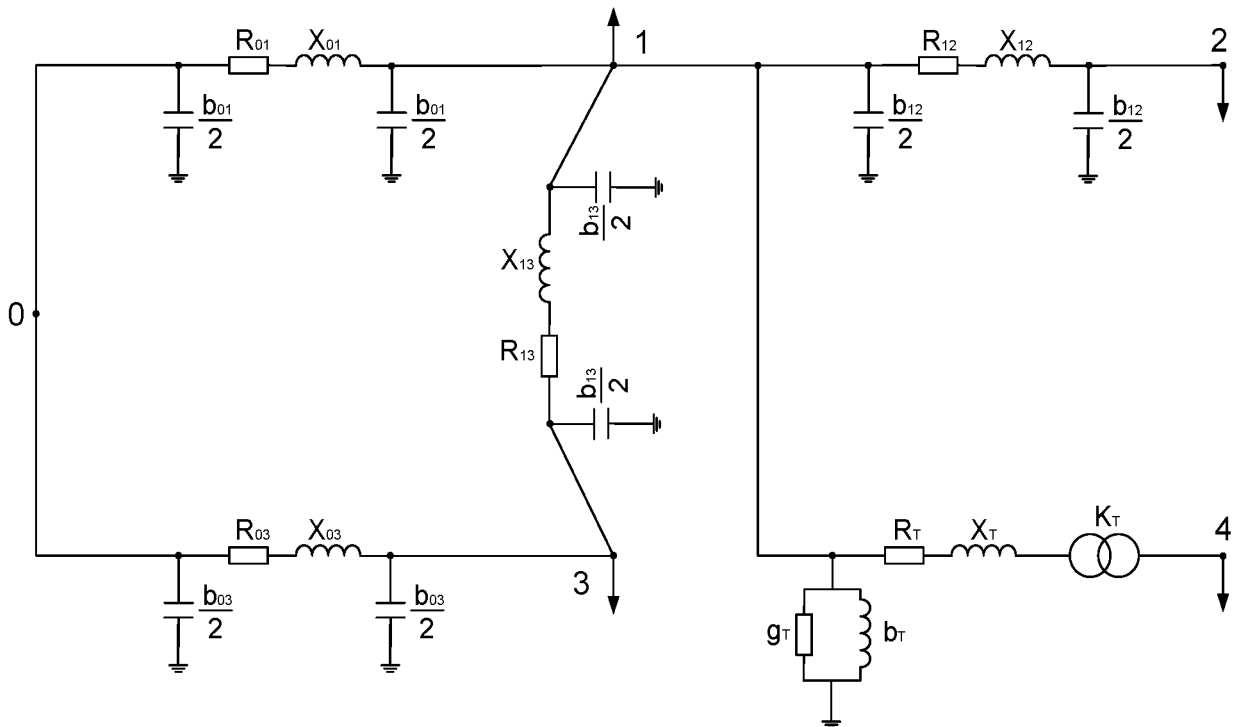


Рис. 1.4. - Спрощена схема заміщення

Схема заміщення заданої електричної мережі характеризується такими параметрами:

– повздовжні параметри: опори ділянок ЛЕП і трансформатора, коефіцієнт трансформації :

$$Z_{01} = R_{01} + jX_{01};$$

$$Z_{12} = R_{12} + jX_{12};$$

$$Z_{03} = R_{03} + jX_{03};$$

$$Z_{13} = R_{13} + jX_{13};$$

$$Z_T = R_T + jX_T; \quad K_{\text{ТНОМ}} = U_1/U_4;$$

– поперечні параметри: поперечні провідності ділянок ЛЕП і трансформатора:

$$Y_{01}^{\text{II}} = jb_{01}; \quad Y_{12}^{\text{II}} = jb_{12}; \quad Y_{03}^{\text{II}} = jb_{03}; \quad Y_{13}^{\text{II}} = jb_{13}; \quad Y_T^{\text{II}} = g_T + jb_T.$$

В довідковій таблиці 1 (див. Додатки) наведені такі параметри дротів (на 100 Км, для 110 кВ) [2]:

$$\text{АС-120} \text{ — } r_0 = 24,9 \text{ Ом}; \quad X_0 = 42,3 \text{ Ом}; \quad b_0 = 2,69 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$\text{АС-95} \text{ — } r_0 = 31,4 \text{ Ом}; \quad X_0 = 42,9 \text{ Ом}; \quad b_0 = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

Параметри трансформатора типу ТДН-16000/110:

$$S_{\text{НОМ}} = 16 \text{ МВА};$$

$$U_{\text{НОМ ВН}} = 115 \text{ кВ}; \quad U_{\text{НОМ НН}} = 38,5 \text{ кВ};$$

$$U_{\text{к\%}} = 10,5 \text{ \%};$$

$$\Delta P_{\text{к.з.}} = 85 \text{ кВт};$$

$$\Delta P_{\text{х.х.}} = 21 \text{ кВт};$$

$$I_{\text{х.х.\%}} = 0,85 \text{ \%};$$

$$R_T = 4,38 \text{ Ом}; \quad X_T = 86,7 \text{ Ом};$$

Параметри регулювання коефіцієнта трансформації: $n = \pm 9$, $\Delta = 1,78\%$.

Обчислюємо параметри схеми заміщення ЛЕП за формулами 1.1. – 1.4.:

$$R_{ij} = r_0 \cdot \ell_{ij}/100; \quad X_{ij} = x_0 \cdot \ell_{ij}/100; \quad b_{ij} = b_0 \cdot \ell_{ij}/100;$$

$$R_{01} = 24,9 \cdot 10/100 = 2,49 \text{ Ом};$$

$$X_{01} = 42,3 \cdot 10/100 = 4,23 \text{ Ом};$$

$$b_{01} = 2,69 \cdot 10^{-4} \cdot 10/100 = 0,269 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$R_{03} = 24,9 \cdot 12/100 = 2,988 \text{ Ом};$$

$$X_{03} = 42,3 \cdot 12/100 = 5,076 \text{ Ом};$$

$$b_{03} = 2,69 \cdot 10^{-4} \cdot 12/100 = 0,323 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$R_{13} = 31,4 \cdot 8/100 = 2,512 \text{ Ом};$$

$$X_{13} = 42,9 \cdot 8/100 = 3,432 \text{ Ом};$$

$$b_{13} = 2,65 \cdot 10^{-4} \cdot 8/100 = 0,212 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$R_{12} = 31,4 \cdot 10/100 = 3,14 \text{ Ом};$$

$$X_{12} = 42,9 \cdot 10/100 = 4,29 \text{ Ом};$$

$$b_{12} = 2,65 \cdot 10^{-4} \cdot 10/100 = 0,265 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

Параметри схеми заміщення трансформатора обчислюємо за формулами 1.5 - 1.9:

$$R_T = \Delta P_{к.з.} \cdot U_{ном}^2 / S_{ном}^2 = 0,085 \cdot 115^2 / 16^2 = 4,391 \text{ Ом};$$

$$X_T = (U_{к\%}/100) \cdot (U_{ном}^2 / S_{ном}) = (10,5/100) \cdot (115^2 / 16) = 86,789 \text{ Ом};$$

Отримані значення трохи відмінні від відповідних табличних.

$$g_T = \Delta P_{х.х.} / U_{ном}^2 = 0,021 / 115^2 = 0,0159 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$b_T = (I_{х.х.\%}/100) \cdot (S_{ном} / U_{ном}^2) = (0,85/100) \cdot (16/115^2) = 0,1028 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

Номинальний коефіцієнт трансформації трансформатора:

$$K_{\text{ТНОМ}} = U_{\text{ВН}}/U_{\text{НН}} = 115/38,5 = 2,987.$$

При переключенні на регульовальне відгалуження $n1=1$ коефіцієнт трансформації змінюється і набуває значення:

$$K_{\text{T}} = K_{\text{ТНОМ}} \cdot (1 + n1 \cdot \Delta/100) = 2,987 \cdot (1 + 1 \cdot 1,78/100) = 3,0402.$$

Результати обчислень параметрів елементів мережі заносимо в таблицю:

Ділянка мережі	Марка проводу, тип трансформатора	Довжина ділянки (км)	Розрахункові параметри елементів схеми заміщення	
			Опори $Z = R + jX(\text{Ом})$	Поперечна провідність $Y^{\text{II}} = g + jb(\text{См})$
0-1	АС-120	10	$2,49 + j4,23$	$j0,269 \cdot 10^{-4}$
0-3	АС-120	12	$2,988 + j5,076$	$j0,323 \cdot 10^{-4}$
1-2	АС-95	10	$3,14 + j4,29$	$j0,265 \cdot 10^{-4}$
1-3	АС-95	8	$2,512 + j3,432$	$j0,212 \cdot 10^{-4}$
1-4	ТДН-16000/110	—	$4,391 + j86,789$	$(0,0159 + j0,1028) \cdot 10^{-4}$

На основі схеми заміщення і результатів обчислень параметрів її елементів формується *розрахункова схема* електричної мережі, яка показана на рис 1.5. Вона містить всю інформацію, необхідну для подальшого моделювання режимів.

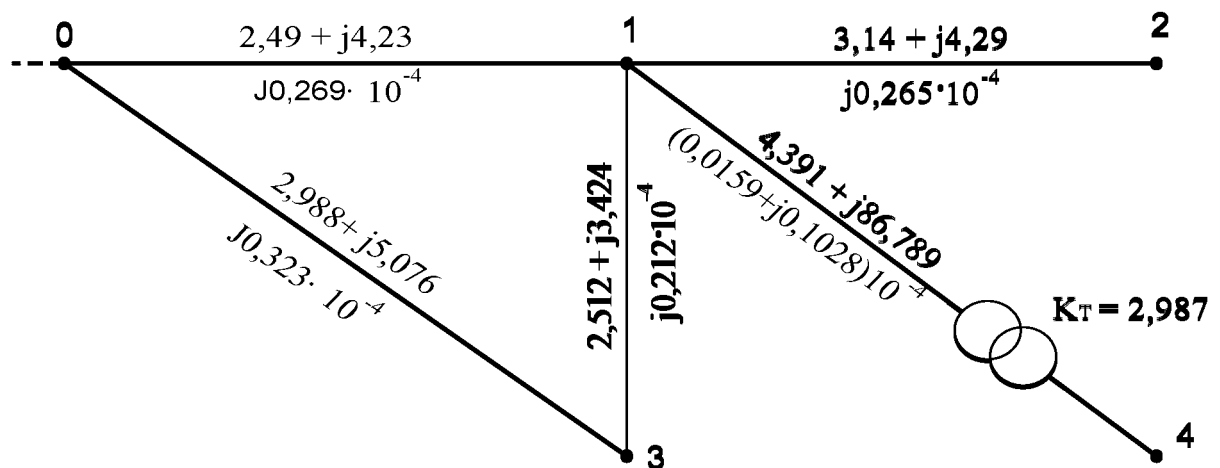


Рис. 1.5. – Розрахункова схема електричної мережі

1.3. Контрольні питання до розділу 1:

1. Математична модель електричної мережі. Складові моделі;
2. Схема заміщення ЛЕП;
3. Параметри схеми заміщення ЛЕП, обчислення їх значень;
4. Параметри режиму, що характеризують роботу ЛЕП;
5. Схема заміщення двохобмоткового трансформатора;
6. Пояснити значення літер і цифр в позначенні типу трансформатора;
7. Параметри схеми заміщення трансформатора, обчислення їх значень;
8. Параметри режиму, що характеризують роботу трансформатора;
9. Представлення навантажень і генерації в схемах заміщення електричних мереж;
10. Порядок формування схеми заміщення електричної мережі;
11. Складання розрахункової схеми електричної мережі;
12. Структура довідкових таблиць і їх використання.

Розділ 2. Обчислення власних і взаємних провідностей вузлів електричної мережі. Складання рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів і балансу потужностей

Розглядаються питання розробки елементів математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі.

2.1. Формування рівнянь усталеного режиму

Формування математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі передбачає складання алгебраїчних *рівнянь усталеного режиму*. Вони визначають аналітичну залежність між заданими, відомими і невідомими параметрами схеми та режиму. Рівняння описують баланс струму або потужності у вузлах мережі. Залежно від способу подання вузлових навантажень споживачів та джерел електроенергії (у вигляді струму чи потужності) рівняння усталеного режиму можуть бути лінійними або нелінійними [4,6]. Якщо навантаження (генерація) у вузлі мережі задані постійним струмом ($I_i = const$), режим вузла описується *лінійним рівнянням балансу струмів*:

$$\dot{U}_i \cdot y_{ii} - \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = \dot{I}_i \quad (2.1)$$

Якщо навантаження у вузлі мережі задане постійною потужністю ($S_i = const$), режим вузла описується *нелінійним рівнянням балансу струмів*:

$$\dot{U}_i \cdot y_{ii} - \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = \frac{S_i^*}{U_i^*} \quad (2.2)$$

або *балансу потужностей*:

$$\dot{U}_i^2 \cdot y_{ii} - U_i \cdot \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = S_i^* \quad (2.3)$$

Рівняння (2.1), (2.2), (2.3) записані для одного i -го вузла мережі. В них Y_{ii} , Y_{ij} - власні і взаємні провідності вузла; U_i , U_j – напруги i -го та суміжних вузлів; I_i , S_i - задані у вузлі струм або потужність; n – кількість вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з i -м вузлом. Всі складові в цих рівняннях – комплексні величини. Невідомими в цих рівняннях є вузлові напруги.

В практичних розрахунках комплексні рівняння (2.1), (2.2), (2.3) часто використовуються у перетвореному вигляді: комплексні величини у їх складі подаються у вигляді дійсних та уявних складових. В результаті перетворень комплексне рівняння розпадається на два дійсних рівняння. Наприклад, рівняння балансу потужностей (2.3) подається як два дійсних рівняння, які описують баланс активної та реактивної потужностей у вузлі. В *прямокутних* координатах:

$$\begin{cases} U_i^2 \cdot y'_{ii} - U_i \cdot \sum_j y'_{ij} \cdot U_j - y''_{ij} \cdot U_j^2 - U_i \cdot \sum_j y''_{ij} \cdot U_j + y'_{ij} \cdot U_j^2 = P_i \\ U_i^2 \cdot y''_{ii} - U_i \cdot \sum_j y''_{ij} \cdot U_j + y'_{ij} \cdot U_j^2 + U_i \cdot \sum_j y'_{ij} \cdot U_j - y''_{ij} \cdot U_j^2 = -Q_i \end{cases} \quad (2.4)$$

Тут U , U' , U'' – модуль, дійсні та уявні складові напруг; y' , y'' – дійсні та уявні складові власних та взаємних провідностей вузла; P_i , Q_i – задані активна та реактивна потужності у вузлі.

Рівняння (2.3), записане в *полярних* координатах:

$$\begin{cases} U_i^2 \cdot y'_{ii} - U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos(\theta_i - \theta_j) + y''_{ij} \cdot \sin(\theta_i - \theta_j)] = P_i \\ U_i^2 \cdot y''_{ii} + U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y''_{ij} \cdot \sin(\theta_i - \theta_j) - y'_{ij} \cdot \cos(\theta_i - \theta_j)] = -Q_i \end{cases} \quad (2.5)$$

Тут U , θ - модулі і кути напруг у вузлах.

В усіх рівняннях усталеного режиму коефіцієнтами при невідомих напругах є взаємні та власні провідності вузлів.

Взаємну провідність вузлів i та j визначають як поздовжню провідність ділянки схеми заміщення, що з'єднує ці вузли:

$$Y_{ij} = 1/Z_{ij} = 1/(R_{ij} + jX_{ij}), \quad (2.6)$$

де R_{ij}, X_{ij} – активний і реактивний опори ділянки. При відсутності безпосереднього електричного зв'язку між вузлами відповідна взаємна провідність дорівнює нулю ($Y_{ij} = 0$).

Якщо електрична мережа містить трансформатори, що з'єднують ділянки різних класів напруг, то при розрахунках провідностей треба враховувати параметри трансформаторної ділянки і її орієнтацію відносно вузла i . Будемо вважати, що вузол *початку* трансформаторної ділянки відповідає обмотці трансформатора з високою напругою, вузол *кінця* ділянки – його обмотці з низькою напругою. Коефіцієнт трансформації K_T розраховуємо за формулою (1.9).

Тоді взаємну провідність вузлів i та j обчислюють за формулою

$$Y_{ij}^{B3} = Y_{ij} K_T, \quad (2.7)$$

де Y_{ij} – поздовжня провідність ділянки (ЛЕП чи трансформатор). Визначається за формулою (2.6). При цьому величина Y_{ij}^{B3} не залежить від орієнтації трансформаторної ділянки відносно вузла i , тобто виконується принцип взаємності $Y_{ij}^{B3} = Y_{ji}^{B3}$.

Для ділянок ЛЕП коефіцієнт трансформації $K_T = 1$.

Власна провідність i -го вузла Y_{ii} дорівнює сумі провідностей усіх ділянок схеми заміщення (поздовжніх і поперечних), які з'єднані в ньому:

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij} - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{III}, \quad (2.8)$$

де Y_{ij} - взаємна провідність вузлів i та j (формула (2.6)); $Y_{ij}^{III} = G_{\perp} + jB_{\perp}$ - поперечна провідність ділянки ЛЕП. Її складові визначають за формулами (1.3) та (1.4).

Якщо у вузлі i з'єднані трансформаторні ділянки, власну провідність вузла розраховують за формулою

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij}^{B3} \cdot p - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{III} + \sum_l Y_{il}^{III} \quad (2.8)$$

де $p = 1$ – для ділянки ЛЕП; $p = 1 / K_T$, якщо вузол i є вузлом початку трансформаторної ділянки; $p = K_T$, якщо вузол i є вузлом кінця трансформаторної ділянки; $Y_{ii}^{пт} = G_T + jB_T$ – поперечна провідність трансформатора. Враховується, якщо вузол i є вузлом початку трансформаторної ділянки. Її складові визначають за формулами (1.7) і (1.8).

2.2. Приклад формування рівнянь усталеного режиму

Всі обчислення виконуються для заданої схеми електричної мережі (рис.1.2).

Взаємні провідності вузлів схеми визначаємо за формулою:

$$y_{ij} = (1/z_{ij}) \cdot K_T,$$

де $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$ – опір ділянки між вузлами i та j ;

K_T – коефіцієнт трансформації. Для ділянок ЛЕП дорівнює 1.

Для ділянок ЛЕП взаємна провідність між вузлами i та j відповідає повздовжній провідності цієї ділянки.

$$y_{01} = 1/Z_{01} = 1/(2,49 + j4,23) = 0,1034 - j0,1756 \text{ См};$$

$$y_{12} = 1/Z_{12} = 1/(3,14 + j4,29) = 0,1111 - j0,1518 \text{ См};$$

$$y_{03} = 1/Z_{03} = 1/(2,988 + j5,076) = 0,0861 - j0,1463 \text{ См};$$

$$y_{13} = 1/Z_{13} = 1/(2,512 + j3,424) = 0,1393 - j0,1899 \text{ См};$$

Для трансформаторної ділянки її провідність:

повздовжня $y_{14} = 1/Z_{14} = 1/(4,391 + j86,789) = 0,0006 - j0,0115 \text{ См};$

взаємна $y_{14} = y_{14} \cdot K_T = (0,0006 - j0,0115) \cdot 2,987 = 0,0017 - j0,0343 \text{ См}.$

Власна провідність вузла i дорівнює сумі провідностей всіх ділянок, які з'єднані в цьому вузлі (повздовжніх і поперечних):

$$y_{ii} = \sum_j y_{ij} \cdot p - 0,5 \cdot \sum_j y_{ij}^{пт} + \sum_f y_{if}^{пт}.$$

Тут Y_{ij} – взаємна провідність між вузлом i та суміжними вузлами j , що з'єднані з ним;

$p = 1$ для ділянок ЛЕП; $p = 1/K_T$, якщо вузол i є вузлом початку трансформаторної ділянки (обмотка ВН трансформатора); $p = K_T$, якщо вузол i є вузлом кінця трансформаторної ділянки (обмотка НН трансформатора);

$Y_{ij}^{ПЛ}$ – поперечна провідність ділянок ЛЕП між вузлом i та вузлами j , що з'єднані з ним;

$Y_{if}^{ПТ}$ – поперечна провідність трансформаторних ділянок між вузлом i та вузлами f . Враховується, якщо вузол i є вузлом початку трансформаторної ділянки.

Для вузлів заданої схеми:

$$Y_{00} = Y_{01} + Y_{03} - 0,5(Y_{01}^{\Pi} + Y_{03}^{\Pi}) = (0,1034 - j0,1756) + (0,0861 - j0,1463) - 0,5 \cdot (j0,269 \cdot 10^{-4} + j0,323 \cdot 10^{-4}) = 0,1895 - j0,3219 \text{ См};$$

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{10} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}/K_T - 0,5(Y_{10}^{\Pi} + Y_{12}^{\Pi} + Y_{13}^{\Pi}) + Y_{T14}^{\Pi} = \\ &= (0,1034 - j0,1756) + (0,1111 - j0,1518) + (0,1393 - j0,1899) + \\ &+ (0,0017 - j0,0343)/2,987 - 0,5(j0,269 \cdot 10^{-4} + j0,265 \cdot 10^{-4} + 0,212 \cdot 10^{-4}) + \\ &+ (0,0159 + j0,1028) \cdot 10^{-4} = 0,3544 - j0,5288 \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{22} &= Y_{21} - 0,5 Y_{21}^{\Pi} = (0,1111 - j0,1518) - j0,5 \cdot 0,265 \cdot 10^{-4} = \\ &= 0,1111 - j0,1518 \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{33} &= Y_{30} + Y_{31} - 0,5(Y_{30}^{\Pi} + Y_{31}^{\Pi}) = (0,0861 - j0,1463) + (0,1393 - j0,1899) - \\ &- 0,5(j0,323 \cdot 10^{-4} + j0,212 \cdot 10^{-4}) = 0,2254 - j0,3362 \text{ См}; \end{aligned}$$

$$Y_{44} = Y_{41} \cdot K_T = (0,0017 - j0,0343) \cdot 2,987 = 0,0051 - j0,1025 \text{ См}.$$

Складаємо нелінійні рівняння усталеного режиму з комплексними складовими у формі балансу струмів.

Вузол 1:

$$i = 1; \text{ суміжні вузли } j = 0, 2, 3, 4.$$

$$y_{11} \dot{U}_1 - (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) = \dot{S}_1^* / U_1^*.$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - [(0,1034 - j0,1756) \dot{U}_0 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 + + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4] = (3 - j2) / U_1^*.$$

Вузол 2:

$$i = 2; j = 1.$$

$$y_{22} \dot{U}_2 - y_{21} \dot{U}_1 = \dot{S}_2^* / U_2^*;$$

$$(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 = (5 - j2) / U_2^*.$$

Вузол 3:

$$i = 3; j = 0, 1.$$

$$y_{33} \dot{U}_3 - (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) = \dot{S}_3^* / U_3^*;$$

$$(0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 - [(0,0861 - j0,1463) \dot{U}_0 + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1] = (4 - j3) / U_3^*.$$

Вузол 4:

$$i = 4; j = 1.$$

$$y_{44} \dot{U}_4 - y_{41} \dot{U}_1 = \dot{S}_4^* / U_4^*;$$

$$(0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 = (1 - j0,3) / U_4^*.$$

Запишемо *рівняння усталеного режиму* із комплексними складовими у формі *балансу потужностей*. Їх можна отримати із рівнянь балансу струмів, помноживши ці рівняння на \dot{U}_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$y_{11} U_1^2 - \dot{U}_1^* (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) = \dot{S}_1^*;$$

$$y_{22} U_2^2 - y_{21} \dot{U}_1^* \dot{U}_2 = \dot{S}_2^*;$$

$$y_{33} U_3^2 - \dot{U}_3^* (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) = \dot{S}_3^*;$$

$$y_{44} U_4^2 - y_{41} \dot{U}_1^* \dot{U}_4 = \dot{S}_4^*.$$

Підставляємо в рівняння обчислені значення провідностей і задані потужності у вузлах.

Запишемо *рівняння балансу потужностей* із *дійсними* складовими у *прямокутних координатах* для вузла 1:

$$y'_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] - U''_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] = P_1;$$

$$y''_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] + U''_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] = -Q_1.$$

Аналогічно складаються рівняння для інших вузлів схеми.

Дійсні рівняння балансу потужностей у *полярних координатах* для вузла 1 мають вигляд:

$$\begin{aligned}
& y'_{11} U_1^2 - U_1 [U_0 (y'_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) + y''_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
& + U_2 (y'_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y''_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + \\
& + y''_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + y''_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = P_1; \\
& y''_{11} U_1^2 + U_1 [U_0 (y'_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) - y''_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
& + U_2 (y'_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y''_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - \\
& - y''_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - y''_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -Q_1.
\end{aligned}$$

Аналогічно складаються рівняння для інших вузів схеми.

2.3. Контрольні питання до розділу 2:

1. Як обчислюється взаємна провідність вузлів;
2. Як обчислюється власна провідність вузлів;
3. Як враховуються трансформатори при обчисленні взаємних та власних провідностей вузлів;
4. Як складається комплексне рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів;
5. Як складається комплексне рівняння усталеного режиму у формі балансу потужностей;
6. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму. Які з них невідомі, які відомі, які задані;
7. При яких параметрах, заданих у вузлах, утворюються лінійні чи нелінійні рівняння усталеного режиму. Як формується права частина рівнянь;
8. Як складаються рівняння усталеного режиму з дійсними складовими у прямокутних координатах;

9. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими у прямокутних координатах. Які з них невідомі, які відомі і які задані;
10. Як складаються рівняння усталеного режиму з дійсними складовими у полярних координатах;
11. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими у полярних координатах. Які з них невідомі, які відомі і які задані.

Розділ 3. Формування системи рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Матриця провідностей.

Розглядаються питання розробки математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі у вигляді систем рівнянь усталеного режиму.

3.1. Формування математичної моделі режиму роботи електричної мережі

Матриця провідностей електричної мережі — це форма упорядкованого запису коефіцієнтів при невідомих напругах системи рівнянь усталеного режиму. Її можна розглядати як модель схеми електричної мережі, що описує конфігурацію мережі та параметри її елементів. Матриця провідностей квадратна, симетрична, слабозаповнена.

Елементи матриці провідностей — *взаємні провідності* вузлів електричної мережі (Y_{ij}) і *власні провідності* її вузлів (y_{ii}). Власні провідності розміщуються на головній діагоналі матриці, взаємні провідності - поза головною діагоналлю із зворотнім знаком (рис. 3.1).

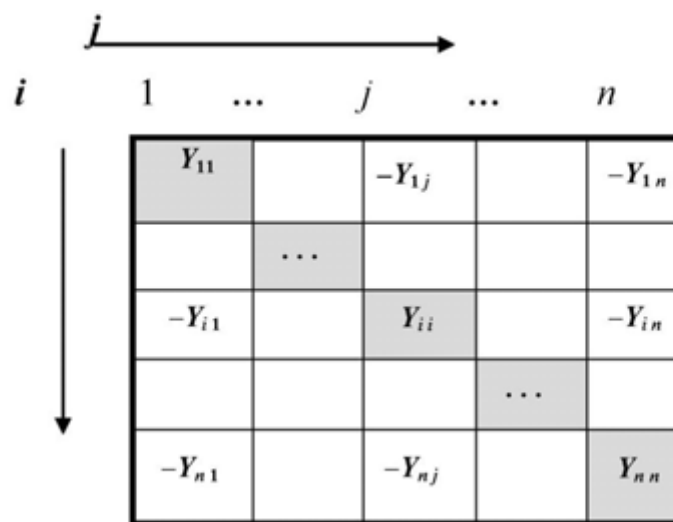


Рис. 3.1. Структура матриці провідностей

Математична модель усталеного режиму роботи електричної мережі представляється у вигляді системи алгебраїчних рівнянь усталеного режиму [7, 9]. Рівняння записуються для усіх вузлів мережі, крім опорних по напрузі. Якщо навантаження (генерація) у вузлах мережі задані постійним струмом ($I_i = \text{const}, i = 1, \dots, n$), усталений режим моделюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь у формі балансу струмів, яка має загальний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= y_{10}\dot{U}_0 + \dot{I}_1; \\ -y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n &= y_{20}\dot{U}_0 + \dot{I}_2; \\ \dots & \dots \dots \\ -y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n &= y_{n0}\dot{U}_0 + \dot{I}_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Це система рівнянь відносно невідомих напруг у вузлах \dot{U}_i . Має розмірність n , що відповідає кількості вузлів у схемі мережі (без опорних). Коефіцієнтами при невідомих є власні та взаємні провідності вузлів (Y_{ii} і Y_{ij}). У правій частині системи рівнянь: I_i — задані струми у вузлах; U_0 — задана напруга в опорному (балансуючому) вузлі; y_{i0} — взаємна провідність між вузлами схеми та опорним вузлом.

Кожне i -те рівняння системи (3.1) відповідає одному i -му вузлу схеми електричної мережі і визначає баланс струмів у ньому. У матричній формі систему (3.1) можна записати так:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & y_{22} & \dots & -y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{bmatrix} \dot{U}_0 + \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

або $YU = J$.

Матриця коефіцієнтів при невідомих напругах у системі (3.2) є матрицею провідностей електричної мережі.

У разі завдання вузлових навантажень споживачів і джерел електроенергії постійними активними і реактивними *потужностями* ($S_i = P_i + jQ_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$) усталений режим електричної мережі моделюється системою *нелінійних* алгебраїчних *рівнянь* (у формі балансу струмів або балансу потужностей). Нелінійні рівняння *балансу струмів* мають загальний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= y_{10}\dot{U}_0 + S_1^*/U_1^*; \\ -y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n &= y_{20}\dot{U}_0 + S_2^*/U_2^*; \\ \dots & \dots \dots \\ -y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n &= y_{n0}\dot{U}_0 + S_n^*/U_n^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Систему рівнянь у вигляді *балансу потужностей* можна отримати, якщо рівняння (3.3) домножити на U_i^* :

$$\left. \begin{aligned} U_1^* \cdot (-y_{10}\dot{U}_0 + y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n) &= S_1^*; \\ U_2^* \cdot (-y_{20}\dot{U}_0 - y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n) &= S_2^*; \\ \dots & \dots \dots \\ U_n^* \cdot (-y_{n0}\dot{U}_0 - y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n) &= S_n^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Системи рівнянь (3.1), (3.3), (3.4) є формами *математичної моделі режиму* роботи електричної мережі. Розв'язання цих систем рівнянь дозволяє визначити напруги у вузлах мережі у заданому режимі.

Система рівнянь балансу потужностей з *дійсними* складовими може бути отримана перетворенням системи (3.4) і включає $2n$ рівнянь балансу активних і реактивних потужностей у вузлах, де n – кількість вузлів схеми без опорних. Відповідні рівняння були сформовані в підрозділі 2.2.

3.2. Приклад формування систем рівнянь усталеного режиму

Повна матриця провідностей записується для всіх вузлів електричної мережі. Для схеми Рис. 1.2. її розмірність становить 5×5 . Елементами матриці є власні і взаємні провідності вузлів. Власні провідності розташовані на головній діагоналі матриці, обчислюються як сума провідностей всіх ділянок, що з'єднані у вузлі. Взаємні провідності із зворотнім знаком розташовані поза головною діагоналлю на перетині відповідних рядків і стовпців. Якщо вузли не зв'язані між собою, то їх взаємна провідність дорівнює нулю.

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{00} & -Y_{01} & & -Y_{03} & \\ -Y_{10} & Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} & -Y_{14} \\ & -Y_{21} & Y_{22} & & \\ -Y_{30} & -Y_{31} & & Y_{33} & \\ & -Y_{41} & & & Y_{44} \end{matrix} \\
 \end{matrix} =
 \begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0,1895 - & -0,1034+ & 0 & -0,0861+ & 0 \\ -j0,3219 & +j0,1756 & & +j0,1463 & \\ -0,1034+ & 0,3544 - & -0,1111+ & -0,1393+ & -0,0017+ \\ +j0,1756 & -j0,5288 & +j0,1518 & +j0,1899 & +j0,0343 \\ 0 & -0,1111+ & 0,1111 - & 0 & 0 \\ +j0,1518 & -j0,1518 & & & \\ -0,0861+ & -0,1393+ & 0 & 0,2254 - & 0 \\ +j0,1463 & +j0,1899 & & -j0,3362 & \\ 0 & -0,0017+ & 0 & 0 & 0,0051 - \\ +j0,0343 & +j0,0343 & & & -j0,1025 \end{matrix} \\
 \end{matrix}$$

Неповну матрицю провідностей отримуємо із повної, видаливши з неї рядки і стовпці, що відповідають опорним (балансуючим) вузлам. В заданій схемі опорний – вузол 0. Видаляємо відповідний рядок і стовпець матриці:

	1	2	3	4		
$Y =$	1	y_{11}	$-y_{12}$	$-y_{13}$	$-y_{14}$	$=$
	2	$-y_{21}$	y_{22}			
	3	$-y_{31}$		y_{33}		
	4	$-y_{41}$			y_{44}	

$0,3544 -$ $-j0,5288$	$-0,1111+$ $+j0,1518$	$-0,1393+$ $+j0,1899$	$-0,0017+$ $+j0,0343$
$-0,1111+$ $+j0,1518$	$0,1111 -$ $-j0,1518$	0	0
$-0,1393+$ $+j0,1899$	0	$0,2254 -$ $-j0,3362$	0
$-0,0017+$ $+j0,0343$	0	0	$0,0051 -$ $-j0,1025$

Система комплексних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів має вигляд:

$$Y \cdot \dot{U} = \dot{S} / U + Y_{\delta} U_{\delta}.$$

Рівняння записуються для всіх вузлів мережі, крім опорних (балансуючих). Використовується неповна матриця провідностей Y :

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ -y_{31} & 0 & y_{33} & 0 \\ -y_{41} & 0 & 0 & y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{S}_1 / U_1 \\ \dot{S}_2 / U_2 \\ \dot{S}_3 / U_3 \\ \dot{S}_4 / U_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{10} \\ 0 \\ y_{30} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U_0,$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10} \dot{U}_0; \\ - y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^*; \\ - y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30} \dot{U}_0; \\ - y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4^*. \end{array} \right.$$

Підставляємо обчислені значення провідностей Y_{ii} , Y_{ij} і задані величини

вузлових потужностей і напруги в опорному вузлі \dot{S}_{in} , \dot{U}_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = (3 - j2) \dot{U}_1^* + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = (5 - j2) \dot{U}_2^*; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = (4 - j3) \dot{U}_3^* + \\ + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = (1 - j0,3) \dot{U}_4^*. \end{array} \right.$$

Система комплексних рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей має вигляд:

$$\dot{U} (YU - Y_\delta U_\delta) = \dot{S}^*.$$

Для заданої схеми:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 (y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 - y_{10} \dot{U}_0) = \dot{S}_1^*; \\ \dot{U}_2 (-y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2) = \dot{S}_2^*; \\ \dot{U}_3 (-y_{31} \dot{U}_1 + y_{33} \dot{U}_3 - y_{30} \dot{U}_0) = \dot{S}_3^*; \\ \dot{U}_4 (-y_{41} \dot{U}_1 + y_{44} \dot{U}_4) = \dot{S}_4^*. \end{array} \right.$$

Система дійсних рівнянь балансу потужностей у прямокутних координатах формується із відповідних рівнянь, що складені в підрозділі 2.2. Рівняння записуються для всіх вузлів схеми, крім опорного (балансуючого) вузла 0:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y'_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] - U''_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] = P_1; \\
 y''_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] + U''_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] = -Q_1; \\
 y'_{22} U_2^2 - U'_2 (y'_{21} U'_1 - y''_{21} U''_1) - U''_2 (y'_{21} U''_1 + y''_{21} U'_1) = P_2; \\
 y''_{22} U_2^2 - U'_2 (y'_{21} U''_1 + y''_{21} U'_1) + U''_2 (y'_{21} U''_1 - y''_{21} U'_1) = -Q_2; \\
 y'_{33} U_3^2 - U'_3 [(y'_{30} U'_0 - y''_{30} U''_0) + (y'_{31} U'_1 - y''_{31} U''_1)] - U''_3 [(y'_{30} U''_0 + y''_{30} U'_0) + (y'_{31} U''_1 + y''_{31} U'_1)] = P_3; \\
 y''_{33} U_3^2 - U'_3 [(y'_{30} U''_0 + y''_{30} U'_0) + (y'_{31} U''_1 + y''_{31} U'_1)] + U''_3 [(y'_{30} U'_0 - y''_{30} U''_0) + (y'_{31} U'_1 - y''_{31} U''_1)] = -Q_3; \\
 y'_{44} U_4^2 - U'_4 (y'_{41} U'_1 - y''_{41} U''_1) - U''_4 (y'_{41} U''_1 + y''_{41} U'_1) = P_4; \\
 y''_{44} U_4^2 - U'_4 (y'_{41} U''_1 + y''_{41} U'_1) + U''_4 (y'_{41} U''_1 - y''_{41} U'_1) = -Q_4.
 \end{array} \right.$$

Підставимо в цю систему рівнянь задані значення параметрів: напруга в опорному вузлі ($U'_0 = 115 \text{ кВ}$, $U''_0 = 0$), активні та реактивні потужності у вузлах, обчислені значення - власні та взаємні провідності вузлів:

$$\begin{aligned}
& 0,3544 U_1^2 - U'_1 [(0,1034) \cdot 115 - (-0,1756) \cdot 0] + (0,1111 U'_2 - \\
& - (-0,1518) U''_2) + (0,1393 U'_3 - (-0,1899) U''_3) + (0,0017 U'_4 - \\
& - (-0,0343) U''_4) - U''_1 [(0,1034 \cdot 0 + (-0,1756) \cdot 115) + (0,1111 U''_2 + \\
& + (-0,1518) U'_2) + (0,1393 U''_3 + (-0,1899) U'_3) + (0,0017 U''_4 + \\
& + (-0,0343) U'_4)] = 3; \\
& - 0,5288 U_1^2 - U'_1 [(0,1034 \cdot 0 + (-0,1756) \cdot 115) + (0,1111 U''_2 + \\
& + (-0,1518) U'_2) + (0,1393 U''_3 + (-0,1899) U'_3) + (0,0017 U''_4 + \\
& + (-0,0343) U'_4)] + U''_1 [(0,1034 \cdot 115 - (-0,1756) \cdot 0) + (0,1111 U'_2 - \\
& - (-0,1518) U''_2) + (0,1393 U'_3 - (-0,1899) U''_3) + (0,0017 U'_4 - \\
& - (-0,0343) U''_4)] = -2; \\
& 0,1111 U_2^2 - U'_2 (0,1111 U'_1 - (-0,1518) U''_1) - U''_2 (0,1111 U''_1 + \\
& + (-0,1518) U'_1) = 5; \\
& - 0,1518 U_2^2 - U'_2 (0,1111 U''_1 + (-0,1518) U'_1) + U''_2 (0,1111 U''_1 - \\
& - (-0,1518) U'_1) = -2; \\
& 0,2254 U_3^2 - U'_3 [(0,0861 \cdot 115 - (-0,1463) \cdot 0) + (0,1393 U'_1 - \\
& - (-0,1899) U''_1)] - U''_3 [(0,0861 \cdot 0 + (-0,1463) \cdot 115) + (0,1393 U''_1 + \\
& + (-0,1899) U'_1)] = 4; \\
& - 0,3362 U_3^2 - U'_3 [(0,0861 \cdot 0 + (-0,1463) \cdot 115) + (0,1393 U''_1 + \\
& + (-0,1899) U'_1)] + U''_3 [(0,0861 \cdot 115 - (-0,1463) \cdot 0) + (0,1393 U'_1 - \\
& - (-0,1899) U''_1)] = -3; \\
& 0,0051 U_4^2 - U'_4 (0,0017 U'_1 - (-0,0343) U''_1) - U''_4 (0,0017 U''_1 + \\
& + (-0,0343) U'_1) = 1; \\
& - 0,1025 U_4^2 - U'_4 (0,0017 U''_1 + (-0,0343) U'_1) + U''_4 (0,0017 U'_1 - \\
& - (-0,0343) U''_1) = -0,3.
\end{aligned}$$

Або:

$$\begin{cases}
0,3544 U_1^2 - U_1'(11,891 + 0,1111 U_2' + 0,1518 U_2'' + 0,1393 U_3' + \\
+ 0,1899 U_3'' + 0,0017 U_4' + 0,0343 U_4'') - U_1''(-20,194 + 0,1111 U_2'' - \\
- 0,1518 U_2' + 0,1393 U_3'' - 0,1899 U_3' + 0,0017 U_4'' - 0,0343 U_4') = 3; \\
- 0,5288 U_1^2 - U_1'(-20,194 + 0,1111 U_2'' - 0,1518 U_2' + 0,1393 U_3'' - \\
- 0,1899 U_3' + 0,0017 U_4'' - 0,0343 U_4') + U_1''(11,891 + 0,1111 U_2' + \\
- 0,1518 U_2'' + 0,1393 U_3' + 0,1899 U_3'' + 0,0017 U_4' + 0,0343 U_4'') = -2; \\
0,1111 U_2^2 - U_2'(0,1111 U_1' + 0,1518 U_1'') - U_2''(0,1111 U_1'' - \\
- 0,1518 U_1') = 5; \\
- 0,1518 U_2^2 - U_2'(0,1111 U_1'' - 0,1518 U_1') + U_2''(0,1111 U_1' + \\
+ 0,1518 U_1'') = -2; \\
0,2254 U_3^2 - U_3'(9,902 + 0,1393 U_1' + 0,1899 U_1'') - U_3''(-16,825 + \\
+ 0,1393 U_1'' - 0,1899 U_1') = 4; \\
- 0,3362 U_3^2 - U_3'(-16,825 + 0,1393 U_1'' - 0,1899 U_1') + U_3''(9,902 + \\
+ 0,1393 U_1' - 0,1899 U_1'') = -3; \\
0,0051 U_4^2 - U_4'(0,0017 U_1' + 0,0343 U_1'') - U_4''(0,0017 U_1'' - \\
- 0,0343 U_1') = 1; \\
- 0,1025 U_4^2 - U_4'(0,0017 U_1'' - 0,0343 U_1') + U_4''(0,0017 U_1' + \\
+ 0,0343 U_1'') = -0,3.
\end{cases}$$

Отримали систему із 8 нелінійних рівнянь з дійсними складовими відносно невідомих складових вузлових напруг $U_1', U_1'', U_2', U_2'', U_3', U_3'', U_4', U_4''$.

Система дійсних рівнянь балансу потужностей у полярних координатах формується із відповідних рівнянь, що складені у підрозділі 2.2. Рівняння записуються для всіх вузлів схеми, крім опорного (балансуючого) вузла 0:

$$\left\{ \begin{array}{l}
y'_{11} U_1^2 - U_1 [U_0 (y'_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) + y''_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
+ U_2 (y'_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y''_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + \\
+ y''_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + y''_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = P_1; \\
y''_{11} U_1^2 + U_1 [U_0 (y'_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) - y''_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
+ U_2 (y'_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y''_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - \\
- y''_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - y''_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -Q_1; \\
y'_{22} U_2^2 - U_2 [U_1 (y'_{21} \cos(\Theta_2 - \Theta_1) + y''_{21} \sin(\Theta_2 - \Theta_1))] = P_2; \\
y''_{22} U_2^2 + U_2 [U_1 (y'_{21} \sin(\Theta_2 - \Theta_1) - y''_{21} \cos(\Theta_2 - \Theta_1))] = -Q_2; \\
y'_{33} U_3^2 - U_3 [U_0 (y'_{30} \cos(\Theta_3 - \Theta_0) + y''_{30} \sin(\Theta_3 - \Theta_0)) + \\
+ U_1 (y'_{31} \cos(\Theta_3 - \Theta_1) + y''_{31} \sin(\Theta_3 - \Theta_1))] = P_3; \\
y''_{33} U_3^2 + U_3 [U_0 (y'_{30} \sin(\Theta_3 - \Theta_0) - y''_{30} \cos(\Theta_3 - \Theta_0)) + \\
+ U_1 (y'_{31} \sin(\Theta_3 - \Theta_1) - y''_{31} \cos(\Theta_3 - \Theta_1))] = -Q_3; \\
y'_{44} U_4^2 - U_4 [U_1 (y'_{41} \cos(\Theta_4 - \Theta_1) + y''_{41} \sin(\Theta_4 - \Theta_1))] = P_4; \\
y''_{44} U_4^2 + U_4 [U_1 (y'_{41} \sin(\Theta_4 - \Theta_1) - y''_{41} \cos(\Theta_4 - \Theta_1))] = -Q_4.
\end{array} \right.$$

Підставимо в цю систему рівнянь *задані* значення параметрів: напруга в опорному вузлі ($U_0 = 115 \text{ кВ}$, $\theta_0 = 0$), активні та реактивні потужності у вузлах; *обчислені* значення – складові власних та взаємних провідностей:

$$0,3544 \cdot U_1^2 - U_1 \cdot [115 \cdot (0,1034 \cdot \cos(\Theta_1 - 0) + (-0,1756) \cdot \sin(\Theta_1 - 0)) + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + (-0,1518) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + (-0,1899) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + (-0,0343) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = 3;$$

$$(-0,5288) \cdot U_1^2 + U_1 \cdot [115 \cdot (0,1034 \cdot \sin(\Theta_1 - 0) - (-0,1756) \cdot \cos(\Theta_1 - 0)) + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - (-0,1518) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - (-0,1899) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - (-0,0343) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -2;$$

$$0,1111 \cdot U_2^2 - U_2 [U_1 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) + (-0,1518) \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1))] = 5;$$

$$(-0,1518) \cdot U_2^2 + U_2 [U_1 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) - (-0,1518) \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1))] = -2;$$

$$0,2254 \cdot U_3^2 - U_3 [115 \cdot (0,0861 \cdot \cos(\Theta_3 - 0) + (-0,1463) \cdot \sin(\Theta_3 - 0)) + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) + (-0,1899) \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))] = 4;$$

$$(-0,3362) \cdot U_3^2 + U_3 [115 \cdot (0,0861 \cdot \sin(\Theta_3 - 0) - (-0,1463) \cdot \cos(\Theta_3 - 0)) + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) - (-0,1899) \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1))] = -3;$$

$$0,0051 \cdot U_4^2 - U_4 [U_1 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) + (-0,0343) \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1))] = 1;$$

$$(-0,1025) \cdot U_4^2 + U_4 [U_1 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) - (-0,0343) \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1))] = -0,3.$$

Отримали систему з 8 нелінійних рівнянь відносно невідомих дійсних складових вузлових напруг (модулів та кутів):
 $U_1, \theta_1, U_2, \theta_2, U_3, \theta_3, U_4, \theta_4.$

3.3. Контрольні питання до розділу 3:

1. Структура матриці провідностей;
2. Властивості матриці провідностей;
3. Обчислення власних і взаємних провідностей вузлів;
4. Що таке опорний по напрузі вузол мережі. Які параметри режиму в ньому задані, які невідомі;
5. Як отримати неповну матрицю провідностей. Її розмірність;
6. Чим визначається розмірність системи рівнянь усталеного режиму;
7. Основні форми запису рівнянь усталеного режиму;
8. Як здійснюється перехід від нелінійних рівнянь у формі балансу струмів до рівнянь у формі балансу потужностей;
9. Послідовність складання системи рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів;
10. Послідовність складання системи рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей;
11. Призначення балансуєчого по потужності вузла. Які величини в ньому задані, які невідомі;
12. Призначення опорного по напрузі вузла. Які величини в ньому задані, які невідомі;
13. Формування системи рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими в прямокутних координатах. Розмірність системи;
14. Формування системи рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими в полярних координатах. Розмірність системи.

Розділ 4. Розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Метод Гауса

Розглядається алгоритм і приклади розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом Гауса.

4.1. Алгоритм методу Гауса для розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі

Усталений режим роботи електричної мережі, у вузлах якої задані постійні струми, описується системою лінійних рівнянь виду (3.1), (3.2). Невідомими величинами в ній є напруги у вузлах мережі U_i , коефіцієнтами при невідомих – взаємні та власні провідності вузлів Y_{ij} і Y_{ii} .

Для розв'язання таких систем рівнянь застосовують зазвичай прямі методи. Один з них – метод Гауса, передбачає послідовне перетворення вихідної системи рівнянь з квадратною матрицею коефіцієнтів у спрощену еквівалентну систему з трикутною матрицею коефіцієнтів. Розв'язання еквівалентної системи рівнянь дає розв'язок вихідної системи.

Класичний метод Гауса передбачає виконання двох основних етапів: прямого і зворотного ходу [1, 8]. Прямий хід – послідовність однотипних кроків виключення невідомих (напруги U_i) із рівнянь системи (3.1).

На першому кроці виконуються еквівалентні перетворення рівнянь системи, в результаті яких невідома U_1 виключається із усіх рівнянь, починаючи з другого. Наприклад, для виключення U_1 з другого рівняння, це рівняння можна помножити на y_{11} , перше помножити на y_{21} і скласти їх. Для виключення U_1 із третього і четвертого рівнянь виконуються аналогічні перетворення. Перше рівняння залишається без змін. В результаті вихідна система (3.1) набуває вигляду:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= b_1; \\ 0 &+ y_{22}^{(1)}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}^{(1)}\dot{U}_n = b_2^{(1)}; \\ \dots & \dots \dots \\ 0 &- y_{n2}^{(1)}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}^{(1)}\dot{U}_n = b_n^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Тут $Y_{ij}^{(1)}$, $Y_{ii}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ – нові значення коефіцієнтів при невідомих і вільних членів рівнянь, обчислені в ході перетворень (верхній індекс показує номер кроку виключення невідомих).

На другому кроці виключення невідомих виключається U_2 із рівнянь, починаючи з третього і т.д. У результаті виконання (n-1)-го кроку виключення вихідна система (3.1) або (3.2) з квадратною матрицею коефіцієнтів перетворюється на еквівалентну систему рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів при невідомих:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - y_{13}\dot{U}_3 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= b_1; \\ y_{22}^{(1)}\dot{U}_2 - y_{23}^{(1)}\dot{U}_3 - \dots - y_{2n}^{(1)}\dot{U}_n &= b_2^{(1)}; \\ \dots & \dots \dots \\ y_{n-1,n-1}^{(n-2)}\dot{U}_{n-1} - y_{n-1,n}^{(n-2)}\dot{U}_n &= b_{n-1}^{(n-2)}; \\ y_{nn}^{(n-1)}\dot{U}_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

На кожному кроці виключення невідомих спосіб еквівалентних перетворень системи рівнянь може бути довільним. Наприклад, перерахунок коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь можна виконувати за формулами:

$$\begin{aligned} y_{ij}^{(k)} &= y_{ij}^{(k-1)} - y_{kj}^{(k-1)} y_{ik}^{(k-1)} / y_{kk}^{(k-1)}; \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} / y_{kk}^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де $k = 1, \dots, n-1$ – номер кроку виключення невідомих. Збігається з номером рівняння системи, в якому розміщений опорний елемент y_{kk} ; $i = k+1, \dots, n$ – номер рівняння, із якого виключається невідоме;

$j = k, \dots, n$ – номер елемента в рівнянні; y_{ij}, y_{kk} – коефіцієнти при невідомих;

$b_i = y_{i0} \dot{U}_0 + I_i$ – вільні члени рівнянь.

Зворотній хід – розв’язання системи (4.2) і обчислення значень усіх невідомих, починаючи з \dot{U}_n .

Із останнього рівняння системи (4.2) отримуємо:

$$\dot{U}_n = b_n^{(n-1)} / y_{nn}^{(n-1)}.$$

Підставляємо його в передостаннє рівняння системи (4.2.) і обчислюємо \dot{U}_{n-1} і т. д. Послідовно визначаємо $\dot{U}_{n-2}, \dot{U}_{n-3}, \dots, \dot{U}_2, \dot{U}_1$ із решти рівнянь. Загальна формула при цьому має вигляд:

$$\dot{U}_i = (b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^{(i-1)} \dot{U}_j) / y_{ii}^{(i-1)}, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (4.4)$$

При підстановці правильно обчислених значень невідомих $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$ у вихідну систему (3.1), всі її рівняння перетворюються на тотожності.

4.2. Приклад розв’язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму електричної мережі методом Гауса

Система комплексних нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів була складена у розділі 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1 + y_{10} \dot{U}_0; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3 + y_{30} \dot{U}_0; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4, \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288)\dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518)\dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899)\dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343)\dot{U}_4 = (3 - j2)/\dot{U}_1 + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115; \\ - (0,1111 - j0,1518)\dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518)\dot{U}_2 = (5 - j2)/\dot{U}_2; \\ - (0,1393 - j0,1899)\dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362)\dot{U}_3 = (4 - j3)/\dot{U}_3 + \\ \quad + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115; \\ - (0,0017 - j0,0343)\dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025)\dot{U}_4 = (1 - j0,3)/\dot{U}_4. \end{array} \right.$$

При заданих у вузлах постійних потужностях рівняння системи нелінійні. Лінійні рівняння отримуємо при завданні у вузлах постійних струмів $I_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Для переходу до струмів i , відповідно до лінійних рівнянь, обчислимо *наближені* значення вузлових струмів при заданих потужностях і *номінальній* напрузі вузлів. Праві частини рівнянь системи при цьому набувають значень:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= \dot{S}_{1i}^* / U_{1i} + y_{10} \cdot U_0 = (3 - j2)/110 + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115 = \\ &= (11,9183 - j20,2122) \text{ kA}; \end{aligned}$$

$$\dot{J}_2 = \dot{S}_{2i}^* / U_{2i} = (5 - j2)/110 = (0,0455 - j0,0182) \text{ kA};$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_3 &= \dot{S}_{3i}^* / U_{3i} + y_{30} \cdot U_0 = (4 - j3)/110 + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115 = \\ &= (9,9379 - j16,8518) \text{ kA}; \end{aligned}$$

$$\dot{J}_4 = \dot{S}_{4i}^* / U_{4i} = -(1 - j0,3)/35 = (0,0286 - j0,0086) \text{ kA}.$$

Система лінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів набуває вигляду:

$$\begin{cases} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{J}_2; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{J}_3; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{J}_4, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = 0,0455 - j0,0182; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = 9,9379 - j16,8518; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = 0,0286 - j0,0086. \end{cases}$$

Систему рівнянь розв'язуємо методом Гауса із зворотнім ходом.

I. Прямий хід методу Гауса.

Необхідно виконати *три кроки* виключення невідомих.

На першому кроці перетворюємо рівняння 2, 3 і 4 системи так, щоб виключити із них невідому U_1 .

Виключаємо U_1 із другого рівняння.

Домножаємо перше рівняння на $Y_{21} = -(0,1111 - j0,1518)$:

$$-(0,1111 - j0,1518)(0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518)(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 + (0,1111 - j0,1518)(0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 + (0,1111 - j0,1518)(0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = -(0,1111 - j0,1518)(11,9183 - j20,2122),$$

або

$$(0,0409 + j0,1125) \dot{U}_1 - (0,0107 + j0,0337) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7441 + j4,0548.$$

Домножаємо друге рівняння на $Y_{11} = 0,3544 - j0,5288$:

$$-(0,3544 - j0,5288)(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,3544 - j0,5288)(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = (0,3544 - j0,5288)(0,0455 - j0,0182),$$

або

$$(0,0409+j0,1125) \dot{U}_1 - (0,0409+j0,1125) \dot{U}_2 = 0,0065-j0,0305.$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *друге* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому \dot{U}_1 :

$$0 + (0,0302+j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_3 - (0,005+j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376+j4,0853.$$

Виключаємо \dot{U}_1 із третього рівняння системи. Домножаємо перше рівняння на $Y_{31} = -(0,1393 - j0,1899)$:

$$\begin{aligned} &-(0,1393-j0,1899)(0,3544-j0,5288) \dot{U}_1 + (0,1393-j0,1899)(0,1111-j0,1518) \dot{U}_2 \\ &+ (0,1393-j0,1899)(0,1393-j0,1899) \dot{U}_3 + (0,1393-j0,1899)(0,0017-j0,0343) \dot{U}_4 \\ &= -(0,1393 - j0,1899)(11,9183-j20,2122), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} &(0,0511+j0,1410) \dot{U}_1 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_2 - (0,0167+j0,0529) \dot{U}_3 - \\ &-(0,0063+j0,0051) \dot{U}_4 = 2,1781+j5,0788. \end{aligned}$$

Домножаємо третє рівняння на $Y_{11} = 0,3544-j0,5288$:

$$\begin{aligned} &-(0,3544-j0,5288)(0,1393-j0,1899) \dot{U}_1 + (0,3544-j0,5288)(0,2254-j0,3362) \dot{U}_3 = \\ &(0,3544-j0,5288)(9,9379-j16,8518), \end{aligned}$$

або

$$(0,0511+j0,1410) \dot{U}_1 - (0,0979+j0,2383) \dot{U}_3 = -(5,3892+j11,2274).$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *третє* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому \dot{U}_1 :

$$\begin{aligned} &0 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0812+j0,1854) \dot{U}_3 - (0,0063+j0,0051) \dot{U}_4 = \\ &= 7,5673+j16,3062. \end{aligned}$$

Виключаємо \dot{U}_1 із четвертого рівняння системи. Домножаємо перше рівняння на $Y_{41} = -(0,0017 - j0,0343)$:

$$-(0,0017-j0,0343)(0,3544-j0,5288)\dot{U}_1 + (0,0017-j0,0343)(0,1111-j0,1518)\dot{U}_2 + (0,0017-j0,0343)(0,1393-j0,1899)\dot{U}_3 + (0,0017-j0,0343)(0,0017-j0,0343)\dot{U}_4 = -(0,0017-j0,0343)(11,9183-j20,2122),$$

або

$$(0,0175+j0,0131)\dot{U}_1 - (0,005+j0,0041)\dot{U}_2 - (0,0063+j0,0051)\dot{U}_3 - (0,0012+j0,0001)\dot{U}_4 = 0,6730+j0,4432.$$

Домножаємо четверте рівняння на $Y_{11}=0,3544-j0,5288$:

$$-(0,3544-j0,5288)(0,0017-j0,0343)\dot{U}_1 + (0,3544-j0,5288)(0,0051-j0,1025)\dot{U}_4 = -(0,3544-j0,5288)(0,0286-j0,0086),$$

або

$$(0,0175+j0,0131)\dot{U}_1 - (0,0524+j0,0393)\dot{U}_4 = 0,0056 - j0,0182.$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *четверте* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому \dot{U}_1 :

$$0 - (0,005+j0,0041)\dot{U}_2 - (0,0063+j0,0051)\dot{U}_3 + (0,0512+j0,0392)\dot{U}_4 = 0,6674 + j0,4614.$$

В результаті виконання першого кроку виключення невідомих (\dot{U}_1), отримуємо *еквівалентну* систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - y_{13}\dot{U}_3 - y_{14}\dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)}\dot{U}_2 - y_{23}^{(1)}\dot{U}_3 - y_{24}^{(1)}\dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 - y_{32}^{(1)}\dot{U}_2 + y_{33}^{(1)}\dot{U}_3 - y_{34}^{(1)}\dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(1)} ; \\ 0 - y_{42}^{(1)}\dot{U}_2 - y_{43}^{(1)}\dot{U}_3 + y_{44}^{(1)}\dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(1)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122; \\ 0 \quad + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853; \\ 0 \quad - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0812 + j0,1854) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0063 + j0,0051) \dot{U}_4 = 7,5673 + j16,3062; \\ 0 \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0063 + j0,0051) \dot{U}_3 + \\ \quad + (0,0512 + j0,0392) \dot{U}_4 = 0,6674 + j0,4614. \end{array} \right.$$

Другий крок виключення невідомих.

Перетворюємо рівняння 3 і 4 еквівалентної системи так, щоб виключити з них невідому \dot{U}_2 .

Виключаємо \dot{U}_2 із третього рівняння. Для цього друге рівняння домножаємо

на $y_{32}^{(1)} = -0,0134 - j0,0422$:

$$\begin{aligned} & -(0,0134 + j0,0422)(0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 + (0,0134 + j0,0422)(0,0134 + \\ & \quad + j0,0422) \dot{U}_3 + (0,0134 + j0,0422)(0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = \\ & \quad = -(0,0134 + j0,0422)(1,7376 + j4,0853), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 0 - (-0,0029 + j0,0023) \dot{U}_2 - (0,0016 - j0,0011) \dot{U}_3 + (-0,0001 + j0,0003) \dot{U}_4 = \\ = 0,1491 - j0,1281. \end{aligned}$$

Домножаємо третє рівняння еквівалентної системи на

$y_{22}^{(1)} = 0,0302 + j0,0788$:

$$\begin{aligned} & -(0,0302 + j0,0788)(0,0134 + j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0302 + j0,0788)(0,0812 + j0,1854) \dot{U}_3 - \\ & \quad - (0,0302 + j0,0788)(0,0063 + j0,0051) \dot{U}_4 = (0,0302 + j0,0788)(7,5673 + j16,3062), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 0 - (-0,0029 + j0,0023) \dot{U}_2 + (-0,0122 + j0,0120) \dot{U}_3 - (-0,0002 + j0,0007) \dot{U}_4 = \\ = -1,0564 + j1,0888. \end{aligned}$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *третє* рівняння із якого виключена складова, що містить невідому \dot{U}_2 :

$$0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169.$$

Виключаємо невідому \dot{U}_2 із четвертого рівняння еквівалентної системи рівнянь. Домножаємо друге рівняння на $y_{42}^{(1)} = -0,005 - j0,0041$:

$$0 - (0,005 + j0,0041)(0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 + (0,005 + j0,0041)(0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 + (0,005 + j0,0041)(0,005 + j0,0041) \dot{U}_4 = -(0,005 + j0,0041)(1,7376 + j4,0853),$$

або

$$0 - (-0,0002 + j0,0005) \dot{U}_2 + (-0,0001 + j0,0003) \dot{U}_3 + (0,000008 + j0,000041) \dot{U}_4 = 0,0081 - j0,0276.$$

Домножаємо четверте рівняння на $y_{22}^{(1)} = 0,0302 + j0,0788$:

$$-(0,0302 + j0,0788)(0,005 + j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0302 + j0,0788)(0,0063 + j0,0051) \dot{U}_3 + (0,0302 + j0,0788)(0,0512 + j0,0392) \dot{U}_4 = (0,0302 + j0,0788)(0,6674 + j0,4614),$$

або

$$0 - (-0,0002 + j0,0005) \dot{U}_2 - (-0,0002 + j0,0007) \dot{U}_3 + (-0,0015 + j0,0052) \dot{U}_4 = -0,0162 + j0,0665.$$

Віднімаємо ці рівняння:

$$0 + 0 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = 0,0243 - j0,0941.$$

Отримали перетворене *четверте* рівняння системи, із якого виключена невідома \dot{U}_2 .

В результаті виконання *другого* кроку виключення невідомих отримуємо еквівалентну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{24}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 + 0 + y_{33}^{(2)} \dot{U}_3 - y_{34}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(2)} ; \\ 0 + 0 - y_{43}^{(2)} \dot{U}_3 + y_{44}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(2)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ 0 + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853 ; \\ 0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169 ; \\ 0 + 0 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = 0,0243 - j0,0941 . \end{array} \right.$$

Третій крок виключення невідомих. Перетворюємо рівняння еквівалентної системи так, щоб виключити невідому \dot{U}_3 із четвертого рівняння. Для цього домножаємо третє рівняння на $y_{43}^{(2)} = -0,0003 + j0,0010$:

$$(-0,0003 + j0,0010)(0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010)(-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = (-0,0003 + j0,0010)(1,2055 - j1,2169),$$

або

$$0 + 0 + (7,72 + j13,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_3 - (0,91 + j0,6) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (8,5525 + j15,7057) \cdot 10^{-4}.$$

Домножаємо четверте рівняння на $y_{33}^{(2)} = 0,0106 - j0,0109$:

$$(0,0106 - j0,0109)(-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0106 - j0,0109)(0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = (0,0106 - j0,0109)(0,0243 - j0,0941),$$

або

$$0 + 0 + (7,72 + j13,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_3 - (40,78 + j71,47) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = \\ = -(7,6811 + j12,6233) \cdot 10^{-4}.$$

Віднімаємо ці рівняння:

$$0 + 0 + 0 + (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4}.$$

Отримали перетворене *четверте* рівняння, із якого виключена невідома \dot{U}_3 .

В результаті виконання останнього, третього кроку виключення невідомих, отримали еквівалентну систему рівнянь із *трикутною* матрицею коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{24}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 + 0 + y_{33}^{(2)} \dot{U}_3 - y_{34}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(2)} ; \\ 0 + 0 - 0 + y_{44}^{(3)} \dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(3)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ 0 + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853 ; \\ 0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169 ; \\ 0 + 0 + 0 + (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4} . \end{array} \right.$$

Цим закінчується прямий хід метода Гауса.

II. *Зворотній хід* метода Гауса. Полягає у розв'язанні еквівалентної системи рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів і обчисленні значень невідомих.

Розв'язання починаємо із останнього рівняння, звідки знаходимо \dot{U}_4 :

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_4^{(3)} / y_{44}^{(3)} = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4} / (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} = 37,152 - j0,318 \text{ кВ.}$$

Підставляємо це значення в передостаннє рівняння і знаходимо \dot{U}_3 :

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 = & (\dot{I}_3^{(2)} + y_{34}^{(2)} \dot{U}_4) / y_{33}^{(2)} = [(1,2055 - j1,2169) - \\ & - (-0,0003 + j0,0010)(37,152 - j0,318)] / (0,0106 - j0,0109) = 114,764 - j0,161 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Підставляємо \dot{U}_3 і \dot{U}_4 в друге рівняння і знаходимо \dot{U}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = & (\dot{I}_2^{(1)} + y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 + y_{24}^{(1)} \dot{U}_4) / y_{22}^{(1)} = [(1,7376 + j4,0853) + \\ & + (0,0134 + j0,0422)(114,764 - j0,161) + \\ & + (0,0050 + j0,0041)(37,152 - j0,318)] / (0,0302 + j0,0788) = 114,573 - j0,322 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Підставляємо знайдені значення \dot{U}_2 , \dot{U}_3 і \dot{U}_4 в перше рівняння і знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = & (\dot{I}_1 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) / y_{11} = [(11,9183 - j20,2122) + \\ & + (0,1111 - j0,1518)(114,573 - j0,322) + (0,1393 - j0,1899)(114,764 - j0,161) + \\ & + (0,0017 - j0,0343)(37,152 - j0,318)] / (0,3544 - j0,5288) = 114,722 - j0,202 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Цим закінчується зворотній хід метода Гауса.

Для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь, необхідно обчисленні значення напруг підставити у всі рівняння вихідної системи.

Наприклад, для третього рівняння:

$$\begin{aligned} & -(0,1393 - j0,1899) \cdot (114,722 - j0,202) + (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,764 - j0,161) = \\ & = 9,8713 - j16,8061; \\ & (9,8713 - j16,8061) \approx (9,9379 - j16,8518). \end{aligned}$$

Рівняння перетворюється на тотожність.

Таким чином, *розв'язком* системи рівнянь усталеного режиму є такі значення напруг у вузлах мережі:

- $U_1 = 114,722 - j0,202 \text{ kV}$
- $U_2 = 114,573 - j0,322 \text{ kV};$
- $U_3 = 114,764 - j0,161 \text{ kV};$
- $U_4 = 37,152 - j0,318 \text{ kV}.$

Аналіз результатів моделювання показує, що рівні напруг у вузлах відповідають їх номінальним напругам і знаходяться в допустимих межах

$\pm 5\%$ від $U_{\text{ном}}$.

4.3. Контрольні питання до розділу 4

1. Для розв'язання яких систем рівнянь (лінійних чи нелінійних) застосовується метод Гауса;
2. Основні етапи класичного методу Гауса;
3. Який результат перетворень на прямому ході методу Гауса;
4. Які перетворення системи рівнянь виконуються на прямому ході;
5. Що таке еквівалентна система рівнянь, які перетворення вважаються еквівалентними;
6. В чому полягає зворотній хід методу Гауса;
7. Як перевірити правильність розв'язання СЛАР;
8. Значення яких параметрів режиму отримуємо в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму.

Розділ 5. Розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Метод подвійної факторизації

Розглядається алгоритм і приклади розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом подвійної факторизації.

5.1. Метод подвійної факторизації для розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму

Метод подвійної факторизації [3, 10] передбачає розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму (3.1), (3.2) і визначення невідомих напруг \dot{U}_i у вигляді

$$\dot{U} = Y^{-1} J, \quad (5.1)$$

де Y^{-1} — обернена матриця провідностей; $J = Y_0 \dot{U}_0 + \dot{I}$ — вектор вільних членів рівнянь системи.

Для обернення матриці провідностей використовують *подвійну факторизацію* — подання оберненої матриці як добуток послідовності елементарних верхніх (R_k) і нижніх (L_k) трикутних матриць, у яких не дорівнюють нулю елементи тільки одного рядка чи стовпця :

$$Y^{-1} = R_1 \cdot R_2 \dots R_k \dots R_{n-1} \cdot L_n \cdot L_{n-1} \dots L_k \dots L_1, \quad (5.2)$$

де $k = 1, \dots, n$ — номер кроку перетворення матриці Y (крок факторизації).

Ці матриці називаються *факторними* матрицями (L_k — *ліві факторні* матриці, R_k — *праві факторні* матриці) . Структуру факторних матриць на k -му кроці факторизації показано на рис. 5.1.

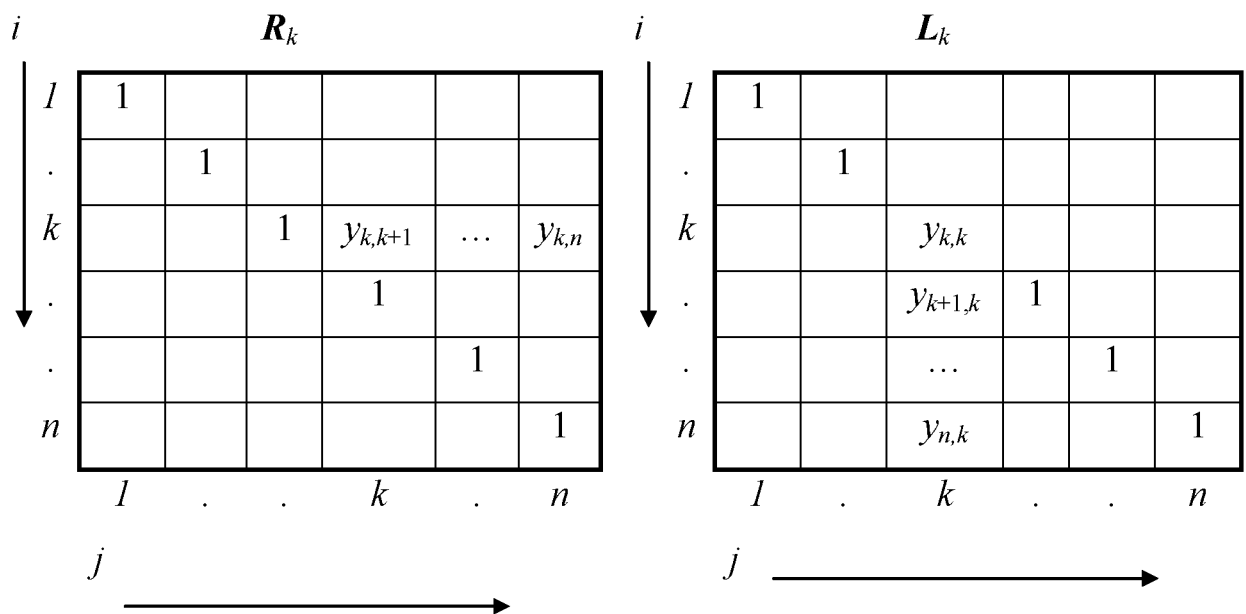


Рис. 5.1. - Структура факторних матриць

Їх елементи обчислюють за формулами:

– матриця L_k : $y_{kk}^* = 1/y_{kk}$; (5.3)

$$y_{ik}^* = -y_{ik}y_{kk}^* ; \quad (5.4)$$

– матриця R_k : $y_{kj}^* = -y_{kj}y_{kk}^* , \quad (5.5)$

де i, j – відповідно номери рядка і стовпця матриці провідностей ($i, j = k + 1, \dots, n$); k – номер кроку факторизації ($k = 1, \dots, n$); y – елементи матриці провідностей на k -му кроці факторизації.

На кожному кроці факторизації виконується перерахунок усіх елементів неперетвореної раніше частини матриці Y за формулою

$$y_{ij}^* = y_{ij} + y_{ik}^*y_{kj} ; \quad i, j = k + 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

У результаті виконання n кроків перетворення отримуємо $(n-1)$ праву факторну матрицю R і n лівих факторних матриць L . Їх елементи розміщені на полі вихідної матриці Y і утворюють факторизовану матрицю Y^* . На їх головній діагоналі припускають одиниці.

Загальний алгоритм подвійної факторизації матриці передбачає виконання таких кроків:

- 1) визначення номера чергового кроку факторизації k ($k = 1, \dots, n$);
- 2) вибір чергового опорного елемента y_{kk} (діагональний елемент);
- 3) розрахунок елементів лівої факторної матриці L_k за формулами (5.3) і (5.4);
- 4) розрахунок інших елементів матриці Y , що не входили в опорний рядок і стовпець на цьому і попередніх кроках перетворення за формулою (5.4);
- 5) розрахунок елементів правої факторної матриці R_k за формулою (5.5).

В результаті отримаємо чергові k -ті факторні матриці L_k і R_k .

б) повернення до пункту 1.

Після виконання n кроків перетворення, кожний з яких включає пп. 1 – 6, отримуємо *факторизовану* матрицю Y^* , елементами якої є ненульові елементи n лівих факторних матриць L_1, L_2, \dots, L_n та $(n-1)$ -ї правої факторної матриці R_1, R_2, \dots, R_{n-1} . Із сформованої факторизованої матриці виділяємо факторні матриці відповідно до їх структури рис. 5.1., перемножуємо їх і визначаємо обернену матрицю Y^{-1} відповідно до (5.2). Напруги у вузлах мережі обчислюємо за формулою (5.1).

5.2. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму методом подвійної факторизації

Система лінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів складена у попередніх розділах. Вона має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{J}_2 ; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{J}_3 ; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{J}_4 , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = 0,0455 - j0,0182 ; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = 9,9379 - j16,8518 ; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = 0,0286 - j0,0086 . \end{array} \right.$$

У матричній формі цю систему рівнянь можна записати:

0,3544 - j0,5288	-0,1111 + j0,1518	-0,1393 + j0,1899	-0,0017 + j0,0343	*	=	U ₁	11,9183 - j20,2122
-0,1111 + j0,1518	0,1111 - j0,1518	0	0			U ₂	0,0455 - j0,0182
-0,1393 + j0,1899	0	0,2254 - j0,3362	0			U ₃	9,9379 - j16,851
-0,0017 + j0,0343	0	0	0,0051 - j0,1025			U ₄	0,0286 - j0,0086

Або $Y \cdot U = J$, де Y – матриця коефіцієнтів системи рівнянь - неповна матриця провідностей, U – вектор невідомих напруг, J – вектор вільних членів системи рівнянь.

Розв'язання системи рівнянь визначаємо у вигляді $U = Y^{-1} * J$, де Y^{-1} – обернена матриця провідностей.

Для обернення матриці провідностей виконуємо подвійну факторизацію:

1. Формуємо *факторизовану* матрицю провідностей.

Перший крок факторизації ($k=1$). Вибираємо опорний елемент $Y_{kk} = Y_{11} = 0,3544 - j0,5288$. Опорні – перший рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *першої лівої* факторної матриці:

$$L_{11} = 1/Y_{11} = 1/(0,3544 - j0,5288) = 0,8746 + j1,3049;$$

$$L_{21} = -Y_{21} * L_{11} = -(-0,1111 + j0,1518) * (0,8746 + j1,3049) = 0,2953 + j0,0122;$$

$$L_{31} = -Y_{31} * L_{11} = -(-0,1393 + j0,1899) * (0,8746 + j1,3049) = 0,3696 + j0,0157;$$

$$L_{41} = -Y_{41} * L_{11} = -(-0,0017 + j0,0343) * (0,8746 + j1,3049) = 0,0462 - j0,0278.$$

Розраховуємо елементи поза опорним рядком і стовпцем (Yl_{ij}):

$$k=1, i=2, j=2;$$

$$Yl_{22} = Y_{22} + L_{21} * Y_{12} = (0,1111 - j0,1518) + (0,2953 + j0,0122) * (-0,1111 + j0,1518) = 0,0764 - j0,1083;$$

$$k=1, i=2, j=3;$$

$$Yl_{23} = Y_{23} + L_{21} * Y_{13} = 0 + (0,2953 + j0,0122) * (-0,1393 + j0,1899) = -0,0435 + j0,0544;$$

$$k=1, i=2, j=4;$$

$$Yl_{24} = Y_{24} + L_{21} * Y_{14} = 0 + (0,2953 + j0,0122) * (-0,0017 + j0,0343) = -0,0009 + j0,0101;$$

$$k=1, i=3, j=2;$$

$$Yl_{32} = Y_{32} + L_{31} * Y_{12} = 0 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,1111 + j0,1518) = -0,0435 + j0,0544;$$

$$k=1, i=3, j=3;$$

$$Yl_{33} = Y_{33} + L_{31} * Y_{13} = 0,2254 - j0,3362 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,1393 +$$

$$+ j0,1899) = 0,1709 - j0,2682;$$

$$k=1, i=3, j=4;$$

$$Yl_{34} = Y_{34} + L_{31} * Y_{14} = 0 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,0017 + j0,0343) = \\ = -0,0012 + j0,0127;$$

$$k=1, i=4, j=2;$$

$$Yl_{42} = Y_{42} + L_{41} * Y_{12} = 0 + (0,0462 - j0,0278) * (-0,1111 + j0,1518) = \\ = -0,0009 + j0,0101;$$

$$k=1, i=4, j=3;$$

$$Yl_{43} = Y_{43} + L_{41} * Y_{13} = 0 + (0,0462 - j0,0278) * (-0,1393 + j0,1899) = \\ = -0,0012 + j0,0126;$$

$$k=1, i=4, j=4;$$

$$Yl_{44} = Y_{44} + L_{41} * Y_{14} = (0,0051 - j0,1025) + (0,0462 - j0,0278) * (-0,0017 + \\ + j0,0343) = 0,0060 - j0,1009.$$

Обчислюємо елементи *першої правої* факторної матриці:

$$k=1, j=2;$$

$$R_{12} = -Y_{12} * L_{11} = -(-0,1111 + j0,1518) * (0,8746 + j1,3049) = 0,2953 + j0,0122;$$

$$k=1, j=3;$$

$$R_{13} = -Y_{13} * L_{11} = -(-0,1393 + j0,1899) * (0,8746 + j1,3049) = 0,3696 + j0,0157;$$

$$k=1, j=4;$$

$$R_{14} = -Y_{14} * L_{11} = -(-0,0017 + j0,0343) * (0,8746 + j1,3049) = 0,0462 - j0,0278.$$

Таким чином, після першого кроку факторизації матриця провідностей набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 - j0,0278	R ₁
0,2953 + j0,0122	0,0764 - j0,1083	-0,0435 + j0,0544	-0,0009 + j0,0101	
0,3696 + j0,0157	-0,0435 + j0,0544	0,1709 - j0,2682	-0,0012 + j0,0127	
0,0462 - j0,0278	-0,0009 + j0,0101	-0,0012 + j0,0126	0,0060 - j0,1009	
L ₁	Yl _{ij}			

Другий крок факторизації ($k = 2$). Вибираємо опорний елемент $Yl_{kk} = Yl_{22} = -0,0764 - j0,1083$. Опорні – другий рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *другої лівої* факторної матриці:

$$L_{22} = 1 / Yl_{22} = 1 / (-0,0764 - j0,1083) = 4,3493 + j6,1654;$$

$$L_{32} = - Yl_{32} * L_{22} = -(-0,0435 + j0,0544) * (4,3493 + j6,1654) = 0,5246 + j0,0316;$$

$$L_{42} = - Yl_{42} * L_{22} = -(-0,0009 + j0,0101) * (4,3493 + j6,1654) = 0,0662 - j0,0384.$$

Розраховуємо елементи поза опорним рядком і стовпцем ($Y2_{ij}$):

$$k=2, i=3, j=3;$$

$$Y2_{33} = Yl_{33} + L_{32} * Yl_{23} = (0,1709 - j0,2682) + (0,5246 + j0,0316) * (-0,0435 + j0,0544) = 0,1464 - j0,2410;$$

$$k=2, i=3, j=4;$$

$$Y2_{34} = Yl_{34} + L_{32} * Yl_{24} = (-0,0012 + j0,0127) + (0,5246 + j0,0316) * (-0,0009 + j0,0101) = -0,0020 + j0,0180;$$

$$k=2, i=4, j=3;$$

$$Y2_{43} = Yl_{43} + L_{42} * Yl_{23} = (-0,0012 + j0,0126) + (0,0662 - j0,0384) * (-0,0435 + j0,0544) = -0,0020 + j0,0180;$$

$$k=2, i=4, j=4;$$

$$Y2_{44} = Yl_{44} + L_{42} * Yl_{24} = (0,0060 - j0,1009) + (0,0662 - j0,0384) * (-0,0009 + j0,0101) = 0,0063 - j0,1002.$$

Обчислюємо елементи *другої правої* факторної матриці:

$$k=2, j=3;$$

$$R_{23} = -Yl_{23} * L_{22} = -(-0,0435 + j0,0544) * (4,3493 + j6,1654) = 0,5246 + j0,0316;$$

$$k=2, j=4;$$

$$R_{24} = -Yl_{24} * L_{22} = -(-0,0009 + j0,0101) * (4,3493 + j6,1654) = 0,0662 - j0,0384.$$

Таким чином, після другого кроку факторизації матриця набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 - j0,0278	R ₁
0,2953 + j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R ₂
0,3696 + j0,0157	0,5246 + j0,0316	0,1464 - j0,2410	-0,0020 + j0,0180	
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	-0,0020 + j0,0179	0,0063 - j0,1002	
L ₁	L ₂	Y _{2ij}		

Третій крок факторизації ($k = 3$). Вибираємо опорний елемент $Y_{kk} = Y_{33} = 0,1464 - j0,2410$. Опорні – третій рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *третьої лівої* факторної матриці:

$$L_{33} = 1 / Y_{33} = 1 / (0,1464 - j0,2410) = 1,8412 + j3,0309;$$

$$L_{43} = -Y_{43} * L_{33} = -(-0,0020 + j0,0180) * (1,8412 + j3,0309) = 0,0582 - j0,0271.$$

Розраховуємо елемент поза опорним рядком і стовпцем (Y_{kj}):

$$k=3, i=4, j=4;$$

$$Y_{344} = Y_{244} + L_{43} * Y_{234} = (0,0063 - j0,1002) + (0,0579 - j0,0269) * (-0,0020 + j0,0180) = 0,0067 - j0,0991.$$

Обчислюємо елемент *третьої правої* факторної матриці:

$$k=3, j=4;$$

$$R_{34} = -Y_{234} * L_{33} = -(-0,0020 + j0,0180) * (1,8412 + j3,0309) = 0,0582 - j0,0271.$$

Таким чином, після третього кроку факторизації матриця набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R ₁
0,2953 +j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R ₂
0,3696 +j0,0157	0,5246 + j0,0316	1,8412 + j3,0309	0,0582 - j0,0271	R ₃
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	0,0582 - j0,0271	0,0067 - j0,0991	
L ₁	L ₂	L ₃	Y _{3ij}	

Четвертий крок факторизації ($k = 4$). Вибираємо опорний елемент $Y_{kk} = Y_{44} = 0,0070 - j0,0994$.

Обчислюємо елементи *четвертої лівої* факторної матриці:

$$L_{44} = 1 / Y_{44} = 1 / (0,0067 - j0,0991) = 0,6791 + j10,0449.$$

Після виконання чотирьох кроків перетворень отримуємо *факторизовану* матрицю провідностей:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R ₁
0,2953 +j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R ₂
0,3696 +j0,0157	0,5246 + j0,0316	1,8412 + j3,0309	0,0582 - j0,0271	R ₃
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	0,0582 - j0,0271	0,6791 + j10,0449	
L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	

Її елементами є ненульові елементи факторних матриць.

2. Формуємо праві і ліві факторні матриці відповідно до їх структури і перемножуємо їх:

1	$0,2953 + j0,0122$	$0,3696 + j0,0157$	$0,0462 - j0,0278$
	1		
		1	
			1

x

R_1

1			
	1	$0,5246 + j0,0316$	$0,0662 - j0,0384$
		1	
			1

x

R_2

1			
	1		
		1	$0,0582 - j0,0271$
			1

x

R_3

1			
	1		
		1	
			$0,6791 + j10,0449$

x

L_4

1			
	1		
		$1,8412 + j3,0309$	
		$0,0582 - j0,0271$	1

x

L_3

1			
	$4,3493 + j6,1654$		
	$0,5246 + j0,0316$	1	
	$0,0662 - j0,0384$		1

x

L_2

0,8746+j1,3049			
0,2953+j0,0122	1		
0,3696 +j0,0157		1	
0,0462-j0,0278			1

$$=$$

$$L_1$$

1,7170+j2,8263	1,7176+j2,8280	0,9289+j1,6859	0,5756+j0,9457
1,7176+j2,8280	4,8579+j7,1206	0,9293+j1,6876	0,5763+j0,9458
0,9289+j1,6859	0,9293+j1,6876	1,8747+j3,0554	0,3117+j0,5662
0,5756+j0,9457	0,5763+j0,9458	0,3117+j0,5662	0,6791+j10,0449

$$Y^{-1}$$

В результаті перемноження факторних матриць отримуємо *обернену* матрицю провідностей Y^{-1} . Для *перевірки* правильності результату треба перемножити вихідну матрицю провідностей і обернену матрицю та отримати одиничну матрицю.

3. Обчислюємо напруги U у вузлах мережі. Для цього обернену матрицю провідностей Y^{-1} умножаємо на вектор вільних членів системи рівнянь усталеного режиму J :

$$U = Y^{-1} \cdot J$$

1,7170+j2,8263	1,7176+j2,8280	0,9289+j1,6859	0,5756+j0,9457
1,7176+j2,8280	4,8579+j7,1206	0,9293+j1,6876	0,5763+j0,9458
0,9289+j1,6859	0,9293+j1,6876	1,8747+j3,0554	0,3117+j0,5662
0,5756+j0,9457	0,5763+j0,9458	0,3117+j0,5662	0,6791+j10,0449

$$*$$

11,9183 - j20,2122
0,0455 - j0,0182
9,9379 - j16,8518
0,0286 - j0,0086

$$=$$

114,722 - j0,202
114,573 - j0,322
114,764 - j0,161
37,152 - j0,318

Таким чином, *розв'язком* системи рівнянь усталеного режиму є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\dot{U}_1 = 114,722 - j0,202 \text{ kV}$$

$$\dot{U}_2 = 114,573 - j0,322 \text{ kV};$$

$$\dot{U}_3 = 114,764 - j0,161 \text{ kV};$$

$$\dot{U}_4 = 37,152 - j0,318 \text{ kV}.$$

Для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь, необхідно обчисленні значення напруг підставити у рівняння вихідної системи. Наприклад, для першого рівняння:

$$(0,3544 - j0,5288) \cdot (114,722 - j0,202) - (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,573 - j0,322) - (0,1393 - j0,1899) \cdot (114,764 - j0,161) - (0,0017 - j0,0343) \cdot (37,152 - j0,318) = = 11,8622 - j20,2177$$

$$(11,8622 - j20,2177) \approx (11,9183 - j20,2122);$$

для третього рівняння:

$$- (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = = - (0,1393 - j0,1899) \cdot (114,722 - j0,202) + (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,764 - j0,161) = = 9,8713 - j16,8061;$$

$$(9,8713 - j16,8061) \approx (9,8651 - j16,7972).$$

Рівняння перетворюються на тотожність, тобто система рівнянь розв'язана правильно.

5. 3. Контрольні питання до розділу 5:

1. Для розв'язання яких систем рівнянь (лінійних чи нелінійних) застосовується метод подвійної факторизації;
2. Факторні матриці. Їх структура, кількість;
3. Як обчислюються елементи факторних матриць;
4. Структура факторизованої матриці;
5. Як обчислюється обернена матриця провідностей;
6. Алгоритм розв'язання СЛАР усталеного режиму методом подвійної факторизації;
7. Як перевірити правильність розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом подвійної факторизації.

Розділ 6. Розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Метод Зейделя

Розглядаються питання розв'язання систем нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом Зейделя.

6.1. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом Зейделя

Метод Зейделя належить до групи ітераційних методів, що застосовуються для розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь [3, 10]. Він дозволяє отримати значення невідомих величин із заданою точністю, як наслідок багаторазового виконання однотипних кроків обчислень, що називаються *ітераціями*.

Розв'язання системи нелінійних рівнянь цим методом потребує її попереднього перетворення. Для цього кожне i -те рівняння системи треба розв'язати відносно відповідної невідомої величини \dot{U}_i . У результаті система рівнянь балансу струмів виду (3.3) набуває вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{y_{11}} (0 + y_{12}\dot{U}_2 + y_{13}\dot{U}_3 + \dots + y_{1n}\dot{U}_n + y_{10}\dot{U}_0 + S_1^*/U_1^*); \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{y_{22}} (y_{21}\dot{U}_1 + 0 + y_{23}\dot{U}_3 + \dots + y_{2n}\dot{U}_n + y_{20}\dot{U}_0 + S_2^*/U_2^*); \\ &\dots \\ \dot{U}_n &= \frac{1}{y_{nn}} (y_{n1}\dot{U}_1 + y_{n2}\dot{U}_2 + y_{n3}\dot{U}_3 + \dots + 0 + y_{n0}\dot{U}_0 + S_n^*/U_n^*). \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Будь-яке i -те рівняння системи (6.1) у загальному вигляді можна записати:

$$\dot{U}_i = \frac{1}{y_{ii}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} \dot{U}_j + y_{i0} \dot{U}_0 + S_i^* / U_i^* \right), \quad (6.2)$$

де S_i – задана потужність у вузлі.

Рівняння (6.1) дозволяють отримати чергове $(k+1)$ -ше наближення невідомих величин напруг $\dot{U}_1^{(k+1)}, \dot{U}_2^{(k+1)}, \dots, \dot{U}_n^{(k+1)}$ при підстановці в них наближень цих величин $\dot{U}_1^{(k)}, \dot{U}_2^{(k)}, \dots, \dot{U}_n^{(k)}$, що обчислені на попередній k -й ітерації. Це відповідає послідовності розрахунків за методом *простой ітерації*.

Відмінність *методу Зейделя* полягає в тому, що для обчислення згідно з формулою (6.2) чергового $(k + 1)$ -го наближення i -ї змінної $\dot{U}_i^{(k+1)}$ використовуються $(k + 1)$ -ші наближення змінних $\dot{U}_1^{(k+1)}, \dot{U}_2^{(k+1)}, \dots, \dot{U}_{i-1}^{(k+1)}$, обчислених раніше на цій самій $(k + 1)$ -й ітерації, а також k -ті наближення змінних $\dot{U}_{i+1}^{(k)}, \dot{U}_{i+2}^{(k)}, \dots, \dot{U}_n^{(k)}$, що обчислені на попередній k -й ітерації. Тоді *рекурентне співвідношення методу Зейделя*, що походить із рівняння (6.2), можна записати:

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{y_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} y_{ij} \dot{U}_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \dot{U}_j^{(k)} + y_{i0} \dot{U}_0 + S_i^* / U_i^* \right). \quad (6.3)$$

Складові під знаком суми в (6.2) розпадаються на дві групи. В (6.3) перша сума містить складові, що відповідають вузлам мережі з номерами j меншими за i (тобто $j = 1, 2, \dots, i-1$). Тут використовуються $(k+1)$ -ші наближення невідомих напруг $\dot{U}_j^{(k+1)}$, що були обчислені раніше на цій же ітерації. Друга сума в (6.3) містить напруги вузлів з номерами, більшими за i

(тобто $j = i+1, i+2, \dots, n$). В цих складових використовується k -те наближення невідомих напруг $\dot{U}_j^{(k)}$, обчислене на попередній k -ій ітерації.

З урахуванням цього система рівнянь (6.1) в ітераційній формі, якщо розв'язувати її методом Зейделя, набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{11}}(0 + y_{12}\dot{U}_2^{(k)} + y_{13}\dot{U}_3^{(k)} + \dots + y_{1n}\dot{U}_n^{(k)} + y_{10}\dot{U}_0 + S_1/U_1^*); \\ \dot{U}_2^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{22}}(y_{21}\dot{U}_1^{(k+1)} + 0 + y_{23}\dot{U}_3^{(k)} + \dots + y_{2n}\dot{U}_n^{(k)} + y_{20}\dot{U}_0 + S_2/U_2^*); \\ &\dots \\ \dot{U}_n^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{nn}}(y_{n1}\dot{U}_1^{(k+1)} + y_{n2}\dot{U}_2^{(k+1)} + \dots + y_{n,n-1}\dot{U}_{n-1}^{(k+1)} + 0 + y_{n0}\dot{U}_0 + S_n/U_n^*). \end{aligned} \right\} (6.4)$$

Якщо ітераційний процес збігається, то після виконання певної кількості ітерацій за рівняннями (6.4) отримаємо чергові наближення невідомих напруг $\dot{U}_i^{(k+1)}$, значення яких наближаються до точного розв'язання системи рівнянь у межах заданої точності ε .

Загальний алгоритм розв'язання нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя містить такі кроки:

1. Підготовчий етап: складання схеми заміщення електричної мережі, визначення параметрів її елементів, обчислення взаємних і власних провідностей вузлів;
2. Формування вихідної системи рівнянь усталеного режиму. Перетворення системи рівнянь і запис її в ітераційній формі (6.4);

3. Завдання початкового наближення вузлових напруг $\dot{U}_1^{(0)} = \dot{U}_2^{(0)} = \dots = \dot{U}_n^{(0)} = \dot{U}_{\text{ном}}$, де $\dot{U}_{\text{ном}}$ — номінальна напруга вузла електричної мережі (кВ); завдання точності розрахунків \mathcal{E} ;
4. Визначення чергового наближення невідомих напруг із рівнянь (6.4);
5. Контроль завершення ітераційного процесу.

Якщо *поправки* до напруг, тобто різниця наближень напруг на суміжних ітераціях, у кожному вузлі відрізняються на величину меншу за задану точність \mathcal{E} :

$$\left| \dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)} \right| \leq \mathcal{E}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.5)$$

то ітераційний процес закінчується. Наближення напруг, що визначені на останній $(k+1)$ -й ітерації є розв'язком системи рівнянь із заданою точністю. Якщо умова (6.5) виконується не для всіх вузлів, то необхідна наступна ітерація і розрахунок нових наближень напруг відповідно до п. 4.

6.2. Приклад розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя

Нелінійні рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів утворюються при завданні у вузлах мережі навантаження або генерації у вигляді постійної потужності $S_i = \text{const}$.

Система комплексних нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів для заданої електричної мережі була складена у розділі 3:

$$\begin{cases} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10} \dot{U}_0; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^*; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30} \dot{U}_0; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4^*, \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи методом Зейделя, її треба перетворити – розв'язати кожне рівняння системи відносно однієї із невідомих напруг

$\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ і \dot{U}_4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = (\dot{S}_1^* / \dot{U}_1 + y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) / y_{11}; \\ \dot{U}_2 = (\dot{S}_2^* / \dot{U}_2 + y_{21} \dot{U}_1) / y_{22}; \\ \dot{U}_3 = (\dot{S}_3^* / \dot{U}_3 + y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) / y_{33}; \\ \dot{U}_4 = (\dot{S}_4^* / \dot{U}_4 + y_{41} \dot{U}_1) / y_{44}. \end{array} \right.$$

Записуємо систему в *ітераційній формі* відповідно до обчислювальної схеми метода Зейделя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = (\dot{S}_{1H}^* / \dot{U}_1^{(K)} + y_{10} \dot{U}_0^{(K)} + y_{12} \dot{U}_2^{(K)} + y_{13} \dot{U}_3^{(K)} + y_{14} \dot{U}_4^{(K)}) / y_{11}; \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = (\dot{S}_{2H}^* / \dot{U}_2^{(K)} + y_{21} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{22}; \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = (\dot{S}_{3H}^* / \dot{U}_3^{(K)} + y_{30} \dot{U}_0^{(K)} + y_{31} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{33}; \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = (\dot{S}_{4H}^* / \dot{U}_4^{(K)} + y_{41} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{44}. \end{array} \right.$$

Підставляємо в цю систему відомі і задані величини – провідності, потужності навантаження у вузлах, напругу в опорному вузлі \dot{U}_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = [(3 - j2) / \dot{U}_1^{(K)} + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2^{(K)} + \\ + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3^{(K)} + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4^{(K)}] / (0,3544 - j0,5288); \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = [(5 - j2) / \dot{U}_2^{(K)} + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1^{(K+1)}] / (0,1111 - j0,1518); \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = [(4 - j3) / \dot{U}_3^{(K)} + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115 + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1^{(K+1)}] / \\ (0,2254 - j0,3362); \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = [(1 - j0,3) / \dot{U}_4^{(K)} + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1^{(K+1)}] / (0,0051 - j0,1025). \end{array} \right.$$

Перетворюємо та спрощуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = (5,2336+j2,1657)/U_1^{*(K)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ \quad + j0,0122)\dot{U}_2^{(K)} + (0,3696 + j0,0157)\dot{U}_3^{(K)} + (0,0462 - j0,0278)\dot{U}_4^{(K)} ; \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = (24,2777 + j15,1696)/U_2^{*(K)} + \dot{U}_1^{(K+1)} ; \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = (11,6592+j4,0809)/U_3^{*(K)} + (48,147-j2,8282) + \\ \quad + (0,5813-j0,0246)\dot{U}_1^{(K+1)} ; \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = (3,4038 + j9,5867)/U_4^{*(K)} + (0,3346 - j0,0001)\dot{U}_1^{(K+1)} . \end{array} \right.$$

Задаємо початкові наближення невідомих напруг. Як початкові приймаємо номінальні значення напруги вузлів:

$$\dot{U}_1^{(0)} = U_{1НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2^{(0)} = U_{2НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3^{(0)} = U_{3НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4^{(0)} = U_{4НОМ} = 35 + j0 \text{ кВ}.$$

Виконуємо ітерації за методом Зейделя. Точність розрахунків $\varepsilon = 0,01$ кВ.

Ітерація 0, $k=0$.

Підставляємо початкові наближення невідомих в перше рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^{(1)} &= (5,2336+j2,1657)/U_1^{*(0)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &\quad + j0,0122)\dot{U}_2^{(0)} + (0,3696 + j0,0157)\dot{U}_3^{(0)} + (0,0462 - j0,0278)\dot{U}_4^{(0)} = \\ &= (5,2336+j2,1657)/110 + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &\quad + j0,0122) \cdot 110 + (0,3696 + j0,0157) \cdot 110 + (0,0462 - j0,0278) \cdot 35 = \\ &= 111,4599 - j0,0677 \text{ кВ}. \end{aligned}$$

Підставляємо $\dot{U}_2^{(0)}$ і щойно знайдене значення $\dot{U}_1^{(1)}$ в друге рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2^{(1)} &= (24,2777 + j15,1696)/U_2^{*(0)} + \dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696)/110 + (111,4599 - j0,0677) = 111,2392 - j0,2056 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Підставляємо $\dot{U}_1^{(1)}$ і $\dot{U}_3^{(0)}$ в третє рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_3^{(1)} &= (11,6592 + j4,0809)/U_3^{*(0)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246)\dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809)/110 + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246)(111,4599 - j0,0677) = 112,8310 - j5,6466 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Підставляємо $\dot{U}_1^{(1)}$ і $\dot{U}_4^{(0)}$ в четверте рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_4^{(1)} &= (3,4038 + j9,5867)/U_4^{*(0)} + (0,3346 - j0,0001)\dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (3,4038 + j9,5867)/35 + (0,3346 - j0,0001)(111,4599 + j0,9045) = \\ &= 37,1972 - j0,3077 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(1)} - \dot{U}_1^{(0)}| = |(111,4599 - j0,0677) - 110| = |1,4599 - j0,0677| > \varepsilon.$$

Умова завершення не виконується, тому переходимо до наступної ітерації.

Ітерація 1, $\kappa=1$.

$$\begin{aligned}\dot{U}_1^{(2)} &= (5,2336 + j2,1657)/U_1^{*(1)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + j0,0122)\dot{U}_2^{(1)} + \\ &+ (0,3696 + j0,0157)\dot{U}_3^{(1)} + (0,0462 - j0,0278)\dot{U}_4^{(1)} = \\ &= (5,2336 + j2,1657)/(111,4599 + j0,0677) + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &+ j0,0122) \cdot (111,2392 - j0,2056) + (0,3696 + j0,0157) \cdot (112,8310 - j5,6466) + \\ &+ (0,0462 - j0,0278) \cdot (37,1972 - j0,3077) = 113,0569 - j2,2309 \text{ кВ;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2^{(2)} &= (24,2777 + j15,1696)/U_2^{*(1)} + \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696)/(111,2392 + j0,2056) + (113,0569 - j2,2309) =\end{aligned}$$

$$= 112,8384 - j2,3668 \text{ kВ};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_3^{(2)} &= (11,6592 + j4,0809) / \dot{U}_3^{*(1)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246) \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809) / (112,8310 + j5,6466) + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246) (113,0569 - j2,2309) = 113,7072 - j6,9371 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_4^{(2)} &= (3,4038 + j9,5867) / \dot{U}_4^{*(1)} + (0,3346 - j0,0001) \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (3,4038 + j9,5867) / (37,1972 + j0,3077) + (0,3346 - j0,0001) (113,0569 - \\ &- j2,2309) = 37,7350 - j1,0147 \text{ kВ}. \end{aligned}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(2)} - \dot{U}_1^{(1)}| = |(113,0569 - j2,2309) - (111,4599 - j0,0677)| = |1,597 - j2,1632| > \varepsilon.$$

Умова завершення не виконується, тому переходимо до наступної ітерації.

Ітерація 2, $\kappa=2$.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^{(3)} &= (5,2336 + j2,1657) / \dot{U}_1^{*(2)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + j0,0122) \dot{U}_2^{(2)} + \\ &+ (0,3696 + j0,0157) \dot{U}_3^{(2)} + (0,0462 - j0,0278) \dot{U}_4^{(2)} = \\ &= (5,2336 + j2,1657) / (113,0569 + j2,2309) + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &+ j0,0122) \cdot (112,8384 - j2,3668) + (0,3696 + j0,0157) \cdot (113,7072 - j6,9371) + \\ &+ (0,0462 - j0,0278) \cdot (37,7350 - j1,0147) = 113,9053 - j3,3592 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2^{(3)} &= (24,2777 + j15,1696) / \dot{U}_2^{*(2)} + \dot{U}_1^{(3)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696) / (112,8389 + j2,3668) + (113,9053 - j3,3592) = \\ &= 113,6874 - j3,4891 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_3^{(3)} &= (11,6592 + j4,0809) / \dot{U}_3^{*(2)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246) \dot{U}_1^{(3)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809) / (113,7072 + j6,9371) + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246) (113,9053 - j3,3592) = 114,1732 - j7,6125 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_4^{(3)} = (3,4038 + j9,5867) / \dot{U}_4^{*(2)} + (0,3346 - j0,0001) \dot{U}_1^{(3)} =$$

$$= (3,4038 + j9,5867)/(37,7350 + j1,0147) + (0,3346 - j0,0001)(113,9053 - j3,3592) = 38,0154 - j1,3868 \text{ кВ.}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(3)} - \dot{U}_1^{(2)}| = |(113,9053 - j3,3592) - (113,0569 - j2,2309)| = |0,8484 - j1,1283| > \epsilon.$$

Після другої ітерації задана точність результату не досягнута, тобто не виконуються умови завершення розрахунку. Для отримання результату із заданою точністю треба виконати ще декілька ітерацій розрахунку.

Результати цих і подальших розрахунків на ПК наведені в таблиці:

Номер наближення невідомих k	$\dot{U}_1^{(k)}$	$\dot{U}_2^{(k)}$	$\dot{U}_3^{(k)}$	$\dot{U}_4^{(k)}$
0	110+j0	110+j0	110+j0	35+j0
1	111,4599-j0,0677	111,2392 -j0,2056	112,8310 -j5,6466	37,1972-j0,3077
2	113,0569-j2,2308	112,8384 -j2,3668	113,7072 -j6,9371	37,7350-j1,0147
3	113,9052-j3,3592	113,6873 -j3,4890	114,1731 -j7,6125	38,0154-j1,3868
4	114,3551-j3,9469	114,1377-j4,0737	114,4205-j7,9645	38,1642-j1,5807
5	114,5938-j4,2531	114,3766-j4,3782	114,5519-j8,1480	38,2432-j1,6816
6	114,7204-j4,4126	114,5034-j4,5369	114,6216-j8,2436	38,2852-j1,7342
7	114,7876-j4,4956	114,5706-j4,6195	114,6587-j8,2934	38,3074-j1,7616
8	114,8232-j4,5389	114,6063-j4,6625	114,6783-j8,3194	38,3192-j1,7758
9	114,8421-j4,5614	114,6252-j4,6849	114,6888-j8,3329	38,3255-j1,7833
10	114,8521-j4,5731	114,6353-j4,6966	114,6943-j8,3400	38,3288-j1,7871
11	114,8574-j4,5792	114,6406-j4,7027	114,6973-j8,3436	38,3306-j1,7891

Після виконання одинадцятої ітерації ($k = 11$) досягається задана точність результату ($\epsilon = 0,01$) і виконуються умови завершення ітераційного процесу по *поправках* для усіх напруг:

$$|U_1^{(11)} - U_1^{(10)}| = |(114,8574 - j4,5792) - (114,8521 - j4,5731)| = |0,0053 - j0,0061| = 0,0081 < \epsilon;$$

$$| U_2^{(11)} - U_2^{(10)} | = | (114,6406 - j4,7027) - (114,6353 - j4,6966) | = | 0,0053 - j0,0061 | = 0,0081 < \varepsilon;$$

$$| U_3^{(11)} - U_3^{(10)} | = | (114,6973 - j8,3436) - (114,6943 - j8,3400) | = | 0,003 - j0,0036 | = 0,0047 < \varepsilon;$$

$$| U_4^{(11)} - U_4^{(10)} | = | (38,3306 - j1,7891) - (38,3288 - j1,7871) | = | 0,0018 - j0,0020 | = 0,0027 < \varepsilon.$$

Таким чином, розв'язком системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 0,01$ є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\dot{U}_1 = U_1^{(11)} = 114,8574 - j4,5792 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2 = U_2^{(11)} = 114,6406 - j4,7027 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3 = U_3^{(11)} = 114,6973 - j8,3436 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4 = U_4^{(11)} = 38,3306 - j1,7891 \text{ кВ}.$$

Нев'язки рівнянь системи при цьому мають такі значення:

$$\begin{aligned} 1) \quad & y_{11} \dot{U}_1 - (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) - \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* = \\ & = (0,3544 - j0,5288) \cdot (114,8574 - j4,5792) - [(0,1034 - j0,1756) \cdot 115 + (0,1111 - \\ & - j0,1518) \cdot (114,6406 - j4,7027) + (0,1393 - j0,1899) \cdot (114,6973 - j8,3436) + \\ & + (0,0017 - j0,0343) \cdot (38,3306 - j1,7891)] - (3 - j2) / (114,8574 + j4,5792) = \\ & = -0,0010 + j0,0021; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & y_{22} \dot{U}_2 - y_{21} \dot{U}_1 - \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^* = \\ & = (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,6406 - j4,7027) - (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,8574 - \\ & - j4,5792) - (5 - j2) / (114,6406 + j4,7027) = 0,0 + j0,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & y_{33} \dot{U}_3 - (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) - \hat{S}_3 / \hat{U}_3 = \\
& = (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,6973 - j8,3436) - [(0,0861 - j0,1463) \cdot 115 + (0,1393 - \\
& - j0,1899) \cdot (114,8574 - j4,5792)] - (4 - j3) / (114,6973 + j8,3436) = \\
& = -1,9511 - j1,1966;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & y_{44} \dot{U}_4 - y_{41} \dot{U}_1 - \hat{S}_4^* / \hat{U}_4^* = \\
& = (0,0051 - j0,1025) \cdot (38,3306 - j1,7891) - (0,0017 - j0,0343) \cdot (114,8574 - \\
& - j4,5792) - (1 - j0,3) / (38,3306 + j1,7891) = -0,0004 + j0,0004.
\end{aligned}$$

Для досягнення заданої точності за *нев'язками* усіх рівнянь треба виконати ще декілька ітерацій розрахунку.

6.3. Контрольні питання до розділу 6:

1. В чому полягає суть методу Зейделя;
2. Які перетворення системи рівнянь необхідні для розв'язання її методом Зейделя;
3. Що таке ітераційна форма запису системи рівнянь;
4. Алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя;
5. Які значення напруг вузлів приймаються як початкові наближення;
6. Значення яких параметрів режиму визначаються в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму;
7. Як виконується контроль завершення ітераційного розрахунку;
8. Що таке невязка рівняння, як визначаються невязки.

Розділ 7. Розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Метод Ньютона-Рафсона.

7.1. Етап 1: Підготовчі перетворення системи рівнянь

Розглядаються питання підготовки розрахункових формул для реалізації алгоритму метода Ньютона-Рафсона розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі.

Метод Ньютона-Рафсона [3, 8] належить до групи сучасних ітераційних методів, які застосовуються при розв'язанні систем нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Він має відносно нескладний алгоритм обчислень та забезпечує швидку збіжність ітераційного процесу. Суть методу полягає в послідовній заміні на кожній ітерації обчислень вихідної нелінійної системи рівнянь допоміжною лінійною системою, розв'язок якої дозволяє визначити чергові наближення невідомих величин (лінеаризація). Формування і розв'язання цієї лінійаризованої системи рівнянь виконується на кожній ітерації методу Ньютона-Рафсона:

$$Y \cdot \Delta U = -W. \quad (7.1)$$

Вектор невідомих в ній ΔU містить поправки до модулів та кутів вузлових напруг U_i і θ_i , матрицею коефіцієнтів при невідомих Y є матриця Якобі, вектор вільних членів W містить нев'язки нелінійних рівнянь вихідної системи при чергових наближеннях невідомих напруг. Нев'язки рівнянь усталеного режиму відповідають небалансам активної і реактивної потужностей у вузлах мережі.

Елементами матриці Якобі є похідні від рівнянь вихідної системи у формі нев'язок по всім невідомим величинам – складовим вузлових напруг (модулі та кути напруг U_i і θ_i , або дійсні та уявні складові U' і U''). Кожен рядок матриці містить похідні від одного рівняння.

Для застосування методу вихідна система рівнянь усталеного режиму з комплексними складовими у формі балансу потужностей (3.4) повинна бути *перетворена* – розділені дійсні та уявні її складові. При цьому кожне рівняння з комплексними складовими розпадається на два рівняння з дійсними складовими – рівняння балансу активної і реактивної потужностей у відповідному вузлі мережі. В полярних координатах ці рівняння мають вигляд (2.5). Отримана система рівнянь має розмірність $2n$, невідомими в ній є модулі та кути вузлових напруг U_i і θ_i . Система таких рівнянь для заданої мережі сформована у розділі 3.

Розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона передбачає виконання двох послідовних етапів:

- підготовчий етап. Тут визначаються всі аналітичні залежності за якими виконуються обчислення на ітераціях;
- реалізація алгоритму метода.

На *підготовчому* етапі виконуються такі дії:

1. Рівняння системи із дійсними складовими записуються у формі *нев'язок*:

$$\begin{cases} \omega_{P_i} = U_i^2 \cdot y_{ii}' - U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y_{ij}' \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y_{ij}'' \cdot \sin \theta_i - \theta_j] - P_i = 0; \\ \omega_{Q_i} = U_i^2 \cdot y_{ii}'' + U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y_{ij}' \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y_{ij}'' \cdot \cos \theta_i - \theta_j] + Q_i = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

$i = 1, \dots, n.$

2. Перегрупування рівнянь системи – рівняння балансу активних потужностей ω_{P_i} всіх вузлів переставляємо на початок системи:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\omega_{p1} = U_1^2 \cdot y'_{11} - U_1 \cdot \sum_{j=2}^n U_j \cdot [y'_{1j} \cdot \cos \theta_1 - \theta_j + y''_{1j} \cdot \sin \theta_1 - \theta_j] - P_1 = 0; \\
\omega_{p2} = U_2^2 \cdot y'_{22} - U_2 \cdot \sum_{j=1; j \neq 2}^n U_j \cdot [y'_{2j} \cdot \cos \theta_2 - \theta_j + y''_{2j} \cdot \sin \theta_2 - \theta_j] - P_2 = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\omega_{pn} = U_n^2 \cdot y'_{nn} - U_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} U_j \cdot [y'_{nj} \cdot \cos \theta_n - \theta_j + y''_{nj} \cdot \sin \theta_n - \theta_j] - P_n = 0; \\
\omega_{Q1} = U_1^2 \cdot y''_{11} + U_1 \cdot \sum_{j=2}^n U_j \cdot [y'_{1j} \cdot \sin (\theta_1 - \theta_j) - y''_{1j} \cdot \cos (\theta_1 - \theta_j)] + Q_1 = 0; \\
\omega_{Q2} = U_2^2 \cdot y''_{22} + U_2 \cdot \sum_{j=1; j \neq 2}^n U_j \cdot [y'_{2j} \cdot \sin (\theta_2 - \theta_j) - y''_{2j} \cdot \cos (\theta_2 - \theta_j)] + Q_2 = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\omega_{Qn} = U_n^2 \cdot y''_{nn} + U_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} U_j \cdot [y'_{nj} \cdot \sin (\theta_n - \theta_j) - y''_{nj} \cdot \cos (\theta_n - \theta_j)] + Q_n = 0.
\end{array} \right. \quad (7.3)$$

3. Формування матриці Якобі для системи (7.3). Її елементи – часткові похідні від усіх рівнянь системи по всім невідомим величинам. У загальному вигляді структуру матриці можна записати:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_n}
\end{bmatrix} \quad (7.4)$$

4. Визначення аналітичних виразів похідних у складі матриці Якобі.

Для цього виконується аналітичне диференціювання рівнянь системи (7.3) по всім невідомим величинам Θ_i та U_i . В результаті отримуємо вісім типів похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial \theta_i} &= U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial \theta_j} &= -U_i \cdot U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial U_i} &= 2 \cdot U_i \cdot y''_{ii} - \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial U_j} &= -U_i \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial \theta_i} &= U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial \theta_j} &= -U_i \cdot U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial U_i} &= 2 \cdot U_i \cdot y''_{ii} + \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial U_j} &= U_i \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

В усіх формулах індекс j відповідає номерам вузлів, які безпосередньо зв'язані з вузлом i .

5. Формування вектора нев'язок W в правій частині системи (7.1). Його елементи обчислюються при підстановці в рівняння (7.3) чергових наближень модулів і кутів напруг. Загальна структура вектора:

$$W = \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \dots \\ \omega_{pn} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \dots \\ \omega_{Qn} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

6. Формування лінійризованої системи рівнянь (7.1). Загальна структура системи:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \dots \\ \Delta \theta_n \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \dots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \dots \\ \omega_{pn} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \dots \\ \omega_{Qn} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

7.2. Приклад виконання підготовчих перетворень системи рівнянь

Система із восьми нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей з дійсними складовими у полярних координатах

сформована в розділі 3. Невідомими в ній є модулі та кути напруг у вузлах $U_1, \theta_1, U_2, \theta_2, U_3, \theta_3, U_4, \theta_4$.

Виконаємо прості *перетворення* рівнянь системи: перемножимо числові коефіцієнти, впорядкуємо знаки, переставимо рівняння балансу *активних* потужностей вузлів на початок системи і запишемо рівняння у *формі* *нев'язок* ω_{pi} та ω_{Qi} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{p1} = 0,3544 \cdot U_1^2 - U_1 \cdot [(11,891 \cdot \cos\theta_1 - 20,194 \cdot \sin\theta_1) + \\ + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)) + \\ + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3)) + \\ + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4))] - 3 = 0; \\ \omega_{p2} = 0,1111 \cdot U_2^2 - U_2 U_1 (0,1111 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2 - \\ - \theta_1)) - 5 = 0; \\ \omega_{p3} = 0,2254 \cdot U_3^2 - U_3 [(9,9015 \cdot \cos\theta_3 - 16,8245 \cdot \sin\theta_3) + \\ + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_1))] - 4 = 0; \\ \omega_{p4} = 0,0051 \cdot U_4^2 - U_4 U_1 (0,0017 \cdot \cos(\theta_4 - \theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4 - \\ - \theta_1)) - 1 = 0; \\ \omega_{Q1} = -0,5288 \cdot U_1^2 + U_1 \cdot [(11,891 \cdot \sin\theta_1 + 20,194 \cdot \cos\theta_1) + \\ + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \\ + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3)) + \\ + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4))] + 2 = 0; \\ \omega_{Q2} = -0,1518 \cdot U_2^2 + U_2 U_1 (0,1111 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2 - \\ - \theta_1)) + 2 = 0; \\ \omega_{Q3} = -0,3362 \cdot U_3^2 + U_3 [(9,9015 \cdot \sin\theta_3 + 16,8245 \cdot \cos\theta_3) + \\ + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_1))] + 3 = 0; \\ \omega_{Q4} = -0,1025 \cdot U_4^2 + U_4 U_1 (0,0017 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4 - \\ - \theta_1)) + 0,3 = 0. \end{array} \right.$$

Матриця Якобі для системи рівнянь складається із часткових похідних від усіх рівнянь системи по всім невідомим величинам. Кожний i -й рядок

матриці містить похідні від одного i -го рівняння системи. Розмірність матриці Якобі відповідає кількості рівнянь в системі і кількості невідомих.

Для даної системи вона складає 8×8 . Якщо вузли мережі не зв'язані між собою, то відповідні елементи матриці дорівнюють нулю. З урахуванням цього матриця Якобі має таку структуру:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4}
 \end{bmatrix}$$

Для визначення аналітичних виразів похідних у складі матриці Якобі виконуємо диференціювання рівнянь системи по невідомим величинам:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} &= U_1 \cdot [(11,891 \cdot \sin \theta_1 + 20,194 \cdot \cos \theta_1) + \\
 &+ U_2 (0,1111 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \\
 &+ U_3 (0,1393 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3)) + \\
 &+ U_4 (0,0017 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4))]; \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} &= - U_1 \cdot U_2 (0,1111 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)); \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} &= - U_1 \cdot U_3 (0,1393 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3)); \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} &= - U_1 \cdot U_4 (0,0017 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} &= 0,7088 \cdot U_1 - [(11,891 \cdot \cos \Theta_1 - 20,194 \cdot \sin \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} &= -U_1 \cdot (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)); \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} &= -U_1 \cdot (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)); \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} &= -U_1 \cdot (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4)); \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)); \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} &= U_2 \cdot U_1 [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} &= -U_2 \cdot [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} &= 0,2222 \cdot U_2 - U_1 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} &= U_3 [(9,9015 \cdot \sin \Theta_3 + 16,8245 \cdot \cos \Theta_3) + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + \\
&\quad + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} &= -U_3 \cdot [0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} &= 0,4508 \cdot U_3 - [(9,9015 \cdot \cos \Theta_3 - 16,8245 \cdot \sin \Theta_3) + \\
&\quad + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_4 [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} &= U_4 \cdot U_1 [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} &= -U_4 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} &= 0,0102 \cdot U_4 - U_1 [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_1} &= U_1 \cdot [(11,891 \cdot \cos \Theta_1 - 20,194 \cdot \sin \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_2} &= -U_1 \cdot U_2 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_3} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_4} &= -U_1 \cdot U_4 [0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_1} &= -1,0576 \cdot U_1 + [(11,891 \cdot \sin \Theta_1 + 20,194 \cdot \cos \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_2} &= U_1 \cdot [0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_3} &= U_1 \cdot [0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_4} &= U_1 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_2 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial \theta_2} &= U_2 \cdot U_1 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial U_1} &= U_2 \cdot [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial U_2} &= -0,3036 \cdot U_2 + U_1 [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial \theta_3} &= U_3 [(9,9015 \cdot \cos \Theta_3 - 16,8245 \cdot \sin \Theta_3) + \\
&\quad + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial U_1} &= U_3 \cdot [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{Q3}}{\partial U_3} &= -0,6724 \cdot U_3 + (9,9015 \cdot \sin \Theta_3 + 16,8245 \cdot \cos \Theta_3) + \\ &+ U_1 [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_4 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial \theta_4} &= U_4 \cdot U_1 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial U_1} &= U_4 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial U_4} &= -0,205 \cdot U_4 + U_1 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]. \end{aligned}$$

Елементами вектора нев'язок W є значення нев'язок рівнянь системи при підстановці в них чергових наближень невідомих напруг.

Вектор поправок до невідомих напруг ΔU включає поправки до кутів $\Delta \Theta_i$ та модулів ΔU_i напруг. Вектори мають структуру:

$$W = \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \omega_{p3} \\ \omega_{p4} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \omega_{Q3} \\ \omega_{Q4} \end{bmatrix}; \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \end{bmatrix}.$$

Система лінійних (лінійаризованих) рівнянь, що формується і розв'язується на кожній ітерації метода Ньютона-Рафсона, в матричній формі має вигляд:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & 0 \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} & 0 \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4}
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \omega_{p3} \\ \omega_{p4} \\ \omega_{q1} \\ \omega_{q2} \\ \omega_{q3} \\ \omega_{q4} \end{bmatrix}.$$

Невідомими величинами в ній є елементи вектора поправок $\Delta\theta$, ΔU .

7.3. Контрольні питання до розділу 7.1.:

1. Які перетворення вихідної системи рівнянь необхідні для розв'язання її методом Ньютона-Рафсона;
2. Що таке нев'язки рівнянь, фізична суть нев'язок рівнянь усталеного режиму;
3. Структура матриці Якобі. Елементи матриці. Блоки;
4. Загальна характеристика матриці Якобі;
5. Аналітичні вирази елементів матриці Якобі;
6. Структура вектора нев'язок W та вектора поправок до невідомих ΔU ;
7. Структура системи лінійаризованих рівнянь;
8. Результат розв'язання системи лінійаризованих рівнянь.

7.4. Етап 2: Реалізація алгоритму методу Ньютона-Рафсона

Розглядаються питання реалізації алгоритму методу Ньютона-Рафсона для розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі

Другий етап розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона полягає у реалізації алгоритму методу. Він передбачає виконання послідовності ітерацій, на кожній з яких визначається чергове наближення невідомих напруг. Ітерації розрахунку включають такі кроки:

1. Завдання початкового наближення невідомих напруг. Як початкові наближення приймаються номінальні значення напруг вузлів $U_{ном}$:

$$k = 0; \rightarrow U_1^{(k)} = U_2^{(k)} = \dots = U_n^{(k)} = U_{ном}; \\ \theta_1^{(k)} = \theta_2^{(k)} = \dots = \theta_n^{(k)} = 0.$$

Завдання точності ітераційного розрахунку ε .

Подальші пункти алгоритму виконуються на кожній ітерації.

2. Визначення нев'язок рівнянь $\omega_{pi}^{(k)}$, $\omega_{Qi}^{(k)}$ вихідної системи (7.3). Вони обчислюються при підстановці в ці рівняння чергових наближень невідомих $U_i^{(k)}$, $\theta_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$.
Формування вектора нев'язок $W^{(k)}$ відповідно до (7.6).
3. Обчислення значень часткових похідних – елементів матриці Якобі. Вони визначаються при підстановці в (7.5) чергових наближень невідомих $U_i^{(k)}$, $\theta_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$.
Формування матриці Якобі $J^{(k)}$ відповідно до (7.4).
4. Формування лінійризованої системи рівнянь (7.7).
5. Розв'язання лінійної (лінійризованої) системи рівнянь. В результаті визначаються поправки до всіх невідомих напруг $\Delta U_i^{(k)}$, $\Delta \theta_i^{(k)}$.

Примітка: Для розв'язання лінійаризованої системи рівнянь на кожній ітерації алгоритму метода Ньютона-Рафсона можна використовувати існуючі програми і програмні засоби розв'язання СЛАР.

6. Визначення нових наближень всіх невідомих напруг:

$$U_i^{(k+1)} = U_i^{(k)} + \Delta U_i^{(k)},$$

$$\theta_i^{(k+1)} = \theta_i^{(k)} + \Delta \theta_i^{(k)}; \quad i = 1, \dots, n.$$

7. Контроль завершення ітераційного розрахунку. Якщо величини нев'язок рівнянь, що обчислені в п. 2, менші заданої точності ε (для усіх вузлів):

$$| \omega_{pi}^{(k)}, \omega_{Qi}^{(k)} | \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

то розрахунок завершується, а наближення вузлових напруг, що визначні на останній ітерації $U_i^{(k+1)}, \theta_i^{(k+1)}$, є розв'язком системи рівнянь усталеного режиму із заданою точністю.

В іншому випадку виконується наступна ітерація починаючи з пункту 2 при нових наближеннях напруг.

7.5. Приклад реалізації алгоритму методу Ньютона-Рафсона

1. Як початкові наближення напруг приймаємо їх номінальні значення у відповідних вузлах:

$$U_1^{(0)} = U_{iii1} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_1^{(0)} = 0;$$

$$U_2^{(0)} = U_{iii2} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_2^{(0)} = 0;$$

$$U_3^{(0)} = U_{iii3} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_3^{(0)} = 0;$$

$$U_4^{(0)} = U_{iii4} = 35 \text{ êÁ}, \quad \theta_4^{(0)} = 0.$$

Розрахунок виконуємо з точністю $\varepsilon = 0,01$.

Початкова ітерація розрахунку ($k = 0$).

2. Підставляємо ці значення в рівняння у формі нев'язок і визначаємо нев'язки рівнянь $\omega_{pi}^{(0)}, \omega_{Qi}^{(0)}$ при початкових наближеннях невідомих:

$$\begin{aligned}
\omega_{p1}^{(0)} &= 0,3544 \cdot (U_1^{(0)})^2 - U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] - 3 = \\
&= 0,3544 \cdot (110)^2 - 110 \cdot [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] - 3 = -53,155; \\
\omega_{p2}^{(0)} &= 0,1111 \cdot (U_2^{(0)})^2 - U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) \\
&\quad - 5 = \\
&= 0,1111 \cdot (110)^2 - 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + 5 = 5; \\
\omega_{p3}^{(0)} &= 0,2254 \cdot (U_3^{(0)})^2 - U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + \\
&\quad + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}))] - 4 = \\
&= 0,2254 \cdot (110)^2 - 110 \cdot [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] - 4 = -43,355; \\
\omega_{p4}^{(0)} &= 0,0051 \cdot (U_4^{(0)})^2 - U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \\
&\quad - \theta_1^{(0)})) - 1 = 0,0051 \cdot (35)^2 - 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - \\
&\quad - 0)) - 1 = 0,7025; \\
\omega_{q1}^{(0)} &= -0,5288 \cdot (U_1^{(0)})^2 + U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] + 2 = \\
&= -0,5288 \cdot (110)^2 + 110 \cdot [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] + 2 = 87,485; \\
\omega_{q2}^{(0)} &= -0,1518 \cdot (U_2^{(0)})^2 + U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) + 2 = \\
&= -0,1518 \cdot (110)^2 + 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + 2 = \\
&= 2; \\
\omega_{q3}^{(0)} &= -0,3362 \cdot (U_3^{(0)})^2 + U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + \\
&\quad + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}))] + 3 = \\
&= -0,3362 \cdot (110)^2 + 110 \cdot [(9,9015 \cdot \sin(0) + 16,8245 \cdot \cos(0)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0))] + 3 = 77,465; \\
\omega_{q4}^{(0)} = & -0,1025 \cdot (U_4^{(0)})^2 + U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + \\
& + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) + 0,3 = -0,1025 \cdot (35)^2 + \\
& + 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) + 0,3 = 6,1925.
\end{aligned}$$

За результатами обчислень формуємо вектор нев'язок рівнянь при початкових наближеннях напруг:

$$W^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_{p1}^{(0)} \\ \omega_{p2}^{(0)} \\ \omega_{p3}^{(0)} \\ \omega_{p4}^{(0)} \\ \omega_{q1}^{(0)} \\ \omega_{q2}^{(0)} \\ \omega_{q3}^{(0)} \\ \omega_{q4}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53,155 \\ 5 \\ -43,355 \\ 0,7025 \\ 87,485 \\ 2 \\ 77,465 \\ 6,1925 \end{bmatrix}.$$

3. Обчислюємо значення елементів матриці Якобі при початкових наближеннях напруг $U_i^{(0)}$, $\theta_i^{(0)}$. Для цього відповідні значення підставляємо в аналітичні вирази похідних:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} &= U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
& + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
& + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
& + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
& = 110 \cdot [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
& + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] = 6487,965; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} &= -U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -2297,79;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} &= -U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} &= 0,7088 \cdot U_1^{(0)} - [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
&+ U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&+ U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&+ U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
&= 0,7088 \cdot 110 - [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
&+ 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&+ 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&+ 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] = 38,4735; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -15,323; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -0,187; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} &= U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} &= -U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} &= 0,2222 \cdot U_2^{(0)} - U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 0,2222 \cdot 110 - 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = 12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -2297,79; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} &= U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})] = \\
& = 110 \cdot [(9,9015 \cdot \sin(0) + 16,8245 \cdot \cos(0)) + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + \\
& + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0))] = 4148,485; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & = -U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -15,323; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & = 0,4508 \cdot U_3^{(0)} - [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \\
& - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})] = \\
& = 0,4508 \cdot 110 - [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - \\
& - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] = 24,3635; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & = -U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & = U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & = -U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -0,0595; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} & = 0,0102 \cdot U_4^{(0)} - U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = 0,0102 \cdot 35 - 110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = 0,17; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & = U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
& + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
& + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
& + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
& = 110 \cdot [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
& + 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] = 4344,395; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & = -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & = -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -1685,53;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} &= -U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} &= -1,0576 \cdot U_1^{(0)} + [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
&= -1,0576 \cdot 110 + [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] = -57,3545; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} &= U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} &= U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = 20,889; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} &= U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 3,773; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} &= U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = 1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} &= U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} &= -0,3036 \cdot U_2^{(0)} + U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -0,3036 \cdot 110 + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -1685,53; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} &= U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})] = 110 \cdot [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] = 2774,695; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} &= U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = 20,889; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} &= -0,6724 \cdot U_3^{(0)} + (9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \\
& - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = -0,6724 \cdot 110 + (9,9015 \cdot \sin(0) + \\
& + 16,8245 \cdot \cos(0)) + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -36,2505; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} &= U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = 6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} &= U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 1,2005; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4} &= -0,205 \cdot U_4^{(0)} + U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -0,205 \cdot 35 + 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -3,402.
\end{aligned}$$

4. За результатами обчислень формуємо матрицю Якобі при початкових наближеннях напруг. Формуємо відповідну систему лінійних (лінійаризованих) рівнянь. В матричній формі ця система рівнянь включає матрицю Якобі, вектор нев'язок і вектор поправок до невідомих. Значення поправок $\Delta U_i^{(0)}$, $\Delta \theta_i^{(0)}$ обчислюються при розв'язанні системи:

$$\begin{bmatrix} 6487,97 & -1836,78 & -2297,79 & -132,06 & 38,47 & -12,22 & -15,32 & -0,19 \\ -1836,78 & 1836,78 & 0 & 0 & -12,22 & 12,22 & 0 & 0 \\ -2297,79 & 0 & 4148,49 & 0 & -15,32 & 0 & 24,36 & 0 \\ -132,06 & 0 & 0 & 132,06 & -0,06 & 0 & 0 & 0,17 \\ 4344,395 & -1344,31 & -1685,53 & -6,545 & -57,35 & 16,698 & 20,89 & 3,77 \\ -1344,31 & 1344,31 & 0 & 0 & 16,698 & -16,698 & 0 & 0 \\ -1685,53 & 0 & 2774,695 & 0 & 20,889 & 0 & -36,25 & 0 \\ -6,545 & 0 & 0 & 6,545 & 1,201 & 0 & 0 & -3,402 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -53,155 \\ 5,000 \\ -43,355 \\ 0,703 \\ 87,485 \\ 2,000 \\ 77,465 \\ 6,193 \end{bmatrix} .$$

5. Розв'язання системи рівнянь можна виконати будь-яким відомим методом розв'язання СЛАР з використанням відповідних комп'ютерних програм і програмних засобів.

В результаті розв'язання системи рівнянь визначені поправки до модулів та кутів невідомих напруг:

$$\Delta U^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 4.888 \\ 4.667 \\ 4.928 \\ 3.530 \end{bmatrix} .$$

6. Визначасмо нові наближення всіх напруг:

$$\dot{U}^{(1)} = \dot{U}^{(0)} + \Delta\dot{U}^{(0)};$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ \theta_4^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(0)} \\ \theta_2^{(0)} \\ \theta_3^{(0)} \\ \theta_4^{(0)} \\ U_1^{(0)} \\ U_2^{(0)} \\ U_3^{(0)} \\ U_4^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 4.888 \\ 4.667 \\ 4.928 \\ 3.530 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 114.888 \\ 114.667 \\ 114.928 \\ 38.530 \end{bmatrix} \quad (kB).$$

7. Значення нев'язок, що обчислені в п. 2, значно перевищують задану точність $\varepsilon = 0,01$. Необхідно виконувати наступну ітерацію. Розрахунки продовжуємо з пункту 2 при нових значеннях напруг.

Наступна ітерація ($k=1$) дає такі результати:

- матриця Якобі, нев'язки рівнянь і відповідна лінійаризована система рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 6977.69 & -2001.62 & -2506.67 & -151.89 & 40.71 & -12.74 & -16.01 & -0.165 \\ -1997.947 & 1997.947 & 0 & 0 & -12,761 & 12,693 & 0 & 0 \\ -2508.11 & 0 & 4440.044 & 0 & -16,001 & 0 & 25,888 & 0 \\ -151,772 & 0 & 0 & 151,772 & -0,0756 & 0 & 0 & 0,168 \\ 4678.139 & -1461.101 & -1840.26 & -6,362 & -60,77 & 17,456 & 21,811 & 3,942 \\ -1466.12 & 1466.12 & 0 & 0 & 17,39 & -17,389 & 0 & 0 \\ -1838,307 & 0 & 2979.084 & 0 & 21,831 & 0 & -38,644 & 0 \\ -8,6885 & 0 & 0 & 8,6885 & 1,3210 & 0 & 0 & -3,9597 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(1)} \\ \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta\theta_4^{(1)} \\ \Delta U_1^{(1)} \\ \Delta U_2^{(1)} \\ \Delta U_3^{(1)} \\ \Delta U_4^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2,6433 \\ -0,3176 \\ 2,0801 \\ -0,1171 \\ -4,0248 \\ 0,0052 \\ -3,6034 \\ -0,6976 \end{bmatrix}.$$

Величини нев'язок рівнянь значно зменшились, але вони більші за задану точність;

- Розв'язуємо систему рівнянь. Визначаємо поправки та нові наближення напруг:

$$\dot{U}^{(2)} = \dot{U}^{(1)} + \Delta\dot{U}^{(1)};$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ \theta_4^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(1)} \\ \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta\theta_4^{(1)} \\ \Delta U_1^{(1)} \\ \Delta U_2^{(1)} \\ \Delta U_3^{(1)} \\ \Delta U_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 114.888 \\ 114.667 \\ 114.928 \\ 38.530 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0.000 \\ 0.001 \\ -0,219 \\ -0,210 \\ -0,217 \\ -0,247 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.009 \\ 114.669 \\ 114.457 \\ 114.711 \\ 38.283 \end{bmatrix} \text{ (kB)}.$$

Наступна ітерація (к=2) дає такі результати:

- матриця Якобі, нев'язки рівнянь і відповідна лінійаризована система рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 6955.175 & -1994.007 & -2497.27 & -150,62 & 40,61 & -12,72 & -15,981 & -0,169 \\ -1990.63 & 1990.63 & 0 & 0 & -12,74 & 12,673 & 0 & 0 \\ -2498.53 & 0 & 4426.91 & 0 & -15,972 & 0 & 25,821 & 0 \\ -150,52 & 0 & 0 & 150,52 & -0,0739 & 0 & 0 & 0,169 \\ 4662.99 & -1455.94 & -1833.18 & -6,45 & -60,62 & 17,422 & 21,77 & 3,934 \\ -1460.45 & 1460.451 & 0 & 0 & 17,36 & -17,357 & 0 & 0 \\ -1831,47 & 0 & 2969,944 & 0 & 21,789 & 0 & -38,54 & 0 \\ -8,4756 & 0 & 0 & 8,4756 & 1,3126 & 0 & 0 & -3,916 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(2)} \\ \Delta\theta_2^{(2)} \\ \Delta\theta_3^{(2)} \\ \Delta\theta_4^{(2)} \\ \Delta U_1^{(2)} \\ \Delta U_2^{(2)} \\ \Delta U_3^{(2)} \\ \Delta U_4^{(2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,0061 \\ -0,0009 \\ 0,0042 \\ -0,0010 \\ -0,0076 \\ -0,0003 \\ -0,0066 \\ -0,0045 \end{bmatrix}.$$

- нові значення поправок і наближення напруг:

$$\dot{U}^{(3)} = \dot{U}^{(2)} + \Delta\dot{U}^{(2)};$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(3)} \\ \theta_2^{(3)} \\ \theta_3^{(3)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(3)} \\ U_2^{(3)} \\ U_3^{(3)} \\ U_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(2)} \\ \Delta\theta_2^{(2)} \\ \Delta\theta_3^{(2)} \\ \Delta\theta_4^{(2)} \\ \Delta U_1^{(2)} \\ \Delta U_2^{(2)} \\ \Delta U_3^{(2)} \\ \Delta U_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.009 \\ 114.669 \\ 114.457 \\ 114.711 \\ 38.283 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ -0,001 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00172 \\ -0.00288 \\ -0.00138 \\ -0.00844 \\ 114.6685 \\ 114.4563 \\ 114.7105 \\ 38.2819 \end{bmatrix} \text{ (кВ)}.$$

Значення нев'язок усіх рівнянь системи на останній ітерації по модулю менші за задану точність $\varepsilon = 0,01$:

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} \omega_{p1}^{(2)} \\ \omega_{p2}^{(2)} \\ \omega_{p3}^{(2)} \\ \omega_{p4}^{(2)} \\ \omega_{q1}^{(2)} \\ \omega_{q2}^{(2)} \\ \omega_{q3}^{(2)} \\ \omega_{q4}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0061 \\ -0,0009 \\ 0,0042 \\ -0,0010 \\ -0,0076 \\ -0,0003 \\ -0,0066 \\ -0,0045 \end{bmatrix} < \varepsilon.$$

Умови завершення ітераційного процесу виконуються. Значення напруг вузлів $U_i^{(3)}$, $\theta_i^{(3)}$, обчислені на останній ітерації, є розв'язком системи рівнянь усталеного режиму із заданою точністю.

Таким чином, розв'язком заданої системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона з точністю $\varepsilon = 0,01$ є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 114,6685 \text{ kВ}; \quad \theta_1 = -0,00172; \\
 U_2 &= 114,4563 \text{ kВ}; \quad \theta_2 = -0,00288; \\
 U_3 &= 114,7105 \text{ kВ}; \quad \theta_3 = -0,00138; \\
 U_4 &= 38,2819 \text{ kВ}; \quad \theta_4 = -0,00844.
 \end{aligned}$$

Або в прямокутних координатах:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1 &= 114,6683 - j0,1977 \text{ kВ}; \\
 \dot{U}_2 &= 114,4559 - j0,3296 \text{ kВ}; \\
 \dot{U}_3 &= 114,7104 - j0,1585 \text{ kВ}; \\
 \dot{U}_4 &= 38,2805 - j0,3232 \text{ kВ}.
 \end{aligned}$$

Для їх обчислення знадобилось тільки три ітерації метода Ньютона-Рафсона.

7.6. Контрольні питання до розділу 7.4.:

1. Суть методу Ньютона-Рафсона;
2. Алгоритм методу Ньютона-Рафсона;
3. Як вибираються початкові наближення невідомих при розв'язанні рівнянь усталеного режиму ітераційними методами;
4. Способи контролю завершення ітераційного процесу;
5. Модифікації методу Ньютона-Рафсона;
6. Порівняльна характеристика методів Зейделя та Ньютона-Рафсона.

Розділ 8. Обчислення параметрів режиму роботи електричної мережі

Розглядаються питання виконання заключних обчислень параметрів режиму - розрахунків струморозподілу, потокорозподілу та втрат потужності в електричній мережі.

8.1. Заключні обчислення параметрів режиму

Головним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі є значення напруг у її вузлах. В залежності від постановки задачі і методу розв'язання системи це комплексні величини \dot{U}_i , або їх складові – модулі і кути напруг U_i , θ_i чи дійсні та уявні складові комплексів U_i' , U_i'' . Для повної характеристики режиму роботи електричної мережі необхідно обчислити значення ще ряду його основних параметрів [9].

1. Струми у ділянках мережі, струми у вузлах. Струмозподіл.

При відомих напругах у вузлах мережі і параметрах її ділянок струм в кожній ділянці можна визначити за формулою:

$$\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}. \quad (8.1)$$

Тут \dot{U}_i , \dot{U}_j - напруги у вузлах початку та кінця ділянки, Y_{ij} - повздовжня провідність ділянки $Y_{ij} = 1/Z_{ij}$. Струм у будь-якій точці ділянки має однакові значення.

В трансформаторній ділянці струм в кінці ділянки (сторона НН) в K_T раз більший, ніж на початку цієї ділянки (сторона ВН):

$$\dot{I}_e = \dot{I}_i \cdot \hat{E}_\Delta, \quad (8.2)$$

де $\dot{I}_i, \dot{I}_e, \hat{E}_0$ – струми на початку та в кінці трансформаторної ділянки і коефіцієнт трансформації трансформатора.

Струм на стороні ВН трансформаторної ділянки (початок ділянки) дорівнює:

$$\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - K_T \cdot \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}. \quad (8.3)$$

Струми у поперечних елементах схеми заміщення:

$$\dot{I}_{i-0} = \dot{U}_i \cdot Y_{i-0}, \quad (8.4)$$

де Y_{i-0} – поперечна провідність у вузлі i . Визначається як сума поперечних провідностей елементів мережі, які підключені у i -му вузлі з боку цього вузла. Наприклад, для вузла 1 схеми рис. 1.4:

$$Y_{1-0} = Y_0^I + 0,5 \cdot (Y_{01}^I + Y_{12}^I + Y_{13}^I).$$

Для вузла 4 поперечна провідність $Y_{4-0} = 0$.

Якщо у вузлі задана потужність \dot{S}_i , то струм у вузлі можна визначити за формулою:

$$\dot{I}_i = \dot{S}_i^* / U_i^* \quad (8.5)$$

Обчислені значення струмів в елементах електричної мережі визначають *струморозподіл* в ній.

У кожному вузлі мережі повинні виконуватись умови балансу струмів:

$$\sum_j \dot{I}_{ij} + \dot{I}_i + \dot{I}_{i-0} \approx 0. \quad (8.10)$$

Тут j – номери вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з i – м відповідними ділянками. При цьому необхідно враховувати напрямок протікання струму в ділянці – від вузла чи до вузла. Для трансформаторних ділянок треба враховувати, якою стороною - ВН чи НН вона підключена до вузла i .

2. Потоки потужності в ділянках мережі, потужності у вузлах.

Потокорозподіл.

Потік потужності в різних точках ділянки електричної мережі має різні значення. При аналізі режимів обчислюють зазвичай потужності на початку і в кінці ділянки:

$$\dot{S}_{ij(i)} = \dot{U}_i \cdot I_{ij}^*; \quad \dot{S}_{ij(j)} = \dot{U}_j \cdot I_{ij}^*, \quad (8.11)$$

де \dot{U}_i, \dot{U}_j - напруги у вузлах початку і кінця ділянки, I_{ij}^* - спряжений комплекс струму в ділянці. Відрізняються ці потужності на величину втрат потужності у ділянці.

Потужності у вузлі повинні відповідати умовам балансу потужностей:

$$\dot{S}_i + \sum_j \dot{S}_{ij(i)} \approx 0, \quad (8.12)$$

де j - номери вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з i - м, \dot{S}_i - задана потужність у вузлі. При цьому необхідно враховувати напрямок протікання потужності в ділянці - від вузла чи до вузла, і точку ділянки, в якій визначений потік потужності (початок, кінець тощо).

Обчислені значення потужностей в елементах електричної мережі визначають *потокорозподіл* в ній.

3. Втрати потужності у повздовжніх елементах електричної мережі.

Для визначення втрат потужності у ділянках мережі можна застосувати декілька формул:

$$\text{а) } \Delta \dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ij(i)} - \dot{S}_{ij(j)},$$

де $\dot{S}_{ij(i)}, \dot{S}_{ij(j)}$ - потоки потужності на початку і в кінці ділянки $i-j$;

$$\text{б) } \Delta \dot{S}_{ij} = I_{ij}^2 \cdot Z_{ij},$$

де I_{ij}, Z_{ij} - струм в ділянці та опір ділянки;

$$\text{в) } \Delta \dot{S}_{ij} = \frac{P_{ij(i)}^2 + Q_{ij(i)}^2}{U_i^2} \cdot Z_{ij} \quad (\text{за умовами початку ділянки}),$$

$$\Delta \dot{S}_{ij} = \frac{P_{ij(j)}^2 + Q_{ij(j)}^2}{U_j^2} \cdot Z_{ij} \quad (\text{за умовами кінця ділянки}).$$

Тут $P_{ij(i)}$, $Q_{ij(i)}$; $P_{ij(j)}$, $Q_{ij(j)}$ - потоки активної та реактивної потужностей на початку та в кінці ділянки; U_i , U_j - напруги у вузлах початку та кінця ділянки.

4. Втрати потужності у поперечних елементах електричної мережі.

$$\Delta \dot{S}_{i0} = U_i^2 \cdot Y_{i0}.$$

Тут U_i , Y_{i0} - напруга і поперечна провідність у вузлі i .

5. Сумарні втрати потужності в електричній мережі.

Вони визначаються як сума втрат в усіх повздовжніх і поперечних елементах електричної мережі:

$$\Delta \dot{S}_{\Sigma} = \sum_{i,j} \Delta \dot{S}_{ij} + \sum_i \Delta \dot{S}_{i0}.$$

У пунктах 3, 4, 5 визначаються *технологічні втрати* потужності, пов'язані з протіканням струму в елементах електричної мережі (на відміну від комерційних втрат).

6. Баланс потужностей в електричній мережі.

Вся потужність, яка надійшла до електричної мережі, повинна бути миттєво спожита:

$$\dot{S}_{\Gamma\Sigma} = \dot{S}_{H\Sigma} + \Delta \dot{S}_{\Sigma},$$

де $\dot{S}_{\Gamma\Sigma}$, $\dot{S}_{H\Sigma}$ - сумарна потужність, що надійшла до мережі (генерація тощо) і сумарне корисне навантаження споживачів мережі.

Якщо в ході розрахунків електричних режимів умови балансу потужностей в мережі не виконуються, то відновити розрахунковий баланс потужностей можна зміною потужностей *балансирующего* вузла $\dot{S}_B = P_B + jQ_B$.

8.2. Приклад виконання заключних обчислень параметрів режиму

Для обчислення параметрів режиму використовуємо значення напруг у вузлах, які визначені в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона (розділ 7).

1. Струми в ділянках ЛЕП визначаємо за формулою (8.1):

$$\begin{aligned}\dot{I}_{01} &= (\dot{U}_0 - \dot{U}_1) \cdot Y_{01} = (115,0 - j0,0) - (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,1034 - j0,1756) = \\ &= 0,0689 - j0,0379 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{03} &= (\dot{U}_0 - \dot{U}_3) \cdot Y_{03} = (115,0 - j0,0) - (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,0861 - j0,1463) = \\ &= 0,0481 - j0,0287 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{12} &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \cdot Y_{12} = (114,6683 - j0,1972) - (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,1111 - j0,1518) = \\ &= 0,0437 - j0,0175 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{13} &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) \cdot Y_{13} = (114,6683 - j0,1982) - (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,1393 - j0,1899) = \\ &= -0,0133 + j0,0026 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

Струм на стороні ВН трансформаторної ділянки 1-4 визначаємо за формулою (8.3):

$$\begin{aligned}\dot{I}_{14B} &= (\dot{U}_1 - K_{Tii} \cdot \dot{U}_4) \cdot Y_{14} = (114,6683 - j0,1977) - 2,987 \cdot (38,2805 - j0,3232) \cdot (0,00058 - j0,01149) = \\ &= 0,00901 - j0,00328 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

Струм на стороні НН трансформаторної ділянки 1-4 визначаємо за формулою (8.2):

$$\dot{I}_{14I} = \dot{I}_{14A} \cdot K_{Tii} = (0,00901 - j0,00328) \cdot 2,987 = 0,02606 - j0,00806 \text{ (kA)}.$$

Визначаємо струми у поперечних провідностях елементів схеми заміщення за формулою (8.4). Поперечні струми у вузлах:

$$\dot{I}_{1-0} = \dot{U}_1 \cdot Y_{1-0} = \dot{U}_1 \cdot (Y_{01}^i + 0,5 \cdot (Y_{01}^i + Y_{12}^i + Y_{13}^i)) = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0159 + j0,1028 + 0,5 \cdot (0,0 - j0,269 + 0,0 - j0,265 + 0,0 - j0,212)) \cdot 10^{-4} = 0,000177 - j0,003099 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_{2-0} = \dot{U}_2 \cdot Y_{2-0} = \dot{U}_2 \cdot (0,5 \cdot Y_{12}^i) = (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,5 \cdot (0,0 - j0,265)) \cdot 10^{-4} = 0,0 - j0,001517 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_{3-0} = \dot{U}_3 \cdot Y_{3-0} = \dot{U}_3 \cdot (0,5 \cdot (Y_{30}^i + Y_{31}^i)) = (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,5 \cdot (0,0 - j0,323 + 0,0 - j0,212)) \cdot 10^{-4} = 0,0 - j0,003069 \text{ (kA)};$$

$\dot{I}_{4-0} = \dot{U}_4 \cdot Y_{4-0} = 0,0$, тому що у цьому вузлі поперечна провідність дорівнює нулю.

Визначаємо струми навантаження у вузлах по заданій потужності і відомим напругам за формулою (8.5):

$$\dot{I}_1^* = S_1^* / U_1^* = (3 - j2) / (114,6683 + j0,1972) = 0,0261 - j0,0175 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_2^* = S_2^* / U_2^* = (5 - j2) / (114,4558 + j0,3296) = 0,0436 - j0,0176 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_3^* = S_3^* / U_3^* = (4 - j3) / (114,7104 + j0,1583) = 0,0348 - j0,0262 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_4^* = S_4^* / U_4^* = (1 - j0,3) / (38,2805 + j0,3232) = 0,02606 - j0,00806 \text{ (kA)}.$$

Розрахункові небаланси струмів у вузлах, обчислені відповідно до (8.10), складають:

$$\Delta \dot{I}_1 = \dot{I}_{01} + \dot{I}_{31} - \dot{I}_{12} - \dot{I}_{14B} - \dot{I}_1 - \dot{I}_{1-0} = (0,0689 - j0,0379) + (0,0133 - j0,0026) - (0,0437 - j0,0175) - (0,009 - j0,0033) - (0,0261 - j0,0175) - (0,000177 - j0,003099) = 0,0032 + j0,0009 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_2 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_2 - \dot{I}_{2-0} = (0,0437 - j0,0175) - (0,0436 - j0,0176) - (0,0 - j0,001517) = 0,0001 + j0,0016 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_3 = \dot{I}_{03} - \dot{I}_{31} - \dot{I}_3 - \dot{I}_{3-0} = (0,0481 - j0,0287) - (0,0133 - j0,0026) - (0,0348 - j0,0262) - (0,0 - j0,003069) = 0,0 + j0,0032 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_4 = \dot{I}_{14H} - \dot{I}_4 - \dot{I}_{4-0} = (0,02606 - j0,00806) - (0,02606 - j0,00806) - 0,0 = 0,0 - j0,0 \text{ (kA)};$$

2. Потік потужності в ділянках мережі, на відміну від струму, має різні значення в різних точках ділянки. В практичних задачах визначають, зазвичай, потік на початку та/або в кінці ділянки. Визначаємо потоки потужності в ділянках схеми рис. 1.2 за формулами (8.11):

$$S_{01(0)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_0 \cdot I_{01}^* = (115,0 - j0,0) \cdot (0,0689 + j0,0379) = 7,9235 + j4,3585 \text{ (MBA)};$$

$$S_{01(1)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_1 \cdot I_{01}^* = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0689 + j0,0379) = 7,9081 + j4,3323 \text{ (MBA)};$$

$$S_{03(0)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_0 \cdot I_{03}^* = (115,0 - j0,0) \cdot (0,0481 + j0,0287) = 5,5315 + j3,3005 \text{ (MBA)};$$

$$S_{03(3)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_3 \cdot I_{03}^* = (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,0481 + j0,0287) = 5,5221 + j3,2846 \text{ (MBA)};$$

$$S_{12(1)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_1 \cdot I_{12}^* = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0437 + j0,0175) = 5,0145 + j1,9981 \text{ (MBA)};$$

$$S_{12(2)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_2 \cdot I_{12}^* = (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,0437 + j0,0175) = 5,0075 + j1,9886 \text{ (MBA)};$$

$$S_{13(1)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_1 \cdot I_{13}^* = (114,6683 - j0,1982) \cdot (-0,0133 - j0,0026) = -1,5256 - j0,2955 \text{ (MBA)};$$

$$S_{13(3)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_3 \cdot I_{13}^* = (114,7104 - j0,1583) \cdot (-0,0133 - j0,0026) = -1,5261 - j0,2961 \text{ (MBA)};$$

$$S_{14(1)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_1 \cdot I_{14B}^* = (114,6683 - j0,1977) \cdot (0,009 + j0,00328) = 1,0327 + j0,3743 \text{ (MBA)};$$

$$S_{14(4)}^{\dot{\cdot}} = \dot{U}_4 \cdot I_{14H}^* = (38,2805 - j0,3232) \cdot (0,02606 + j0,00806) = 1,0002 + j0,3001 \text{ (MBA)};$$

8.3. Контрольні питання до розділу 8:

1. Як визначити струми у ділянках ЛЕП мережі;
2. Як визначити струми у трансформаторних ділянках мережі;
3. Як визначити струми у поперечних елементах схеми заміщення;
4. Як визначити струми у вузлах електричної мережі;
5. Баланс струмів у вузлах електричної мережі;
6. Що таке струморозподіл в електричній мережі;
7. Як відрізняється струм на початку ділянки і в кінці ділянки;
8. Як визначити потоки потужності у ділянках мережі;
9. Як перевірити баланс потужностей у вузлі мережі;
10. Що таке потокорозподіл в електричній мережі;
11. Як відрізняються потоки потужності на початку ділянки і в кінці ділянки;
12. Варіанти формул для обчислення втрат потужності у ділянках мережі;
13. Як обчислити сумарні втрати потужності в електричній мережі;
14. Як визначити потужності балансуючого вузла;
15. Баланс потужностей в електричній мережі.

Розділ 9. Робоча програма та методичні вказівки До вивчення тем дисципліни

9.1. Вступ

Цілі та завдання дисципліни. Роль прикладної математики та обчислювальної техніки при дослідженнях та проектуванні електроенергетичних мереж і систем. Завдання аналізу і синтезу електричних систем. Режими роботи електричних систем та рівняння, що їх відтворюють. Аналітичні й чисельні методи розв'язання систем рівнянь електричних систем. Класифікація моделей. Побудова моделей, їх реалізація та порівняльні характеристики. Апаратне та програмне забезпечення для реалізації комп'ютерних моделей електричних систем. Загальні відомості про схеми заміщення електричних систем та рівняння стану.

Література: [12, с. 3-9; 13, с. 3-12; 3, с.3-29; 9, с. 3-27; 5, с. 3-7; 9, с.8-32].

Методичні вказівки

Розглядаючи загальні відомості про дисципліну, треба усвідомлювати, що електроенергетичні системи представляють собою великі і складні технічні системи. Вони складаються із великої кількості елементів і описуються в загальному виді системами нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних. Тому проблеми складання та розв'язування цих систем рівнянь невід'ємні від широкого застосування сучасних математичних методів і засобів обчислювальної техніки. Слід чітко розділяти задачі аналізу і синтезу. При розв'язанні задач аналізу для заданих структури і параметрів системи, а також для заданого виду вхідних сигналів треба знайти вид вихідних сигналів, тобто реакцію системи на збурення. Задача синтезу потребує створення структури системи з такими параметрами, щоб на задані збурення система реагувала належними, заданими наперед вихідними сигналами. Слід розуміти складнощі розв'язання завдання синтезу. Необхідно уявляти можливості аналітичних та

чисельних методів при дослідженні електричних систем та при побудові їх математичних моделей. Треба мати чіткі уявлення про можливості сучасного апаратного та програмного забезпечення для дослідження електричних систем, знати складові, з яких утворюються електричні системи, та їх основні характеристики і параметри.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягають цілі та завдання дисципліни?
2. Чому проектування електричної системи вимагає широкого застосування математичних і програмних засобів?
3. Сформулюйте зміст задачі аналізу.
4. Які питання вирішують при синтезі системи?
5. Які особливості задачі синтезу ускладнюють її вирішення?
6. Як класифікують режими електричних систем?
7. У чому різниця між аналітичними й чисельними методами аналізу?
8. Чому аналітичні методи не завжди є прийнятними?
9. Визначте поняття "система" і "модель".
10. Як можна класифікувати моделі? Наведіть приклади.
11. Назвіть основні властивості моделей, за якими можна проводити оцінку їх якості.
12. Які програмні засоби дозволяють створювати комп'ютерні моделі електричних систем?
13. З яких елементів складаються електроенергетичні системи?
14. За яких умов електроенергетична система може бути віднесена до великих складних систем?

9.2. Елементи теорії множин і теорії графів

Основні поняття. Шлях, контур і прадерево графа. Ребро, ланцюг, цикл, дерево графа. Незалежні цикли та контури, цикломатичне число.

Матриці суміжності, кількість дерев, розкриття детермінанта за допомогою графів. Нормальне дерево та алгоритм його формування. Матриця інциденцій і

циломатична матриця, зв'язок між ними. Матриця перетинів, її зв'язок з цикломатичною матрицею, топологічна матриця "контур-вітка".

Формалізовані методи аналізу електричних систем. Структурні елементи та фізичні величини електричного кола. Топологічні рівняння, компонентні рівняння, повна система рівнянь математичної моделі електричної системи.

Література: [12, с. 10-46; 3, с.10-29; 5, с.17-42; 17, с.10-17; 21, с. 39-47].

Методичні вказівки

При вивченні цього розділу треба усвідомлювати, що елементи теорії множин, теорії графів та матричне обчислення дозволяють формалізувати процедури формування математичних рівнянь, що описують електричні системи. Вміння застосовувати на практиці теоретичні положення дають змогу безпомилково записати системи рівнянь для електричних систем, а також розробити загальні алгоритми для комп'ютерної реалізації методів їх формування та розв'язування. Слід ознайомитися з основними поняттями та визначеннями теорії множин, співвідношеннями між множинами та операціями над множинами. Важливо засвоїти поняття графа, шляху, контуру, дерева графа, а також співвідношеннями між кількістю ребер, що їх можна включити до дерева, і порядком включення ребер у дерево електричної системи. Необхідно розібратися з алгоритмами формування топологічних матриць електричної системи та системами рівнянь, які можна сформулювати за допомогою топологічних матриць електричних систем. Слід звернути увагу, що топологічні рівняння не дають необхідної кількості рівнянь для створення повної системи рівнянь математичної моделі електричної системи, тому їх треба доповнити так званими компонентними рівняннями елементів. Слід звернути увагу на набуття навичок при складанні рівнянь практичних систем.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають графом?

2. Чим відрізняється орієнтований граф від неорієнтованого?
3. Який зміст укладається в сигнальні графи для випадку електричної системи?
4. Що називають деревом графа?
5. Як називають ребра графа, що увійшли до складу дерева, і ті, що не увійшли?
6. Які контури називають головними? Як вони утворюються?
7. Що називають розрізом?
8. За якими правилами утворюється дерево електричної системи?
9. Як складають матрицю інциденцій?
10. Які матричні рівняння можна скласти за допомогою матриці інциденцій електричної системи?
11. Як детермінант визначають через дерева графа?
12. Як обчислити загальну кількість дерев графа?
13. Як складають матрицю перетинів?
14. Які матричні рівняння можна скласти за допомогою матриці перетинів електричної системи?
15. Як складається цикломатична матриця?
16. Які матричні рівняння можна скласти за допомогою цикломатичної матриці електричної системи?
17. Який існує зв'язок між цикломатичною матрицею і матрицею перетинів?
18. Які співвідношення характеризують окремі елементи електричної системи?

9.3. Аналіз електричних систем на базі

методу вузлових напруг і контурних струмів

Аналіз електричних систем на базі методу незалежних і вузлових напруг. Недоліки методів контурних струмів та вузлових напруг. Метод визначальних координат. Основні положення топологічних методів аналізу електричних кіл. Перетворення рівнянь з комплексної площини в дійсну.

Література: [12, с. 47-81; 15, с. 122-128; 16, с.42-70; 17, с.17-27; 21, с. 47-55].

Методичні вказівки

При вивченні та засвоюванні матеріалу цього розділу треба розуміти, що методи контурних струмів та вузлових напруг є широко використаними в інженерній практиці розрахунків електричних систем. При вивченні формалізованих методів аналізу електричних систем слід приділити увагу способам отримання рівнянь за методами вузлових напруг, контурних струмів, а також звернути увагу на матричні співвідношення, які приводять до отримання цих систем рівнянь. Треба також усвідомлювати недоліки методів вузлових напруг і контурних струмів, особливо при розгляді рівнянь динамічних режимів електричних систем. При розгляді топологічних методів аналізу електричних систем слід звернути увагу на метод сигнальних графів і метод неспрямованих графів, які дозволяють отримати значну економію часу при знаходженні схемних функцій електричних систем. Треба засвоїти використання топологічної формули Мейсона для вищеназваних методів, при цьому мати навички практичного використання для випадків конкретних електричних систем. Необхідно мати чіткі уявлення про застосування перетворення систем рівнянь з комплексної площини в дійсну, що дає змогу легко розв'язувати системи рівнянь із комплексними коренями, які описують сталі режими електроенергетичних систем.

Запитання для самоконтролю

1. Як обчислити кількість невідомих змінних в повній системі рівнянь математичної моделі електричної системи?
2. Доведіть, що система топологічних та компонентних рівнянь електричної системи є достатньою для повного опису цієї системи.
3. У чому полягає сенс перетворення повної системи рівнянь електричної системи в рівняння за методами вузлових напруг і контурних струмів?
4. Як можна отримати систему рівнянь за методом вузлових напруг, застосовуючи матричні співвідношення?
5. Як можна перетворити джерела напруги в джерела струму для електричної системи?

6. Як можна обчислити напруги та струми на елементах електричної системи після розв'язування системи вузлових рівнянь?
7. У чому полягає суть методу визначальних координат?
8. Як обчислюють передачу сигнального графа за формулою Мейсона?
9. Поясніть еквівалентні перетворення сигнальних графів.
10. Як можна отримати перетворення рівнянь з комплексної площини в дійсну?
11. Поясніть методику перетворення рівнянь з комплексної площини в дійсну на прикладі електричної системи.

9.4. Математичні основи методів аналізу усталених режимів електроенергетичних систем

Аналітичні методи розв'язування систем лінійних рівнянь. Еквівалентні перетворення, алгоритм Крамера. Суть методу Гауса, метод головних елементів. Алгоритм LU- перетворення. Метод оберненої матриці та алгоритми її обчислення. Факторизація матриць. Методи упакування розріджених матриць і векторів. Власні значення і власні вектори матриць, зумовленість матриці. QU-факторизація. Норми матриці та вектора. Обчислення функцій, похибки. Чисельні методи розв'язування нелінійних рівнянь. Методи дихотомії, простої ітерації, Ньютона-Рафсона. Застосування матриці Якобі для розв'язування систем нелінійних рівнянь. Покращення умов збіжності, метод продовження розв'язування за параметром. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь, застосування ітерацій Зейделя. Інтерполяція функцій поліномами Лагранжа і Ньютона. Апроксимація функцій. Наближене інтегрування функцій. Математичні моделі аналізу усталених режимів електричних систем та методи їх формування.

Література: [12, с. 148-228; 16, с.86-94; 17, с.32-47; 18, 354-415; 19, с. 7-139; 22, с. 51-89].

Методичні вказівки

Для засвоєння матеріалу цього розділу треба чітко з'ясувати, що усталені режими електричних систем можуть бути представлені системами алгебраїчних рівнянь відносно напруг або струмів. Коефіцієнти цих рівнянь залежать від параметрів елементів та способу, у який елементи сполучуються між собою. Збуреннями цих систем є вектор величин джерел живлення. У загальному випадку розв'язання цих систем призводить до комплексних коренів, оскільки коефіцієнти та джерела живлення представлені комплексними величинами. Але методом подвоєння цю систему можна звести до еквівалентної системи з дійсними коефіцієнтами і коренями. Таким чином, розв'язування систем можна здійснювати такими відомими методами, як алгоритм Крамера, метод оберненої матриці, метод Гаусса з модифікацією метода головних елементів, використовуючи LU-перетворення. Слід засвоїти використання цих методів на конкретних прикладах, а також представляти можливості сучасної обчислювальної техніки для реалізації алгоритмів, що реалізують названі методи. Треба усвідомлювати переваги методів упакування розріджених матриць. Слід розібратися з методами обчислення власних значень матриць, а також усвідомлювати їх значення для оцінки зумовленості матриці, а також впливу останньої на точність розв'язання. Треба приділити увагу вивченню так званих норм матриць. Для завдань, пов'язаних із заданими потужностями навантажень, система рівнянь є нелінійною, і в цих випадках необхідними для розв'язання є ітераційні чисельні методи. Треба мати чіткі уявлення про алгоритми методів дихотомії, простої ітерації, Ньютона-Рафсона. Слід знати алгоритми обчислення матриці Якобі, а також формули ітераційних чисельних процесів на основі цієї матриці. Для покращення умов збіжності застосовують метод продовження розв'язування за параметром, при вивченні якого необхідно знати можливості введення параметрів для різноманітних варіантів залежно від способів представлення рівнянь. Слід знати можливості методів простої ітерації для розв'язання систем лінійних рівнянь, а також модифікацію Зейделя, яка дозволяє прискорити отримання результатів розрахунків. Слід приділити увагу питанням інтерполяції та апроксимації, які при аналізі електричних систем

можуть застосовуватися для представлення складних нелінійних залежностей і обробки експериментальних даних. Необхідно засвоїти методи чисельного знаходження означеного інтегралу такими методами, як методи Ньютона-Котеса, трапецій, прямокутників, Сімпсона, а також вміти навести оцінки залишкових членів, які визначають точність обчислення. Для засвоєння матеріалу треба знати можливості застосування вивчених методів для розв'язання конкретних завдань аналізу електричних систем, особливості формування моделей для аналізу усталених режимів електричних систем.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає суть методу Крамера для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Як здійснюють еквівалентні перетворення систем лінійних рівнянь та їх матриць при застосуванні методу Гаусса?
3. У чому полягає сенс LU-перетворення, в яких випадках доцільно його застосовувати?
4. Яка матриця називається оберненою, як її можна використовувати для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь електричної системи?
5. Роз'ясніть методи упакування розріджених матриць.
6. Запишіть матричне рівняння для формування характеристичного поліному.
7. Які перетворення дозволяють отримати матрицю у вигляді, придатному для прискореного знаходження власних значень матриці?
8. У чому полягає процес QU-факторизації матриці?
9. Які норми застосовують для оцінки властивостей матриць?
10. Охарактеризуйте суть методів дихотомії та простої ітерації.
11. Проілюструйте використання ітераційних методів прикладами розрахунків простих електричних систем.
12. Яку обчислювальну формулу застосовують для реалізації методу Ньютона-Рафсона?
13. Як можна отримати матрицю Якобі?

14. У чому полягає суть методу продовження розв'язування за параметром?
15. У чому полягає алгоритм розв'язання системи рівнянь методом Зейделя? Які він має переваги перед іншими методами?
16. Які умови можуть бути прийняті для визначення закінчення ітераційних процесів?
17. Який вид мають інтерполяційні формули Лагранжа і Ньютона?
18. У чому полягає різниця між інтерполяцією та екстраполяцією?
19. Як апроксимують функцію за допомогою сплайнів? Наведіть чисельний приклад.
20. Наведіть формули чисельного інтегрування за методами прямокутників та трапецій.
21. Опишіть методіку формування математичних моделей аналізу усталених режимів електричних систем за допомогою методів вузлових напруг та контурних струмів.
22. У чому суть методу балансу потужностей?

9.5. Математичні основи методів аналізу перехідних процесів електроенергетичних систем

Сенс перетворення повної системи рівнянь моделі електричної системи до форми Коші. Метод змінних стану, його переваги перед методами контурних струмів та вузлових напруг. Перетворення повної системи рівнянь до рівнянь стану за допомогою еквівалентних перетворень. Застосування методу суперпозиції для одержання рівнянь змінних стану. Одержання рівнянь стану за допомогою матриць і графів.

Чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь стану електричних систем. Однокрокові й багатокрокові явні методи. Аналіз точності розв'язування. Джерела похибок та методи їх зменшення.

Стійкість методів інтегрування систем диференціальних рівнянь. Неявні методи, їх переваги. Системні методи Ракитського-Демірчана, фундаментальна матриця та методи її обчислення.

Організація автоматизованого аналізу перехідних процесів електричних систем та алгоритми реалізації. Метод кусково-аналітичного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь та його застосування при аналізі електроенергетичних систем із нелінійними елементами.

Література: [12, с. 229-317; 14, 79-210, 237-245; 21, с. 5-39, 55-79; 22, с. 194-228].

Методичні вказівки

При вивченні цього матеріалу слід в першу чергу мати чітке уявлення про те, що будь-які перехідні процеси в електричних системах описуються диференціальними рівняннями, а це, в свою чергу, потребує певних знань з математичного аналізу щодо методів їх розв'язань. Слід розуміти, що формування рівнянь за методом змінних стану представляє раціональну форму цих рівнянь, коли похідні від змінних стану можуть бути обчислені через самі змінні стану й величини джерел електричної енергії. Недоліки методів вузлових напруг та контурних струмів полягають в тому, що вони не дають змоги сформулювати рівняння динаміки в нормальній формі задачі Коші. Треба розглянути конкретні приклади формування рівнянь стану слід за допомогою топологічної матриці, методом графів, а також із використанням методу суперпозиції. Для чисельного розв'язання рівнянь стану треба засвоїти наближені методи, з яких в першу чергу слід звернути увагу на методи Ейлера та Рунге-Кутта. Треба мати уявлення про джерела похибок і способи підвищення точності методів, при цьому оцінку похибки слід проводити в порівнянні з представленням функції рядом Тейлора. Необхідно знати про причини появи нестійкості чисельних методів та про явище жорсткості систем диференціальних рівнянь динамічних режимів. У зв'язку з необхідністю подолання проблем жорсткості треба звернути увагу на неявні методи розв'язування та застосування системних матричних методів на основі матричної експоненти. Слід звернути увагу на способи обчислення матричної експоненти, матричні дії з нею, включаючи операції диференціювання та інтегрування, а також на загальний

вигляд вирішення систем рівнянь динамічних режимів, поданих у вигляді рівнянь стану. При розгляді динамічних режимів нелінійних електроенергетичних систем слід приділити увагу розгляду кусково-лінійної апроксимації та алгоритми автоматичного пошуку рішення з урахуванням послідовності перемикачів кусково-лінійних ключових елементів.

Запитання для самоконтролю

1. Як записують в загальному вигляді диференціальне рівняння за формою задачі Коші?
2. Які переваги має форма задачі Коші для розв'язування диференціального рівняння?
3. Які електричні величини відіграють роль змінних стану для електричних систем?
4. Які переваги має метод змінних стану в порівнянні з методами контурних струмів та вузлових напруг?
5. Охарактеризуйте суть перетворень повної системи рівнянь електричної системи до форми рівнянь змінних стану.
6. Як повинні бути замінені резистивні струми і напруги для одержання рівнянь за змінними стану?
7. Поясніть застосування методу суперпозиції для формування рівнянь змінних стану. Наведіть приклад для простої електричної системи.
8. Які матричні співвідношення дозволяють отримати рівняння для змінних стану?
9. Як можна за допомогою сигнальних графів отримати рівняння для змінних стану?
10. Як можна перетворити рівняння змінних стану до рівнянь з постійними або синусоїдними джерелами електричної енергії?
11. Поясніть геометричну суть однокрокових методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

12. Як визначають порядок методу чисельного інтегрування диференціальних рівнянь?
13. Які фактори зумовлюють похибку в процесі чисельного інтегрування диференціальних рівнянь?
14. Від яких факторів залежить стійкість чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь? Наведіть приклад прояву чисельної нестійкості.
15. У чому полягає суть неявних методів інтегрування диференціальних рівнянь. Які переваги вони мають перед явними методами?
16. Як можна виразити для лінійної електричної системи рівняння для змінних стану?
17. Що являє собою системна матриця, які способи її обчислення можна застосувати?
18. Поясніть суть системних методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь за методикою Ракитського-Демірчана?
19. Опишіть алгоритм автоматизованого формування систем рівнянь за методом змінних стану.
20. У чому суть кусково-лінійної апроксимації нелінійних характеристик електричних двополюсників?
21. Як застосовують метод припасовування для аналізу динаміки нелінійних систем перетворення електричної енергії?
22. Поясніть алгоритми уточнення моментів перемикання напівпровідникових діодів та тиристорів при аналізі динамічних режимів електричних систем перетворення електроенергії.

9.6. Основи теорії стійкості режимів енергетичних систем

Структурні схеми та характеристики систем. Алгебраїчні критерії стійкості Гурвіца, Рауса, Михайлова і Найквіста. Задача аналізу стійкості електроенергетичної системи.

Література: [12, с. 326-343; 22, с. 111-131].

Методичні вказівки

При вивченні основ теорії стійкості слід звернути увагу на визначення понять статичної та динамічної стійкості, а також математичного тлумачення цих досліджень, що зводяться до оцінки стійкості розв'язань диференціальних рівнянь стану при відповідних збуреннях. На цьому базуються методи Ляпунова, які зводяться до аналізу коренів характеристичного рівняння відповідно до двох теорем. Теоретичні викладки слід проілюструвати прикладами. Розглядаючи основні ланки структурних схем, треба звернути увагу на рівняння їх передавальних функцій, а також на класифікацію зворотнього зв'язку на жорсткий і гнучкий. Із алгебраїчних критеріїв стійкості слід вивчити критерії Гурвіца і Рауса, а також проілюструвати їх застосування прикладами. Із частотних критеріїв стійкості звернути увагу на критерій Михайлова. Крім того, слід знати суть способу D-розбиття. Необхідно уявляти постановку та розв'язання задачі аналізу динамічної стійкості режиму енергетичної системи в загальному вигляді.

Запитання для самоконтролю

1. Які існують види збурень електричних систем?
2. Що називають статичною і динамічною стійкістю системи?
3. У чому полягає суть першого методу Ляпунова?
4. Сформулюйте теореми першого методу Ляпунова.
5. Роз'ясніть суть другого методу Ляпунова.
6. Сформулюйте необхідну і достатню умову асимптотичної стійкості рівноваги.
7. Запишіть рівняння типових ланок структурних схем (пропорційної, аперіодичної, диференційної, інтегральної, запізнення, коливної, суматора).
8. Як виражають передавальну функцію розімкненої системи?
9. Які формули застосовують для перетворень структурних схем? Наведіть приклад.

10. Як можна знаходити передавальну функцію структурної схеми за допомогою формули Мейсона? Наведіть приклад.
11. Поясніть суть критеріїв Гурвіца і Рауса.
12. Що називається частотною характеристикою функції?
13. У чому полягає спосіб D-розбиття?
14. Як формулюється задача аналізу динамічної стійкості режиму електроенергетичних систем в загальному вигляді?

9.7. Застосування теорії ймовірностей в задачах електроенергетики

Основні теореми ймовірностей, випадкові величини в електроенергетиці.
Математичні основи теорії надійності.

Література: [12, с. 344-391].

Методичні вказівки

Розглядаючи питання теорії ймовірностей, необхідно з'ясувати основні поняття і теореми, а також вміти застосовувати їх для обчислення реальних завдань, пов'язаних з електроенергетикою. Слід знати, що застосування теорії ймовірностей можливо, наприклад, у зв'язку з випадковістю процесів розподілу навантаження електричних мереж, а також при розгляді процесів пошкодження обладнання, які також мають випадковий характер. Слід звернути увагу на теореми Чебишева і Маркова, а також на практичне застосування теореми Бернуллі. Треба уявляти визначення статистичних законів розподілу випадкових величин, побудову гістограм. Слід вивчити основні положення теорії випадкових функцій, елементи теорії інформації, сутність методу Монте-Карло щодо задач електроенергетики. Особливу увагу треба приділити математичним основам теорії надійності, а також вміти розраховувати надійність елементів систем і систем в цілому на основі аналізу способів з'єднання елементів цієї системи.

Запитання для самоконтролю

1. Чому електроенергетичні системи потребують застосування теорії ймовірностей?
2. Сформулюйте теорему додавання та множення ймовірностей.
3. Як виглядає формула повної ймовірності?
4. Яким законам розподілу ймовірностей підпорядковуються дискретні випадкові величини в електроенергетиці?
5. Які закони можуть описувати неперервні випадкові величини в електроенергетиці?
6. Які числові характеристики застосовують для оцінки окремих особливостей випадкових величин?
7. Опишіть методику оцінки збитків за рахунок відхилення напруги приймачів.
8. У чому полягає методика визначення оптимального числа резервних агрегатів?
9. Сформулюйте теореми Чебишева і Маркова про середнє арифметичне спостережених значень.
10. Як застосовується теорема Бернуллі при розв'язуванні практичних задач?
11. Що являє собою простий статистичний ряд, статистична функція розподілу? Як будується гістограма?
12. За якими формулами обчислюють статистичне математичне сподівання, статистичну дисперсію, коефіцієнт кореляції?
13. Як використовується критерій згоди Колмогорова в задачах електроенергетики? Наведіть приклад.
14. Що називається довірчим інтервалом та довірчою імовірністю?
15. Які властивості мають ергодичні випадкові функції?
16. Що являє собою ентропія і в чому полягає теорема додавання ентропій?
17. Що розуміють під методом Монте-Карло, в чому його суть?
18. Визначте поняття надійності.
19. Як обчислюють інтенсивність відмови?
20. Як умови сполучення елементів впливають на надійність системи.

9.8.Методи оптимізації у задачах електроенергетики

Основи лінійного математичного програмування, симплексний метод.

Нелінійне програмування, чисельні методи розв'язування задач нелінійного програмування. Деякі задачі нелінійного програмування електроенергетичних систем.

Література: [12, с. 392-454; 22, с. 89-111].

Методичні вказівки

Вивчення методів оптимізації щодо завдань електроенергетики слід здійснювати з огляду на те, що проектування електричних систем потребує вибору найкращих варіантів, які приносять найвищу ефективність енергопостачання. Тому треба опанувати основні терміни і показники завдань отримання оптимальних рішень, а також класифікацію завдань і методів оптимізації. Слід звернути увагу на постановку та методи розв'язування задач лінійного програмування, у тому числі на розв'язування транспортної задачі, задачі оптимізації паливно-енергетичного балансу. Вивчаючи задачі нелінійного програмування, треба приділити увагу чисельним методам розв'язання таких задач, у тому числі таким, як методи перебору, покоординатної оптимізації, метод Ньютона, метод штрафних функцій, метод деформованого багатогранника. Слід також мати уявлення про динамічне і стохастичне програмування.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає задача оптимізації, що називають цільовою функцією?
2. Перелічіть відомі вам методи розв'язування задач оптимізації.
3. У чому полягає метод неозначених множників Лагранжа?
4. Які множини і функції називають опуклими?
5. Роз'ясніть геометричний сенс задачі лінійного програмування.
6. У чому полягає алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування за допомогою симплексного методу?

7. Сформулюйте основну теорему двоїстості для задачі лінійного програмування.
8. Як формулюється і розв'язується транспортна задача?
9. Роз'ясніть алгоритм методу узагальнених потенціалів для розв'язування мережної транспортної задачі.
10. Які задачі електроенергетичних систем можуть бути сформульовані як задачі лінійного програмування?
11. Як класифікуються задачі нелінійного програмування?
12. Опишіть алгоритми методів перебору та покоординатної оптимізації.
13. У чому полягає суть методу випадкового пошуку?
14. На чому засновані градієнтні методи оптимізації?
15. Як математично описується алгоритм обчислень за методом Ньютона?
16. Роз'ясніть суть методу штрафних функцій.
17. Наведіть приклади задач нелінійного програмування електроенергетичних систем.
18. У чому полягає суть принципу оптимальності Беллмана?
19. Опишіть стадії розв'язування задачі динамічного програмування.

Розділ 10. Рівняння режимів, що встановилися, електричних систем

10.1 Поняття про режими електричних систем і схемах заміщення

Електрична система є сукупність електричних станцій, електричних мереж і приймачів електроенергії, з'єднаних між собою й зв'язаних спільністю режиму в безперервному процесі виробництва, перетворення, розподілу й споживання електроенергії при загальному керуванні цим режимом [?]. Під режимом електричної системи розуміють її стан, описуване набором характеристик або параметрів режиму.

Режим визначається навантаженнями електричних станцій і споживачів електричної мережі, а також станом схеми мережі. Навантаження міняються в розрізі доби, протягом тижня, у робітники й вихідні дні, посезонно. Схема мережі також змінюється через постійне виробництво на якихось лініях і підстанціях профілактичних робіт, що течуть і капітальних ремонтів, реконструкції й т.п. Тому нормальних режимів електричної системи може бути безліч, але їх параметри лежать у діапазоні від режиму максимальних навантажень до режиму мінімальних навантажень, на які розраховується електрична система при проектуванні.

Зміни електричних навантажень мережі відбуваються в кожний момент часу в силу зміни споживаних потужностей електроприймачів, обумовленого змінним режимом роботи технологічних механізмів (наприклад, тягове навантаження, верстати, ліфти й ін.). режимів, що тому строго встановилися, електричних мереж і систем практично не існує. Що встановилися називається режим, при якому середнє значення параметрів за розглянутий період незмінно або змінюється незначно. Інші режими є перехідними. режими, що встановилися, розділяють на нормальні експлуатаційні (тах, міні навантажень, святкового й вихідного дня), ремонтні, тяжкі й післяаварійні режими.

Сукупність навантажень споживачів і навантажень електричних станцій являє собою незалежні характеристики режиму електричної системи. А струми,

потоки потужностей по лініях мережі й трансформаторам і рівні напруг на шинах підстанцій (у вузлах електричної мережі) залежать від величин навантажень споживачів, навантажень електростанцій, конфігурації й параметрів схеми електричної мережі і являють собою безліч залежних характеристик режиму.

У цей час розрахунки режимів електричних мереж виконуються на ПЕВМ. Для розрахунків мережі на ПЕВМ недостатньо мати схему, звязність якої візуально сприймається. Необхідно створити в пам'яті ЕОМ математичну модель електричної мережі і її режиму, які однозначно представляли б мережу в пам'яті ЕОМ, дозволяли виконувати розрахунки її режимів і вести їх різноплановий аналіз.

Для розрахунків режимів електричних мереж користуються схемами заміщення, описаними в [1-10], і математичними моделями. Математична модель режиму електричної мережі являє собою сукупність організованих певним чином (у бази даних) числових масивів інформації про конфігурацію й параметри електричної мережі, заданих характеристиках режиму по вузлах мережі й програм обробки цієї інформації, що реалізують рівняння зв'язку між залежними й незалежними характеристиками режиму на основі параметрів схеми мережі. Принципово в одних методах розрахунків режиму спочатку визначаються струми й потоки потужностей по вітках, а потім падіння напруг на вітках і напруги у вузлах мережі (на шинах підстанцій), а в інших методах ідуть від розрахунків напруг на шинах підстанцій до визначення струмів, потоків і втрат потужності по лініях мережі.

Схеми заміщення електричних систем являють собою сукупність загальноприйнятих для моделювання режимів, що встановилися, схем заміщення окремих елементів – генераторів, трансформаторів, ліній, навантажень.

Для принципової схеми електричної системи рис.1 може бути складена схема заміщення рис.2, параметри якої будемо вважати наведеними до одному рівні напруги. Ця схема може бути спрощена, якщо навантаження підстанцій

просумувати із втратами потужності в трансформаторах, тобто привести їх до сторони вищої напруги, як показано на рис. 3

Технологічна постановка завдання розрахунків режиму наступна:

Для схеми електричної мережі відомої конфігурації й параметрів потрібно визначити напруги у вузлах, а також струми, потоки й втрати потужності в вітках складнозамкненої мережі при заданій напрузі в одному з вузлів мережі, називаним опорним, для зручності запису рівнянь сполученим з балансуєчим вузлом - БВ, (як правило – шини електростанції або великої підстанції енергосистеми) і відомих навантаженнях в інших вузлах мережі, заданих у струмах або потужностях J_u, S_u .

Особливістю електричних систем і рівнянь їх, що встановилися режимів є багатомірність і нелінійний характер зв'язки заданих і шуканих характеристик режиму, а саме:

- число ліній і підстанцій мережі, а, отже – вузлів і віток схеми заміщення, і кількість рівнянь, що описують параметри їх режимів, може становити десятки, сотні й більш;

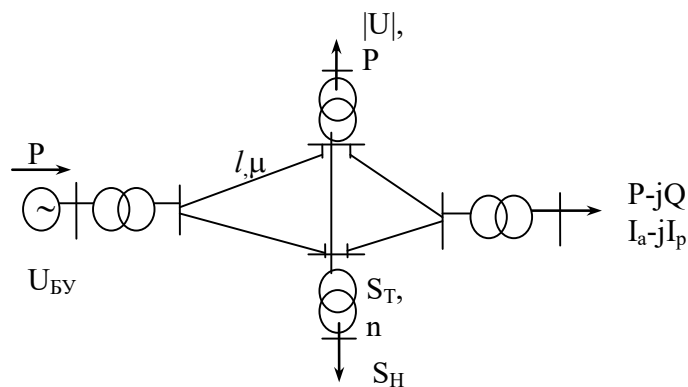


Рис. 10.1. Принципова схема електричної системи

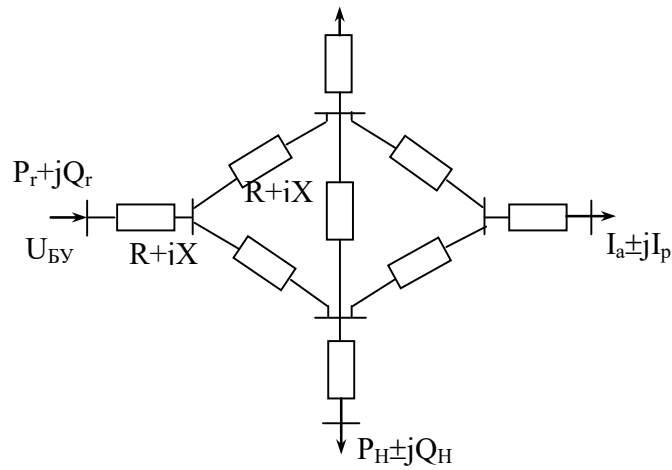


Рис.10.2. Схема заміщення електричної системи; параметри схеми наведені до одному рівні напруги

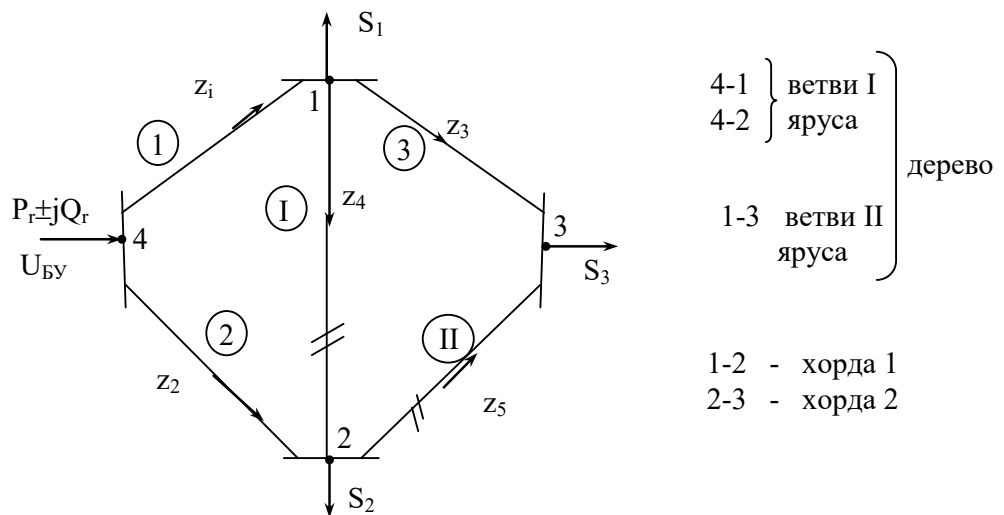


Рис.10.3. Связанный направленный граф, соответствующий упрощенной схеме замещения с нагрузками, приведенными к стороне высшего напряжения подстанций

- нелінійний (у загальному випадку) характер рівнянь взаємозв'язки заданих і шуканих характеристик режиму – струмів, напруг, потужностей, є принципово важлив, що ускладнюють розрахунки режимів фактором при використанні як вузлових, так і контурних і інших методів опису режимів. Нелінійність рівнянь збільшує проблему збіжності ітераційних процесів їх

розв'язку й породжує проблему неоднозначності результатів розрахунків режимів.

10.2 Аналітичне представлення інформації про конфігурацію електричної мережі за допомогою матриць інциденцій і матричний запис законів Кирхгофа

10.2.1. Принципи нумерації елементів схеми

Математичний опис і аналіз схем заміщення електричних мереж ведеться з використанням теорії графів. Очевидна відповідність елементарних понять із теорії графів і теорії електричних кіл, а саме:

- однолінійній схемі заміщення трифазної симетричної складнозамкненої електричної мережі відповідає зв'язаний спрямований граф, який складається з вершин і ребер, що утворюють дерево й хорди схеми. Аналогічні поняття й терміни з теорії ланцюгів – вузол, вітки, розгалужена розімкнута мережа й віток контури, що замикають, або контурні віток.

Узагальнена аналітична представлення зв'язності графа (або конфігурації мережі) може бути дане за допомогою матриць з'єднань (інциденцій):

- матриці з'єднань віток у вузлах M , або I матриці інциденцій, яка дозволяє сформувати вузлову модель електричної мережі й у найбільш загальному виді записати рівняння I закону Кирхгофа;

- матриці з'єднання віток у незалежні контури N або II матриці інциденцій, яка дозволяє сформувати контурну модель електричної мережі й у загальному виді записати рівняння II закону Кирхгофа.

Для аналітичного представлення конфігурації у вигляді матриць інциденцій, схема заміщення або її граф повинні бути попередньо пронумеровані. У загальному випадку нумерація елементів схеми може бути довільна, але на стадії освоєння предмета для забезпечення наочної структури матриць параметрів мережі й рівнянь стану, доцільно вести впорядковану нумерацію елементів схем з використанням принципу ярусності.

У схемі електричної системи вибирають балансуєчий вузол (БВ) – шини електростанції або великої підстанції енергосистеми, потужність якого, на відміну від інших вузлів мережі, не фіксується. Балансуєчому вузлу привласнюється останній $(n+1)$ -й номер.

Порядок нумерації схем з урахуванням принципу ярусності:

1. Послідовно числами натурального ряду на графові схеми нумеруються всі вітки, що беруть свій початок у балансуєчому вузлі, і такі ж номери привласнюються вузлам (вершинам), які є кінцями цих віток (кінцем першої віток повинен бути вузол 1, кінцем другий – вузол 2, і т.д.). Ці вітки складуть перший ярус схеми.

2. Потім, починаючи з 1-ої вершини графа, по аналогічному принципу, вибираються й нумеруються вітки другого ярусу, що відтікають від кінцевих вершин віток першого ярусу, потім вітки третього ярусу, що відтікають від кінцевих вершин віток другого ярусу й т.п. Тобто, початковими вершинами віток наступного ярусу служать кінці віток попереднього ярусу, і розгляд вузлів ведеться в порядку зростання їх номерів: - у цьому суть принципу ярусності (у реальній схемі електричної мережі може бути кілька сотень віток). Для всіх віток за позитивний приймається напрямок від початкової вершини до кінцевої й номер початку вітки менше номера кінця ($N_{нач} < N_{кон}$).

Сукупність n віток схеми, що становлять мінімальний зв'язаний підграф, що забезпечує зв'язок балансуєчого вузла з усіма n незалежними вузлами схеми, утворює так зване дерево мережі.

3. Коли в ході нумерації зустрічається вітки, що підтікає до раніше пронумерованого вузла, те ця вітки замикає собою контур – і називається хордою. Для кожної з хорд за позитивний також приймається напрямок від початкової вершини до кінцевої. Хорди умовно позначаються на схемі й окремо нумеруються (I, II, III, ... k, де k – число контурів) на додаток до наскрізної нумерації віток $i = 1, 2, \dots, m$.

4. У результаті нумерації схеми формується масив номерів (і найменувань) віток дерева з n елементів, масив номерів (і найменувань) вузлів

N_n – з n елементів, i масив номерів (i найменувань) хорд схеми – k елементів, де $k + n = m$ – повному числу віток схеми.

Що склалось в процесі нумерації елементів схеми порядок проходження інформації усередині масивів номерів вузлів і номерів віток далі зберігається для всіх інших однорідних масивів заданих параметрів схеми й шуканих характеристик режиму по вузлах і вітках:

- найменувань вузлів
- найменувань віток $N_{нач} - N_{кон}$
- параметрів віток схеми (R_v, X_v, Y_c);
- заданих параметрів режиму по вузлах мережі (P_u, Q_u, J_u);
- шуканих характеристик режиму по вузлах і вітках $U_u, \Delta U_v, I_v, P_v, Q_v,$

ΔP_v і т.п.

10.2.1 Перша матриця інциденцій « вузли-вітки» і її застосування для запису 1-го закону Кирхгофа

Для складання першої матриці інциденцій $M_{n \times m}$ заготовлюється таблиця, що полягає з n рядків (по числу вузлів) і m стовпців (по числу віток), де $m = n + k$. Рядки її відповідають вузлам, а стовпці - віткам схеми заміщення.

Номер рядка матриці відповідає номеру розглянутого вузла i . Номер стовпця j відповідає номеру розглянутої віток в об'єднаному масиві інформації про вітки. Елемент $m_{i,j}$ матриці, що належить i -й рядку й j -ому стовпцю, може ухвалювати одне із трьох значень: $+1, -1,$ або 0

$m_{i,j} = 1$ - якщо вузол i є початковою вершиною віток j (вітки j “відтікає” від вузла i).

$m_{i,j} = -1$ - якщо вузол i є кінцевою вершиною віток j (вітки j “підтікає” до вузла i).

$m_{i,j} = 0$ -якщо вузол i не є вершиною віток j , тобто не пов'язаний із цією вітками.

Правило знаків про напрямки для, що підтікають віток, що й відтікають, можна прийняти будь-яке, але одне для розв'язуваного завдання. Ми дотримуємося прийнятого в [1].

Кожна i -я рядок матриці M показує, які віток j , де $j = 1, 2, \dots, m$, пов'язані з даним вузлом i і як вони спрямовані. Якщо ввести в розгляд вектор-стовпець струмів віток I_B , де $I_B = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots \ I_m]^T$, то добуток i -й рядка матриці M на вектор-стовпець струмів віток I_B , отримане за правилами дій з матрицями, дасть алгебраїчну суму струмів, що сходяться по вітках в i -тому вузлі, і ця сума повинна бути дорівнює струму у вузлі J_{vi} , тобто одержуємо вираз I-Го закону Кирхгофа для відповідного вузла i

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} I_j + J_{vi} = 0 \quad (1)$$

Якщо таке множення виконати для всіх рядків матриці M , то одержимо запис першого закону Кирхгофа для схеми в цілому:

$$M \cdot I_B = -J_v \quad (2)$$

де $J_v = [J_1 \ J_2 \ J_3 \ \dots \ J_n]^T$ – вектор-стовпець струмів, що задають, в n незалежних вузлах (не є незалежним вузлом).

1-я матриця інциденцій M , доповнена рядком зв'язності для балансуєчого вузла $M_{n+1,j}$, де $j = 1, \dots, m$, позначається як M_Σ . Кожний j -ий стовпець матриці M_Σ містить обов'язково $+1$ і -1 і вказує, які вузли обмежують дану j -ую вітку. Сума елементів будь-якого j -го стовпця матриці M_Σ дорівнює нулю.

Знаки для елементів векторів-стовпців струмів віток I_B і струмів вузлів J_v , що входять до складу вираз (1), (2), ухвалюються, як і для елементів матриці M . Отже, струми навантажень варті у векторі J_v , відтікають від вузлів і мають знак “+”, струми генераторів підтікають до вузлів і мають знак “-”

$$J_v = \begin{bmatrix} J_H \\ -J_G \end{bmatrix}$$

При прийнятій роздільній нумерації віток дерева й хорд, матриця $M = [M_\alpha \ M_\beta]$ формується як блокова із блоком M_α розмірністю $(n \times n)$ - для

дерева мережі, і блоком M_β розмірністю $(n \times k)$ – для хорд. Відповідно вектора параметрів віток і параметрів режиму віток будуть містити складові для дерева мережі з індексом α ($Z_\alpha, I_\alpha, S_\alpha$), і для хорд із індексом β ($Z_\beta, I_\beta, S_\beta$)

$$dZ_B = \begin{bmatrix} dZ_\alpha & 0 \\ 0 & dZ_\beta \end{bmatrix}; I_B = \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

З урахуванням блокової структури матриць вираз (2) прикмет вид:

$$[M_\alpha M_\beta] \cdot \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix} = -J_y \quad (4)$$

Виконавши множення, одержимо:

$$M_\alpha \cdot I_\alpha + M_\beta \cdot I_\beta = -J_y \quad (5)$$

Для схеми типу дерева – розімкнутої мережі, контуру й хорди відсутні, $M_\beta = 0$, $I_\beta = 0$. Тоді вираз (5) прикмет вид

$$M_\alpha \cdot I_\alpha = -J_y \quad (6)$$

Підматриця M_α квадратна, невиврождена, сума її рядків не звертається в нуль, оскільки для БВ рядок відсутня. Отже, рівняння (6) може бути вирішене щодо струмів у вітках дерева I_α :

$$I_\alpha = M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y) \quad (7)$$

Зворотну матрицю M_α^{-1} можна знаходити прямим обігом матриці M_α для дерева мережі, але можна визначити шляхом елементарних перетворень матриці M_α . До елементарних перетворень ставляться:

- перестановка рядків.
- множення всіх елементів рядків на число не рівне нулю.
- додаток до рядка іншого рядка, помноженої на деяке число.

Схематично процес знаходження зворотної матриці можна зобразити так:

$$M_\alpha \cdot E \rightarrow \text{елементарні перетворення} \rightarrow E \cdot C_p,$$

де E – одинична матриця.

Тут матриця C_P – зворотна для матриці M_α ($C_P = M_\alpha^{-1}$) – являє собою матрицю коефіцієнтів струморозподілення для дерева мережі; згідно (6) її елемент $C_{P ij}$ показує, яка частка від струму j -го вузла J_j буде протікати по i -ой вітки дерева схеми.

В окремому випадку розімкнутої мережі типу дерева по рівнянню (7), за допомогою матриці C_P при відомих струмах, що задають, J_v вузлів може бути знайдене струморозподілення в вітках – I_α матриця :

$$I_\alpha = C_P \cdot (-J_v) \quad (8)$$

У розімкнутому режимі по схемах типу дерева працює цілий клас електричних мереж – розподільні мережі з номінальними напругами 0,4кВ, 6-10кВ, 35кВ, частково 110кВ, які виконані (споруджені) як замкнені мережі з резервуванням, але працюють у розімкнутому режимі. Тому швидкі й ефективні способи розв'язку на ЕОМ завдання (7), (8) практично актуальні, і були розроблені й програмно реалізовані в 70-х роках у роботах кафедри « Електричні мережі й системи» Київського політехнічного інституту, Білоруського політехнічного інституту й з'явилися основою програмних комплексів аналізу оптимізації режимів розімкнутих мереж, наприклад, пошук оптимальних місць розмикання міської кабельної мережі за критерієм мінімуму втрат потужності й енергії та ін.

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняються матриці M , M_α , M_Σ ?
2. Чому рівна сума елементів стовпця матриці M_Σ й чому?
3. Чому рівна сума всіх рядків матриці M_Σ , узята по стовпцю?
4. У якому випадку система рівнянь (2) має розв'язок?
5. Який фізичний зміст елемента рядка C_{ij} матриці коефіцієнтів струморозподілення C_P ?
6. Чому рівна сума елементів стовпця матриці C_P ?

7. Чому рівні діагональні елементи матриці M_α при впорядкованій нумерації вузлів і віток, заснованої на принципі ярусності?

8. Як знайти зворотну матрицю?

9. Що значить розрахувати режим електричної системи?

10. Приведіть состав вихідної інформації про режим електричної системи й состав вихідної інформації про режим.

10.2.2 Друга матриця інциденцій « вітки-контури» і матричний запис другого закону Кирхгофа

Для узагальненої аналітичного представлення конфігурації розрахункової схеми заміщення електричної мережі, або в термінах теорії графів - зв'язності спрямованого графа, відповідного до схеми заміщення електричної мережі, при записі II закону Кирхгофа, служить матриця з'єднань віток у незалежні контури N – так звана друга матриця інциденцій « контури-віток».

Матрицю N можна представити у вигляді таблиці, рядка якої відповідають незалежним контурам, а стовпці - вітках схеми. Відповідно матриця N має k рядків і m стовпців; її елементи можуть ухвалювати значення $n_{ij} = \pm 1; 0$.

$$N = (n_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$n_{ij} = 1$, якщо вітки j входить до складу контуру i і їх напрямку збігаються;

$n_{ij} = -1$, якщо вітки j входить до складу контуру i , але їх напрямки протилежні;

$n_{ij} = 0$, якщо вітки j не входить у контур i .

Кожний рядок матриці N показує, які віток утворюють відповідний незалежний контур. Кожний стовпець матриці показує, до складу яких незалежних контурів входить дана вітки, і як співвідноситься напрямком віток з напрямком обходу конкретного контуру. При впорядкованій нумерації схеми з урахуванням принципу ярусності вітки дерева й хорди одержують умовний позитивний напрямком від початку до кінця, тобто від вузла з номером N_n до вузла з номером N_k , де $N_n < N_k$. Напрямок обходу i -го контуру відповідає напрямку i -й хорди, що замикає цей контур.

На рис. 4 показаний спрямований граф, відповідний до схеми заміщення трехконтурної електричної мережі. Приведемо приклад складання матриці N для вже пронумерованої з урахуванням принципу ярусності схеми.

Складемо таблицю для матриці N з 3 рядків і 7 стовпців відповідно 3 контурам і 7 вітках схеми. Пронумеруємо її рядка й стовпці відповідно номерам контурів і номерам віток схеми; відокремимо підматриці N_α , N_β для дерева й хорд.

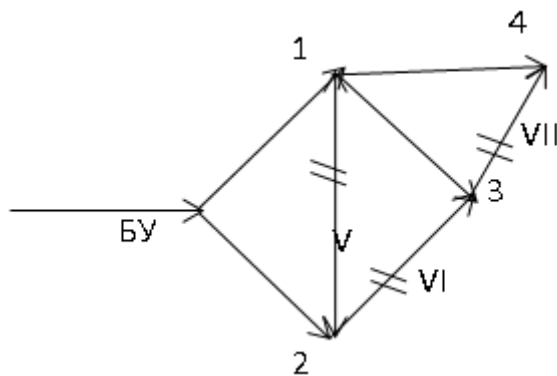


Рис. 10.4

Таблиця 10.1

	N_α				N_β		
Вітки контури	1	2	3	4	5	6	7
I	1	-1	0	0	1	0	0
II	-1	1	-1	-1	0	1	0
III	0	0	1	-1	0	0	1

Пояснимо заповнення **першого рядка** матриці N для I-Го контуру.

Підматриця N_α : 1-ая вітки дерева входить до складу I-Го контуру і її напрямок збігається з напрямком I-Ой хорди - $n_{\alpha 11} = 1$; 2-ая вітки дерева також входить до складу I-Го контуру, але її напрямок протилежний - $n_{\alpha 12} = -1$. Інші віток дерева не входять у перший контур, тому перший рядок підматриці N_α завершуємо нулями.

Підматриця N_β . I-Й контур замикається I-Ой хордою. Її напрямок – 1-2 “ від вузла з меншим номером до вузла з більшим номером”. Воно ж визначає напрямок обходу по контуру, тому елемент $n_{\beta 11} = 1$. Інші хорди (за принципом нумерації) не входять в I-Й контур, тобто $n_{\beta k} = 0$ при $k \neq 1$.

Другий рядок матриці N для 2-го контуру утворюється вітками дерева 1-ой, 2-ой, 3-ой, і II-Ой хордою. Причому, з урахуванням напрямку II-Ой хорди (вітки б між вузлами 2 – 3) елементи:

$$n_{\alpha 21} = -1; n_{\alpha 22} = 1; n_{\alpha 23} = -1; n_{\alpha 24} = -1; n_{\beta 21} = 0; n_{\beta 22} = 1; n_{\beta 23} \equiv n_{27} = 0.$$

Третій рядок матриці N відповідає III-Му контуру й утворюється вітками дерева 3-ій і 4-ой і III-Їй хордою.

Рядок $N_{\alpha 3j}$:

$$n_{\alpha 31} = 0; n_{\alpha 32} = 0; n_{\alpha 33} = 1; n_{\alpha 34} = -1; n_{\beta 31} = 0; n_{\beta 32} = 0; n_{\beta 33} = 1.$$

Одержали блокову матрицю

$$N = \begin{bmatrix} N_\alpha & N_\beta \end{bmatrix},$$

де N_β - одинична матриця.

Відзначимо, що наведена матриця N складена для базисної системи незалежних контурів, яка відповідає трьом відомим умовам:

- кожна хорда входить тільки в один контур;
- напрямок обходу по контуру відповідає напрямку хорди;
- номер хорди відповідає номеру контуру.

Матриця N дозволяє записати для електричної мережі в цілому систему взаємно незалежних рівнянь по другому закону Кирхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг по вітках замкненого контуру дорівнює нулю.

$$N \cdot U_B = 0 \tag{9}$$

де $U_B = [U_{Bi}]$, $i = 1, 2, \dots, m$ – вектор-стовпець падінь напруг на вітках схеми.

За законом Ома в матричній формі для всіх ділянок мережі в цілому можна записати вектор-стовпець спадань напруги на вітках:

$$U_B = dZ_B \cdot I_B - E_B, \quad (10)$$

де dZ_B – діагональна матриця опорів віток m -го порядку;

вектор- $E_B = [E_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$ -стовпець ЕРС у вітках;

вектор- $I_B = [I_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$ -стовпець струмів у вітках.

Підставляючи (10) в (9), одержуємо матричну форму 2-Го закону Кирхгофа:

$$N \cdot (Z_B \cdot I_B - E_B) = 0$$

або

$$N \cdot Z_B \cdot I_B = E_K \quad (11)$$

Тут вектор- $E_K = N \cdot E_B$ -стовпець контурних ЕРС, що представляють собою алгебраїчну суму ЕРС віток, що входять у кожний незалежний контур.

10.2.3 Визначення блоків Іі-Ой матриці інциденцій «вітки – контури» на основі блоків 1-ой матриці «вузли – віток»

Після того, як для схеми (вручну або на ЕОМ за допомогою машинного алгоритму) складена блокова І-ая матриця інциденцій $M = [M_\alpha \ M_\beta]$, у якій відділені дерево й хорди схеми, процес одержання блокової Іі-Ой матриці з'єднань $N = [N_\alpha \ N_\beta]$ можна формалізувати й алгоритмизувати. Покажемо це.

У вираженні (9) U_B - спадання напруги на вітках, можна записати як:

$$U_B = M^T \cdot U_\Delta \quad \text{або} \quad U_B = M_\Sigma^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{by} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$U_\Delta = U_y - n \cdot U_{by}, \quad (13)$$

де U_y – вектор-стовпець напруг у вузлах мережі n -го порядку;

n – одиничний вектор-стовпець n -го порядку.

Підставляючи (12) в (9), одержимо з 2-го закону Кирхгофа:

$$N \cdot M^T \cdot U_\Delta = 0 \quad (14)$$

Якщо добуток трьох величин дорівнює нулю, то дорівнює нулю один зі співмножників або добуток двох інших.

Оскільки $U_{\Delta} \neq 0$, отже

$$N \cdot M^T = 0 \quad (15)$$

Формула (15) виражає загальну топологічну властивість зв'язаного спрямованого графа. Для подальшого розгляду й можливості яких-небудь перетворень вона може бути переконливо витлумачена [1].

Підставимо матриці N і M у вигляді їх блоків вираз (15)

$$\begin{bmatrix} N_{\alpha} & N_{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{\alpha}^T \\ M_{\beta}^T \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

Помітимо, що M_{α} і N_{β} – квадратні й оборотні матриці.

Перемноживши, одержимо

$$N_{\alpha} \cdot M_{\alpha}^T + N_{\beta} \cdot M_{\beta}^T = 0 \quad (17)$$

При формуванні базисної системи незалежних контурів підматриця N_{β} є одинична матриця, тобто $N_{\beta} = E$, і при множенні E опускається. Одержуємо:

$$N_{\alpha} \cdot M_{\alpha}^T + M_{\beta}^T = 0 \quad (18)$$

Тепер виразимо підматрицю N_{α} з (18), множачи обоє доданків на $(M_{\alpha}^T)^{-1}$ праворуч:

$$N_{\alpha} = -M_{\beta}^T \cdot (M_{\alpha}^T)^{-1}, \quad (19)$$

а

$$N_{\alpha}^T = -M_{\alpha}^{-1} \cdot M_{\beta}.$$

Тобто при виділенні базисної системи незалежних контурів, коли $N_{\beta} = E$, підматрицю N_{α} можна одержати виконанням стандартних операцій над блоками першої матриці інциденцій M_{α}, M_{β} .

На використанні другої матриці інциденцій заснований повний метод розрахунків і аналізу електричного режиму – метод контурних рівнянь, який буде розглянутий нижче.

Питання для самоперевірки

1. Яка структура й розмірність другої матриці з'єднань?
2. При яких умовах N_β - одинична матриця?
3. Як формулюється основна властивість зв'язаного спрямованого графа?
4. Дайте характеристику й область застосування другої матриці інциденцій N .
5. Чому для знаходження напруг вузлів мережі щодо базисного U_Δ з виражень $U_B = M^T \cdot U_\Delta$ досить звернути матрицю M_α^T ?
6. Який зв'язок існує між підматрицями першої й другої матриць інциденцій і як вона формулюється?
7. Обґрунтуйте достатність інформації, що втримується в підматрицях M_α^{-1} , M_β для формування підматриці N_α .

10.2.3 Запис рівнянь стану мережі за законами Кирхгофа

Рівняння стану електричної мережі за законами Кирхгофа (2) і (11) зв'язані загальним вектором шуканих невідомих - струмів віток I і утворюють систему з m рівнянь із n невідомими

$$\begin{cases} M \cdot I_B = -J_y \\ N \cdot dZ_B \cdot I_B = N \cdot E_B \end{cases}$$

або, увівши складові (блокові) матриці, одержуємо

$$\begin{bmatrix} M \\ N \cdot dZ_B \end{bmatrix} \cdot I_B = \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix} \quad (20)$$

Матриці з'єднань M , N і діагональну матрицю опорів віток dZ_B можна представити у вигляді блоків для дерева й хорд схеми як в (3), (16):

$$\begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \\ N_\alpha \cdot dZ_\alpha & N_\beta \cdot dZ_\beta \end{bmatrix} \cdot I_B = \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix} \quad (21)$$

або, прийнявши позначення

$$\begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \\ N_\alpha \cdot dZ_\alpha & N_\beta \cdot dZ_\beta \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix} = F;$$

запишемо (21) як

$$A \cdot I_B = F \quad (22)$$

Тут A – квадратна складена матриця коефіцієнтів системи рівнянь порядку m , містить інформацію про вузлову й контурну моделі конфігурації мережі у вигляді матриць M і N й про параметри мережі Z_α, Z_β ; F – вектор-стовпець правих частин системи рівнянь – містить J_y - струми, що задають, вузлів E_B - і ЕРС - віток незалежні задані характеристики режиму I_B ; – вектор-стовпець невідомих системи - рівнянь струми віток $I_B^T = [I_\alpha I_\beta]^T$ - схеми шукані характеристики режиму.

Рівняння (21), (22) вирішується щодо струмів віток I_B .

$$I_B = A^{-1} \cdot F \quad (23)$$

По знайденому струморозподіленню I_B й відомій напрузі в балансуєчому вузлі U_{BV} можуть бути знайдені спадання напруги на вітках ΔU_B і напруги інших вузлів мережі U_{AV}, U_V . Таким чином, завдання розрахунків режиму в лінійній постановці задовільно вирішується по рівняннях Кирхгофа, однак для промислових програм цей підхід не застосовується, тому що порядок системи рівнянь (22) матриці, що й звертається, A великий – дорівнює числу віток схеми m . Для розробки промислових програм розрахунків режимів застосовуються методи, що приводять до систем рівнянь стани з матрицями меншої розмірності – вузлові методи або контурні методи розрахунків режимів, що встановилися, електричних систем.

10.3 Метод рівнянь вузлових напруг

10.3.1 Вивід вузлових рівнянь

Ці рівняння виводяться з виразів рівнянь балансу струмів у вузлах по першому закону Кирхгофа (2). Для електричної мережі в матричній формі запису

$$M \cdot I_B = -J_y, \quad (24)$$

де J_y – вектор- стовпець струмів, що задають, вузлів n -го порядку;

I_B – вектор- стовпець шуканих струмів віток порядку m .

У загальному випадку із цього рівняння не можна знайти струморозподілення I_B , тому що число рівнянь дорівнює числу вузлів n , а число невідомих дорівнює числу віток m . Виразимо струми віток через спадання напруги на вітках ΔU_B , ухвалюючи $E_B = 0$ (що досить типово)

$$I_B = dZ_B^{-1} \cdot (\Delta U_B + E_B). \quad (25)$$

Спадання напруги на вітках ΔU_B , з використанням I - ой матриці з'єднань M , M^T можна виразити через напруги вузлів електричної мережі U_y або $U_{\Delta y}$, тобто через вектор-стовпець меншої розмірності, чому число віток:

$$(\Delta U_B + E_B)_{[m \times 1]} = M_{[m \times n]}^T \cdot U_{\Delta y}_{[n \times 1]} \quad (26)$$

або

$$(\Delta U_B + E_B)_{[m \times 1]} = M_{\Sigma [m(n+1)]}^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{By} \end{bmatrix}_{[(n+1) \times 1]}$$

Тут M^T – транспонована I -Я матриця інциденцій,

$U_{\Delta y}$ – вектор-стовпець падінь напруг у вузлах мережі щодо базисного вузла,

U_y – вектор-стовпець напруг вузлів електричної мережі n -ого порядку,

$$U_y = n \cdot U_{By} + U_{\Delta y} \quad (27)$$

$\begin{bmatrix} U_y \\ U_{By} \end{bmatrix}$ - складений вектор $(n+1)$ -го порядку, що містить n - U_y ого порядку й напруга в балансуєчому вузлі U_{By} .

Підставивши в рівняння (24) струми віток з (25) і спадання напруги на вітках мережі з (26), одержимо:

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot U_{\Delta y} = -J_y \quad (28)$$

Позначимо добуток трьох матриць M, dZ_B^{-1}, M^T через Y_y :

$$Y_y = M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T \quad (29)$$

Y_y – квадратна неособлива матриця n-го порядку. Її називають матрицею власних і взаємних провідностей вузлів електричної мережі – найважливіша матриця параметрів в аналізі електричних мереж.

З урахуванням підстановки формула (29) прикмет наступний вид

$$Y_y \cdot U_{\Delta y} = -J_y \quad (30)$$

Вираз (30) представляє систему вузлових рівнянь режиму, що встановився, електричної мережі при завданні навантажень у струмах.

Якщо виразити ΔU_B по (26) через абсолютні значення напруг вузлів $U = U' + ju'' U_y$ й підставити в (24), то одержимо

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_{\Sigma}^T \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{BY} \end{bmatrix} = -J_y \quad (31)$$

Добуток $M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_{\Sigma}^T$ являє собою матрицю Y_y , доповнену стовпцем провідностей між i-м і балансуєчим вузлами y_{i0}

$$M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_{\Sigma}^T = [Y_y \quad y_{i0}], \quad (32)$$

де y_{i0} - стовпець провідностей віток, що зв'язують БВ зі схемою.

З обліком (32) ліва частина системи вузлових рівнянь (30) одержить вид

$$[Y_y \quad y_{i0}] \cdot \begin{bmatrix} U_y \\ U_{BY} \end{bmatrix} = Y_y \cdot U_y + y_{i0} \cdot U_{BY} \quad (33)$$

Переносячи відомий добуток $y_{i0} \cdot U_{BY}$ у праву частину (31), одержимо систему вузлових рівнянь, складену для напруг вузлів електричної мережі U_y

$$Y_y \cdot U_y = -J_y - y_{i0} \cdot U_{BY} \quad (34)$$

Зауважуємо, що обидві системи вузлових рівнянь (30) і (34) мають матриці коефіцієнтів Y_y – матриці вузлових власних і взаємних провідностей.

Оскільки матриця вузлових провідностей Y_y для сукупності незалежних вузлів схеми невироджена, те системи рівнянь (30) і (34) можуть бути вирішені (шляхом обігу цієї матриці або іншим способом) щодо векторів залежних змінних $U_{\Delta y}$ або U_y

$$U_{\Delta V} = Y_y^{-1} \cdot (-J_y) \quad (35)$$

$$U_y = Y_y^{-1} \cdot (-J_y - y_{i,\delta} \cdot U_{BY}) \quad (36)$$

Навантаження у вузлах мережі часто представляють через вузлові потужності, що задають.

$$J_{y_i} = \frac{S_{y_i}}{\widehat{U}_{y_i}} \quad (37)$$

Тоді

$$Y_y \cdot U_{\Delta V} = \left[-\frac{S_{y_i}}{\widehat{U}_{y_i}} \right] \quad (38)$$

або

$$Y_y \cdot U_{\Delta V} = \left[-\frac{S_{y_i}}{\widehat{U}_{\Delta y_i} + U_{BY}} \right] \quad (39)$$

$$Y_y \cdot U_y = \left[-\frac{S_{y_i}}{\widehat{U}_{y_i}} - y_{i,\delta} \cdot U_{BY} \right]$$

З рівнянь (38), (39) випливає важливий висновок: завдання розрахунків, що встановився режиму електричної мережі по природі своєї нелінійна, оскільки в правій частині в знаменнику також присутні невідомі $U_{\Delta y_i}$ або U_{y_i} .

Системи нелінійних рівнянь (38) – (40) можуть дозволятися щодо шуканих напруг вузлів аналогічно (35) з організацією зовнішнього ітераційного процесу корекції струмів, що задають, по по вузлових потужностях S_y й розрахованим U_{y_i} напругам (37).

Якщо напруги вузлів розрахована з бажаною точністю (по виразх (35), (36) або якими-небудь іншими методами), то інші параметри режиму – струми віток I_B , потоки й втрати потужності S_{ij} , ΔS_{ij} – визначаться однозначно й точно.

10.3.2 Визначення й характеристика матриці вузлових провідностей

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь вузлових напруг Y квадратна (у силу способу її одержання) неособлива, симетрична, n -ого порядку, для схем

змінного струму має комплексні елементи або розпадається на дві речовинні матриці $Y = Y' - jy''$. Для реальних схем електричних мереж матриця слабкозаповнена. З n^2 її елементів тільки приблизно $4n$ елементів є ненульовими (ухвалюючи, що число віток схеми $m \leq 1,5n$). При розробці алгоритмів і промислових програм використовують методи компактного зберігання цієї симетричної слабо заповненої матриці, що виключають дії з нульовими елементами. Це знижує необхідний обсяг пам'яті ЕОМ і підвищує швидкодія програм, що залишається актуальним і дотепер, незважаючи на більші ресурси й швидкодія сучасних ЕОМ.

Одержимо матрицю вузлових провідностей для конкретної схеми електричної мережі.

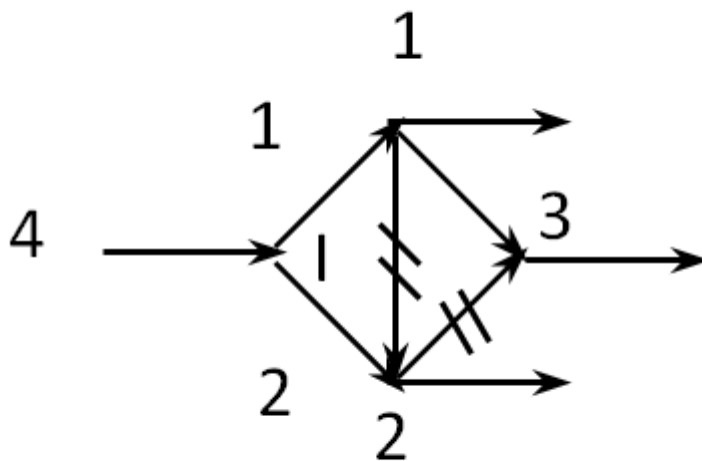


Рис. 10.5

$$M = \begin{matrix} & M_\alpha & M_\beta \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
Y_{y\Sigma} = M_{\Sigma} \cdot dY_B \cdot M_{\Sigma}' &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times m} \times \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \end{bmatrix}_{m \times m} \times M_{\Sigma}'_{(m \times (n+1))} = \\
&= \begin{bmatrix} -y_1 & 0 & y_3 & y_4 & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & -y_4 & y_5 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 & -y_5 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times m} \times M_{\Sigma}'_{m \times (n+1)} = \\
&= \begin{bmatrix} y_1 + y_3 + y_4 & -y_4 & -y_3 & -y_1 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 & -y_2 \\ -y_3 & -y_5 & y_3 + y_5 & 0 \\ -y_1 & -y_2 & 0 & y_1 + y_4 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}
\end{aligned} \tag{41}$$

Як бачимо, матриця вузлових провідностей Y_{Σ} - квадратна, симетрична. Її порядок дорівнює числу вузлів схеми $(n+1)$. Її побічні - недіагональні елементи $y_{ij} = y_{ji}$. Кожний діагональний елемент матриці вузлових провідностей представляє суму побічних елементів рядка (або стовпця), узяту із протилежним знаком.

Матриця вузлових провідностей для схеми електричної мережі, що включає балансуєчий вузол, обов'язково вироджена в силу способу її одержання, і це підтверджується найпростішим аналізом вираз (41) – сума елементів рядків або стовпців $Y_{y\Sigma}$ рівна 0. Тому, коли в схемі призначається балансуєчий вузол, для якого не складається вузлове рівняння, (тобто віддаляється стовець і рядок з матриці $Y_{y\Sigma}$), те матриця Y обов'язково виявляється невиродженою

$$\det Y_{\Sigma} = 0; \quad \det Y \neq 0$$

При видаленні рядка, відповідної до балансуєчого вузла, порядок матриці Y знижується на одиницю. Для більшості рядків матриці має місце

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^n y_{ij} \tag{42}$$

і тільки для вузлів, що мають зв'язок з балансуєчим, має місце співвідношення

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^n y_{ij} + y_{i0} > \sum_{j=1}^n y_{ij},$$

тобто діагональний елемент виявляється більше суми побічних елементів. Ця обставина має вирішальне значення для збіжності ітераційних методів розв'язку вузлових рівнянь. Тут i, j – номери вузлів, що обмежують вітки із провідностями y_{ij}

Можна вітки й відповідні їхньої провідності записати з індексами віток у масиві віток

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_{ij} = y_{ii}$$

Матриця вузлових провідностей містить повну інформацію про конфігурацію й параметри електричної мережі й може бути складена безпосередньо за схемою мережі, минаючи процедуру перемноження матриць.

У загальному випадку для схеми змінного струму провідності віток носять комплексний характер, і матриця Y має комплексні елементи.

Тому

$$\dot{y}_{ij} = \frac{1}{\dot{z}_{ij}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = y' - jy'' \quad (43)$$

Для схеми n -ого порядку в загальному випадку матриця вузлових провідностей вийде:

$$Y_y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n y_{1j} + y_{1\delta} & -y_{12} & -y_{13} & \cdots & -y_{1j} \\ -y_{21} & \sum_{j=1}^n y_{2j} + y_{2\delta} & -y_{23} & \cdots & -y_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -y_{i1} & \cdots & \cdots & \sum_{j=1}^n y_{ij} + y_{i\delta} & -y_{ij} \\ -y_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{j=1}^n y_{nj} + y_{n\delta} \end{bmatrix}$$

Питання для самоперевірки

1. На основі яких законів електротехніки виводяться вузлові рівняння режимів, що встановилися?
2. Що виражають ліва й права частини рівнянь вузлових напруг і система вузлових рівнянь у цілому?
3. Який зв'язок між змінними U_{Δ} й U_y ?
4. Чим відрізняються системи вузлових рівнянь, складені щодо напруг U_{Δ} і U_y ?
5. Як зв'язані змінні $U_{\Delta V}$ й ΔU_B ?
6. Як визначаються провідності віток схеми заміщення електричної мережі?
7. Як визначаються елементи матриці вузлових провідностей?
8. Яке співвідношення між діагональними й побічними елементами матриці Y_y ?
9. Як співвідносяться знаки елементів матриці Y_y ?
10. Сформулюйте основні властивості матриці вузлових провідностей.
11. *Завдання:* Складіть матрицю вузлових провідностей безпосередньо за схемою мережі, минаючи процедуру множення по (29), опираючись на виставу

про фізичну сутність елементів і властивостях матриці. Попередньо складіть самостійно схему з 4-6 вузлів з 1-3 контурами.

10.4 Контурні рівняння режимів, що встановилися, електричних систем

10.4.1. Вивід контурних рівнянь

Контурні рівняння виводяться на основі 2-го закону Кирхгофа для всієї мережі:

$$N \cdot \Delta U_B = 0, \quad (44)$$

де ΔU_B – вектор-стовпець падінь напруг по вітках мережі, що виражаються за законом Ома для мережі в цілому як:

$$\Delta U_B = dZ_B \cdot I_B - E_B \quad (45)$$

Підставляючи вираз для ΔU_B з (45) в (44), одержимо розгорнутий запис 2-го закону Кирхгофа для мережі в цілому:

$$N \cdot dZ_B \cdot I_B - N \cdot E_B = 0 \quad (46)$$

З одного цього вираз, як відомо, не можна знайти струми віток I_B , тому що рівнянь в (46) - k (по числу контурів-рядків матриці N), а невідомих у векторі I_B - m (по числу віток), і $m \gg k$.

Для подолання цієї невідповідності враховують підстановку $I_B = [I_\alpha \ I_\beta]^T$ й струми в дереві мережі виражають через струми в хордах або контурні струми I_β , тим самим знижують число невідомих у вираженні (46).

Струми в дереві мережі I_α одержимо з вираз для 1-го закону Кирхгофа

$$M_\alpha \cdot I_\alpha + M_\beta \cdot I_\beta = -J_y \quad (47)$$

$$I_\alpha = M_\alpha^{-1} \cdot (-J_y) - M_\alpha^{-1} \cdot M_\beta \cdot I_\beta \quad (48)$$

Раніше з основної властивості спрямованого графа було отримано, що $N_{\alpha} = -M_{\beta}^T \cdot (M_{\alpha}^T)^{-1}$ (18). Якщо транспонувати підматриці N_{α} , у правій частині співмножники поміняються місцями:

$$N_{\alpha}^T = -M_{\alpha}^{-1} \cdot M_{\beta} \quad (49)$$

З урахуванням цього співвідношення (49) вираз для струмів дерева мережі (48) спрощується:

$$I_{\alpha} = M_{\alpha}^{-1} \cdot (-J_y) - N_{\alpha}^T \cdot I_{\beta} \quad (50)$$

Звідси випливає, що для знаходження струмів у дереві мережі I_{α} досить визначити струми в хордах I_{β} , тобто розв'язати систему рівнянь k -го порядку, де k – число незалежних контурів, яке, як відомо, $k < n < m$. Таким чином, удалося суттєво понизити порядок розв'язуваної системи рівнянь для розрахунків струморозподілення в мережі.

Вираз (50) відбиває принцип накладення при розрахунках струмів. Складова $M_{\alpha}^{-1} \cdot (-J_y)$ дає нам струморозподілення в дереві даної мережі без обліку струмів хорд, а друга складова $N_{\alpha}^T \cdot I_{\beta}$ враховує вплив струмів хорд на струми в дереві мережі при замиканні хорд. Тоді повне струморозподілення в схемі відповідно визначиться:

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + \begin{bmatrix} N_{\alpha}^T \\ N_{\beta}^T \end{bmatrix} \cdot I_{\beta} \quad (51)$$

Візьмемо до уваги, що

$$N_{\beta} = E, M_{\alpha}^{-1} = C_0, N \cdot E_B = E_K \quad (52)$$

де E_K - вектор-стовпець контурних ЕРС алгебраїчні суми, що представляють собою, ЕРС віток E_B по незалежних контурах.

У вираз 2-го закону Кирхгофа (46) підставимо струми віток I_B з (51) і E_K з (52). Одержимо:

$$N \cdot dZ_B \cdot \left(\begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + \begin{bmatrix} N_\alpha^T \\ N_\beta^T \end{bmatrix} \cdot I_\beta \right) = E_K \quad (53)$$

Розкриємо дужки:

$$N \cdot dZ_B \cdot \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + N \cdot dZ_B \cdot N^T \cdot I_\beta = E_K \quad (54)$$

Добуток матриць:

$$N \cdot dZ_B \cdot N^T = Z_K \quad (55)$$

називають матрицею контурних опорів, яка є квадратною й неособливою.

Підставимо Z_K в (54) і спростимо:

$$N \cdot dZ_B \cdot \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-J_y) + Z_K \cdot I_\beta = E_K \quad (56)$$

Вираз (56) має матрицю Z_K квадратну, неособливу. Воно зв'язує незалежні режимні характеристики $(-J_y, E_K = N \cdot E_B)$, параметри й конфігурацію мережі (Z_B, N, M_α) із залежними характеристиками режиму I_β - (струми хорд), і може бути вирішене щодо струмів хорд I_β .

$$I_\beta = Z_K^{-1} \cdot \left(E_K - N \cdot dZ_B \cdot \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot J_y \right) \quad (57)$$

Тоді струми в дереві мережі I_α визначаються по (50) і завдання знаходження струморозподілення в лінійній постановці, тобто при завданні навантажень вузлів у струмах J_y , вирішена повністю. Напруги у вузлах визначаються по відомій напрузі в балансуєчому вузлі U_{BY} й знайденим струмам віток $I_B = \begin{bmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \end{bmatrix}$

$$U_\alpha = Z_\alpha \cdot I_\alpha, U_{\Delta Y} = (M_\alpha^T)^{-1} \cdot U_\alpha,$$

$$U_y = n \cdot U_{BY} + U_{\Delta Y}.$$

10.4.2. Визначення й характеристика матриці контурних опорів

Матриця контурних опорів (55) має також цілком регулярну структуру, як і матриця вузлових провідностей. Матриця контурних опорів має порядок, дорівнює числу незалежних контурів. Її діагональні елементи Z_{ii} являють собою алгебраїчні суми опорів віток, що входять у даний i -й контур, а недіагональні Z_{ij} – алгебраїчну суму опорів, загальних для контурів i і j .

При використанні принципу ярусності формується система контурів, у якій кожна хорда входить тільки в один контур і напрямком обходу по контуру збігається з напрямком струму в хорді - тоді матриця N_{β} - одинична.

Для схеми (рис. 5) і матриці N табл. 2 матриця контурних опорів має вигляд:

$$z_k = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_V) & (z_1 + z_2) & 0 & (z_1 + z_2) \\ (z_1 + z_2) & (z_1 + z_2 + z_3 + z_{VI}) & z_3 & (z_1 + z_2 + z_3) \\ 0 & z_3 & (z_4 + z_3 + z_{VII}) & z_3 \\ (z_1 + z_2) & (z_1 + z_2 + z_3) & z_3 & (z_1 + z_2 + z_3 + z_5 + z_{VIII}) \end{bmatrix}$$

Проаналізуємо співвідношення між діагональними й побічними елементами матриці контурних опорів.

$$|z_{ii}| > z_{ij} \quad (58)$$

Для так званої канонічної системи контурів

$$z_k = \begin{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_V) & z_V & 0 & 0 \\ z_V & (z_3 + z_V + z_{VI}) & z_3 & z_{VI} \\ 0 & z_3 & (z_3 + z_4 + z_{VII}) & 0 \\ 0 & z_{VI} & 0 & (z_{VI} + z_V + z_{VIII}) \end{bmatrix}$$

тобто

$$z_{ii} > \sum z_{ij}, \quad z_{ii} = \sum z_{ij} + z_{\beta i} \quad (59)$$

Завжди забезпечується перевага діагонального елемента z_{ii} над сумою недиагональних елементів $\sum z_{ij}$.

Як вказувалося вище, система рівнянь (56) може вирішуватися шляхом обігу матриці Z_k по вираженню (57) або будь-яким іншим способом розв'язку системи лінійних рівнянь, а саме: група методів виключення невідомих (метод Гаусса), або ітераційними методами розв'язку систем лінійних рівнянь, тобто методом простій або прискореної ітерації. Особливостями системи контурних рівнянь, що встановилися режимів у порівнянні із системою вузлових рівнянь є більш низький порядок розв'язуваної системи, тому що ($k \ll n$) число контурів у схемі значно менше числа вузлів у мережі.

Але при розв'язку лінійних контурних рівнянь ітераційним методом початкові наближення невідомих - струмів хорд - не визначені, відсутні дані для більш-менш точного завдання струмів хорд. У порівнянні із системою контурних рівнянь, для системи вузлових рівнянь при їхньому розв'язку ітераційним методом щодо напруги у вузлах, вибір початкових наближень полегшений, $U_{НАЧ} \approx U_{БВ}$ або $U_{НАЧ} \approx U_{НОМ}$.

У цілому завдання розрахунків режиму реальної електричної мережі з більшим числом елементів залишається багатомірної. Контурні рівняння також нелінійні при завданні навантажень у потужностях.

Питання для самоперевірки

1. Що виражають контурні рівняння?
2. На які підматриці розділяються матриці параметрів електричної мережі, параметрів режиму й матриці інциденцій?
3. У чому суть принципу накладення, застосовуваного при записі струмів у дереві мережі?

4. Як визначити (записати) алгебраїчну суму падінь напруг по вітках дерева мережі?
5. Які властивості канонічної системи незалежних контурів?
6. Викладете порядок розрахунків режиму по методу контурних рівнянь при завданні навантажень у струмах.
7. Поясніть, як міняється порядок розрахунків режиму по методу контурних рівнянь при завданні навантажень у потужностях.
8. Дайте характеристику матриці контурних опорів.
9. Влияет Влияет ли выбор базисного узла на свойства матрицы контурных сопротивлений
10. Завдання. Складіть матрицю контурних опорів безпосередньо за схемою мережі, минаючи процедуру множення (55), для самостійно складеної схеми з 2-3 контурами й 5-7 вузлами.

10.5 Запис рівнянь стану мережі за допомогою матриць узагальнених параметрів

Звернемося до рівнянь стану мережі (54), (55) за законами Кирхгофа.

Представимо матрицю коефіцієнтів системи А-1 у вигляді блокової матриці з розмірністю блоків по числу вузлів n і числу контурів k схеми заміщення:

$$A^{-1} = [C \ D] \quad (60)$$

Тоді:

$$I_B = A^{-1} \cdot F = [C \ D] \cdot \begin{bmatrix} -J_y \\ N \cdot E_B \end{bmatrix} = C \cdot (-J_y) + D \cdot N \cdot E = C \cdot (-J_y) + Y_B \cdot E_B \quad (61)$$

Тут $Y_B = D \cdot N$ - квадратна матриця, називана матрицею вхідних і взаємних провідностей віток схеми. Її елементи y_{ij} визначають величину й фазу струму в

і-ой вітки від дії ЕРС j -ой віток і називаються взаємними провідностями, а елементи y_{ii} визначають величину й фазу струму в і-ой вітки від дії ЕРС E_i цієї ж віток і-ой віток і називаються власними або вхідними провідностями.

При відсутності ЕРС віток ($E_B = 0$), вираз (61) звертається в

$$I_B = C \cdot (-J_y), \quad (62)$$

звідки наочно видний зміст матриці C і її елементів.

C — матриця порядку $m \times n$, називається матрицею коефіцієнтів розподілу, що задають струмів вузлів по вітках мережі. Її довільний елемент c_{ij} являє собою частку від струму j -го вузла, що протікає по і-ой вітки:

$$I_{Bi} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot (-J_j), \quad (63)$$

де c_{ij} — елемент матриці коефіцієнтів розподілу C ; I_{Bi} — струм і-ой віток; J_j — струм, що задає, j -го вузла.

Матриці Z , D і Y_B , обчислюються шляхом обігу матриці A за допомогою розбивки на блоки, і отже - являють собою лінійні комбінації блоків матриці A , показаних в (53). При цьому C і Y_B можуть бути виражені як на основі вузлової моделі мережі

$$C = \begin{bmatrix} Z_\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & Z_\beta^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_\alpha^T \\ M_\beta^T \end{bmatrix} \times Y_y^{-1} = dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot Y_y^{-1}, \quad (64)$$

де Y_y^{-1} — зворотна матриця власних і взаємних вузлових провідностей;

так і на основі контурної моделі:

$$C = \begin{bmatrix} C_\alpha \\ C_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot N^T \cdot Z_k^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1} \quad (65)$$

де Z_k^{-1} — зворотна матриця контурних опорів.

Одержання виражень (64) і (65) наведене в [1].

Вираз (64), (65) показують, що процедура знаходження матриці Z досить громіздка, але проведена один раз, ця матриця дозволяє вести багаторазові розрахунки режиму по виразх (55), (61) вручну або на ЕОМ з високою

швидкодією¹. Після знаходження струмів віток інші параметри режиму розраховуються по відомих формулах.

Правильність виражень (64), (65) і результатів конкретних обчислень матриці Z по цих виразах можна перевірити по вираженню:

$$M \cdot C = E, \quad (66)$$

Вираз (66) можна одержати, якщо в I-ий закон Кирхгофа підставити вектор струмів віток з (55) $M \cdot C \cdot J_y = J_y$, отже $M \cdot C = E$. Логіка

вираз (64) наочно видна, якщо у вираз (62) підставити із (64):

$$I_B = dZ_B^{-1} \cdot \underbrace{\underbrace{M^T \cdot (Y_y^{-1} \cdot (-J_y))}_{U_\Delta}}_{U_B} \quad (67)$$

Аналогічно можна показати логікові вираз для матриці Z на основі контурної моделі мережі:

$$C \cdot J_y = \left(\begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1} \right) \cdot J_y \quad (68)$$

Розкриємо дужки в правій частині:

$$I_B \cdot C \cdot J_y = \underbrace{\begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot J_y}_{I_\alpha} - \underbrace{N^T \cdot Z_K^{-1} \cdot N_\alpha \cdot dZ_{B\alpha} \cdot M_\alpha^{-1} \cdot J_y}_{\Delta U'_\alpha} = \underbrace{\sum \Delta U'_\alpha}_{-I_\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_\alpha'' \\ -I_\beta \end{bmatrix}}_{I_B}$$

Тут I'_α – вектор-стовпець складових струмів у дереві мережі, обумовлених, що задають струмами при відсутності хорд;

I''_{α} – вектор-стовпець складових струмів у дереві мережі, викликаних замиканням хорд;

$\Delta U'_{\alpha}$ - вектор-стовпець падінь напруг у вітках дерева, викликаних складових струмів I'_{α} ;

$\sum \Delta U'_{\alpha}$ - вектор-стовпець алгебраїчних сум падінь напруг по вітках дерева, що входять у контур.

$$I_{\alpha} = I'_{\alpha} - I''_{\alpha} \quad (69)$$

$$I_B = I'_{\alpha} - \begin{bmatrix} I''_{\alpha} \\ -I_{\beta} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Питання для самоперевірки

1. Запишіть рівняння стану мережі за законами Кирхгофа.
2. Запишіть розв'язок рівняння стану мережі через матриці узагальнених параметрів.
3. Який фізичний зміст елемента матриці коефіцієнтів розподілу?
4. Як за допомогою моделювання режимів мережі (на ЕОМ або фізичній моделі) визначити елементи матриці коефіцієнтів розподілу?
5. Як визначити поструморозподілення потужностей без обліку втрат у мережі за допомогою матриці коефіцієнтів розподілу?
6. Як звернути матрицю з використанням розбивки на блоки, і що нам дає ця розбивка?

10.6 Розрахунки режиму електричної мережі з використанням матриці коефіцієнтів розподілу

Матриця коефіцієнтів розподілу C дозволяє знайти струморозподілення в схемі при відомих струмах, що задають, вузлів:

$$I_B = C \cdot (-J_V) \quad (71)$$

Тоді інші параметри режиму визначаються по очевидних формулах

$$\Delta U_B = dZ_B \cdot I_B \quad (72)$$

де ΔU_B - матриця спадань напруги на вітках схеми $\Delta U_B = [\Delta U_\alpha \quad \Delta U_\beta]^T$;

dZ_B — діагональна матриця опорів віток.

$$U_\Delta = (M_\alpha^T)^{-1} \cdot \Delta U_\alpha \quad (73)$$

де ΔU_α — матриця спадань напруги на вітках дерева схеми;

U_Δ — матриця спадань напруги у вузлах мережі щодо балансуєчого вузла.

$$U_y = U_\Delta + n \cdot U_{BY} \quad (74)$$

Середні значення потоків потужності P і Q у вітках без обліку втрат:

$$P_B = I_B \cdot U_{ном}, \quad (75)$$

де P_B — матриця потоків потужності по вітках схеми.

Втрати й потоки потужності в вітках:

$$\Delta P_B = dI_B \cdot M^T \cdot U_y = dI_B \cdot (U_{КОН} - U_{НАЧ}) = P_{КОН} - P_{НАЧ}, \quad (76)$$

де ΔP_B — матриця втрат потужності на вітках схеми;

dI_B - діагональна матриця струмів віток;

$$\Delta P_\Sigma = n^T \cdot \Delta P_B, \quad (77)$$

де ΔP_Σ — сумарні втрати потужності в мережі.

$$P_{BY} = n^T \cdot P_{Зад} + \Delta P_\Sigma, \quad (78)$$

де P_{BY} — потужність балансуєчого вузла.

Розрахункові струми у вузлах мережі можна визначити як

$$J_P = M \cdot I_B, \quad (79)$$

тоді розрахункові потужності вузлів визначаються по вираженню

$$P_P = dU_y \cdot J_P. \quad (80)$$

Небаланси потужності у вузлах схеми можна розрахувати як

$$P_{НБ} = P_P - P_{Зад}, \quad (81)$$

Формули (71) – (78) дають алгоритм розрахунків режиму при завданні навантажень у струмах. При завданні навантажень у потужностях організує зовнішній ітераційний процес корекції струмів, що задають, вузлів по заданих P_{3AD} потужностях і розрахованою напругою ($U_y^{(k)}$)

$$J^{(k)} = (dU_y^{(k)})^{-1} \cdot P_{3AD}, \quad (82)$$

де k - номер ітерації.

Потім проводиться розрахунок струмів віток і напруг вузлів по формулах (71) – (74) і перевіряється баланс у вузлах по 1-му закону Кирхгофа (81). По формулах (79) – (80) визначаються розрахункові струми, що задають, і потужності у вузлах. По вираженню (81) визначається небаланс потужностей у вузлах схеми, значення якого (в %) рівняється із припустимою відносною погрешністю ε_p , %.

$$\frac{|P_{3ADi} - P_{pi}^{(k)}|}{P_{3ADi}} \cdot 100 \leq \varepsilon_p, \quad (83)$$

де k - номер ітерації; i - номер вузла.

Якщо баланс потужностей у вузлах виконується із заданою точністю ε_s , то в завершенні розрахунків визначаються результуючі характеристики режиму по виразх (75) – (78) і розрахунок закінчується. А якщо ні, то проводиться ще одна ітерація, і так доти, поки не буде досягнутий баланс із заданою точністю.

За допомогою матриці Z можна приблизно за одну ітерацію знайти поструморозподілення потужностей

$$P_B = C \cdot P_y \quad (84)$$

і втрати потужності $\Delta P_B = dZ_B \cdot \frac{P_B^2}{U_{HB}^2}$.

Сумарні втрати потужності ΔP_Σ визначаються по вираженню (77).

При цьому зневажають впливом відмінності напруг у вузлах мережі на поструморозподілення.

На базі матриці коефіцієнтів розподілу C можна побудувати швидкодіючий алгоритм оптимізації режиму електроенергетичної системи за

критерієм мінімуму сумарної витрати палива в енергосистемі на покриття добового графіка навантажень споживачів (з урахуванням витрати на пуск і зупинку) за умови мінімуму сумарних втрат потужності в мережі $\Delta P_{\Sigma} \rightarrow \min$ при варіації вузлових генеруючих потужностей $P_{зад}$. Цей алгоритм є складовою частиною розв'язку таких практичних завдань як:

- облік мережного фактора при оптимізації навантажень електростанцій, тобто облік зміни втрат у мережі при перерозподілі між електростанціями сумарного активного навантаження споживачів;

- визначення потужності наявних і додаткових пристроїв, що компенсують, за умовою мінімуму втрат потужності в мережі $\Delta P_{\Sigma} \rightarrow \min$ () і при обліку обмежень по напругах вузлів $U_{MIN} \leq U_v \leq U_{MAX}$ ().

Питання для самоперевірки

1. Поясніть фізичний зміст елементів матриці С.
2. Чому сума елементів стовпця матриці З рівна 1?
3. Як організувати ітераційний процес розрахунків режиму по методу коефіцієнтів розподілу у випадку завдання навантажень у потужностях?
4. Як розрахувати втрати потужності при використанні методу коефіцієнтів розподілу при завданні навантажень у струмах, потужностях?
5. Укажіть гідності й недоліки методу коефіцієнтів розподілу в порівнянні з методом вузлових напруг.
6. Приведіть приклади завдань, які можна ефективно вирішувати з використанням матриці коефіцієнтів С.

10.7 Розв'язок рівнянь стану методом Гаусса

До числа найбільш характерних обчислювальних схем цього методу ставляться алгоритми зі зворотним ходом і без зворотного ходу.

Алгоритм методу Гаусса зі зворотним ходом. Розв'язок системи n лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$A \cdot x = b$$

по цьому алгоритму складається із двох етапів. *На першому етапі* (прямий хід) вихідна система за n однотипних кроків перетвориться таким чином, що матриця коефіцієнтів перетвореної системи стає верхньою трикутною, тобто всі елементи, розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. *На другому етапі* (зворотний хід) послідовно визначаються значення невідомих від x_n до x_1 .

Алгоритм методу Гаусса без зворотного ходу. Розв'язок системи n лінійних алгебраїчних рівнянь по цьому алгоритму здійснюється за один етап, у результаті якого матриця коефіцієнтів A за n однотипних кроків приводиться до одиничної, тобто система рівнянь дозволяється щодо шуканих невідомих, які дорівнюють відповідним елементам отриманого в результаті перетворень стовпця в правій частині системи.

На першому кроці обчислення виконуються точно так само, як і в алгоритмі методу Гаусса зі зворотним ходом. Одержувана в результаті цього перетворення система рівнянь $A^{(1)} \cdot x = b^{(1)}$ характеризується тим, що перший елемент першого стовпця матриці дорівнює одиниці, а інші елементи стовпця дорівнюють нулю.

На другому кроці, як і в попередньому алгоритмі, у якості провідного елемента вибирається діагональний елемент другого стовпця сволюка $A^{(1)}$, тобто $a_{22}^{(1)}$. Відмінність полягає в тому, що додатково перетвориться також і перший рядок матриці $A^{(1)}$, причому таким чином, щоб елемент $a_{12}^{(1)}$ звернувся в нуль.

Виконання операцій довільного (k -го) кроку відповідає перетворенню k -го стовпця таким чином, щоб його діагональний елемент ($a_{kk}^{(k)}$) став дорівнює одиниці, а недиагональні елементи – нулю. У результаті виконання останнього кроку ($k = n$), на якому перераховуються елементи останнього стовпця матриці $A^{(n-1)}$ й усі елементи стовпця $b^{(n-1)}$, одержуємо матрицю $A^{(n)} = I$ й, отже, $x = b^{(n)}$.

Фактори, що впливають на точність розв'язки

До причин виникнення неприпустимо великої погрішності ставляться наступні:

- округлення результатів обчислень;
- неточність вихідних даних.

Округлення результатів обчислень. Виконання обчислень по методу Гаусса вимагає, щоб провідний елемент $a_{kk}^{(k)}$ був відмінний від нуля. Значення провідних елементів не можуть бути оцінені без обчислень, відповідних до послідовного перерахування елементів матриці A в процесі розв'язку. Може виявитися, що на деякому кроці провідний елемент стає рівним нулю при точних обчисленнях або ж близьким до нуля при округленні результатів обчислень. У першому випадку одержати розв'язок неможливо, а в другому – у зв'язку зі зникненням значущих цифр у провідному елементі погрішність подальших обчислень може бути досить велика.

Неточність вихідних даних. При розв'язку інженерних завдань вихідні дані завжди відомі з деякою погрішністю, обумовленою кінцевою точністю виміру або обчислення параметрів системи і її режиму. Як правило, для конкретних технічних завдань відносна погрішність результатів, одержуваних при розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, порівнянна з погрішностями вихідних даних. Однак можуть бути випадки, коли погрішність вихідних даних, тобто значень елементів матриць A і b , приводять до надмірно великої погрішності розв'язку. Причина цього полягає в так званій *поганій обумовленості* матриці коефіцієнтів системи рівнянь, наближеним показником якої є малість значення визначника матриці A .

Розділ 11. Методи розв'язку рівнянь, що встановилися режимів електричних систем

11.1. Математична характеристика рівнянь режиму, що встановився

Особливості рівнянь, що встановилися режимів електричних систем:

- багатомірність систем рівнянь;
- слабка обумовленість, у розрахунках багатьох схем, матриці вузлових власних і взаємних провідностей і матриці контурних опорів, тобто близькість до нуля визначників цих матриць $\det Y_u$, $\det Z_k$;
- нелінійність рівнянь, викликана нелінійним характером зв'язки параметрів режиму.

Обумовленість матриці характеризує величину визначника матриці. Для слабка обумовленої матриці A визначник близький до 0, тобто $\det A \approx 0$

Для матриці Y_Σ , як відомо, $\det Y_\Sigma = 0$, тобто маємо вироджену матрицю для повної схеми мережі, включаючи балансуєчий вузол. Ця матриця перестане бути виродженою, коли який-небудь вузол мережі, відповідно до фізичного змісту завдання розрахунків режиму, приймається за балансуєчий і відповідний рядок віддаляється з матриці Y_Σ . Тоді одержуємо, що $\det Y \neq 0$.

Практичне значення характеристики обумовленості матриці вузлових провідностей полягає в тому, що в погано обумовленій матриці Y $\det Y \approx 0$, і малим змінам в елементах вихідної матриці Y відповідають більші зміни в елементах зворотної матриці Y^{-1} і, отже – малі відхилення заданих режимних параметрів викличуть більші зміни шуканих характеристик режиму (спадання напруги на вітках і потоки потужності в вітках), тобто спостерігається плинність параметрів режиму. Покажемо це для вузлових рівнянь:

$$Y \cdot U_{\Delta} = J_y \quad U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot J_y \quad (85)$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{\det Y} [A_{ij}] \quad (86)$$

де A_{ij} – союзна (або приєднана) матриця до Y , складена з алгебраїчних доповнень до елементів вихідної матриці Y .

11.2. Характеристика методів розв'язку систем рівнянь режиму, що встановився

Методи розв'язку систем рівнянь діляться на точні й ітераційні. Точні методи мають кінцеві алгоритми. До точних методів ставляться розв'язок систем рівнянь шляхом обігу матриць коефіцієнтів, різні методи групи виключення невідомих (схема єдиного розподілу, метод виключення з вибором головного елемента, схема Жордана й ін.), у загальному випадку називані методом Гаусса. Згідно з методом Гаусса, при прямому ході проводиться виключення невідомих і матриця системи приводиться до трикутного виду. При зворотному ході послідовно обчислюються невідомі.

Застосування методу Гаусса до розв'язку систем рівнянь, що встановилися режимів зі слабо заповненими матрицями має той недолік, що в процесі виключення невідомих властивість слабо заповнювання матриці губиться, тобто знову з'являється велика кількість ненульових елементів. Це не тільки вимагає додаткового обсягу пам'яті, але й знижує швидкодія програми. Проблема почасти вирішується за рахунок вибору **оптимальної стратегії виключення невідом**, що приводить до мінімальної кількості, що з'являються ненульових елементів. Для цього на кожному кроці виключення за ведучий (, що виключається) приймається той елемент, який має мінімальне число зв'язків, тобто мінімальне число ненульових елементів у рядку.

Ця проблема особливо актуальна для вузлових рівнянь, що мають слабо заповнену матрицю великої розмірності. Мінімальне число елементів у

рядку матриці вузлових провідностей рівно 2 - одна власна провідність u_{ii} і одна взаємна u_{ij} . При лінійних комбінаціях з рядками в процесі виключення невідомих у першу чергу виключають вузли, що мають мінімальне число зв'язків – один зв'язок і два елементи в рядку матриці Y – так звані висячі вершини графа. Далі виключають вузли, що мають по два зв'язки і т.д. Виключення елементів із системи вузлових рівнянь із матрицею вузлових провідностей відповідає виключенню вузлів у схемі по методу перетворення мережі. При цьому, як відомо, навантаження вузла, що виключається, розноситься в дотичні вузли, а провідності (опору) зв'язків перетворюються по формулах методу Гаусса. У загальному випадку n -променева зірка перетвориться в n -косинець. Такий алгоритм виключення реалізований у широко розповсюдженій програмі МУСТАНГ, розробленої в 90-х роках в ОДУ Північно-заходу ЄЕС СРСР (м. Рига) разом із провідним НДІ в електроенергетиці – Сибірським енергетичним інститутом Сибірського відділення АН СРСР. Слід помітити також, що програми розв'язку вузлових або контурних рівнянь по методу виключення невідомих значно складніше, чим по методу ітерації.

11.3. Ітераційні методи розв'язку систем рівнянь режиму, що встановився

В ітераційних методах (або методах послідовного наближення) розв'язок X_* системи рівнянь

$$A \cdot X = B \quad (87)$$

одержують як межу збіжної послідовності значень $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}\}$

$$X_* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} \quad (88)$$

Якщо ця послідовність значень сходиться, то різниця між двома сусідніми наближеннями при достатньому числі ітерацій стає менше заданої точності розрахунків ε_x

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_x \quad (89)$$

Тут (89) – ознака збіжності ітераційного процесу.

Для застосування ітераційних методів необхідно:

- вибрати вектор початкового наближення $X^{(0)}$:

$$X^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_n^{(0)}]^T;$$

- побудувати рекурентне співвідношення виду:

$$X = \varphi(X), \quad (90)$$

де φ – оператор рекурентного співвідношення, (який для збіжності повинен бути оператором стиску);

- організувати циклічні обчислення:

$$X^{(k)} = \varphi(X^{(k-1)}) \quad (91)$$

Особливості й гідності ітераційних методів залежать від способу підготовки системи до ітерації, тобто від алгоритму ітераційного процесу (90), (91).

Побудуємо рекурентне співвідношення для системи рівнянь (87). Для цього розв'язний рівняння системи (87):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (92)$$

Щодо діагональних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - 0 \cdot x_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} \cdot x_n \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} \cdot x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot x_2 - \frac{a_{n3}}{a_{nn}} \cdot x_3 - \dots - 0 \cdot x_n \end{cases} \quad (93)$$

або в загальному виді:

$$X = \beta + \alpha \cdot X \quad (94)$$

Вираз (93) представляє систему рівнянь, підготовлену до ітерації, або розгорнутий запис рекурентного співвідношення (91), коли φ – лінійний оператор.

Тут X , α , β очевидні з (93), (94).

Ітераційний обчислювальний процес за схемою (93), (94) виду $X^{(k)} = \varphi(X^{(k-1)})$ веде до розв'язку (88), якщо виконуються умови теореми збіжності ітерації:

Для збіжності ітераційного процесу розв'язку лінійної системи рівнянь $A \cdot X = B$, підготовленої до ітерації у вигляді $X = \beta + \alpha \cdot X$, необхідно й досить, щоб найбільше по модулю власне значення (число) матриці системи, підготовленої до ітерації $\lambda_{\alpha \max}$, було б по модулю менше 1.

$$|\lambda_{\alpha \max}| < 1 \quad (95)$$

Умова (95) – складно перевіряєма в силу складності самого завдання знаходження λ – власних значень матриці α ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$), які є коріннями характеристичного полінома матриці α , одержуваних шляхом розкриття характеристичного визначника:

$$D(\lambda) = 0 \quad (96)$$

$$\text{де } D(\lambda) = \det[\alpha - \lambda \cdot E] = \det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{11} & & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & 0 - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{22} & & & \alpha_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 0 - \lambda \\ \alpha_{nn} & \alpha_{nn} & & \end{vmatrix} = C_0 \cdot \lambda^n + C_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot \lambda + C_n,$$

C - коефіцієнт характеристичного полінома, одержуваний при розкритті характеристичного визначника.

Тому використовують більш доступну числову характеристику збіжності для таких регулярних матриць як матриці рівнянь режиму, що встановився, Y у й Z конт – канонічні норми матриці m , l , або k -норма. Причому відомо (доведене), що будь-яка канонічна норма більше будь-якого власного значення матриці $\|\alpha_m\| > |\lambda_{\alpha \max}|, \|\alpha_l\| > |\lambda_{\alpha \max}|, \|\alpha_k\| > |\lambda_{\alpha \max}|$.

Тоді теорема про достатні умови збіжності формулюється:

для збіжності ітераційного процесу розв'язку лінійної системи $A \cdot X = B$ у вигляді $X^{(k)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k-1)}$ досить, щоб яка-небудь канонічна норма матриці α була по модулю менше 1.

$$\|\alpha_l\| < 1, \|\alpha_m\| < 1, \|\alpha_k\| < 1, \quad (97)$$

$$\text{де } \|\alpha_l\| = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|; \|\alpha_m\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|; \|\alpha_k\| = \sqrt{\sum_{i,j,n} |\alpha_{ij}|^2}$$

11.4. Критерії збіжності ітерації й аналіз їх виконання для вузлових рівнянь, що встановилися режимів

11.4.1 Доказ теореми збіжності ітерації

Ітераційні процеси – це чисельні методи розв'язку рівнянь, і їх ефективність залежить від числових характеристик матриць коефіцієнтів системи рівнянь. Обидві числові характеристики, що згадувалися в теоремі

про збіжність ітерацій, формулюють умови збіжності для матриці (системи, підготовленої до ітерації, у вигляді (93), (94).

$$X = \beta + \alpha X = \beta + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot X \quad (98)$$

Для доказу теореми збіжності:

Задамося початковим наближенням $X^{(0)}$ і запишемо наступні чотири наближення (для виявлення загальних закономірностей):

$$X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)}, \quad X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)}, \quad X^{(3)} = \beta + \alpha X^{(2)}, \quad X^{(4)} = \beta + \alpha X^{(3)}.$$

Підставивши $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ у вираз для $X^{(4)}$, одержуємо

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= \beta + \alpha(\beta + \alpha(\beta + \alpha(\beta + \alpha X^{(0)}))) = \beta + \alpha(\beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha^3 X^{(0)}) = \\ &= \beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha^3\beta + \alpha^4 X^{(0)} \end{aligned} \quad (99)$$

У загальному виді

$$X^{(k)} = (E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{(k-1)})\beta + \alpha^k X^{(0)} \quad (100)$$

Знайдемо межу $X^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$. Як відомо, межа суми дорівнює сумі меж

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} ((E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{(k-1)})\beta) + \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha^k X^{(0)}) \quad (101)$$

У вираженні (100) дужка представляє суму членів матричного статежного ряду, з підставою $(E + \alpha + \alpha^2 + \dots)$. Цей ряд сходиться і його сума має межу, якщо виконуються умови збіжності

- необхідна й достатня умова збіжності:

$$|\lambda_{\alpha \max}| < 1; \quad (102)$$

- достатня умова збіжності:

$$\|\alpha\| \leq 1; \quad (103)$$

Тоді ця сума визначиться за аналогією із сумою членів геометричної прогресії з підставою $|q| < 1$.

Для геометричної прогресії із числовою підставою q

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = \frac{1}{1 - q}.$$

Для статечного матричного ряду з підставою (

$$(E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}) = (E - \alpha)^{-1} \quad (104)$$

Межа другого доданка у вираженні (100) $\alpha^k X^{(0)}$ при $k \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, тому що $|\lambda_{\alpha \max}| < 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k X^{(0)} = 0. \quad (105)$$

Підставивши (104) і (105) в (100), одержимо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = (E - \alpha)^{-1} \beta + 0 \quad (106)$$

Помножимо ліву й праву частини рівняння на $(E - \alpha)$ й враховуючи, що $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X_*$ одержуємо

$$\begin{aligned} (E - \alpha)X_* &= (E - \alpha)(E - \alpha)^{-1} \beta \\ X_* - \alpha X_* &= \beta \Rightarrow X_* = \beta + \alpha X_* \end{aligned} \quad (107)$$

У вираз (107) X_* відповідає нерухливій крапці послідовності або точному розв'язку системи рівнянь, тобто межі $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$, коли подальшої зміни значення X в ході ітераційного процесу не відбувається.

11.4.2 Наслідку з теореми збіжності ітерації

Достатня умова збіжності ітерації (103) дозволяє одержати важливі наслідки про співвідношення діагонального й суми побічних елементів

матриці, яке повинне мати місце для збіжності ітераційного процесу розв'язку рівнянь стосовно до вузлових рівнянь режиму, що встановився.

Матриця (системи вузлових рівнянь, підготовленої до ітерації (див.(98)), має вигляд

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{y_{12}}{y_{11}} & \dots & \frac{y_{1n}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{22}} & 0 & \dots & \frac{y_{2n}}{y_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{n1}}{y_{nn}} & \frac{y_{n2}}{y_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (108)$$

а достатня умова збіжності по нормі запишеться

$$|y_{ii}| \geq \sum_{j=1}^n |y_{ij}| \quad (109)$$

і повинне виконуватися для всіх вузлів мережі $i = 1, 2, \dots, n$.

Нерівність (109) виражає достатня умова збіжності ітерації для системи вузлових рівнянь: для всіх вузлів мережі власна провідність вузла y_{ii} повинна бути більше суми модулів взаємних провідностей $\sum_{j=1}^n |y_{ij}|$. Ця умова не виконується.

Однак для тих вузлів складної схеми, які пов'язані з балансуєчим вузлом, діагональний елемент матриці Y , тобто власна провідність вузла y_{ii} , рівний

$$y_{ii} = \sum y_{ij} + y_{i0}, \quad (110)$$

завдяки чому для рядків матриці, які мають зв'язок з балансуєчим вузлом

$$y_{ii} > \sum y_{ij}, \quad (111)$$

причому саме на величину провідності лінії y_{i0} , яка зв'язує i - й вузол з балансуєчим.

Завдяки виконанню співвідношень (110), (111) для вузлів, пов'язаних з балансуєчим, виконується **необхідна й достатня умова збіжності ітерації** (102), пов'язане із власними значеннями $|\lambda_{\alpha \max}|$, хоча достатня умова збіжності по нормі (103) і не виконується.

11.4.3 Фактори, що впливають на збіжність ітерації для вузлових рівнянь, що встановилися режимів

Виділимо схемні фактори, обумовлені конфігурацією й параметрами схеми, і режимні фактори, обумовлені навантаженнями й шуканими параметрами розглянутого режиму.

Схемний фактор, що впливає на збіжність ітераційного процесу, проявляється для схем змінного струму, що містять поздовжні ємності й поперечні ємності ліній мережі на землю, представлені провідностями y_c , що мають протилежні стосовно індуктивних опорів (x_L) і провідностям ($y_c=1/x_C$) віток знаки (як реактивні опори)

$$y_{ii p} = \sum y_{ij p} = \sum (jy_{ij L} - jy_{ij C}) \text{ при } r, y_{ija} = 0 \quad (112)$$

Діагональний елемент $|y_{ii}|$ зменшується, отже

$$|y_{ii}| < \sum y_{ij} \quad (113)$$

Наявність поперечної ємнісної віток на землю сприяє розмаху коливань напруг у даному вузлі в ітераційному процесі (якщо ітераційний процес для математичної моделі режиму розглядати як відповідний перехідний процес при відхиленні напруг на $U_{\Delta}^{(0)}$ в електричній мережі). Тоді можна сказати, що

ітераційний процес відбувається покроковим методом, де крок відповідає одній ітерації.

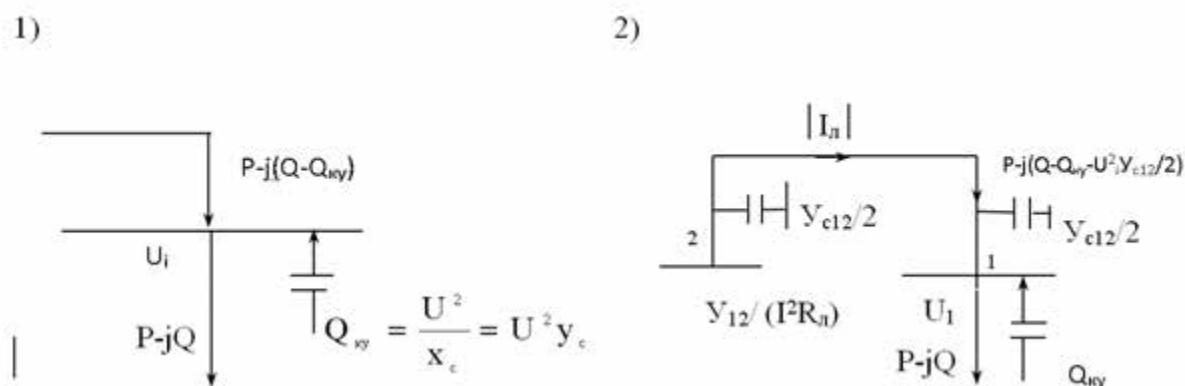


Рис. 6

Ємності на землю є у всіх ВЛ і КЛ. Вони беруть участь у балансі реактивної потужності в системі й у цілому поліпшують, що встановилися режими електричної мережі. Але створені даними ємнісними провідностями потужності Q_c залежать від квадрата напруги $Q_c = Y_c U^2$ і за аналогією зі ШКБ сприяють розмаху коливань напруги на лінії в ході ітераційного процесу. Відповідно, і при визначенні діагонального елемента матриці, ємнісна провідність на землю сприяє появі співвідношення (113). Для лінійних систем вузлових рівнянь наявність ємностей – це той основний схемний фактор, який погіршує збіжність. Але цьому факторові протистоїть наявність віток, що зв'язують балансуєчий вузол зі схемою, що мають провідності y_{i0} . Це реальні лінії й трансформатори, і якщо їх опори не великі, а провідності більші (тобто із запасом забезпечують видачу необхідної потужності від балансуєчого вузла в схему), те в цілому збіжність забезпечується, оскільки виходить $\lambda_{\alpha \max} < 1$ режими, що й установилися, успішно розраховуються. Виходить, що навіть у лінійній постановці завдання розрахунків режиму, факт і швидкість збіжності залежать від параметрів шуканого режиму.

У мережах електричних систем навантаження задаються в потужностях. При цьому відповідні рівняння (вузлові, контурні й ін.) нелінійні, і виникають режимні фактори, що впливають на збіжність. Вони тем важливіше, чому ближче шуканий режим до гранично припустимого за умовами стійкості паралельної роботи синхронних машин (генератори електростанцій) і стійкості роботи асинхронних машин (двигуни навантаження) в електричній системі.

11.4.4 Критерії збіжності й аналіз збіжності нелінійних систем вузлових рівнянь, що встановилися режимів

Нелінійні рівняння балансу струмів у вузлах

$$Y \cdot U_{\Delta} = \begin{bmatrix} S_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (114)$$

можуть бути представлені у вигляді неявної вектор-функції небалансу $F(U)$, яка зветься в 0 при підстановці в ліву частину точного розв'язку системи – вектора напруг вузлів U .

У загальному виді ці рівняння запишуться у вигляді:

$$F(U) = 0 \quad (115)$$

Узагальнений математичний запис системи нелінійних рівнянь

$$F(X) = 0, \quad (116)$$

де

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_n(X) \end{bmatrix} \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (117)$$

Нелінійна система (116) готується до ітерації у вигляді рекурентного співвідношення.

$$X = \varphi(X) \quad (118)$$

де φ - оператор рекурентного співвідношення (або оператор нелінійного відображення).

Критерії збіжності при розв'язку системи нелінійних рівнянь записуються для матриці, складеної із часток похідних від оператора нелінійних відображень φ по шуканих змінних X . Ця матриця складається з елементів $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ і називається матрицею Якобі:

$$J = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (119)$$

Матриця часток похідних J для випадку лінійних систем рівнянь відповідає матриці α системи, підготовленої до ітерації (108). Тому критерії збіжності сформульовані аналогічно теоремі збіжності ітерацій для лінійних систем рівнянь: також можна використовувати достатні умови (по нормі матриці Якобі) і необхідні й достатні умови (по найбільших власних значеннях матриці Якобі $\lambda_{J_{\max}}$).

Теорема: для збіжності ітераційного процесу розв'язку нелінійної системи $F(X) = 0$ за допомогою рекурентного співвідношення $X = \varphi(X)$ необхідно й досить, щоб на всій траєкторії ітераційного процесу від початкового наближення $X^{(0)}$ до розв'язку X^* найбільше по модулю власне значення матриці часток похідних (матриці Якобі $J = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{X^*}$) по шуканих характеристиках режиму було менше одиниці $\lambda_{J_{\max}} < 1$.

Ця умова і є необхідне й достатнє.

Умова по нормі матриці Якобі:

$$\left\| \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{X^k} \right\| < 1 - \text{достатня умова збіжності.}$$

Для перевірки (аналізу) впливу нелінійності рівнянь на збіжність ітераційного процесу, запишемо рекурентне співвідношення типу (118) у вигляді (120) $U = \varphi(U)$

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1(U) = -\frac{P_{1n}}{y_{11}U_1} + 0 \cdot U_1 + \frac{y_{12}}{y_{11}} \cdot U_2 + \frac{y_{13}}{y_{11}} \cdot U_3 + \dots + \frac{y_{1n}}{y_{11}} \cdot U_n + \frac{y_{1b}}{y_{11}} \cdot U_{BV}; \\ U_2 = \varphi_2(U) = \frac{P_{2gen}}{y_{22}U_2} + \frac{y_{21}}{y_{22}} \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \frac{y_{23}}{y_{22}} \cdot U_3 + \dots + \frac{y_{2n}}{y_{22}} \cdot U_n + \frac{y_{2b}}{y_{22}} \cdot U_{BV}; \\ \dots \\ U_n = \varphi_n(U) = -\frac{P_n}{y_{nn}U_n} + \frac{y_{n1}}{y_{nn}} \cdot U_1 + \frac{y_{n2}}{y_{nn}} \cdot U_2 + \dots + 0 \cdot U_n + \frac{y_{nb}}{y_{nn}} \cdot U_{BV}. \end{cases} \quad (120)$$

Поберемо частки похідні від (120) і підставимо їх у матрицю Якобі (119) стосовно до системи вузлових рівнянь у формі балансів струмів.

$$J = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial U} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(U_1)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_1)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_1)}{\partial U_n} \\ \frac{\partial(U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_2)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_2)}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(U_n)}{\partial U_1} & \frac{\partial(U_n)}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial(U_n)}{\partial U_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_{1n}}{y_{11} \cdot U_1^2} & \frac{y_{12}}{y_{11}} & \dots & \frac{y_{1n}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{-P_{2n}}{y_{22} \cdot U_2^2} & \dots & \frac{y_{2n}}{y_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{n1}}{y_{nn}} & \frac{y_{n1}}{y_{nn}} & \dots & \frac{P_{nn}}{y_{nn} \cdot U_n^2} \end{bmatrix} \quad (121)$$

Зіставляючи матрицю Якобі, для якої аналізується збіжність нелінійної системи рівнянь, з матрицею α (лінійної системи, підготовленої до ітерації) зауважуємо, що відмінність полягає в діагональному елементі: у матриці α діагональний елемент $\alpha_{ii} = 0$, а в матриці Якобі діагональний елемент

$$\frac{\partial \varphi_i(U)}{\partial U_i} = \frac{\pm P_{i(n,e)}}{y_{ii}U_i^2} \quad (122)$$

Аналіз виражень (121), (122) показує, що для слабко завантажених режимів з малими навантаженнями P_i і більшими власними провідностями y_{ii}

(малим опором підходящих ліній) вплив нелінійності на збіжність мало, тому що діагональний елемент близький до нуля.

Напроти, при розрахунках важких режимів P_i велике, U_i мало (знижене стосовно U_B), вплив нелінійності на збіжність суттєво, тому збіжність важких режимів (режимів, близьких до граничних за умовами статичної стійкості електричної системи) повільна, а іноді не спостерігається.

Несходимість ітераційного процесу (при правильно закодованих вихідних даних) служить, при спрощеному аналізі, ознакою порушення статичної стійкості режиму, що розраховується. Цей висновок є істотним результатом застосування ЕОМ і чисельних ітераційних методів розв'язку рівнянь режиму, що встановився. Воно використовується в сучасній проектній і експлуатаційній практиці.

11.5 Розв'язок рівнянь вузлових напруг ітераційними методами

11.5.1 Розв'язок рівнянь вузлових напруг у формі балансу струмів

Матричне рівняння:

$$Y_U \cdot U_{\Delta} = J_Y; \text{ де } [J_{Y_i}] = \left[\frac{P_i}{(U_{\Delta i} + U_{BY})} \right].$$

Представимо в алгебраїчній формі й розв'язний кожне рівняння системи щодо діагональних елементів ($U_{\Delta 1}, U_{\Delta 2}, \dots, U_{\Delta n}$):

$$\begin{cases} U_{\Delta 1} = +0 \cdot U_{\Delta 1} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + \frac{Y_{1n}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_1}{(U_{\Delta 1} + U_{BY}) \cdot Y_{11}} \\ U_{\Delta 2} = + \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1} + 0 \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + \frac{Y_{2n}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_2}{(U_{\Delta 2} + U_{BY}) \cdot Y_{22}} \\ \vdots \\ U_{\Delta n} = + \frac{Y_{n1}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 1} + \frac{Y_{n2}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 2} + \frac{Y_{n3}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 3} + \dots + 0 \cdot U_{\Delta n} + \frac{-P_n}{(U_{\Delta n} + U_{BY}) \cdot Y_{nn}} \end{cases} \quad (123)$$

Для ітераційного розв'язку необхідно вибрати початкове наближення падінь напруг $U_{\Delta}^{(0)}$ і підставити в праву частину системи (123). Одержимо $U_{\Delta}^{(1)}$, потім підставимо його в праву частину, одержимо $U_{\Delta}^{(2)}$ і т.д. Процес може вестися по методу простій або прискореної ітерації.

По методу прискореної ітерації для знаходження k -го змінного в i -ой ітерації використовуються змінні $U_{\Delta 1}^{(i)}$, $U_{\Delta 2}^{(i)}$... $U_{\Delta k-1}^{(i)}$, обчислені на цій же i -ой ітерації й змінні $k+1$, $k+2$, ..., n , обчислені на попередній $(i-1)$ -ой ітерації.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\Delta 1}^{(i)} = \frac{-P_1}{(U_{\Delta 1}^{(i-1)} + U_{BY}) \cdot Y_{11}} + 0 \cdot U_{\Delta 1}^{(i-1)} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + \dots + \frac{Y_{1n}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)} \\ U_{\Delta 2}^{(i)} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + \frac{-P_2}{(U_{\Delta 2}^{(i-1)} + U_{BY}) \cdot Y_{22}} + 0 \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + \dots + \frac{Y_{2n}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)} \\ \vdots \\ U_{\Delta n}^{(i)} = \frac{Y_{n1}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + \frac{Y_{n2}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + \frac{Y_{n3}}{Y_{nn}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + \dots + \frac{-P_n}{(U_{\Delta n}^{(i-1)} + U_{BY}) \cdot Y_{nn}} + 0 \cdot U_{\Delta n}^{(i-1)} \end{array} \right. \quad (124)$$

Аналогічно організує ітераційний процес розрахунків напруг вузлів U_u на базі рівнянь (108), записаних для напруг вузлів.

Розв'язок нелінійних вузлових рівнянь можна записати, використовуючи зворотну матрицю Y^{-1} .

$$U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot J_y \quad (125)$$

$$U_{\Delta} = Y^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_i \\ U_i \end{pmatrix};$$

$$U_{\Delta} = U - n \cdot U_{BY}$$

Використовуючи ці рівняння, одержимо:

$$U = n \cdot U_{BY} + Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -S_{in} \\ U_i \end{bmatrix} = n \cdot U_{BY} - Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} S_{in} \\ \widehat{U}_i \end{bmatrix} \quad (126)$$

Вираз (126) має велике прикладне значення в області розрахунків, що встановилися режимів. Воно називається **зверненою формою рівнянь вузлових напруг** (оскільки використовується зворотна матриця $Y^{-1} = Z$) і являє собою самостійний метод розрахунків режимів.

11.5.2 Звернена форма рівнянь вузлових напруг і їх аналіз

Зворотню матрицю Y^{-1} у виразх (125), (126) позначають через Z і називають матрицею власних і взаємних опорів

$$Y^{-1} = Z$$

Тоді:

$$U = n \cdot U_{BY} - Z \cdot \left[\frac{S_{in}}{\hat{U}_i} \right], \text{ або} \quad (127)$$

$$\begin{cases} U_1 = U_{BY} - Z_{11} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{12} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{13} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{1n} \frac{S_n}{\hat{U}_n} \\ U_2 = U_{BY} - Z_{21} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{22} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{23} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{2n} \frac{S_n}{\hat{U}_n} \\ \vdots \\ U_n = U_{BY} - Z_{n1} \frac{S_1}{\hat{U}_1} - Z_{n2} \frac{S_2}{\hat{U}_2} - Z_{n3} \frac{S_3}{\hat{U}_3} - \dots - Z_{nn} \frac{S_n}{\hat{U}_n} \end{cases} \quad (128)$$

або в загальному виді:

$$\begin{cases} U_i = U_{BY} - \sum Z_{ij} \frac{S_j}{\hat{U}_j}, \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (129)$$

Щоб використовувати схему розрахунків (126), (128) і (129), треба попередньо звернути матрицю вузлових провідностей. Після цього процес одержання розв'язку (знаходження U_1, U_2, \dots, U_n) відбувається набагато швидше, чим ітераційний розв'язок системи вихідних нелінійних рівнянь (15). (Цей факт може мати й фізичне тлумачення).

Алгоритм ітераційного розв'язку нелінійних звернених рівнянь наступний:

Задаємося початковими наближеннями напруг U_i^0 , наприклад $U_i = U_{ном}$, і підставляємо їх у знаменник у праву частину (128). Виконуємо необхідні

обчислення згідно (128), у результаті знаходимо вектор $\bar{U}_1^{(1)}, \bar{U}_2^{(1)}, \dots, \bar{U}_n^{(1)}$ першого наближення (тут Z, U і S у загальному випадку мають комплексний характер). У другому наближенні в знаменник (128) підставляються значення напруг $U_i^{(1)}$ першої ітерації, перебуває $U_i^{(2)}$ після чого виконується третя ітерація і т.д. Ітераційний процес закінчується, коли різниця напруг між двома сусідніми наближеннями стає менше заданої точності розрахунків.

$$\frac{1}{U_{\text{ном}}} \|[U]^k - [U]^{k-1}\|_m \leq \frac{\varepsilon_U}{U}, \quad \% \quad (130)$$

Ітераційний процес визначення напруг по звернених рівняннях може бути прискорений, якщо на k -тій ітерації для розрахунків i -того невідомого ухвалювати $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{i-1}^{(k)}$ із цієї ж k -тієї ітерації, а інші невідомі U_{i+1} брати з $(k-1)$ ітерації, тобто

$$U_i^{(k)} = f((U_1, U_2, \dots, U_{i-1})^k, (U_i, U_{i+1}, \dots, U_n)^{k-1}) \quad (131)$$

Фізичний зміст елементів матриці власних і взаємних опорів Z можна усвідомити, якщо розглянути приватні режими роботи мережі, у яких навантаження вузлів від 1-ого до n -ого послідовно задаються одиничними струмами $I_i = 1$ при холостому ході в інших вузлах мережі ($I_1 = 1, I_2 = I_3 = \dots = I_n = 0$).

Систему рівнянь (129) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} U_i = U_{BY} - \sum_{j=1}^n z_{ij} \frac{S_j}{U_j} = U_{BY} - U_{\Delta i(1)} - U_{\Delta i(2)} - \dots - U_{\Delta i(j)} - \dots - U_{\Delta i(n)} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (132)$$

З вираз (132) випливає, що елементи матриці вузлових опорів Z_{ij} являють собою коефіцієнти часткових спадань напруги, або коефіцієнти впливу струму навантаження в j -тому вузлі на напругу в i -тому вузлі.

Дійсно, якщо побрати складну схему мережі, що представляє собою зв'язаний спрямований граф, тобто одне дерево зі своїми хордами, те очевидно, що в цій схемі струм навантаження кожного вузла впливає на

напругу у всіх вузлах. Природно, що матриця вузлових провідностей Y і зворотна до неї Z залежать тільки від пасивних параметрів мережі, тобто від топології схеми й опорів або провідностей віток. Ця матриця залишається незмінною при зміні навантажень у вузлах.

У першому приватному режимі:

$$I_1 = 1, I_2 = I_3 = \dots = I_n = 0$$

Тоді:

$$\begin{cases} U_1 = U_{BV} - z_{11} \cdot I_1 - \sum z_{1j} \cdot I_j, & \text{где } I_j = 0; \\ U_2 = U_{BV} - z_{21} \cdot I_1 - \dots \\ U_3 = U_{BV} - z_{31} \cdot I_1 - \dots \\ \vdots \\ U_n = U_{BV} - z_{n1} \cdot I_1 - \dots \end{cases} \quad (133)$$

Розрахувавши такий режим по будь-якій програмі розрахунків режимів, що встановилися, можна відразу одержати весь стовпець матриці z_{i1} (1-й стовпець - при $i_1=1$, 2-й стовпець z_{i2} – при розрахунках другого приватного режиму при $i_2 = 1$ і т.д.). Тобто виходить, що елементи матриці вузлових опорів можна знайти за допомогою програм розрахунків, що встановилися режимів за результатами розрахунків на ЕОМ n-приватних режимів з одиничними струмами у вузлах по черзі.

Процедура знаходження Z шляхом прямого обігу Y або вищеописаним шляхом громіздка, але обчислена один раз, матриця Y^{-1} забезпечує швидкодію розрахунків режимів і тому її застосування ефективно в завданнях, де треба вважати багато режимів однієї мережі з різними навантаженнями (завдання оптимізації режиму й т.п.).

Після того, як напруги у вузлах мережі знайдені, інші параметри режиму розраховуються безітераційним шляхом (див. вище).

11.6 Застосування методу Ньютона для розв'язку рівнянь, що встановилися режимів

11.6.1 Обґрунтування методу Ньютона для розв'язку нелінійного рівняння

Метод Ньютона є універсальним. Він застосовний для знаходження корінь нелінійних рівнянь і систем нелінійних рівнянь, коли досить добре відомо початкове наближення, досить близьке до розв'язку $x^{(0)}$.

Нехай задане нелінійне рівняння

$$f(x) = 0; \quad (134)$$

і відомо початкове наближення $x^{(0)}$. Нелінійну функцію $f(x)$ розкладемо в ряд Тейлора в околиці початкового наближення, тобто при $x = x^{(0)}$.

$$f(x)_{x=x^{(0)}} = f(x^{(0)}) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^{(0)}} \cdot \Delta x + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^{(0)}} \cdot \Delta x^2 + \dots = 0 \quad (135)$$

$x - x^{(0)} = \Delta x$ - мало за умовою, тому що відомо гарне початкове наближення, тому Δx^2 зневажаємо.

$$0 = f(x^{(0)}) + \left. f'(x) \right|_{x=x^{(0)}} \cdot (x^{(0)} - x_*)$$

Звідки

$$\Delta x^{(0)} = \frac{-f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \quad (136)$$

Наступне наближення

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$$

або для k -го наближення

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k-1)} \quad (137)$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \quad (138)$$

Для одержання розв'язку слід організувати ітераційний процес по вираженню(137),(138).

Ітераційний процес закінчується, коли досягається задана точність розрахунків ϵ_x

$$|\Delta x^k| < \epsilon_x$$

Для знаходження корінь нелінійного рівняння з одним невідомим по методу Ньютона може бути наведена геометрична інтерпретація

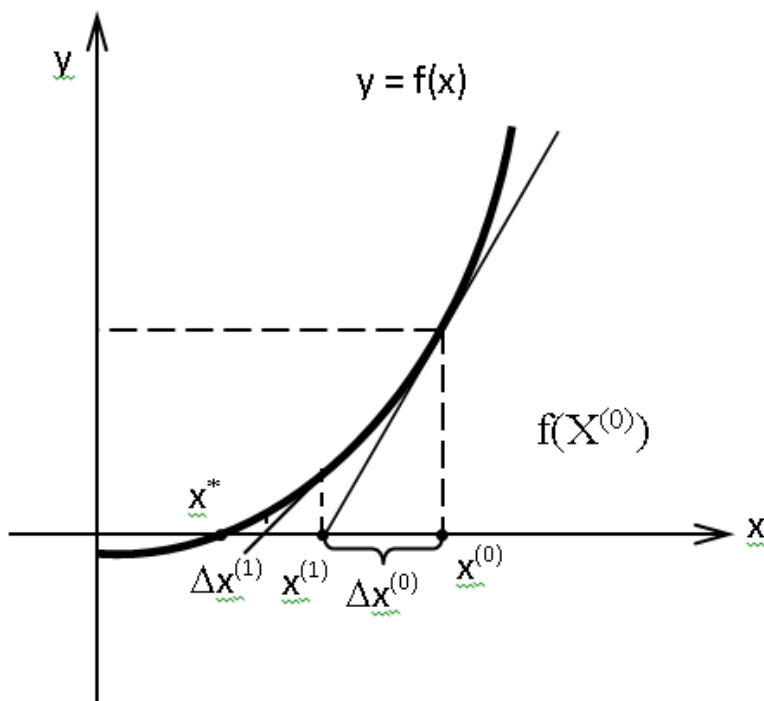


Рис.7

Оскільки в наведеній геометричній побудові використовуються дотичні й самі перші похідні пов'язані з дотичними, проведеними до кривої в крапках

послідовних наближень, то метод Ньютона в такому виді називається методом дотичних.

11.6.2 Застосування методу Ньютона для розв'язку систем нелінійних рівнянь

Нехай маємо систему нелінійних рівнянь

$$F(X) = 0, \quad (139)$$

де

$$F(X) = \begin{Bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_n(X) \end{Bmatrix}; \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (140)$$

і нехай відомо початкове наближення $X^{(0)}$ достатнє близьке до розв'язку X_*

$$X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \quad (141)$$

Розкладаємо нелінійну функцію $F(X)$ у ряд Тейлора в околиці обраного початкового наближення $X^{(0)}$

$$F(X)|_{X=X^{(0)}} = F(X^{(0)}) + \left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right]_{X^{(0)}} \cdot [\Delta X^{(0)}]; \quad (142)$$

Тут також зневажили членами розкладання другого й більш порядку малості, оскільки $\Delta X = (X^{(0)} - X_*)$ мало за умовою.

$F(X^{(0)})$ - значення вектора-функції небалансу (140), обчислене в крапці початкового наближення.

$$\left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \right] = J - \text{матриця Якобі} - \text{матриця часток похідних від складових}$$

вектора-функції небалансу правих частин рівнянь (140) $f_i(x_{i,j})$ по шуканим

змінним $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, обчислена в крапці початкового (поточного) наближення.

$$\left[\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right]_{x=x^{(0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^{(0)}} \quad (143)$$

З (142) можна виразити $\Delta X^{(0)}$ – виправлення до вектора розв'язку на нульовому наближенні, використовую зворотну матрицю Якобі:

$$\Delta X^{(0)} = - \left[\frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right]_{x=x^{(0)}}^{-1} \cdot F(X^{(0)}) \quad (144)$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(0)}$$

$X^{(1)}$ – вектор-стовпець невідомих першого наближення рівнянь;

$F(X^{(0)})$ - вектор-стовпець небалансів правих частин рівнянь при підстановці в (140) початкового наближення $X^{(0)}$.

На кожній ітерації потрібно обчислити матрицю Якобі й розв'язати з нею лінеаризовану систему. Тому кожна ітерація – громіздка, але їх небагато, і вже перше наближення дає гарний по точності результат. Тому існує модифікація методу Ньютона, називана методом січних. По методу січних матриця Якобі й зворотна до неї J-1 зберігаються незмінними, а коректується вектор-функція небалансів $F(X^{(k)})$.

Ітераційний метод Ньютона сходиться, і чергове k-оє наближення може бути знайдене, якщо на всій траєкторії ітераційного процесу від $X^{(0)}$ до $X^{(k)}$ визначник матриці Якобі не звертається в нуль (оскільки тоді матриця Якобі не може бути звернена). Тому поняття, що початкове наближення задане досить точно, означає, що воно лежить усередині криволінійної поверхні, обмеженої точками, де визначник матриці Якобі $\det j \neq 0$. Якщо проводити аналогічно для нелінійних рівнянь із 1-м невідомим, то це означає, що від

початкового наближення $X^{(0)}$ до розв'язку X^* не повинне попадатися таке $X^{(k)}$, при якому похідна $F'(X^{(k)}) = 0$.

Для збільшення швидкості східності й надійності розрахунків, що встановився режиму застосовуються різні модифікації методу Ньютона. Спрощений розрахунки можна робити з незмінною матрицею Якобі, обумовленої тільки при початковому наближенні. Одержимо так званий метод січних або метод хорд, на відміну від методу дотичних. Для підвищення ефективності методу Ньютона використовують «поділ» рівнянь, а для більш надійної збіжності враховують старші нелінійні члени в розкладанні Тейлора або використовують методи по параметру.

Методи « по параметру» необхідно використовувати в розрахунках режиму, що встановився, у тих випадках, коли погано сходиться метод Ньютона. Ряд модифікацій методу “ по параметру” визначається наступної ітераційною формулою:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - t \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial X}(X^{(i)}) \right]^{-1} \cdot W(X^{(i)}), \quad (145)$$

де $\left[\frac{\partial W}{\partial X}(X^{(i)}) \right]^{-1}$ — матриця зворотна до матриці Якобі, обчисленої при $X=X^{(i)}$;

$W(X^{(i)})$ — вектор-стовпець небалансів потужності у вузлах при $X=X^{(i)}$;

$X^{(i)}, X^{(i+1)}$ — вектори змінних на i -м і $(i+1)$ -м кроках ітераційного процесу;

t — параметр, причому $t \leq 1$.

При $t=1$ ітераційний процес збігається з методом Ньютона. Процес відповідає множенню виправлень ΔX , обумовлених при розв'язку системи лінійних рівнянь у методі Ньютона, на параметр t . У цьому змісті метод “ по параметру” можна розглядати як «прискорений» метод Ньютона.

Величина цього параметра може бути прийнята як канонічна норма матриці часток похідних 2-го порядку, називаною матрицею Гессе ($t(0,5)$, (наближений розрахунки 2-ой похідної при розкладанні в ряд Тейлора, якими ми зневажили).

У сучасних програмах розрахунків режиму метод Ньютона (у формі методу по параметру) використовується авторитетними розроблювачами [5]. Це приймання необхідно застосовувати, коли ітераційний процес носить коливальний характер (тобто коли режим лежить поблизу межі статичної стійкості й спостерігається плинність режиму, що відповідає знаходженню крапки режиму на плоскій вершині синусоїди).

11.6.3 Розв'язок нелінійних вузлових рівнянь методом Ньютона.

Основна перевага методу — швидка збіжність, однак він більш трудомісткий і вимагає великого обсягу обчислень на кожній ітерації.

Для реалізації розв'язку вузлових рівнянь методом Ньютона, рівняння (39) представимо у вигляді (для чотирьох вузлів)(

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -U_{BV} + U_1 \\ -U_{BV} + U_2 \\ -U_{BV} + U_3 \\ -U_{BV} + U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1/U_1 \\ P_2/U_2 \\ P_3/U_3 \\ P_4/U_4 \end{bmatrix}; \quad (146)$$

Перемноживши, одержимо:

$$\begin{cases} y_{11}U_1 + y_{12}U_2 + y_{13}U_3 + y_{14}U_4 - y_{1B}U_{BV} = \frac{P_1}{U_1} \\ y_{21}U_1 + y_{22}U_2 + y_{23}U_3 + y_{24}U_4 - y_{2B}U_{BV} = \frac{P_2}{U_2} \\ y_{31}U_1 + y_{32}U_2 + y_{33}U_3 + y_{34}U_4 - y_{3B}U_{BV} = \frac{P_3}{U_3} \\ y_{41}U_1 + y_{42}U_2 + y_{43}U_3 + y_{44}U_4 - y_{4B}U_{BV} = \frac{P_4}{U_4} \end{cases} \quad (147)$$

Використовуємо вектор-функцію $W(U)$:

$$W(U^{(k)}) = \begin{cases} \left(-\frac{P_1}{U_1} + y_{11}U_1\right) + y_{12}U_2 + y_{13}U_3 + y_{14}U_4 - y_{1B}U_{BY} = 0 \\ y_{21}U_1 + \left(-\frac{P_2}{U_2} + y_{22}U_2\right) + y_{23}U_3 + y_{24}U_4 - y_{2B}U_{BY} = 0 \\ y_{31}U_1 + y_{32}U_2 + \left(-\frac{P_3}{U_3} + y_{33}U_3\right) + y_{34}U_4 - y_{3B}U_{BY} = 0 \\ y_{41}U_1 + y_{42}U_2 + y_{43}U_3 + \left(-\frac{P_4}{U_4} + y_{44}U_4\right) - y_{4B}U_{BY} = 0 \end{cases} \quad (148)$$

Становимо матрицю Якобі:

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \begin{bmatrix} \left(\frac{P_1}{U_1^2} + y_{11}\right) & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & \left(\frac{P_2}{U_2^2} + y_{22}\right) & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & \left(\frac{P_3}{U_3^2} + y_{33}\right) & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & \left(\frac{P_4}{U_4^2} + y_{44}\right) \end{bmatrix} \quad (149)$$

Тоді ітераційна формула запишеться у вигляді:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \Delta U^{(k+1)}, \quad (150)$$

де
$$\Delta U^{(k+1)} = \left[\frac{\partial W}{\partial U}\right]^{-1} \cdot [W(U^{(k+1)})]. \quad (151)$$

Точність перевіряється в такий спосіб:

$$W(U^{(k+1)}) \leq \varepsilon \quad (152)$$

Після визначення вузлових напруг виконується розрахунки інших параметрів режиму електричної мережі.

1. Визначаються падіння напруга у вузлах щодо напруги в балансуєчому вузлі:

$$U_{\Delta} = U_y - n \cdot U_{BY}, \quad (153)$$

де U_y — напруги у вузлах; n — одинична матриця-стовпець.

2. Визначаються струми віток:

$$I_B = dY_B \cdot M^T \cdot U_\Delta, \quad (154)$$

де dY_B - діагональна матриця провідностей віток;

M^T - транспонована матриця інциденцій.

3. Визначаються спадання напруги на вітках схеми:

$$\Delta U_B = dZ_B \cdot I_B \quad (155)$$

4. Визначаються потоки потужності в вітках:

$$P_B = I_B \cdot U_{НОМ}, \quad (156)$$

де $U_{НОМ}$ - номінальна напруга.

5. Визначаються втрати потужності в вітках:

$$\Delta P_B = dI_B \cdot M^T \cdot U_\Delta. \quad (157)$$

6. Визначаються сумарні втрати потужності в мережі:

$$\Delta P_\Sigma = n^T \cdot \Delta P_B. \quad (158)$$

7. Визначаються розрахункові струми вузлів:

$$J_p = M \cdot I_B. \quad (159)$$

8. Визначаються розрахункові потужності у вузлах:

$$P_p = dU_y \cdot J_p, \quad (160)$$

де dU_y - діагональна матриця напруг у вузлах.

9. Для кожного вузла визначається небаланс по потужності:

$$P_{нб} = P_p - P_i, \quad (161)$$

і в %:

$$P_{\text{нб}\%} = \frac{P_{\text{pi}} - P_i}{P_i} \cdot 100\%, \quad (162)$$

де P_p — розрахована потужність,

P_i — задана потужність.

Питання для самоперевірки

1. У чому подібність і відмінність методів проста й прискореної ітерації?
2. Поясніть принцип розв'язку системи нелінійних рівнянь вузлових напруг методом простий і методом прискореної ітерації.
3. Як формулюються умови збіжності ітераційних процесів розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь? систем нелінійних рівнянь?
4. Обґрунтуйте формулу для ітераційного розрахунків корінь нелінійного рівняння $f(x)=0$ по методу Ньютона.
5. Чому умовою застосовності методу Ньютона є наявність гарного початкового наближення.
6. Поясніть принцип розв'язку системи нелінійних рівнянь вузлових напруг методом Ньютона.
7. У чому відмінність методу дотичних від методу січних при розв'язку системи рівнянь методом Ньютона?
8. Що впливає на збіжність ітераційного процесу?
9. Як формулюється (і як пояснюється) умова збіжності методу Ньютона.

Розділ 12. Завдання на курсову роботу

1. Тема роботи: Застосування матричних методів для розрахунків і аналізу режимів, що встановилися, електричних мереж.

2. Вихідні дані до курсової роботи: Схема й параметри електричної мережі, навантаження вузлових крапок (визначаються за методикою, викладеної в Таблиці 1)

Таблиця 1. До визначення вихідних даних для варіантів завдання

			Фамилия	Имя	Отчество
			Петров	Николай	Иванович
			X=6	Y=7	Z=8
№ варианта(соответствует порядковому номеру студента в списке группы)	Номер схемы	Расположение балансирующего узла БУ	Расположение нагрузок и генерирующих источников	Исходные данные для выполнения курсовой работы	
1	1	А	Местоположение нагрузок выбирается путем последовательного прибавления к букве, обозначающей БУ, соответственно 2, 4 и 5. Например, если БУ - "Г", то нагрузки будут расположены в точках Г+2=Е, Г+4=Б, Г+5=В.	Базовая длина i-го участка, км	
2		Б		$L_i =$	$5 \cdot X$
3		В		Мощность БУ, МВт	
4		Г		$P_o =$	$3 \cdot Y$
5		Д		Напряжение БУ, кВ	
6	2	Е		$U_b =$	$(1+1/Z) \cdot U_{ном}$
7		А		Номинальное напряжение, кВ	
8		Б		$U_{ном} =$	110,00
9		В		Удельное индуктивное сопротивление, Ом/км	
10		Г		$X_o =$	0,40
11	3	Д	Длина участка, км		
12		Е	Длина первого участка	$1.3 \cdot L_i$	
13		А	Длина последнего уч-ка	$0.7 \cdot L_i$	
14		Б	Нагрузки узловых точек, МВт		
15		В	$P_i =$	$P_o \cdot (1+0,04 \cdot Y \cdot i)$	
16	4	Г			
17		Д			
18		Е			
19		А			
20		Б			
21	4	В			
22		Г			
23		Д			
24		Е			

Схеми мережі:

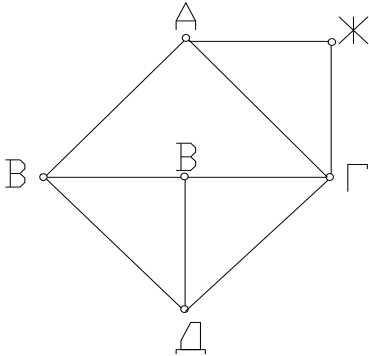


Схема1

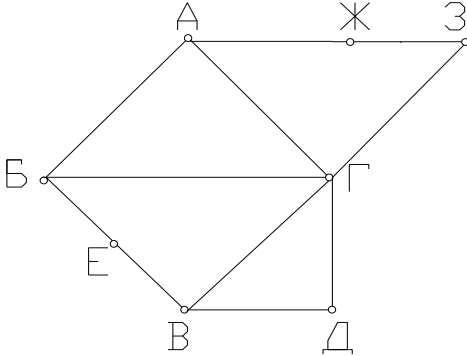


Схема2

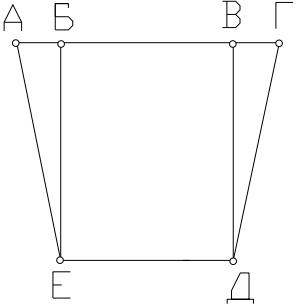


Схема3

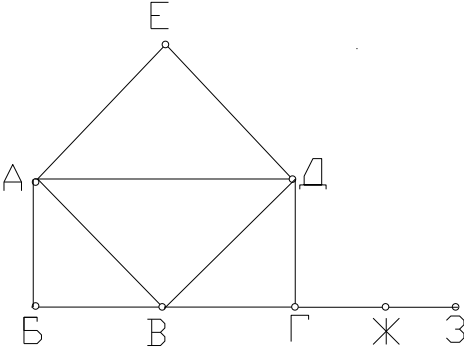


Схема4

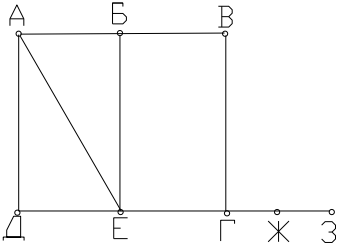


Схема5

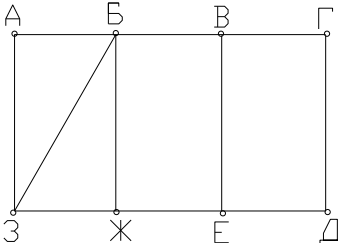


Схема6

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік підлягаючих розробці питань)

1. Формування схеми й навантажень мережі згідно з варіантом вихідних даних. Формування рівнянь режиму, що встановився, електричної мережі
 - 1.1 Складання схеми заміщення електричної мережі, визначення її параметрів і навантажень у вузлах
 - 1.2 Складання елементарних матриць параметрів режиму мережі.
 - 1.3 Розрахунки матриці вузлових провідностей і матриці контурних опорів
 - 1.4 Запис рівнянь вузлових напруг при завданні навантажень у струмах.
 - 1.5 Запис контурних рівнянь.
 2. Розрахунки режиму електричної мережі при завданні навантажень у струмах
 - 2.1 Розрахунки режиму електричної мережі по вузлових рівняннях з використанням методу виключення невідомих Гаусса
 - 2.2 Розрахунки режиму електричної мережі на основі контурних рівнянь
 - 2.3 Зіставлення результатів розрахунків режиму
 3. Розрахунки режиму електричної мережі по нелінійних вузлових рівняннях при завданні навантажень у потужностях з використанням ітераційних методів
 - 3.1 Розв'язок нелінійних вузлових рівнянь у формі балансу струмів методом прискореної ітерації
 - 3.2 Розв'язок нелінійних вузлових рівнянь у формі балансу струмів методом Ньютона
 - 3.3 Розв'язок нелінійних вузлових рівнянь у зверненій формі методом простій або прискореної ітерації
 4. Розрахунки утяжеленого режиму із застосуванням матриць узагальнених параметрів електричної мережі
 5. Аналіз результатів розрахунків режимів. Аналіз збіжності ітераційних методів. Виводи.
- Література

5. Перелік графічного матеріалу (у вигляді комп'ютерних малюнків на форматі А4)

Вихідна розрахункова схема електричної мережі із вказівкою ділянок і навантажень у вузлах мережі. Нумерація елементів схеми і її топологічний аналіз. Складання 1-ої і 2-ої матриць інциденцій.

1. Графіки збіжності ітерацій
2. Схеми мережі з результатами розрахунків режимів по різних методах

IV Приклад виконання розділів курсової роботи

Приклад розрахунків виконаний студентами кафедри “Електричні системи” .

Складання схеми заміщення електричної мережі, визначення її параметрів і навантажень у вузлах

Становимо графічну схему заміщення електричної мережі й нумеруємо її відповідно до принципу ярусності:

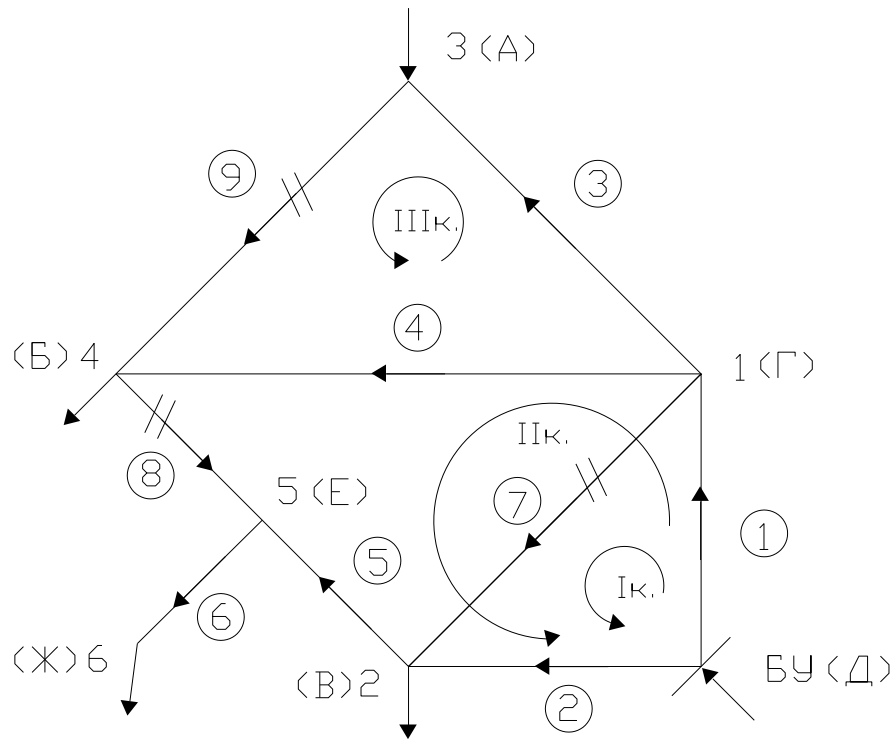


Рисунок 1

Балансуючий вузол за умовою: Д.

Навантаження: Д+2=Ж, Д+4=Б, Д+5=В.

Генеруюче джерело: Д+3=А.

X – число букв у прізвищі;

Y – число букв в імені;

Z – число букв у по батькові.

X=9, Y=9, Z=8.

Базова довжина ділянки:

$$L = 5 \cdot X = 5 \cdot 9 = 45 \text{ км.}$$

Базова потужність:

$$P_0 = 3 \cdot Y = 3 \cdot 9 = 27 \text{ МВт.}$$

Напруга в балансуючому вузлі:

$$U_{\text{БВ}} = U_{\text{НОМ}} \left(1 + \frac{1}{Z}\right) = 110 \text{ кВ} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = 123,75 \text{ кВ.}$$

$$U_{\text{НОМ}} = 110 \text{ кВ.}$$

Пронумеруємо схему відповідно до принципу ярусності. Одержуємо: 6 віток, 3 хорди, 6 вузлів.

Довжини першого й останнього ділянок відповідно:

$$l_1 = 1,4 \cdot L = 1,4 \cdot 45 = 63 \text{ км};$$

$$l_9 = 0,6 \cdot L = 0,6 \cdot 45 = 27 \text{ км}.$$

Довжини всіх інших ділянок:

$$l = L = 45 \text{ км}.$$

Знаючи питомий опір віток у відношенні до одному кілометру $x_0 = 0,4 \text{ Ом/км}$ й довжини всіх ділянок мережі, знайдемо їхні опори по формулі:

$$Z_i = x_0 \cdot l_i$$

$$Z_1 = x_0 \cdot l_1 = 0,4 \cdot 63 = 25,2 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z_7 = Z_8 = x_0 \cdot l = 0,4 \cdot 45 = 18 \text{ Ом};$$

$$Z_9 = x_0 \cdot l_9 = 0,4 \cdot 27 = 10,8 \text{ Ом}.$$

Обчислюємо потужності в заданих вузлах по формулі:

$$P_i = P_0 \cdot (1 + 0,05 \cdot i),$$

де i - номер вузла.

Навантаження задано у вузлах 2, 4, 6. У вузлі 3 – генерація.

$$P_2 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 2) = 29,7 \text{ МВт};$$

$$P_3 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) = 31,05 \text{ МВт};$$

$$P_4 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 4) = 32,4 \text{ МВт};$$

$$P_6 = 27 \cdot (1 + 0,05 \cdot 6) = 35,1 \text{ МВт}.$$

Складання елементарних матриць параметрів режиму мережі й матриць з'єднань

Матрицю параметрів режиму $[P_i]$ (МВт) складемо по вже відомих потужностях у вузлах мережі:

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.7 \\ 31.05 \\ -32.4 \\ 0 \\ -35.1 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

По формулі $J = P/U$ знайдемо струми, що задають. У першому наближенні $U = U_{ном} = 110 \text{ кВ}$.

$$J_y := \frac{P_i}{U_{ном}} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ 0.282 \\ -0.295 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Становимо діагональну матрицю опорів dZ_B . Потім знаходимо зворотну їй матрицю dY_B , яку будемо називати матрицею провідностей віток і хорд:
//

$$dY_B := dZ_B^{-1}$$

$$dY_B = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.093 \end{pmatrix} \text{ S}$$

Одержимо першу матрицю інциденцій M - матриці з'єднань віток у вузлах. У ній рядка – вузли схеми, стовпці – віток схеми. Матриця M формується як блокова із блоком M_α розмірністю $(n \times n)$ - для дерева мережі, і блоком M_β розмірністю $(n \times k)$ – для хорд:

$$M = [M_\alpha \quad M_\beta].$$

Складемо матрицю M_Σ , яка крім M_α і M_β буде містити додатковий рядок для балансуєчого вузла:

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \\ M_{BV} \end{bmatrix}$$

$$M_\Sigma := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Виділимо матрицю M_α (для дерева мережі) і M_β (для хорд мережі) з матриці M_Σ :

$$M_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Об'єднання матриць M_{α} і M_{β} дасть нам матрицю M - першу матрицю інциденцій:

$$M := \text{augment}(M_{\alpha}, M_{\beta}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Складемо матрицю з'єднання віток у незалежні контури N або другу матрицю інциденцій, яка дозволяє сформулювати контурну модель електричної мережі. Матриця N буде складовою. Її елементами будуть матриці N_{α} – матриця з'єднань для віток і N_{β} – матриця з'єднань для хорд схеми.

$$N := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Виділимо з матриці N матриці N_{α} і N_{β} .

$$N_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розрахунки матриці вузлових провідностей і матриці контурних опорів

Обчислимо по відомим dZ_B і M матрицю Y_u – матрицю вузлових провідностей без обліку балансуєчого вузла:

$$Y_u := M \cdot dZ_B^{-1} \cdot M^T + Y_u = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 \end{pmatrix} S$$

А так само матрицю Y_{Σ} – матрицю вузлових провідностей з урахуванням балансуєчого вузла:

$$Y_{\Sigma} := M_{\Sigma} \cdot dZ_B^{-1} \cdot M_{\Sigma}^T \quad Y_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 & -0.04 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 & -0.056 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 & 0 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 & 0 \\ -0.04 & -0.056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.095 \end{pmatrix} S$$

Як видно, матриця вузлових провідностей квадратна, симетрична. Її діагональні елементи Y_{ii} являють собою суми побічних елементів рядка (або стовпця) Y_{ij} , узяті із протилежним знаком. Ці суми називаються власними провідностями вузлів. Її побічні елементи Y_{ij} представляють провідності віток між вузлами i і j і називаються взаємними провідностями вузлів; якщо між вузлами i і j безпосередній зв'язок відсутній, то $Y_{ij} = 0$, саме тому матриця вузлових провідностей – слабозаповнена.

Матриця вузлових провідностей Y_{Σ} для схеми електричної мережі, включаючи балансуєчий вузол, є виродженою, тому що сума елементів рядків або стовпців Y_{Σ} рівна 0.

Для розв'язку контурних рівнянь нам знадобляться контурні опори. Матрицю контурних опорів Z_k можна одержати маючи матриці N , dZ_B і N^T .

$$Z_k := N \cdot dZ_B \cdot N^T \quad Z_k = \begin{pmatrix} 61.2 & 43.2 & 0 \\ 43.2 & 97.2 & -18 \\ 0 & -18 & 46.8 \end{pmatrix} \Omega$$

Матриця контурних опорів Z_k має цілком регулярну структуру.

Матриця контурних опорів має порядок, дорівнює числу незалежних контурів ($n \cdot n$, де n – число незалежних контурів). Її діагональні елементи Z_{ii} являють собою алгебраїчну суму опорів віток, що входять у даний контур, а побічні елементи Z_{ij} – алгебраїчну суму опорів, загальних для контурів i і j .

Розрахунки режиму електричної мережі по лінійних вузлових і контурних рівняннях при завданні навантажень у струмах

Здійснимо розрахунок режиму нашої електричної мережі.

Вузлове рівняння в матричній формі має вигляд $Y_v \cdot \vec{U}_{\Delta} = -\vec{J}$. За допомогою цього рівняння ми можемо знайти напруги у вузлах схеми. Для цього з рівняння знайдемо матрицю-стовпець спадань напруги \vec{U}_{Δ} у вузлах схеми щодо балансуєчого вузла (елементи матриці \vec{U}_{Δ} будуть мати негативне значення), а потім для одержання матриці-стовпця вузлових напруг U_u складемо сволоки-стовпці спадань напруги й напруги в балансуєчому вузлі.

$$U_{\Delta} := Y_y^{-1} \cdot J_y \quad U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5.473 \\ -6.915 \\ -5.250 \\ -8.165 \\ -10.412 \\ -16.155 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad U_y := U_{\Delta} + U_{\text{бy}} \cdot n \quad U_y = \begin{pmatrix} 118.277 \\ 116.835 \\ 118.5 \\ 115.585 \\ 113.338 \\ 107.595 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

З отриманих значень вузлових напруг видно, що напруга значна падає в тих вузлах, які мають більше навантаження й мають мале число зв'язків із сусідніми вузлами (наочний приклад – це вузол 6, який має саме більше навантаження й харчується лише однією лінією електропередачі). Генеруючий вузол (вузол 3) має тенденцію до підвищеної напруги. Це можна пояснити тим, що в генеруючому вузлі потужність не споживається з мережі, а навпаки, надходить у мережу.

За допомогою матриці падіння напруг у вузлах схеми й матриці МТ ми можемо знайти падіння напруг уже на вітках схеми.

$$\Delta U_B := M^T \cdot U_{\Delta} \quad \Delta U_B = \begin{pmatrix} 5.473 \\ 6.915 \\ -0.223 \\ 2.691 \\ 3.497 \\ 5.744 \\ 1.442 \\ 2.247 \\ 2.915 \end{pmatrix} \text{ kV} \text{ - падіння напруг на ветвях схеми.}$$

Знаючи падіння напруг на вітках схеми легко можна знайти струми в вітках. Для цього помножимо зворотню діагональну матрицю dZ_B на спадання напруги в вітках:

$$I_B := dZ_B^{-1} \cdot \Delta U_B \quad I_B = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.384 \\ -0.012 \\ 0.15 \\ 0.194 \\ 0.319 \\ 0.08 \\ 0.125 \\ 0.27 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

З метою перевірки правильності отриманих результатів, одержимо за допомогою матриць M і I_B , що задає струм у вузлах схеми. Для цього перемножимо матриці M і I_B :

$$J_{y_расчетн} := M \cdot I_b \quad J_{y_расчетн} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ 0.282 \\ -0.295 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Матриця струмів, що задають, має значення:

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ 0.282 \\ -0.295 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Як видно, значення повністю ідентичні. Отже, можна змело затверджувати, що проведені раніше розрахунки вірні.

Здійснимо розрахунок режиму електричної мережі на основі контурних рівнянь.

Контурне рівняння в матричній формі має вигляд:

$$N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y + Z_K \cdot \vec{I}_K = \vec{E}_K.$$

У нашій схемі немає ЕРС у контурах, тому $\vec{E}_K = 0$.

$$Z_K \cdot \vec{I}_K = -N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y,$$

$$N \cdot dZ_B \cdot N^T = Z_K.$$

Тому що зворотна матриця M_α (M_α^{-1}) має розмірність (6*6), а добуток $-N \cdot dZ_B$ має розмірність (9*3), те перемножити їх не можемо. Однак ми можемо доповнити матрицю M_α^{-1} нульовими елементами (позначимо її $M_\alpha 0$), які не вплинуть на результат, але дадуть нам можливість перемножити матриці.

$$M_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_\alpha 0 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Виразимо контурний струм з рівняння: $Z_K \cdot \vec{I}_K = -N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y$.

Контурний струм перебуває як: $\vec{I}_K = Z_K^{-1} \cdot (-N \cdot dZ_B \cdot M_\alpha^{-1} \cdot \vec{J}_y)$.

$$I_k := Z_k^{-1} \cdot (-N \cdot dZ_B \cdot M \alpha 0 \cdot J_y) \quad I_k = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.125 \\ 0.27 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Струм у хорді схеми дорівнює контурному струму, що протікає в контурі, що містить дану хорду. Позначимо струми в хордах як I_β .

$$I_\beta := I_k \quad I_\beta = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.125 \\ 0.27 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Знаючи струми в хордах схеми, що й задають струми у вузлах, знайдемо струми в вітках дерева схеми I_α :

$$I_\alpha := M_\alpha^{-1} \cdot J_y + N_\alpha^T \cdot I_\beta \quad I_\alpha = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.384 \\ -0.012 \\ 0.15 \\ 0.194 \\ 0.319 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Повна матриця струмів у вітках схеми будуть мати вигляд:

$$I_B := \text{stack}(I_\alpha, I_\beta) \quad I_B = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.384 \\ -0.012 \\ 0.15 \\ 0.194 \\ 0.319 \\ 0.08 \\ 0.125 \\ 0.27 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Маючи повну матрицю струмів у вітках, знайдемо спадання напруги в вітках:

$$U_{\Delta B} := dZ_B \cdot I_B \quad U_{\Delta B} = \begin{pmatrix} 5.473 \\ 6.915 \\ -0.223 \\ 2.691 \\ 3.497 \\ 5.744 \\ 1.442 \\ 2.247 \\ 2.915 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Для обчислення напруг у вузлах схеми U_u , необхідно знайти спадання напруги у вузлах схеми щодо балансуєчого, а потім для одержання самих вузлових напруг побрати суму матриць напруг у балансуєчому вузлі й падінь напруг у вузлах схеми. Причому значення матриці спадань напруги у вузлах мають негативні значення.

Для знаходження спадань напруги у вузлах щодо балансуєчого, поберемо шість перших значень спадань напруги (у вітках дерева) з матриці $U_{\Delta B}$. Для

одержання спадань напруги у вузлах U_{Δ} , помножимо матрицю $M_{\alpha T-1}$ на шість перших значень матриці $U_{\Delta B}$.

$$U_{\Delta B6} := \text{submatrix}(U_{\Delta B}, 0, 5, 0, 0) \quad U_{\Delta} := (M_{\alpha T})^{-1} \cdot U_{\Delta B6} \quad U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5.473 \\ -6.915 \\ -5.25 \\ -8.165 \\ -10.412 \\ -16.155 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_{y} := U_{\Delta} + U_{By-n} \quad U_y = \begin{pmatrix} 118.277 \\ 116.835 \\ 118.5 \\ 115.585 \\ 113.338 \\ 107.595 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Тому що для знаходження струмів, що задають, у вузлах ми брали номінальну напругу, а ця напруга у вузлах не відповідає дійсним напругам, то необхідно перевірити точність зроблених розрахунків. Для цього визначимо небаланс потужностей, що задають.

Для цього знайдемо струм у вузлах схеми, знаючи струм вітках I_b і першу матрицю інциденцій M .

$$I_{pac} := M \cdot I_b \quad I_{pac} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ 0.282 \\ -0.295 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

По струму у вузлах схеми й вузловим напругам розрахуємо, що задають потужності у вузлах схеми.

$$P := \text{diag}(U_y) \cdot I_{pac} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ -31.545 \\ 33.449 \\ -34.045 \\ 0 \\ -34.333 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.7 \\ 31.05 \\ -32.4 \\ 0 \\ -35.1 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Обчислюємо небаланс у МВт і %.

$$P_{\text{небаланса}} := P_i - P \quad i := 1..3 \quad P_{\text{небаланса}\%_i} := \frac{(P_{\text{небаланса}_i})^{100}}{P_i} \quad P_{\text{небаланса}\%_5} := \frac{(P_{\text{небаланса}_5})^{100}}{P_i}$$

$$P_{\text{небаланса}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.845 \\ -2.399 \\ 1.645 \\ 0 \\ -0.767 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_{\text{небаланса}\%} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6.214 \\ -7.727 \\ -5.078 \\ 0 \\ 2.187 \end{pmatrix} \%$$

Небаланс потужності у всіх вузлах перевищує припустиме значення в 1%. Для збільшення точності розрахунків режиму уточнимо, що задають струми у вузлах мережі. Для цього замість номінальної напруги у формулі для обчислення струмів, що задають, підставимо значення напруг у вузлах, отримані при розрахунках першого наближення.

Тому що обоє методу (метод контурних рівнянь і метод вузлових рівнянь) дають ідентичні результати, то розрахуємо режим мережі в другому наближенні лише методом вузлових рівнянь.

/ / /

Знаходимо напруги у вузлах схеми:

$$U_{\text{вузл}} := U_{\Delta} + U_{\text{бу}\cdot n} \quad U_{\text{у}} = \begin{pmatrix} 118.245 \\ 116.905 \\ 118.336 \\ 115.561 \\ 113.297 \\ 107.425 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Спадання напруги в вітках схеми:

$$U_{\Delta B} := M^T \cdot U_{\Delta} \quad U_{\Delta B} = \begin{pmatrix} 5.505 \\ 6.845 \\ -0.091 \\ 2.684 \\ 3.608 \\ 5.872 \\ 1.339 \\ 2.264 \\ 2.775 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Струми в вітках схеми:

$$I_{\text{в}} := dZ_{\text{в}}^{-1} \cdot U_{\Delta B} \quad I_{\text{в}} = \begin{pmatrix} 0.218 \\ 0.38 \\ -5.065 \times 10^{-3} \\ 0.149 \\ 0.2 \\ 0.326 \\ 0.074 \\ 0.126 \\ 0.257 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Знову знайдемо небаланс потужностей, що задають:

//

$$P_{\text{небаланса}} := P_i - P \quad i := 1..3 \quad P_{\text{небаланса}\%_i} := \frac{(P_{\text{небаланса}_i})100}{P_{i_1}} \quad P_{\text{небаланса}\%_5} := \frac{(P_{\text{небаланса}_5})100}{P_{i_5}}$$

$$P_{\text{небаланса}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.018 \\ 0.043 \\ -7.058 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -0.055 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_{\text{небаланса}\%} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \\ 0.138 \\ 0.022 \\ 0 \\ 0.158 \end{pmatrix} \%$$

Небаланс потужності становить менш 1%. У межах даного завдання нас це цілком задовольняє. Отже, розрахунки режиму мережі по методах контурних і вузлових рівнянь кінчений.

Як видно з розрахунків, методи контурних рівнянь і вузлових рівнянь дають зовсім ідентичні результати. Однак метод вузлових рівнянь мені здався більш швидким і зручним у використанні, у порівнянні з методом контурних рівнянь.

Розрахунки режиму електричної мережі по лінійних вузлових рівняннях з використанням методу Гаусса

Вузлові рівняння в матричній формі записуються у вигляді:

$$Y_y \cdot U_{\Delta} = -J$$

Матриця вузлових провідностей:

$$Y_y = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 \end{pmatrix} \text{ См}$$

Вектор стовпець струмів, що

задають:

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ 0.282 \\ -0.295 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix} \text{ кА}$$

Вектор-Стовпець спадань напруги у вузлах мережі щодо балансуєчого вузла U_{Δ} знайдемо методом виключення невідомих Гаусса (приведення матриці до трикутного виду)

Розширимо матрицю вузлових провідностей Y_y стовпцем струмів, що задають $-J$

$$Y_{yj} = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 & -0.27 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 & 0.282 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 & -0.295 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 & -0.319 \end{pmatrix}$$

Транспонуємо матрицю для спрощення подальших перетворень – приведення матриці до трикутного виду

$$Y_{yjt} = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 \\ 0 & -0.27 & 0.282 & -0.295 & 0 & -0.319 \end{pmatrix}$$

Для одержання нульових елементів у першому рядку крім діагонального, помножимо перший стовпець на деякий коефіцієнт a , який буде дорівнює відношенню $a = \frac{Y_{yjt}_{0,1}}{Y_{yjt}_{0,0}}$, а потім із цього стовпця віднімемо другий стовпець.

Отриманий стовпець запишемо на місце другого стовпця матриці Y_{yjt} . Аналогічну операцію проробимо із третім і четвертим стовпцями:

Знаходимо коефіцієнт $a = -0.269$

Перший стовпець залишимо без змін:

$$Y_1 := (Y_{yjT})^{(0)}$$

Віднімемо другий стовпець із першого стовпця, помноженого на коефіцієнт a

$$Y_2 := a \cdot (Y_{yjt})^{(0)} - (Y_{yjt})^{(1)}$$

Віднімемо третій стовпець із першого стовпця, помноженого на коефіцієнт a

$$Y_3 := a \cdot (Y_{yjt})^{(0)} - (Y_{yjt})^{(2)}$$

Віднімемо четвертий стовпець із першого стовпця, помноженого на коефіцієнт a

$$Y_4 := a \cdot (Y_{yjt})^{(0)} - (Y_{yjt})^{(3)}$$

П'ятий і шостий стовпці залишимо без змін:

$$Y_5 := (Y_{yjt})^{(4)} \quad Y_6 := (Y_{yjt})^{(5)}$$

У результаті цих операцій одержимо матрицю

$$Y_{yjt} := \text{augment}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)$$

$$Y_{ijt} = \begin{pmatrix} 0.206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & -0.152 & 0.015 & 0.015 & -0.056 & 0 \\ -0.056 & 0.015 & -0.133 & 0.108 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.015 & 0.108 & -0.189 & -0.056 & 0 \\ 0 & 0.056 & 0 & 0.056 & 0.167 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 \\ 0 & 0.27 & -0.282 & 0.295 & 0 & -0.319 \end{pmatrix}$$

Тепер одержимо нульові елементи правее діагонального в другому рядку:

Перші два стовпці залишимо без змін

$$Y1 := (Y_{ijt})^{(0)} \quad Y2 := Y_{ijt}^{(1)}$$

Знайдемо коефіцієнт для третього й четвертого стовпців

$$b := \frac{Y_{ijt_{1,2}}}{Y_{ijt_{1,1}}} \quad b = -0.099$$

Віднімемо третій стовпець із другого стовпця, помноженого на коефіцієнт b

$$Y3 := b \cdot (Y_{ijt})^{(1)} - (Y_{ijt})^{(2)}$$

Віднімемо четвертий стовпець із другого стовпця, помноженого на коефіцієнт b

$$Y4 := b \cdot (Y_{ijt})^{(1)} - (Y_{ijt})^{(3)}$$

Знайдемо коефіцієнт c для п'ятого стовпця й віднімемо п'ятий стовпець із другого стовпця, помноженого на коефіцієнт c . Шостий стовпець залишимо без змін

/, /

У результаті одержимо матрицю

$$Y_{ijt} := \text{augment}(Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6)$$

$$Y_{ijt} = \begin{pmatrix} 0.206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & -0.152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.015 & 0.132 & -0.109 & 5.477 \times 10^{-3} & 0 \\ -0.056 & 0.015 & -0.109 & 0.187 & 0.061 & 0 \\ 0 & 0.056 & -5.477 \times 10^{-3} & -0.061 & -0.146 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & 0.056 \\ 0 & 0.27 & 0.256 & -0.321 & 0.099 & -0.319 \end{pmatrix}$$

Шляхом подальших перетворень одержимо трикутну матрицю:

$$Y_{ijt} = \begin{pmatrix} 0.206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & -0.152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.015 & 0.132 & 0 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.015 & -0.109 & -0.097 & 0 & 0 \\ 0 & 0.056 & -5.477 \times 10^{-3} & 0.066 & -0.102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.056 & -0.025 \\ 0 & 0.27 & 0.256 & 0.11 & 0.162 & 0.408 \end{pmatrix}$$

Транспонуємо матрицю Y_{ijt} :

$$Y_{yj} = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.152 & 0.015 & 0.015 & 0.056 & 0 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0.132 & -0.109 & -5.477 \times 10^{-3} & 0 & 0.256 \\ 0 & 0 & 0 & -0.097 & 0.066 & 0 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.102 & 0.056 & 0.162 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0.408 \end{pmatrix}$$

Обчислюємо матрицю спадань напруги у вузлах U_{Δ} щодо балансуєчого вузла:

$$U_{\Delta 6} := \frac{Y_{yj_{5,6}}}{Y_{yj_{5,5}}} \quad U_{\Delta 6} = -16.155 \text{ кВ}$$

$$U_{\Delta 5} := \frac{Y_{yj_{4,6}} - Y_{yj_{4,5}} \cdot U_{\Delta 6}}{Y_{yj_{4,4}}} \quad U_{\Delta 5} = -10.412 \text{ кВ}$$

$$U_{\Delta 4} := \frac{Y_{yj_{3,6}} - Y_{yj_{3,5}} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yj_{3,4}} \cdot U_{\Delta 5}}{Y_{yj_{3,3}}} \quad U_{\Delta 4} = -8.165 \text{ кВ}$$

$$U_{\Delta 3} := \frac{Y_{yj_{2,6}} - Y_{yj_{2,5}} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yj_{2,4}} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yj_{2,3}} \cdot U_{\Delta 4}}{Y_{yj_{2,2}}} \quad U_{\Delta 3} = -5.25 \text{ кВ}$$

$$U_{\Delta 2} := \frac{Y_{yj_{1,6}} - Y_{yj_{1,5}} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yj_{1,4}} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yj_{1,3}} \cdot U_{\Delta 4} - Y_{yj_{1,2}} \cdot U_{\Delta 3}}{Y_{yj_{1,1}}} \quad U_{\Delta 2} = -6.915 \text{ кВ}$$

$$U_{\Delta 1} := \frac{Y_{yj_{0,6}} - Y_{yj_{0,5}} \cdot U_{\Delta 6} - Y_{yj_{0,4}} \cdot U_{\Delta 5} - Y_{yj_{0,3}} \cdot U_{\Delta 4} - Y_{yj_{0,2}} \cdot U_{\Delta 3} - Y_{yj_{0,1}} \cdot U_{\Delta 2}}{Y_{yj_{0,0}}} \quad U_{\Delta 1} = -5.473 \text{ кВ}$$

Подальший розрахунки режиму робимо аналогічно попереднім пунктам.

Розрахунки режиму електричної мережі по вузлових рівняннях у формі балансу струмів при їхньому розв'язку методом прискореної ітерації

Організуємо ітераційний процес на базі матричного рівняння:

$$Y_Y \cdot \vec{U}_\Delta = \vec{J}, \quad (20)$$

де Y_Y - матриця вузлових провідностей без обліку балансуєчого вузла, \vec{U}_Δ - вектор-стовпець падінь напруг, щодо балансуєчого, \vec{J} - вектор-стовпець струмів, що задають (утримуючих свій знак).

Праву частину рівняння (20) представимо у вигляді:

$$[J_i] = \left[\frac{P_i}{(U_{\Delta i}^{(k)} + U_{BY})} \right], \quad (21)$$

де P_i - потужність, що задає, в i -тому вузлі U_{BY} , - напруга в балансуєчому вузлі $U_{\Delta i}^{(k)}$, - спадання напруги в i -тому вузлі при k -тому наближенні.

Дорівнюємо ліву частину рівняння (20) і праву частину рівняння (21):

$$Y_Y \cdot \vec{U}_\Delta = \left[\frac{P_i}{(U_{\Delta i}^{(k)} + U_{BY})} \right]. \quad (22)$$

На основі рівняння (22) складемо систему рівнянь, стосовно до нашої мережі, представивши ліву частину в алгебраїчній формі, а праву залишивши без зміни:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{11} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{12} \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} + Y_{13} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + Y_{14} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} + Y_{15} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} + Y_{16} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_1}{(U_{\Delta 1}^{(i-1)} + U_{BY})} \\ Y_{21} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{22} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + Y_{23} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} + Y_{24} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} + Y_{25} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} + Y_{26} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_2}{(U_{\Delta 2}^{(i-1)} + U_{BY})} \\ Y_{31} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{32} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + Y_{33} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + Y_{34} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} + Y_{35} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} + Y_{36} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_3}{(U_{\Delta 3}^{(i-1)} + U_{BY})} \\ Y_{41} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{42} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + Y_{43} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + Y_{44} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} + Y_{45} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} + Y_{46} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_4}{(U_{\Delta 4}^{(i-1)} + U_{BY})} \\ Y_{51} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{52} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + Y_{53} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + Y_{54} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} + Y_{55} \cdot U_{\Delta 5}^{(i)} + Y_{56} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_5}{(U_{\Delta 5}^{(i-1)} + U_{BY})} \\ Y_{61} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} + Y_{62} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} + Y_{63} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} + Y_{64} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} + Y_{65} \cdot U_{\Delta 5}^{(i)} + Y_{66} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} = \frac{P_6}{(U_{\Delta 6}^{(i-1)} + U_{BY})} \end{array} \right. \quad (23)$$

Рівняння системи розв'язний щодо діагональних невідомих $U_{\Delta i}^{(i)}$. Для цього необхідно перенести всі елементи кожного рівняння вправо, залишивши ліворуч лише добуток, що містить $U_{\Delta i}^{(i)}$, де i – номер рівняння в системі. Потім розділимо обидві частини рівняння на Y_{ii} (діагональні елементи в матриці вузлових провідностей Y_Y не можуть рівнятися нулю, отже, такий розподіл можливий), що коштує при $U_{\Delta i}^{(i)}$, де i – номер рівняння в системі.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\Delta 1}^{(i)} = 0 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i-1)} - \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} - \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{15}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{16}}{Y_{11}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_1}{(U_{\Delta 1}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{11}} \\ U_{\Delta 2}^{(i)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i-1)} - \frac{Y_{24}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{25}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{26}}{Y_{22}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_2}{(U_{\Delta 2}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{22}} \\ U_{\Delta 3}^{(i)} = -\frac{Y_{31}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{32}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{34}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i-1)} - \frac{Y_{35}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{36}}{Y_{33}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_3}{(U_{\Delta 3}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{33}} \\ U_{\Delta 4}^{(i)} = -\frac{Y_{41}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{42}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{43}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{45}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i-1)} - \frac{Y_{46}}{Y_{44}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_4}{(U_{\Delta 4}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{44}} \\ U_{\Delta 5}^{(i)} = -\frac{Y_{51}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{52}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{53}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - \frac{Y_{54}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} - 0 - \frac{Y_{56}}{Y_{55}} \cdot U_{\Delta 6}^{(i-1)} + \frac{P_5}{(U_{\Delta 5}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{55}} \\ U_{\Delta 6}^{(i)} = -\frac{Y_{61}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 1}^{(i)} - \frac{Y_{62}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 2}^{(i)} - \frac{Y_{63}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 3}^{(i)} - \frac{Y_{64}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 4}^{(i)} - \frac{Y_{65}}{Y_{66}} \cdot U_{\Delta 5}^{(i)} - 0 + \frac{P_6}{(U_{\Delta 6}^{(i-1)} + U_{BV}) \cdot Y_{66}} \end{array} \right. \quad (24)$$

Для ітераційного процесу необхідно вибрати початкове наближення падінь напруг / і підставити в праву частину даної системи. Одержимо /, потім підставимо його в праву частину, одержимо / і т.д. Процес може вестися по методу простій або прискореної ітерації.

Ми будемо вести ітераційний процес по методу прискореної ітерації, тобто для знаходження k-ої змінної в i-ої ітерації використовуються змінні /, /... /, обчислені на цій же i-ої ітерації й змінні k+1, k+2,...,n, обчислені на попередній (i-1)-ої ітерації.

$$U_{\Delta 0} := \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \text{kV} \quad \text{- начальное приближение для первой итерации.}$$

$$Y_u = \begin{pmatrix} 0.206 & -0.056 & -0.056 & -0.056 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0.167 & 0 & 0 & -0.056 & 0 \\ -0.056 & 0 & 0.148 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.056 & 0 & -0.093 & 0.204 & -0.056 & 0 \\ 0 & -0.056 & 0 & -0.056 & 0.167 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.056 & 0.056 \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \quad \text{- матрица узловых проводимостей, вычисленная в пункте 1.3}$$

Задамося необхідною точністю розрахунків $\varepsilon = U_{i+1} - U_i \leq 0.04$ кВ, де i- номер ітерації.

Перша ітерація:

$$\begin{aligned}
 U_{\Delta 11} &:= 0 - \frac{Y_{y0,1}}{Y_{y0,0}} \cdot U_{\Delta 01,0} - \frac{Y_{y0,2}}{Y_{y0,0}} \cdot U_{\Delta 02,0} - \frac{Y_{y0,3}}{Y_{y0,0}} \cdot U_{\Delta 03,0} - \frac{Y_{y0,4}}{Y_{y0,0}} \cdot U_{\Delta 04,0} - \frac{Y_{y0,5}}{Y_{y0,0}} \cdot U_{\Delta 05,0} + \frac{P_{i0,0}}{(U_{\Delta 00,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y0,0}} \\
 U_{\Delta 11} &= -8.077 \text{ kV} \quad U_{11} := U_{\Delta 11} + U_{6y} \quad U_{11} = 115.673 \text{ kV} \\
 U_{\Delta 12} &:= -\frac{Y_{y1,0}}{Y_{y1,1}} \cdot U_{\Delta 11} - 0 - \frac{Y_{y1,2}}{Y_{y1,1}} \cdot U_{\Delta 02,0} - \frac{Y_{y1,3}}{Y_{y1,1}} \cdot U_{\Delta 03,0} - \frac{Y_{y1,4}}{Y_{y1,1}} \cdot U_{\Delta 04,0} - \frac{Y_{y1,5}}{Y_{y1,1}} \cdot U_{\Delta 05,0} + \frac{P_{i1,0}}{(U_{\Delta 01,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y1,1}} \\
 U_{\Delta 12} &= -7.592 \text{ kV} \quad U_{12} := U_{\Delta 12} + U_{6y} \quad U_{12} = 116.158 \text{ kV} \\
 U_{\Delta 13} &:= -\frac{Y_{y2,0}}{Y_{y2,2}} \cdot U_{\Delta 11} - \frac{Y_{y2,1}}{Y_{y2,2}} \cdot U_{\Delta 12} - 0 - \frac{Y_{y2,3}}{Y_{y2,2}} \cdot U_{\Delta 03,0} - \frac{Y_{y2,4}}{Y_{y2,2}} \cdot U_{\Delta 04,0} - \frac{Y_{y2,5}}{Y_{y2,2}} \cdot U_{\Delta 05,0} + \frac{P_{i2,0}}{(U_{\Delta 02,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y2,2}} \\
 U_{\Delta 13} &= -7.436 \text{ kV} \quad U_{13} := U_{\Delta 13} + U_{6y} \quad U_{13} = 116.314 \text{ kV} \\
 U_{\Delta 14} &:= -\frac{Y_{y3,0}}{Y_{y3,3}} \cdot U_{\Delta 11} - \frac{Y_{y3,1}}{Y_{y3,3}} \cdot U_{\Delta 12} - \frac{Y_{y3,2}}{Y_{y3,3}} \cdot U_{\Delta 13} - 0 - \frac{Y_{y3,4}}{Y_{y3,3}} \cdot U_{\Delta 04,0} - \frac{Y_{y3,5}}{Y_{y3,3}} \cdot U_{\Delta 05,0} + \frac{P_{i3,0}}{(U_{\Delta 03,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y3,3}} \\
 U_{\Delta 14} &= -9.708 \text{ kV} \quad U_{14} := U_{\Delta 14} + U_{6y} \quad U_{14} = 114.042 \text{ kV} \\
 U_{\Delta 15} &:= -\frac{Y_{y4,0}}{Y_{y4,4}} \cdot U_{\Delta 11} - \frac{Y_{y4,1}}{Y_{y4,4}} \cdot U_{\Delta 12} - \frac{Y_{y4,2}}{Y_{y4,4}} \cdot U_{\Delta 13} - \frac{Y_{y4,3}}{Y_{y4,4}} \cdot U_{\Delta 14} - 0 - \frac{Y_{y4,5}}{Y_{y4,4}} \cdot U_{\Delta 05,0} + \frac{P_{i4,0}}{(U_{\Delta 04,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y4,4}} \\
 U_{\Delta 15} &= -9.1 \text{ kV} \quad U_{15} := U_{\Delta 15} + U_{6y} \quad U_{15} = 114.65 \text{ kV} \\
 U_{\Delta 16} &:= -\frac{Y_{y5,0}}{Y_{y5,5}} \cdot U_{\Delta 11} - \frac{Y_{y5,1}}{Y_{y5,5}} \cdot U_{\Delta 12} - \frac{Y_{y5,2}}{Y_{y5,5}} \cdot U_{\Delta 13} - \frac{Y_{y5,3}}{Y_{y5,5}} \cdot U_{\Delta 14} - \frac{Y_{y5,4}}{Y_{y5,5}} \cdot U_{\Delta 15} - 0 + \frac{P_{i5,0}}{(U_{\Delta 05,0} + U_{6y}) \cdot Y_{y5,5}} \\
 U_{\Delta 16} &= -14.655 \text{ kV} \quad U_{16} := U_{\Delta 16} + U_{6y} \quad U_{16} = 109.095 \text{ kV}
 \end{aligned}$$

$$U_1 := \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 115.673 \\ 116.158 \\ 116.314 \\ 114.042 \\ 114.65 \\ 109.095 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 1} := \begin{pmatrix} U_{\Delta 11} \\ U_{\Delta 12} \\ U_{\Delta 13} \\ U_{\Delta 14} \\ U_{\Delta 15} \\ U_{\Delta 16} \end{pmatrix} \quad U_{\Delta 1} = \begin{pmatrix} -8.077 \\ -7.592 \\ -7.436 \\ -9.708 \\ -9.1 \\ -14.655 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Беручи до уваги однотипність формул ітераційного процесу, самі обчислення наступних ітерацій відобразити не будемо, а тільки розраховані значення.

Друга ітерація:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 117.09 \\ 116.962 \\ 116.987 \\ 114.983 \\ 113.68 \\ 107.889 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 2} = \begin{pmatrix} -6.66 \\ -6.788 \\ -6.763 \\ -8.767 \\ -10.07 \\ -15.861 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_2 - U_1 = \begin{pmatrix} 1.417 \\ 0.805 \\ 0.673 \\ 0.941 \\ -0.97 \\ -1.206 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad \text{- точність расчета не удовлетворяет заданной. Проводим расчет следующей итерации.}$$

Третья ітерація:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 117.741 \\ 116.867 \\ 117.809 \\ 115.281 \\ 113.346 \\ 107.49 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 3} = \begin{pmatrix} -6.009 \\ -6.883 \\ -5.941 \\ -8.469 \\ -10.404 \\ -16.26 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_3 - U_2 = \begin{pmatrix} 0.651 \\ -0.096 \\ 0.822 \\ 0.298 \\ -0.335 \\ -0.399 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

- точність розрахунку не відповідає заданій. Проводимо розрахунок наступної ітерації.

+

Четверта ітерація:

$$U_4 = \begin{pmatrix} 118.017 \\ 116.846 \\ 118.086 \\ 115.395 \\ 113.244 \\ 107.366 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 4} = \begin{pmatrix} -5.733 \\ -6.904 \\ -5.664 \\ -8.355 \\ -10.506 \\ -16.384 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_4 - U_3 = \begin{pmatrix} 0.27595 \\ -0.02078 \\ 0.27743 \\ 0.1137 \\ -0.10214 \\ -0.12389 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

- точність розрахунку не відповідає заданій. Проводимо розрахунок наступної ітерації.

П'ята ітерація:

$$U_5 = \begin{pmatrix} 118.11693 \\ 116.84507 \\ 118.19047 \\ 115.4429 \\ 113.21791 \\ 107.33336 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 5} = \begin{pmatrix} -5.633 \\ -6.905 \\ -5.56 \\ -8.307 \\ -10.532 \\ -16.417 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_5 - U_4 = \begin{pmatrix} 0.09971 \\ -1.08127 \times 10^{-3} \\ 0.10427 \\ 0.04809 \\ -0.02563 \\ -0.03241 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

- точність розрахунку не відповідає заданій. Проводимо розрахунок наступної ітерації.

Шоста ітерація:

$$U_6 = \begin{pmatrix} 118.15766 \\ 116.85009 \\ 118.23424 \\ 115.46749 \\ 113.21698 \\ 107.33064 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta 6} = \begin{pmatrix} -5.5923 \\ -6.8999 \\ -5.5158 \\ -8.2825 \\ -10.533 \\ -16.4194 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_6 - U_5 = \begin{pmatrix} 0.04073 \\ 5.02021 \times 10^{-3} \\ 0.04377 \\ 0.02459 \\ -9.3422 \times 10^{-4} \\ -2.71109 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ kV}$$

-точность расчёта удовлетворяет заданной, поэтому итерационный процесс окончен.

Зробимо побудову графіка збіжності ітерацій $U=f(I)$, де I – номер ітерації:

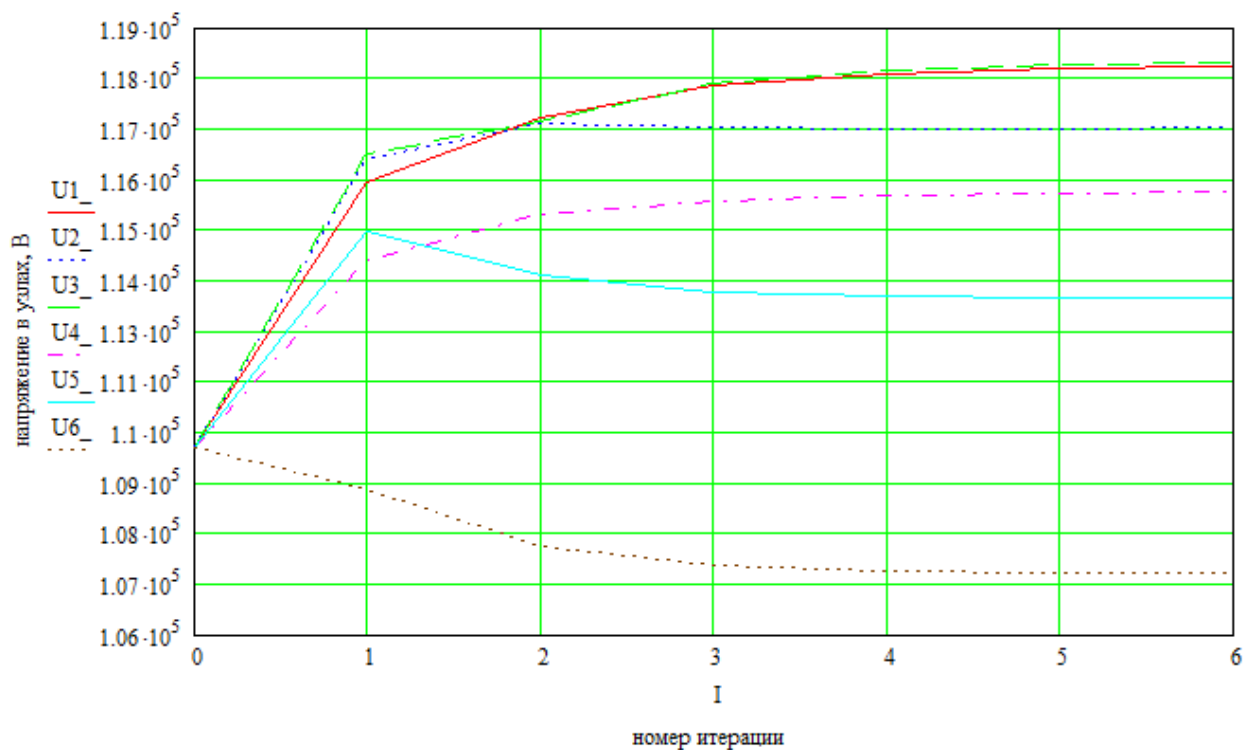


Рисунок 2

На основі проведеного ітераційного процесу, здійснюємо розрахунок режиму нашої мережі.

Спадання напруги у вузлах щодо балансуєчого:

$$U_{\Delta} := U_y - n \cdot U_{6y} \quad U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5.592 \\ -6.9 \\ -5.516 \\ -8.283 \\ -10.533 \\ -16.419 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_y = \begin{pmatrix} 118.158 \\ 116.85 \\ 118.234 \\ 115.467 \\ 113.217 \\ 107.331 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо струми в вітках схеми:

$$I_B := dY_B \cdot M^T \cdot U_{\Delta} \quad I_B = \begin{pmatrix} 0.222 \\ 0.383 \\ -4.254 \times 10^{-3} \\ 0.149 \\ 0.202 \\ 0.327 \\ 0.073 \\ 0.125 \\ 0.256 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначаємо спадання напруги в вітках схеми:

$$U_{\Delta B} := dZ_B \cdot I_B \quad U_{\Delta B} = \begin{pmatrix} 5.592 \\ 6.9 \\ -0.077 \\ 2.69 \\ 3.633 \\ 5.886 \\ 1.308 \\ 2.251 \\ 2.767 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо потоки потужності в вітках схеми:

$$P_B := I_B \cdot U_{\Delta B} \quad P_B = \begin{pmatrix} 24.411 \\ 42.166 \\ -0.468 \\ 16.44 \\ 22.202 \\ 35.972 \\ 7.991 \\ 13.753 \\ 28.18 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначимо втрати потужності в вітках мережі:

$$\Delta P_B := \text{diag}(I_B) \cdot M^T \cdot U \Delta \quad \Delta P_B = \begin{pmatrix} 1.241 \\ 2.645 \\ 3.258 \times 10^{-4} \\ 0.402 \\ 0.733 \\ 1.925 \\ 0.095 \\ 0.281 \\ 0.709 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначаємо сумарні втрати потужності в вітках:

$$h := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad \Delta P_\Sigma := h \cdot \Delta P_B \quad \Delta P_\Sigma = 8.032 \text{ MW}$$

Визначимо струми у вузлах схеми:

$$J := M \cdot I_B \quad J = \begin{pmatrix} -4.076 \times 10^{-3} \\ -0.254 \\ 0.26 \\ -0.281 \\ 1.506 \times 10^{-4} \\ -0.327 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначимо потужності у вузлах мережі:

$$P := \text{diag}(U_y) \cdot J \quad P = \begin{pmatrix} -0.482 \\ -29.695 \\ 30.792 \\ -32.401 \\ 0.017 \\ -35.099 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.7 \\ 31.05 \\ -32.4 \\ 0 \\ -35.1 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Розрахуємо небаланс потужності. Як уже говорилося раніше, він не повинен перевищувати 1%.

$$P_{\text{небаланс}_i} := P_i - P_{i=1..3} \quad P_{\text{небаланс}_i\%} := \frac{(P_{\text{небаланс}_i})^{100}}{P_i} \quad P_{\text{небаланс}_5\%} := \frac{(P_{\text{небаланс}_5})^{100}}{P_i}$$

$$P_{\text{небаланс}} = \begin{pmatrix} 0.482 \\ -4.789 \times 10^{-3} \\ 0.258 \\ 9.076 \times 10^{-4} \\ -0.017 \\ -8.866 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_{\text{небаланс}\%} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.016 \\ 0.83 \\ -2.801 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 2.526 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \%$$

Як видно, небаланс потужності менш 1%. Це свідчить про те, що задана точність ітераційного процесу нас повністю задовольняє.

Розрахунки режиму електричної мережі по звернених вузлових рівняннях

Організуємо ітераційний процес на базі матричного рівняння:

$$Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = \vec{J}, \quad (25)$$

де Y_y - матриця вузлових провідностей без обліку балансуєчого вузла, \vec{U}_Δ - вектор-стовпець падінь напруг у вузлах мережі, щодо балансуєчого вузла, \vec{J} - вектор-стовпець струмів, що задають (струми містять свій знак).

Залишимо в лівій частині рівняння (25) лише вектор-стовпець падінь напруг.

$$\vec{U}_\Delta = Y_y^{-1} \cdot \vec{J}. \quad (26)$$

Розпишемо \vec{U}_Δ як різницю напруг у вузлах \vec{U} і напруги в балансуєчому вузлі \vec{U}_{BY} :

$$\vec{U}_\Delta = \vec{U} - \vec{U}_{BY}. \quad (27)$$

Дорівнюємо праві частини рівнянь (26) і (27):

$$\vec{U} - \vec{U}_{BY} = Y_y^{-1} \cdot \vec{J} \quad (28)$$

Виразимо вектор-стовпець напруг у вузлах:

$$\vec{U} = \vec{U}_{BY} + Y_y^{-1} \cdot \vec{J} \quad (29)$$

Виразимо \vec{J} через, що задає потужність у вузлах і напруги у вузлах схеми:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

Підставимо вираз (30) у вираз (29):

$$\vec{U} = \vec{U}_{BY} + Y_y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (31)$$

Зворотну матрицю Y_y^{-1} у вираженні (31) позначимо через Z . Вона зветься – матриця власних і взаємних опорів. Елементи матриці вузлових опорів Z_{ij} являють собою коефіцієнти часткового спадання напруги, або коефіцієнти впливу струму навантаження в j -тому вузлі на напругу в i -тому вузлі.

$$Y_y^{-1} = Z \quad (32)$$

З урахуванням нового позначення (32), рівняння (31) прикмет вид:

$$\vec{U} = \vec{U}_{BY} + Z \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ітераційна процедура визначення напруги по звернених рівняннях може бути прискорена, якщо на k -тій ітерації для розрахунків i -того невідомого

ухвалювати $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_{i-1}^{(k)}$ із цієї ж k -тїєї ітерації, а інші невідомі U_{i+1} брати з $(k-1)$ ітерації, тобто вести процес по методу прискореної ітерації. Так і зробимо.

На основі рівняння (33) складемо систему рівнянь для ітераційного процесу:

$$\begin{cases} U_1^{(k)} = U_{BY} + Z_{11} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{12} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{13} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{14} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{15} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{16} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \\ U_2^{(k)} = U_{BY} + Z_{21} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{22} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{23} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{24} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{25} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{26} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \\ U_3^{(k)} = U_{BY} + Z_{31} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{32} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{33} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{34} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{35} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{36} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \\ U_4^{(k)} = U_{BY} + Z_{41} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{42} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{43} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{44} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{45} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{46} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \\ U_5^{(k)} = U_{BY} + Z_{51} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{52} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{53} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{54} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{55} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{56} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \\ U_6^{(k)} = U_{BY} + Z_{61} \cdot \frac{P_1}{U_1^{(k-1)}} + Z_{62} \cdot \frac{P_2}{U_2^{(k-1)}} + Z_{63} \cdot \frac{P_3}{U_3^{(k-1)}} + Z_{64} \cdot \frac{P_4}{U_4^{(k-1)}} + Z_{65} \cdot \frac{P_5}{U_5^{(k-1)}} + Z_{66} \cdot \frac{P_6}{U_6^{(k-1)}} \end{cases}$$

Точність ітераційного процесу буде рівна: $\varepsilon = U_{i+1-ui} \leq 0.04$ кВ, де i - номер ітерації.

Обчислимо зворотну матрицю вузлових провідностей $[Y_y]^{-1} = [Z]$.

$$Y_y^{-1} = \begin{pmatrix} 13.905 & 8.068 & 13.046 & 12.531 & 10.3 & 10.3 \\ 8.068 & 12.237 & 8.681 & 9.049 & 10.643 & 10.643 \\ 13.046 & 8.681 & 22.463 & 17.313 & 12.997 & 12.997 \\ 12.531 & 9.049 & 17.313 & 20.183 & 14.616 & 14.616 \\ 10.3 & 10.643 & 12.997 & 14.616 & 21.629 & 21.629 \\ 10.3 & 10.643 & 12.997 & 14.616 & 21.629 & 39.629 \end{pmatrix} \Omega \quad Z := Y_y^{-1}$$

Задамося нульовим наближенням вузлових напруг і розрахуємо першу ітерацію:

$$U_0 := \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{pmatrix} \cdot \text{kV}$$

Перша ітерація:

$$\begin{aligned}
U_{11} &:= U_{6y} + Z_{0,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{0,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{0,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{0,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{0,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{0,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}} \\
U_{12} &:= U_{6y} + Z_{1,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{1,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{1,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{1,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{1,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{1,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}} \\
U_{13} &:= U_{6y} + Z_{2,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{2,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{2,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{2,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{2,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{2,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}} \\
U_{14} &:= U_{6y} + Z_{3,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{3,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{3,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{3,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{3,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{3,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}} \\
U_{15} &:= U_{6y} + Z_{4,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{4,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{4,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{4,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{4,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{4,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}} \\
U_{16} &:= U_{6y} + Z_{5,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}} + Z_{5,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}} + Z_{5,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}} + Z_{5,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}} + Z_{5,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}} + Z_{5,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{5,0}}
\end{aligned}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \end{pmatrix} = U_1 = \begin{pmatrix} 118.277 \\ 116.835 \\ 118.5 \\ 115.585 \\ 113.338 \\ 107.595 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad \text{- узловые напряжения при первом приближении.}$$

Порівнюючи ці значення з розрахованими напругами в першому наближенні по методу вузлових рівнянь у не зверненій формі, можна зробити вивід, що даний метод дає вже в першому наближенні значення вузлових напруг з дуже гарною точністю.

Друга ітерація:

$$\begin{aligned}
U_{21} &:= U_{6y} + Z_{0,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{0,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{0,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{0,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{0,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{0,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}} \\
U_{22} &:= U_{6y} + Z_{1,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{1,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{1,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{1,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{1,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{1,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}} \\
U_{23} &:= U_{6y} + Z_{2,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{2,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{2,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{2,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{2,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{2,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}} \\
U_{24} &:= U_{6y} + Z_{3,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{3,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{3,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{3,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{3,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{3,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}} \\
U_{25} &:= U_{6y} + Z_{4,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{4,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{4,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{4,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{4,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{4,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}} \\
U_{26} &:= U_{6y} + Z_{5,0} \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{11}} + Z_{5,1} \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{12}} + Z_{5,2} \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{13}} + Z_{5,3} \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{14}} + Z_{5,4} \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{15}} + Z_{5,5} \frac{P_{i_{5,0}}}{U_{16}}
\end{aligned}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \\ U_{25} \\ U_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118.245 \\ 116.905 \\ 118.336 \\ 115.561 \\ 113.297 \\ 107.425 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_2 - U_1 = \begin{pmatrix} -0.032 \\ 0.07 \\ -0.164 \\ -0.025 \\ -0.041 \\ -0.17 \end{pmatrix} \text{ kV} - \text{итерационный процесс окончен, т.к. выполняется необходимое условие точности.}$$

Зробимо побудову графіка збіжності ітерацій $U=f(I)$, де I – номер ітерації:

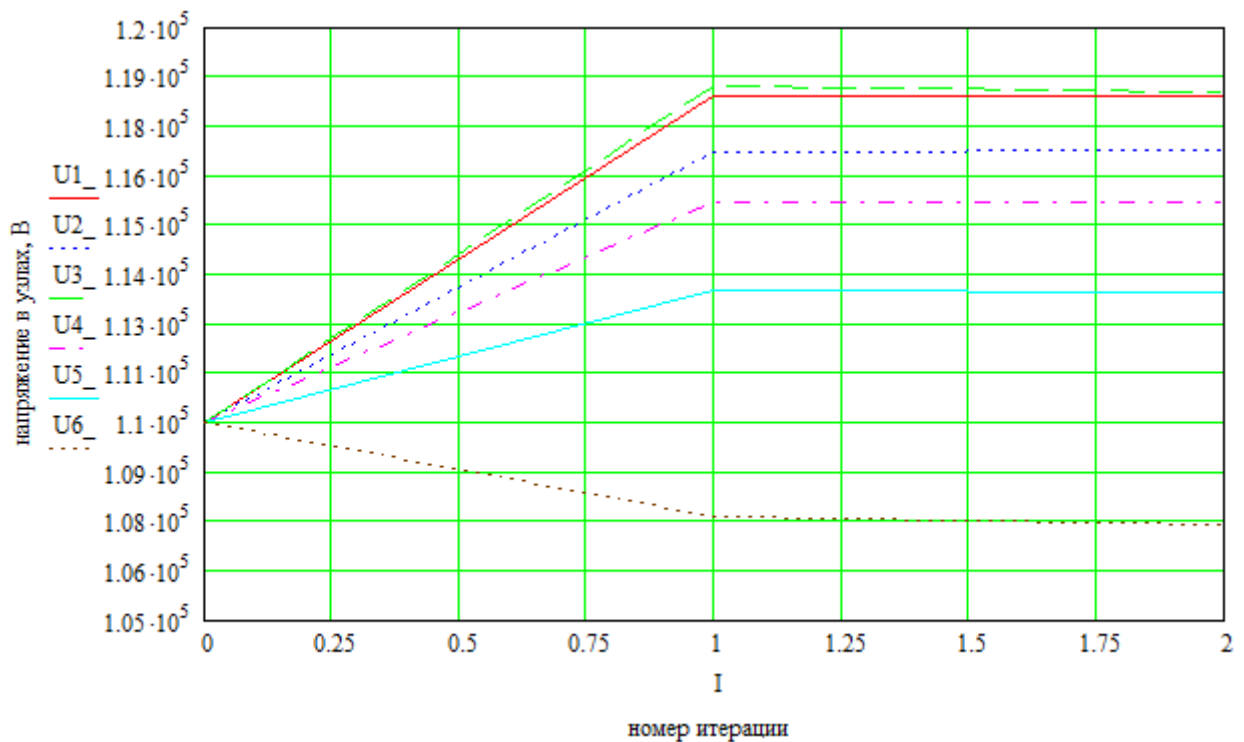


Рисунок 3

На основі проведеного ітераційного процесу, здійснюємо розрахунок режиму нашої мережі.

Спадання напруги у вузлах щодо балансуєчого:

$$U_y := U_2 \quad U_y = \begin{pmatrix} 118.245 \\ 116.905 \\ 118.336 \\ 115.561 \\ 113.297 \\ 107.425 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta} := U_y - n \cdot U_{6y} \quad U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5.505 \\ -6.845 \\ -5.414 \\ -8.189 \\ -10.453 \\ -16.325 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо струми в вітках схеми:

$$I_B := dY_B \cdot M^T \cdot U_{\Delta} \quad I_B = \begin{pmatrix} 0.218 \\ 0.38 \\ -5.064 \times 10^{-3} \\ 0.149 \\ 0.2 \\ 0.326 \\ 0.074 \\ 0.126 \\ 0.257 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначаємо спадання напруги в вітках схеми:

$$U_{\Delta B} := dZ_B \cdot I_B \quad U_{\Delta B} = \begin{pmatrix} 5.505 \\ 6.845 \\ -0.091 \\ 2.684 \\ 3.608 \\ 5.872 \\ 1.339 \\ 2.264 \\ 2.775 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо потоки потужності в вітках схеми:

$$P_B := I_B \cdot U_{\Delta B} \quad P_B = \begin{pmatrix} 24.031 \\ 41.828 \\ -0.557 \\ 16.402 \\ 22.051 \\ 35.885 \\ 8.185 \\ 13.834 \\ 28.266 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначимо втрати потужності в вітках мережі:

$$\underline{\Delta P_B} := \text{diag}(I_B) \cdot M^T \cdot U \Delta \quad \Delta P_B = \begin{pmatrix} 1.203 \\ 2.603 \\ 4.616 \times 10^{-4} \\ 0.4 \\ 0.723 \\ 1.916 \\ 0.1 \\ 0.285 \\ 0.713 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначаємо сумарні втрати потужності в вітках:

$$h := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad \underline{\Delta P_\Sigma} := h \cdot \Delta P_B \quad \Delta P_\Sigma = 7.942 \text{ MW}$$

Визначимо струми у вузлах схеми:

$$\underline{J} := M \cdot I_B \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.254 \\ 0.262 \\ -0.28 \\ 0 \\ -0.326 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначимо потужності у вузлах мережі:

$$P_{\text{расчетн}} := \text{diag}(U_y) \cdot J \quad P_{\text{расчетн}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.718 \\ 31.007 \\ -32.393 \\ 0 \\ -35.045 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.7 \\ 31.05 \\ -32.4 \\ 0 \\ -35.1 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Розрахуємо небаланс потужності. Як уже говорилося раніше, він не повинен перевищувати 1%.

$$P_{\text{небаланс}} := P_i - P_{i := 1..3} \quad P_{\text{небаланс}\%_1} := \frac{(P_{\text{небаланс}_1})^{100}}{P_{i_1}} \quad P_{\text{небаланс}\%_5} := \frac{(P_{\text{небаланс}_5})^{100}}{P_{i_5}}$$

$$P_{\text{небаланс}} = \begin{pmatrix} 0.482 \\ -4.789 \times 10^{-3} \\ 0.258 \\ 9.076 \times 10^{-4} \\ -0.017 \\ -8.866 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_{\text{небаланс}\%} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.016 \\ 0.83 \\ -2.801 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 2.526 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \%$$

Як видно, небаланс потужності менш 1%. Це свідчить про те, що задана точність ітераційного процесу нас повністю задовольняє як по напрузі, так і по потужності.

Розрахунки режиму електричної мережі методом Ньютона

Ітераційний процес буде базуватися на рівнянні:

$$Y_y \cdot \vec{U}_\Delta = \vec{J}, \quad (34)$$

де Y_y - матрицю вузлових провідностей без обліку балансуєчого вузла, \vec{U}_Δ - вектор-стовпець падінь напруг, щодо балансуєчого, \vec{J} - вектор-стовпець струмів, що задають (струми містять при собі свій знак).

Розпишемо \vec{U}_Δ як різницю напруг у вузлах \vec{U} і напруги в балансуєчому вузлі \vec{U}_{BV} :

$$\vec{U}_\Delta = \vec{U} - \vec{U}_{BV}. \quad (35)$$

Виразимо \vec{J} через, що задає потужність у вузлах і напруги у вузлах схеми:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

Підставивши рівняння (36) і (35) у рівняння (34) одержуємо:

$$Y_y \cdot (\vec{U} - \vec{U}_{BV}) = \begin{bmatrix} P_i \\ U_i \end{bmatrix} \quad (37)$$

Розкривши дужки й переносючи всі доданки в ліву частину, запишемо вираз для і-того вузла схеми в загальному виді:

$$\sum_{j=1}^n Y_{ij} \cdot U_j - Y_{i-BV} \cdot U_{BV} - \frac{P_i}{U_i} = 0 \quad (38)$$

де j - кількість вузлів у схемі, i - номер узла в мережі.

Запишемо систему рівнянь для нашої мережі й дорівняємо її вектор-функції $W(U)$:

$$W(U) = \begin{cases} Y_{11}U_1 - \frac{P_1}{U_1} - Y_{1-BV} \cdot U_{BV} + Y_{12}U_2 + Y_{13}U_3 + Y_{14}U_4 + Y_{15}U_5 + Y_{16}U_6 = 0 \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 - \frac{P_2}{U_2} - Y_{2-BV} \cdot U_{BV} + Y_{23}U_3 + Y_{24}U_4 + Y_{25}U_5 + Y_{26}U_6 = 0 \\ Y_{31}U_1 + Y_{32}U_2 + Y_{33}U_3 - \frac{P_3}{U_3} - Y_{3-BV} \cdot U_{BV} + Y_{34}U_4 + Y_{35}U_5 + Y_{36}U_6 = 0 \\ Y_{41}U_1 + Y_{42}U_2 + Y_{43}U_3 + Y_{44}U_4 - \frac{P_4}{U_4} - Y_{4-BV} \cdot U_{BV} + Y_{45}U_5 + Y_{46}U_6 = 0 \\ Y_{51}U_1 + Y_{52}U_2 + Y_{53}U_3 + Y_{54}U_4 + Y_{55}U_5 - \frac{P_5}{U_5} - Y_{5-BV} \cdot U_{BV} + Y_{56}U_6 = 0 \\ Y_{61}U_1 + Y_{62}U_2 + Y_{63}U_3 + Y_{64}U_4 + Y_{65}U_5 + Y_{66}U_6 - \frac{P_6}{U_6} - Y_{6-BV} \cdot U_{BV} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Провідність між i -тим вузлом і балансуєчим Y_{i-BV} буде перебувати по формулі:

$$Y_{i-BV} = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \quad (40)$$

де n - кількість вузлів у схемі.

Або при обчисленні $[Y_{\Sigma}]$ через матрицю $[M_{\Sigma}]$ на початку розрахунків.

Складемо матрицю Якобі, побравши частки похідні по du_j від кожної i -того рядка системи (39) :

$$\frac{\partial W_i(U)}{\partial U_j} = \begin{bmatrix} Y_{11} + \frac{P_1}{U_1^2} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} + \frac{P_2}{U_2^2} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} + \frac{P_3}{U_3^2} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} + \frac{P_4}{U_4^2} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} + \frac{P_5}{U_5^2} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} + \frac{P_6}{U_6^2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Тоді ітераційна формула запишеться у вигляді:

$$U^{(k)} = U^{(k-1)} + \Delta U^{(k-1)}, \quad (42)$$

де

$$\Delta U^{(k-1)} = - \left[\frac{\partial W_i(U^{(k-1)})}{\partial U_j} \right]^{-1} \cdot W(U^{(k-1)}). \quad (43)$$

Точність перевіряється в такий спосіб:

$$W(U^{(k-1)}) \leq \varepsilon = 10A \quad (44)$$

Задамося початковим наближенням напруг у вузлах і розрахуємо провідності $Y_{BY} = Y_{i-BV}$:

$$\underline{U}_0 := \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{pmatrix} \cdot \text{kV} \quad Y_{BY} := \left(\sum_{i=0}^5 Y_{y_{0,i}} \sum_{i=0}^5 Y_{y_{1,i}} \sum_{i=0}^5 Y_{y_{2,i}} \sum_{i=0}^5 Y_{y_{3,i}} \sum_{i=0}^5 Y_{y_{4,i}} \sum_{i=0}^5 Y_{y_{5,i}} \right)$$

$$Y_{BY} = (0.04 \ 0.056 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \frac{1}{\Omega}$$

Розрахуємо першу ітерацію, за результатами якої одержимо вектор-функцію небалансу струмів у вузлах у першому наближенні W1:

$$W_{11} := Y_{y_{0,0}} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot Y_{BY} \cdot U_{0,0} + Y_{y_{0,1}} \cdot U_{1,0} + Y_{y_{0,2}} \cdot U_{2,0} + Y_{y_{0,3}} \cdot U_{3,0} + Y_{y_{0,4}} \cdot U_{4,0} \dots \\ + Y_{y_{0,5}} \cdot U_{5,0} - \frac{P_{i_{0,0}}}{U_{0,0}}$$

$$W_{11} = -545.635 \text{ A}$$

$$W_{12} := Y_{y_{1,0}} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot Y_{BY} \cdot U_{0,1} + Y_{y_{1,1}} \cdot U_{1,0} + Y_{y_{1,2}} \cdot U_{2,0} + Y_{y_{1,3}} \cdot U_{3,0} + Y_{y_{1,4}} \cdot U_{4,0} \dots \\ + Y_{y_{1,5}} \cdot U_{5,0} - \frac{P_{i_{1,0}}}{U_{1,0}}$$

$$W_{12} = -493.889 \text{ A}$$

$$W_{13} := Y_{y_{2,0}} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot Y_{BY} \cdot U_{0,2} + Y_{y_{2,1}} \cdot U_{1,0} + Y_{y_{2,2}} \cdot U_{2,0} + Y_{y_{2,3}} \cdot U_{3,0} + Y_{y_{2,4}} \cdot U_{4,0} \dots \\ + Y_{y_{2,5}} \cdot U_{5,0} - \frac{P_{i_{2,0}}}{U_{2,0}}$$

$$W_{13} = -282.273 \text{ A}$$

$$W_{14} := Y_{y_{3,0}} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot Y_{BY} \cdot U_{0,3} + Y_{y_{3,1}} \cdot U_{1,0} + Y_{y_{3,2}} \cdot U_{2,0} + Y_{y_{3,3}} \cdot U_{3,0} + Y_{y_{3,4}} \cdot U_{4,0} \dots \\ + Y_{y_{3,5}} \cdot U_{5,0} - \frac{P_{i_{3,0}}}{U_{3,0}}$$

$$W_{14} = 294.545 \text{ A}$$

$$W_{15} := Y_{y_{4,0}} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot Y_{BY} \cdot U_{0,5} + Y_{y_{4,1}} \cdot U_{1,0} + Y_{y_{4,2}} \cdot U_{2,0} + Y_{y_{4,3}} \cdot U_{3,0} + Y_{y_{4,4}} \cdot U_{4,0} \dots \\ + Y_{y_{4,5}} \cdot U_{5,0} - \frac{P_{i_{4,0}}}{U_{4,0}}$$

$$W_{15} = 0 \text{ A}$$

$$W16 := Yy_{5,0} \cdot U_{0,0} - U_{6y} \cdot YBY_{0,5} + Yy_{5,1} \cdot U_{1,0} + Yy_{5,2} \cdot U_{2,0} + Yy_{5,3} \cdot U_{3,0} + Yy_{5,4} \cdot U_{4,0} \dots$$

$$+ Yy_{5,5} \cdot U_{5,0} - \frac{Pi_{5,0}}{U_{5,0}}$$

$$W16 = 319.091 \text{ A}$$

$$W1 := \begin{pmatrix} W11 \\ W12 \\ W13 \\ W14 \\ W15 \\ W16 \end{pmatrix} \quad W1 = \begin{pmatrix} -545.635 \\ -493.889 \\ -282.273 \\ 294.545 \\ 0 \\ 319.091 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Тепер беремо частки похідні $\frac{\partial W_i(U)}{\partial U_j}$:

$$V1 := \begin{bmatrix} Yy_{0,0} + \frac{Pi_{0,0}}{(U_{0,0})^2} & -0.0568 & -0.0568 & -0.0568 & 0 & 0 \\ -0.0568 & Yy_{1,1} + \frac{Pi_{1,0}}{(U_{1,0})^2} & 0 & 0 & -0.0568 & 0 \\ -0.0568 & 0 & Yy_{2,2} + \frac{Pi_{2,0}}{(U_{2,0})^2} & -0.0938 & 0 & 0 \\ -0.0568 & 0 & -0.0938 & Yy_{3,3} + \frac{Pi_{3,0}}{(U_{3,0})^2} & -0.0568 & 0 \\ 0 & -0.0568 & 0 & -0.0568 & Yy_{4,4} + \frac{Pi_{4,0}}{(U_{4,0})^2} & -0.0568 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0568 & Yy_{5,5} + \frac{Pi_{5,0}}{(U_{5,0})^2} \end{bmatrix}$$

Знаходимо напруги в першому наближенні по формулі

$$U1 = U_0 - \left(\frac{\partial W_i(U^{(0)})}{\partial U_j} \right)^{-1} \cdot W_1:$$

//

$$U1 := U0 - V1^{-1} \cdot W1 \quad U1 = \begin{pmatrix} 118.726 \\ 117.307 \\ 118.926 \\ 116.176 \\ 113.881 \\ 108.067 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad V1^{-1} \cdot W1 = \begin{pmatrix} -8.726 \\ -7.307 \\ -8.926 \\ -6.176 \\ -3.881 \\ 1.933 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Аналогічно розрахуємо другу ітерацію, за результатами якої одержимо вектор-функцію небалансу струмів у вузлах у другому наближенні W2:

$$W2 := \begin{pmatrix} W21 \\ W22 \\ W23 \\ W24 \\ W25 \\ W26 \end{pmatrix} \quad W2 = \begin{pmatrix} 9.959 \\ 6.72 \\ 4.675 \\ 10.118 \\ 5.133 \\ 1.825 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Знову беремо частки похідні $\frac{\partial W_i(U)}{\partial U_j}$ й одержуємо зворотну матрицю:

$$V2^{-1} = \begin{pmatrix} 15.485 & 9.606 & 14.875 & 14.722 & 12.734 & 13.57 \\ 9.606 & 13.79 & 10.468 & 11.138 & 13.048 & 13.904 \\ 14.875 & 10.468 & 24.479 & 19.864 & 15.876 & 16.918 \\ 14.722 & 11.138 & 19.864 & 23.247 & 17.997 & 19.179 \\ 12.734 & 13.048 & 15.876 & 17.997 & 25.596 & 27.276 \\ 13.57 & 13.904 & 16.918 & 19.179 & 27.276 & 48.097 \end{pmatrix} \Omega$$

Знайдемо напруги вже другого наближення згідно з формулою

$$U2 = U_1 - \left(\frac{\partial W_i(U_1)}{\partial U_j} \right)^{-1} \cdot W_2:$$

$$V2^{-1} \cdot W2 = \begin{pmatrix} 0.527 \\ 0.442 \\ 0.646 \\ 0.677 \\ 0.652 \\ 0.73 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U2 := U1 - V2^{-1} \cdot W2 \quad U2 = \begin{pmatrix} 118.198 \\ 116.864 \\ 118.28 \\ 115.499 \\ 113.229 \\ 107.338 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U2 - U1 = \begin{pmatrix} -0.527 \\ -0.442 \\ -0.646 \\ -0.677 \\ -0.652 \\ -0.73 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad \text{- ітераційний процес окончен, т.к. выполняется необходимое условие точности.}$$

Як і очікувалося, метод Ньютона дав одну з найшвидших східностей ітераційного процесу. Можна змело затверджувати, що його основна перевага — швидка збіжність, однак він більш трудомісткий на кожній ітерації.

Зробимо побудову графіка збіжності ітерацій $U=f(I)$, де I – номер ітерації:

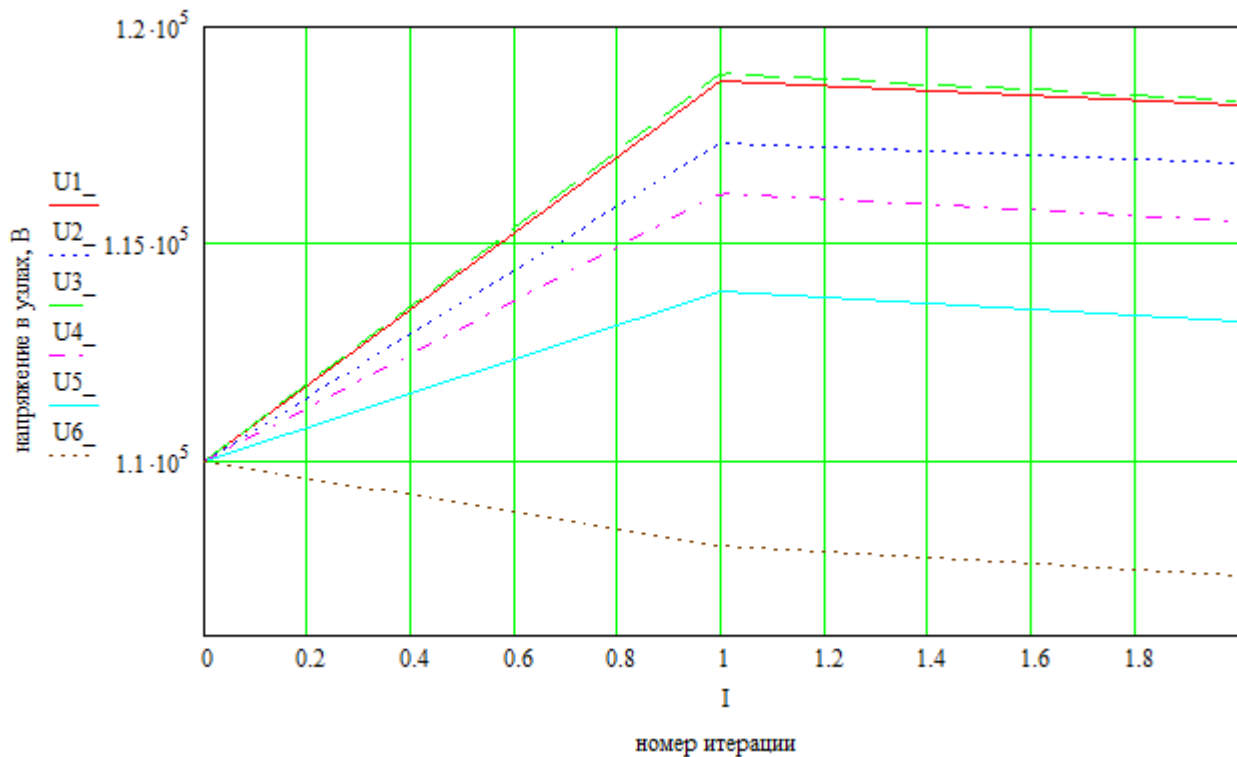


Рисунок 4

На основі проведеного ітераційного процесу, здійснюємо розрахунок режиму нашої мережі.

Спадання напруги у вузлах щодо балансуєчого:

$$U_y := U_2 \quad U_y = \begin{pmatrix} 118.198 \\ 116.864 \\ 118.28 \\ 115.499 \\ 113.229 \\ 107.338 \end{pmatrix} \text{ kV} \quad U_{\Delta} := U_y - n \cdot U_{6y} \quad U_{\Delta} = \begin{pmatrix} -5.552 \\ -6.886 \\ -5.47 \\ -8.251 \\ -10.521 \\ -16.412 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо струми в вітках схеми:

$$I_B := dY_B \cdot M^T \cdot U_{\Delta} \quad I_B = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.383 \\ -4.527 \times 10^{-3} \\ 0.15 \\ 0.202 \\ 0.327 \\ 0.074 \\ 0.126 \\ 0.257 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначаємо спадання напруги в вітках схеми:

$$\underline{U_{\Delta B}} := dZ_B \cdot I_B \quad U_{\Delta B} = \begin{pmatrix} 5.552 \\ 6.886 \\ -0.081 \\ 2.699 \\ 3.636 \\ 5.891 \\ 1.334 \\ 2.27 \\ 2.781 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Визначаємо потоки потужності в вітках схеми:

$$\underline{P_B} := I_B \cdot U_{ном} \quad P_B = \begin{pmatrix} 24.234 \\ 42.079 \\ -0.498 \\ 16.495 \\ 22.218 \\ 36.001 \\ 8.151 \\ 13.874 \\ 28.322 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначимо втрати потужності в вітках мережі:

$$\underline{\Delta P_B} := \text{diag}(I_B) \cdot M^T \cdot U_{\Delta} \quad \Delta P_B = \begin{pmatrix} 1.223 \\ 2.634 \\ 3.688 \times 10^{-4} \\ 0.405 \\ 0.734 \\ 1.928 \\ 0.099 \\ 0.286 \\ 0.716 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Визначаємо сумарні втрати потужності в вітках:

$$h := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad \underline{\Delta P_{\Sigma}} := h \cdot \Delta P_B \quad \Delta P_{\Sigma} = 8.026 \text{ MW}$$

Визначимо струми у вузлах схеми:

$$I_{рас} := M \cdot I_B \quad I_{рас} = \begin{pmatrix} -7.847 \times 10^{-4} \\ -0.255 \\ 0.262 \\ -0.281 \\ -8.217 \times 10^{-4} \\ -0.327 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Визначимо потужності у вузлах мережі:

$$P := \text{diag}(U_y) \cdot J_{\text{pac}} \quad P = \begin{pmatrix} -0.093 \\ -29.761 \\ 30.989 \\ -32.49 \\ -0.093 \\ -35.13 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -29.7 \\ 31.05 \\ -32.4 \\ 0 \\ -35.1 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Розрахуємо небаланс потужності. Як уже говорилося раніше, він не повинен перевищувати 1%.

$$P_{\text{небаланса}} := P_i - P \quad i := 1..3 \quad P_{\text{небаланса}\%_i} := \frac{(P_{\text{небаланса}_i})100}{P_i} \quad P_{\text{небаланса}\%_5} := \frac{(P_{\text{небаланса}_5})100}{P_{i_5}}$$

$$P_{\text{небаланса}} = \begin{pmatrix} 0.093 \\ 0.061 \\ 0.061 \\ 0.09 \\ 0.093 \\ 0.03 \end{pmatrix} \text{ MW} \quad P_{\text{небаланса}\%} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.205 \\ 0.197 \\ -0.277 \\ 0 \\ -0.084 \end{pmatrix} \%$$

Як видно, небаланс потужності менш 1%. Це свідчить про те, що задана точність ітераційного процесу нас повністю задовольняє.

Розрахунки тяжкого режиму із застосуванням матриць узагальнених параметрів електричної мережі

Розрахуємо матрицю коефіцієнтів розподілу C:

$$C := dZ_B^{-1} \cdot M^T \cdot Y_u^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.552 & -0.32 & -0.518 & -0.497 & -0.409 & -0.409 \\ -0.448 & -0.68 & -0.482 & -0.503 & -0.591 & -0.591 \\ 0.048 & -0.034 & -0.523 & -0.266 & -0.15 & -0.15 \\ 0.076 & -0.054 & -0.237 & -0.425 & -0.24 & -0.24 \\ -0.124 & 0.089 & -0.24 & -0.309 & -0.61 & -0.61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.324 & -0.232 & 0.243 & 0.193 & -0.019 & -0.019 \\ 0.124 & -0.089 & 0.24 & 0.309 & -0.39 & -0.39 \\ 0.048 & -0.034 & 0.477 & -0.266 & -0.15 & -0.15 \end{pmatrix}$$

Утяжелим режим роботи електричної мережі з метою знаходження межі збіжності. Для цього збільшаємо всі потужності, що задають, а так само зменшимо на 5% напругу в балансуєчому вузлі.

На печатку виведемо тільки режим, що є критичним для даної мережі.

За результатами розрахунків декількох коефіцієнтів збільшення потужності, виявилось, що при збільшенні навантаження в 2.8 рази, ітераційний процес перестав сходитися. Це свідчить про те, електрична мережа не може витримати такого навантаження. Зменшимо значення потужностей, що задають, при коефіцієнті 2.8 на 20%. Це й буде граничним припустимим режимом для даної мережі. А граничний режим по збіжності має місце при навантаженнях:

//

Розрахуємо, що задають струми в вітках:

$$I_{y1} := \frac{P_i}{0.95 \cdot U_{ном}} \quad I_{y1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.796 \\ 0.832 \\ -0.868 \\ 0 \\ -0.94 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Струми в вітках у першому наближенні:

$$I_{b1} := C \cdot I_{y1} \quad I_{b1} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 1.132 \\ -0.037 \\ 0.441 \\ 0.573 \\ 0.94 \\ 0.236 \\ 0.368 \\ 0.795 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Розраховуємо спадання напруги в вітках мережі, у вузлах мережі, а, що також задають потужності у вузлах мережі:

$$\Delta U_{b1} := dZ_B \cdot I_{b1} \quad \Delta U_{b1} = \begin{pmatrix} 16.132 \\ 20.381 \\ -0.658 \\ 7.932 \\ 10.306 \\ 16.929 \\ 4.249 \\ 6.623 \\ 8.59 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$I_{b1\alpha} := \text{submatrix}(I_{b1}, 0, 5, 0, 0) \quad I_{b1\alpha} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 1.132 \\ -0.037 \\ 0.441 \\ 0.573 \\ 0.94 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

$$\Delta U_{\alpha 1} := \begin{pmatrix} 25.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \Omega \cdot I_{b1\alpha} \quad \Delta U_{\alpha 1} = \begin{pmatrix} 16.132 \\ 20.381 \\ -0.658 \\ 7.932 \\ 10.306 \\ 16.929 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

//

$$P1 := \text{diag}(U_{y1}) \cdot I_{y1} \quad P1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -82.26 \\ 90.082 \\ -86.541 \\ 0 \\ -71.603 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Точність розрахунків рівна:

$$\varepsilon_{\%} := \frac{P1 - P_i}{P_i} \cdot 100 \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.082 \\ 3.614 \\ -4.607 \\ 0 \\ -27.144 \end{pmatrix} \%$$

Розраховуємо струми у вузлах і струми в вітках у другому наближенні:

$$I_{y2} := \frac{P_i}{U_{y1}} \quad I_{y2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.804 \\ 0.803 \\ -0.91 \\ 0 \\ -1.291 \end{pmatrix} \text{ kA} \quad I_{b2} := C \cdot I_{y2} \quad I_{b2} = \begin{pmatrix} 0.822 \\ 1.38 \\ 0.043 \\ 0.55 \\ 0.806 \\ 1.291 \\ 0.23 \\ 0.485 \\ 0.846 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Розраховуємо спадання напруги в вітках мережі, напруги у вузлах мережі потужності, що й задають:

$$I_{b2\alpha} := \text{submatrix}(I_{b2}, 0, 5, 0, 0) \quad I_{b2\alpha} = \begin{pmatrix} 0.822 \\ 1.38 \\ 0.043 \\ 0.55 \\ 0.806 \\ 1.291 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

/

$$\Delta U_{\alpha 2} := \begin{pmatrix} 25.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \Omega \cdot I_{b2\alpha} \quad \Delta U_{\alpha 2} = \begin{pmatrix} 20.715 \\ 24.848 \\ 0.766 \\ 9.898 \\ 14.5 \\ 23.236 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$\Delta U_{b2} := dZ_B \cdot I_{b2} \quad \Delta U_{b2} = \begin{pmatrix} 20.715 \\ 24.848 \\ 0.766 \\ 9.898 \\ 14.5 \\ 23.236 \\ 4.133 \\ 8.736 \\ 9.131 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_{\Delta 2} := \left(M_{\alpha}^T \right)^{-1} \cdot \Delta U_{\alpha 2} \quad U_{\Delta 2} = \begin{pmatrix} -20.715 \\ -24.848 \\ -21.481 \\ -30.613 \\ -39.348 \\ -62.584 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_{y2} := U_{\Delta 2} + U_{b2} \quad U_{y2} = \begin{pmatrix} 103.035 \\ 98.902 \\ 102.269 \\ 93.137 \\ 84.402 \\ 61.166 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$P_2 := \text{diag}(U_{y2}) \cdot I_{y2} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -79.566 \\ 82.116 \\ -84.76 \\ 0 \\ -78.958 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Точність розрахунків рівна:

$$\varepsilon_{\%} := \frac{P_2 - P_i}{P_i} \cdot 100 \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.321 \\ -5.548 \\ -6.569 \\ 0 \\ -19.661 \end{pmatrix} \%$$

Знаходимо струми в вітках у третьому наближенні:

$$I_{y3} := \frac{P_i}{U_{y2}} \quad I_{y3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.841 \\ 0.85 \\ -0.974 \\ 0 \\ -1.607 \end{pmatrix} \text{ kA} \quad I_{b3} := C \cdot I_{y3} \quad I_{b3} = \begin{pmatrix} 0.97 \\ 1.601 \\ 0.083 \\ 0.644 \\ 1.004 \\ 1.607 \\ 0.243 \\ 0.603 \\ 0.934 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

Розраховуємо спадання напруги в вітках мережі, напруги у вузлах мережі:

$$I_{b3\alpha} := \text{submatrix}(I_{b3}, 0, 5, 0, 0) \quad I_{b3\alpha} = \begin{pmatrix} 0.97 \\ 1.601 \\ 0.083 \\ 0.644 \\ 1.004 \\ 1.607 \end{pmatrix} \text{ kA}$$

$$\Delta U_{\alpha 3} := \begin{pmatrix} 25.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \Omega \cdot I_{b3\alpha} \quad \Delta U_{\alpha 3} = \begin{pmatrix} 24.449 \\ 28.824 \\ 1.502 \\ 11.585 \\ 18.065 \\ 28.922 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$\Delta U_{b3} := dZ_B \cdot I_{b3} \quad \Delta U_{b3} = \begin{pmatrix} 24.449 \\ 28.824 \\ 1.502 \\ 11.585 \\ 18.065 \\ 28.922 \\ 4.376 \\ 10.856 \\ 10.083 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_{\Delta 3} := (M_{\alpha}^T)^{-1} \cdot \Delta U_{\alpha 3} \quad U_{\Delta 3} = \begin{pmatrix} -24.449 \\ -28.824 \\ -25.951 \\ -36.033 \\ -46.89 \\ -75.812 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

$$U_{y3} := U_{\Delta 3} + U_{6y \cdot n} \quad U_{y3} = \begin{pmatrix} 99.301 \\ 94.926 \\ 97.799 \\ 87.717 \\ 76.86 \\ 47.938 \end{pmatrix} \text{ kV}$$

Розраховуємо потужності у вузлах мережі:

$$P3 := \text{diag}(Uy3) \cdot Iy3 \quad P3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -79.817 \\ 83.14 \\ -85.44 \\ 0 \\ -77.026 \end{pmatrix} \text{ MW}$$

Точність розрахунків рівна:

$$\varepsilon := \frac{P3 - Pi}{Pi} \cdot 100 \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.021 \\ -4.37 \\ -5.82 \\ 0 \\ -21.626 \end{pmatrix} \%$$

Схеми електричної мережі з результатами розрахунків режимів

Результати розрахунків електричної мережі по лінійних вузлових і контурних рівняннях:

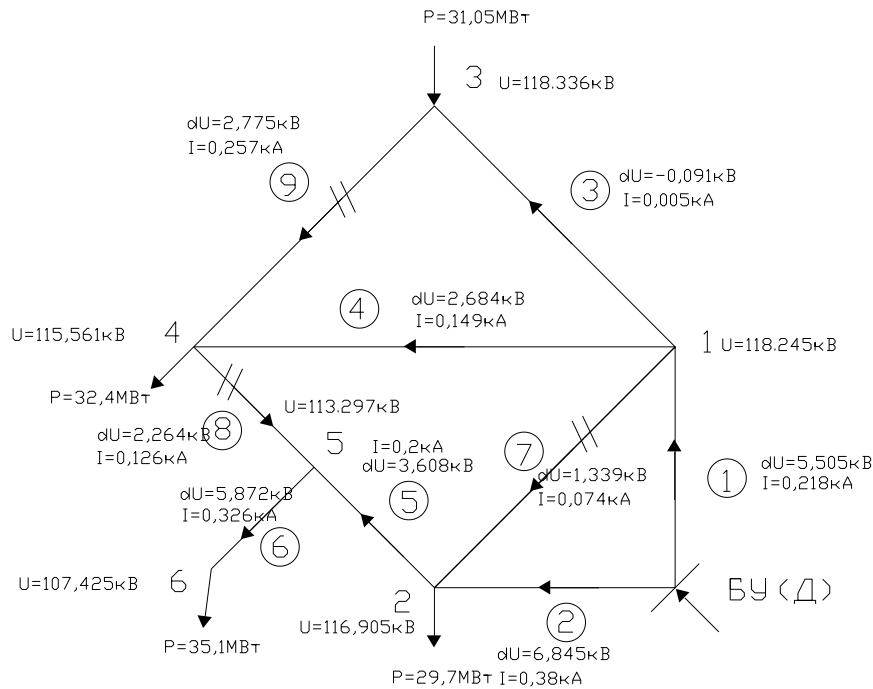


Рисунок 5

Результати розрахунків електричної мережі по нелінійних вузлових рівняннях з використанням ітераційних методів:

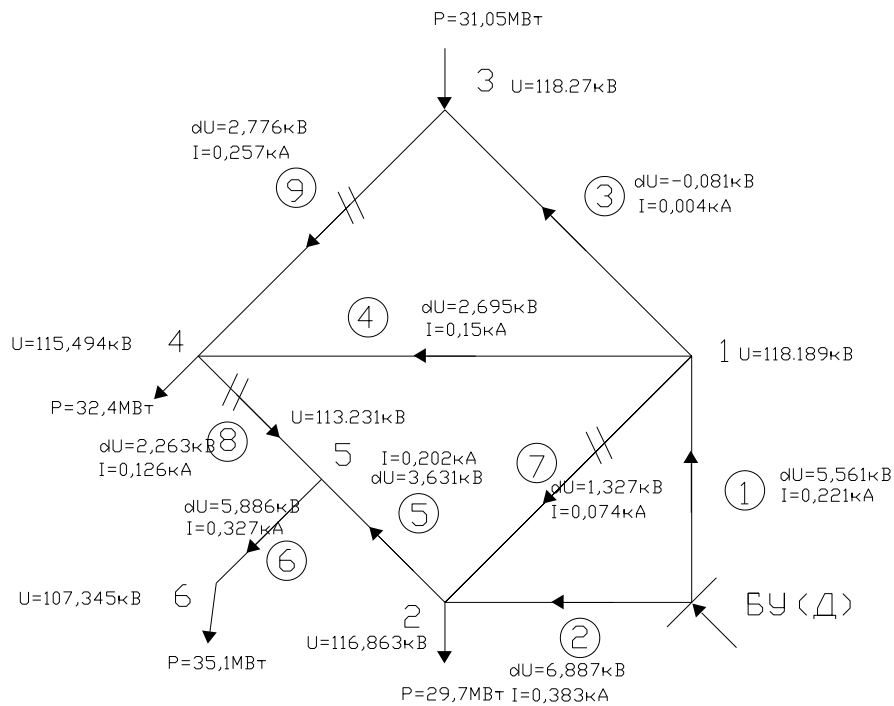


Рисунок 6

Результати розрахунків електричної мережі із застосуванням матриць узагальнених параметрів:

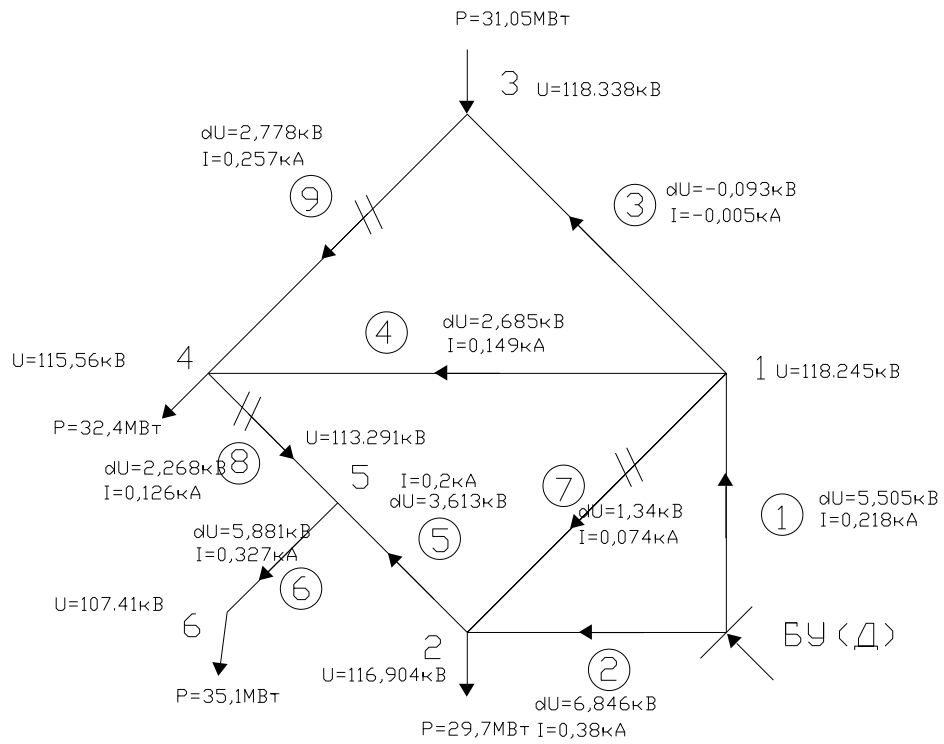


Рисунок 7

Розділ 13. Приклади виконання розрахунково-практичних робіт

Практична робота №15.

Розрахунок ударних струмів при перехідних процесах в електричній мережі.

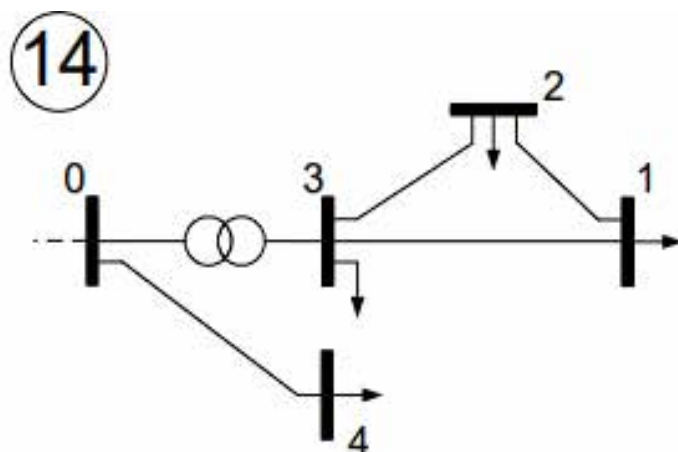


Рис. 1.2. для розрахунків ustalених режимів роботи складається із схем заміщення її елементів:

Варіант			14(4)	
Клас напруги мережі (кВ)		ВН	$110 \cdot 10^3$	
		НН	$35 \cdot 10^3$	
Напруга опорного вузла U_0 (кВ)			$111 \cdot 10^3$	
Параметри ділянок мережі (марка проводу М, довжина L км)	0-3	М	АС-95	
		L	14	
	0-4	М	АС-120	
		L	22	
	1-2	М	АС-95	
		L	10	
	1-3	М	АС-120	
		L	4	
	2-3	М	АС-95	
		L	12	
	Тип трансформатора			ТМН-6300/110
	Потужність у вузлах S_1 (МВА)	S_1	P_1	$4 \cdot 10^6$
Q_1			$6 \cdot 10^6$	
S_2		P_2	$5 \cdot 10^6$	
		Q_2	$3 \cdot 10^6$	

	S ₃	P ₃	3*10 ⁶
		Q ₃	4*10 ⁶
	S ₄	P ₄	3.5*10 ⁶
		Q ₄	2*10 ⁶

P1 := 4000000 P2 := 5000000 P3 := 3000000 P4 := 3500000 jQ1 := 6000000i jQ2 := 3000000i jQ3 := 4000000i jQ4 := 2000000i

S1 := P1 + jQ1 = 4 × 10⁶ + 6i × 10⁶ r0ac95 := 31.4 x0ac95 := 42.9 b0ac95 := 2.65·10⁻⁴

S2 := P2 + jQ2 = 5 × 10⁶ + 3i × 10⁶ r0ac120 := 24.9 x0ac120 := 42.3 b0ac120 := 2.69·10⁻⁴

S3 := P3 + jQ3 = 3 × 10⁶ + 4i × 10⁶

S4 := P4 + jQ4 = 3.5 × 10⁶ + 2i × 10⁶

l03 := 14

l04 := 22

l12 := 10

l13 := 4

l23 := 12

+

Опорний вузол 0; U₀ = 111 + j0 кВ.

Електрична мережа живиться від шин підстанції (опорний вузол 0), включає елементи двох класів напруг:

– 110 кВ – вузли 0 і 4; ділянки 0-4;

– 35 кВ – вузол 1,2,3; ділянки 3-2, 2-1, 3-1;

Схема складається із чотирьох ЛЕП–110 кВ і одного понижувального трансформатора. Схема замкнена, має один контур, який створений лініями 2-1, 3- 1, 3-2 і одну радіальну лінію. ЛЕП виконані сталевалюмінієвими дротами марок АС-120 і АС-95. Тип трансформатора – ТМН-6300/110, його потужність 6300 кВА, напруга обмотки ВН - 110 кВ, обмотки НН - 35 кВ. У вузлах мережі підключені споживачі електроенергії, задані постійними потужностями S1, S2, S3, S4. Повна схема заміщення електричної мережі

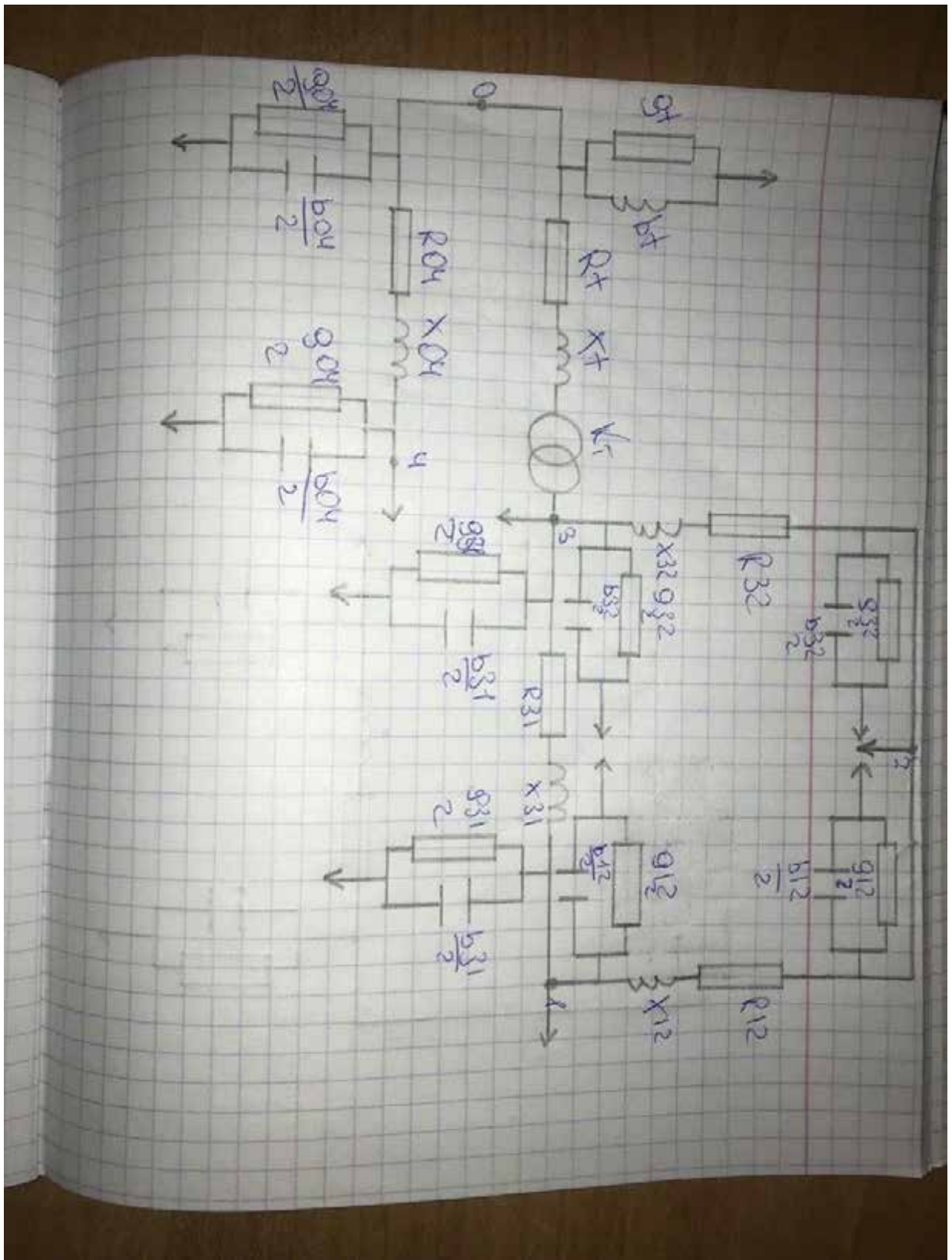


Рисунок 1.3 – Повна схема заміщення електричної мережі

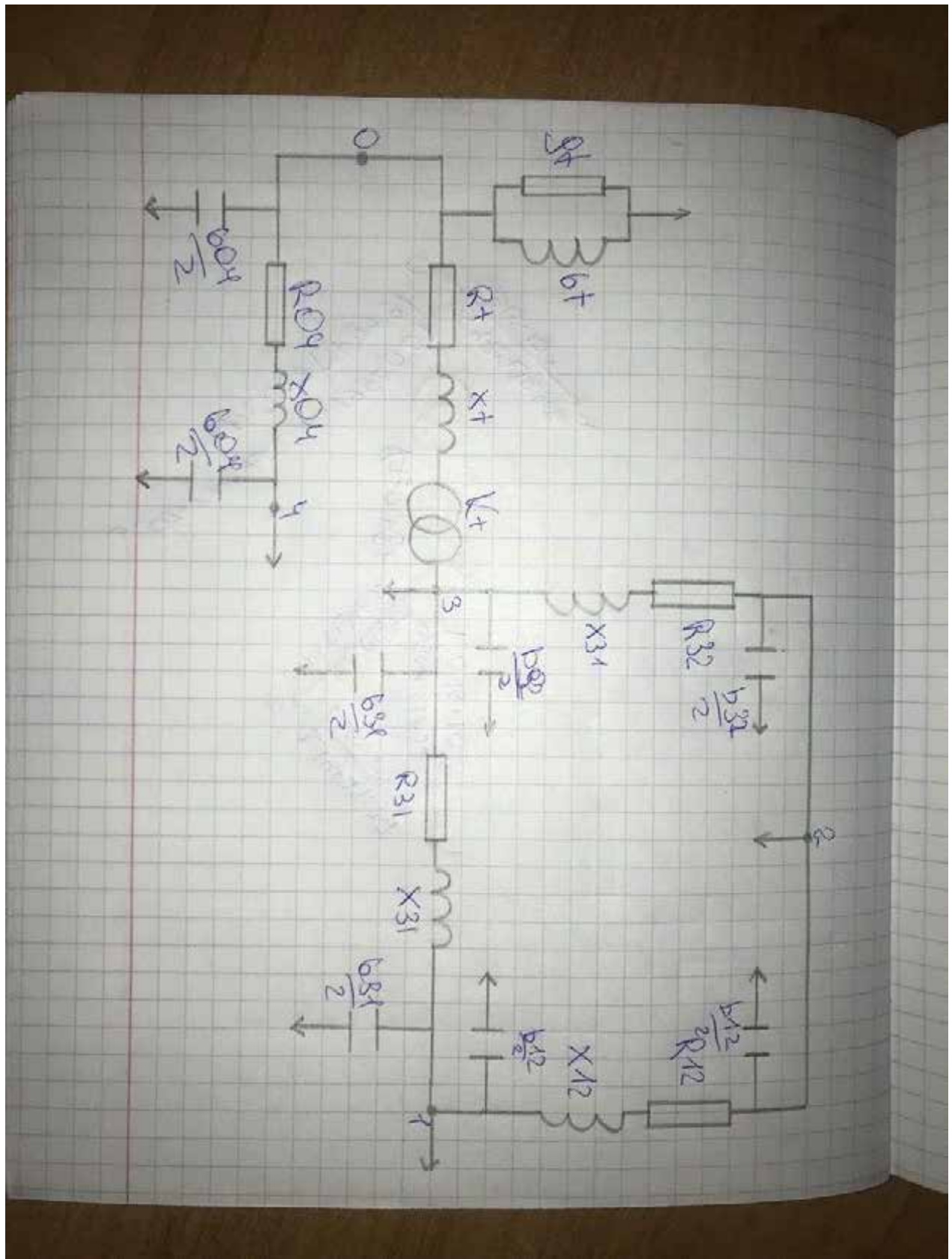


Рисунок 1.4 – Спрощена схема заміщення

$$\begin{aligned}
S1 &:= P1 + jQ1 = 4 \times 10^6 + 6i \times 10^6 & r0ac95 &:= 31.4 & x0ac95 &:= 42.9 & b0ac95 &:= 2.65 \cdot 10^{-4} \\
S2 &:= P2 + jQ2 = 5 \times 10^6 + 3i \times 10^6 & r0ac120 &:= 24.9 & x0ac120 &:= 42.3 & b0ac120 &:= 2.69 \cdot 10^{-4} \\
S3 &:= P3 + jQ3 = 3 \times 10^6 + 4i \times 10^6 \\
S4 &:= P4 + jQ4 = 3.5 \times 10^6 + 2i \times 10^6 \\
103 &:= 14 \\
104 &:= 22 \\
112 &:= 10 \\
113 &:= 4 \\
123 &:= 12 \\
R04 &:= r0ac120 \cdot \frac{104}{100} = 5.478 & X04 &:= x0ac120 \cdot \frac{104}{100} = 9.306 & b04 &:= b0ac120 \cdot \frac{104}{100} = 5.918 \times 10^{-5} \\
R12 &:= r0ac95 \cdot \frac{112}{100} = 3.14 & X12 &:= x0ac95 \cdot \frac{112}{100} = 4.29 & b12 &:= b0ac95 \cdot \frac{112}{100} = 2.65 \times 10^{-5} \\
R13 &:= r0ac120 \cdot \frac{113}{100} = 0.996 & X13 &:= x0ac120 \cdot \frac{113}{100} = 1.692 & b13 &:= b0ac120 \cdot \frac{113}{100} = 1.076 \times 10^{-5} \\
R23 &:= r0ac95 \cdot \frac{123}{100} = 3.768 & X23 &:= x0ac95 \cdot \frac{123}{100} = 5.148 & b23 &:= b0ac95 \cdot \frac{123}{100} = 3.18 \times 10^{-5} \\
Rt &:= \Delta Pk \cdot \left(\frac{Unbh^2}{Sn^2} \right) = 16.66 & y04 &:= \frac{1}{R04 + X04i} = 0.047 - 0.08i \\
Xt &:= \left(\frac{Uk}{100} \right) \cdot \left(\frac{Unbh^2}{Sn} \right) = 220.417 & y12 &:= \frac{1}{R12 + X12i} = 0.111 - 0.152i \\
gt &:= \frac{\Delta Px}{Unbh^2} = 7.561 \times 10^{-7} & y13 &:= \frac{1}{R13 + X13i} = 0.258 - 0.439i \\
bt &:= \left(\frac{Ix}{100} \right) \cdot \left(\frac{Sn}{Unbh^2} \right) = 4.764 \times 10^{-6} & y23 &:= \frac{1}{R23 + X23i} = 0.093 - 0.126i \\
Ktn &:= \frac{Unbh}{Unhh} = 2.987 & y03 &:= \frac{Ktn}{Rt + Xt} = 0.001018 - 0.013475i \\
Kt &:= Ktn \cdot \left(1 + 1 \cdot \frac{\Delta}{100} \right) = 3.04 & yp03 &:= y03 \cdot Ktn = 0.003 - 0.04i
\end{aligned}$$

Таблиця 1.3 Результати обчислень параметрів схем заміщення мережі

Ділянка мережі	Марка проводу, тип трансформатора	Довжина ділянки (км)	Розрахункові параметри елементів схеми заміщення	
			Опори $Z=R+jX$ (Ом)	Поперечна провідність $Y_{п}=g+jb$ (См)
0-3	ТМН-6300/110	-	16.66+j220.417	$(0.07561+j0.4764)*10^{-5}$
0-4	АС-120	22	5.478+j9.306	$5.918*10^{-5}$
1-2	АС-95	10	3.14+j4.29	$2.65*10^{-5}$
1-3	АС-120	4	0.996+j1.692	$1.076*10^{-5}$
2-3	АС-95	12	3.768+j5.148	$3.18*10^{-5}$

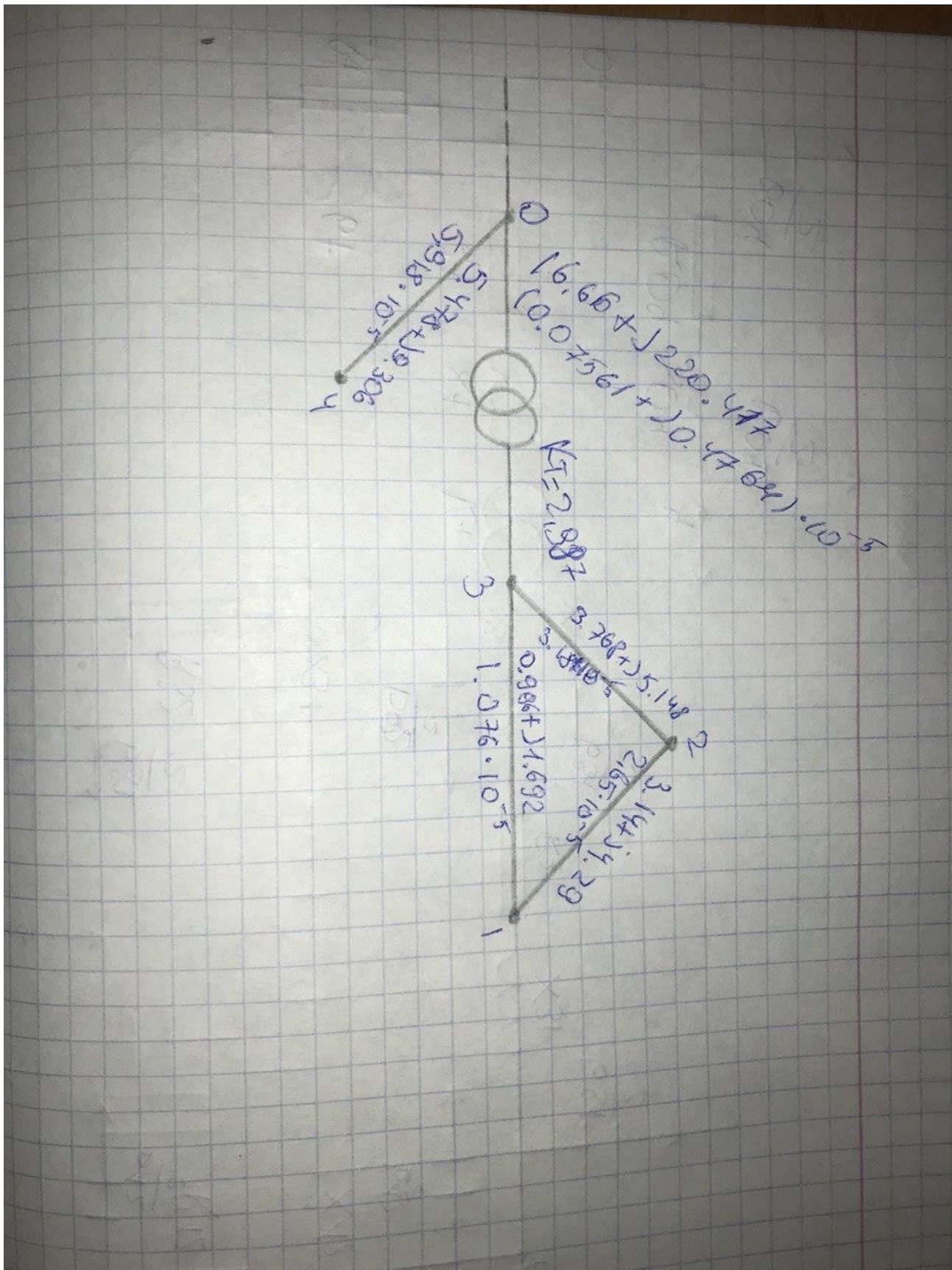


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема електричної мережі

$$y_{04} := \frac{1}{R_{04} + X_{04}i} = 0.047 - 0.08i$$

$$y_{12} := \frac{1}{R_{12} + X_{12}i} = 0.111 - 0.152i$$

$$y_{13} := \frac{1}{R_{13} + X_{13}i} = 0.258 - 0.439i$$

$$y_{23} := \frac{1}{R_{23} + X_{23}i} = 0.093 - 0.126i$$

6

$$y_{03} := \frac{K_{tn}}{R_t + X_t i} = 0.001018 - 0.013475i$$

$$y_{p03} := y_{03} \cdot K_{tn} = 0.003 - 0.04i \quad +$$

$$Y_{00} := \frac{y_{p03}}{K_{tn}} + y_{04} - 0.5 \cdot g_t + b_t = 0.048 - 0.093i$$

$$Y_{11} := y_{12} + y_{13} - 0.5 \cdot b_{12} + b_{13} = 0.369 - 0.591i$$

$$Y_{22} := y_{12} + y_{23} - 0.5 \cdot b_{12} + b_{23} = 0.204 - 0.278i$$

$$Y_{33} := y_{23} + y_{13} + y_{03} \cdot K_{tn} - 0.5 \cdot b_{23} + b_{13} = 0.354 - 0.606i$$

$$Y_{44} := y_{04} - 0.5 \cdot b_{04} = 0.047 - 0.08i$$

$$U_0 := 111000 \quad U_1 := 35000 \quad U_2 := 35000 \quad U_3 := 35000 \quad U_4 := 110000$$

Given

$$Y_{11} \cdot U_1 - (y_{12} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_3) = \frac{\bar{S}_1}{U_1}$$

$$Y_{22} \cdot U_2 - (y_{12} \cdot U_1 + y_{23} \cdot U_3) = \frac{\bar{S}_2}{U_2}$$

$$Y_{33} \cdot U_3 - (y_{03} \cdot U_0 + y_{23} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_1) = \frac{\bar{S}_3}{U_3}$$

$$Y_{44} \cdot U_4 - y_{04} \cdot U_0 = \frac{\bar{S}_4}{U_4}$$

$$\text{Find}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{pmatrix} 4.41 \times 10^4 + 7.394i \times 10^3 \\ 4.425 \times 10^4 + 7.536i \times 10^3 \\ 4.374 \times 10^4 + 7.266i \times 10^3 \\ 1.114 \times 10^5 + 225.492i \end{pmatrix}$$

Given

$$Y_{11} \cdot U_1^2 - \bar{U}_1 \cdot (y_{12} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_3) = \bar{S}_1$$

$$Y_{22} \cdot U_2^2 - \bar{U}_2 \cdot (y_{12} \cdot U_1 + y_{23} \cdot U_3) = \bar{S}_2$$

$$Y_{33} \cdot U_3 - \bar{U}_3 \cdot (y_{03} \cdot U_0 + y_{23} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_1) = \bar{S}_3$$

$$Y_{44} \cdot U_4 - \bar{U}_4 \cdot y_{04} \cdot U_0 = \bar{S}_4$$

$$\text{Find}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{pmatrix} 3.419 \times 10^3 + 281.57i \\ 4.731 \times 10^3 + 729.599i \\ -1.281 \times 10^3 + 256.662i \\ -340.408 + 194.728i \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у прямокутних координатах для вузла 1:

$$Y_{11}'' \cdot U_1'^2 - U_1' \cdot [(y_{12}' \cdot U_2' - y_{12}'' \cdot U_2'') + (y_{13}' \cdot U_3' - y_{13}'' \cdot U_3'')] - U_1' \cdot [(y_{12}' \cdot U_2'' - y_{12}'' \cdot U_2') + (y_{13}' \cdot U_3'' - y_{13}'' \cdot U_3')] = P_1$$

$$Y_{11}'' \cdot U_1'^2 - U_1' \cdot (y_{12}' \cdot U_2'' + y_{12}'' \cdot U_2' + y_{13}' \cdot U_3'' + y_{13}'' \cdot U_3') + U_1' \cdot (y_{12}' \cdot U_2' - y_{12}'' \cdot U_2'' + y_{13}' \cdot U_3' - y_{13}'' \cdot U_3'') = -Q_1$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у прямокутних координатах для вузла 2:

$$Y_{22}'' \cdot U_2''^2 - U_2'' \cdot [(y_{12}'' \cdot U_1'' - y_{12}' \cdot U_1'') + (y_{23}'' \cdot U_3'' - y_{23}' \cdot U_3'')] - U_2'' \cdot [(y_{12}'' \cdot U_1' - y_{12}' \cdot U_1') + (y_{23}'' \cdot U_3' - y_{23}' \cdot U_3')] = P_2$$

$$Y_{22}'' \cdot U_2''^2 - U_2'' \cdot (y_{12}'' \cdot U_1'' + y_{12}' \cdot U_1' + y_{23}'' \cdot U_3'' + y_{23}' \cdot U_3') + U_2'' \cdot (y_{12}'' \cdot U_1' - y_{12}' \cdot U_1'' + y_{23}'' \cdot U_3' - y_{23}' \cdot U_3'') = -Q_2$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у прямокутних координатах для вузла 3:

$$Y_{33}'' \cdot U_3''^2 - U_3'' \cdot [(y_{03}'' \cdot U_0'' - y_{03}' \cdot U_0'') + (y_{23}'' \cdot U_2'' - y_{23}' \cdot U_2'') + (y_{13}'' \cdot U_1'' - y_{13}' \cdot U_1'')] - U_3'' \cdot [(y_{03}'' \cdot U_0' - y_{03}' \cdot U_0') + (y_{23}'' \cdot U_2' - y_{23}' \cdot U_2') + (y_{13}'' \cdot U_1' - y_{13}' \cdot U_1')] = P_3$$

$$Y_{33}'' \cdot U_3''^2 - U_3'' \cdot (y_{03}'' \cdot U_0'' + y_{03}' \cdot U_0' + y_{23}'' \cdot U_2'' + y_{23}' \cdot U_2' + y_{13}'' \cdot U_1'' + y_{13}' \cdot U_1') + U_3'' \cdot (y_{03}'' \cdot U_0' - y_{03}' \cdot U_0'' + y_{23}'' \cdot U_2' - y_{23}' \cdot U_2'' + y_{13}'' \cdot U_1' - y_{13}' \cdot U_1'') = -Q_3$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у прямокутних координатах для вузла 4:

$$Y_{44}'' \cdot U_4''^2 - U_4'' \cdot (y_{04}'' \cdot U_0'' - y_{04}' \cdot U_0'') - U_4'' \cdot (y_{04}'' \cdot U_0' - y_{04}' \cdot U_0') = P_4$$

$$Y_{44}'' \cdot U_4^2 - U_4' \cdot (y_{04}' \cdot U_0'' + y_{04}'' \cdot U_0') + U_4'' \cdot (y_{04}' \cdot U_0' - y_{04}'' \cdot U_0'') = -Q_4$$

Дійсні рівняння балансу потужностей у полярних координатах для вузла 1 мають вигляд:

$$Y_{11}' \cdot U_1^2 - U_1' \cdot [U_2' \cdot (y_{12}' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y_{12}'' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3' \cdot (y_{13}' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + y_{13}'' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3))] = P_1$$

$$Y_{11}'' \cdot U_1^2 + U_1' \cdot [U_2' \cdot (y_{12}' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y_{12}'' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3' \cdot (y_{13}' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y_{13}'' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3))] = -Q_1$$

Дійсні рівняння балансу потужностей у полярних координатах для вузла 2 мають вигляд:

$$Y_{22}' \cdot U_2^2 - U_2' \cdot [U_1' \cdot (y_{12}' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y_{12}'' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3' \cdot (y_{23}' \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_3) + y_{23}'' \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_3))] = P_2$$

$$Y_{22}'' \cdot U_2^2 + U_2' \cdot [U_1' \cdot (y_{12}' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y_{12}'' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3' \cdot (y_{23}' \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_3) - y_{23}'' \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_3))] = -Q_2$$

Дійсні рівняння балансу потужностей у полярних координатах для вузла 3 мають вигляд:

$$Y_{33}' \cdot U_3^2 - U_3' \cdot [U_0' \cdot (y_{03}' \cdot \cos(\Theta_0 - \Theta_3) + y_{03}'' \cdot \sin(\Theta_0 - \Theta_3)) + U_2' \cdot (y_{23}' \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_3) + y_{23}'' \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_3)) + U_1' \cdot (y_{13}' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + y_{13}'' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3))] = P_3$$

$$Y_{33}'' \cdot U_3^2 + U_3' \cdot [U_0' \cdot (y_{03}' \cdot \sin(\Theta_0 - \Theta_3) - y_{03}'' \cdot \cos(\Theta_0 - \Theta_3)) + U_2' \cdot (y_{23}' \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_3) - y_{23}'' \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_3)) + U_1' \cdot (y_{13}' \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - y_{13}'' \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3))] = -Q_3$$

Дійсні рівняння балансу потужностей у полярних координатах для вузла 4 мають вигляд:

$$Y_{44}' \cdot U_4^2 - U_4' \cdot (y_{04}' \cdot \cos(\Theta_0 - \Theta_4) + y_{04}'' \cdot \sin(\Theta_0 - \Theta_4)) = P_4$$

$$Y_{44}'' \cdot U_4^2 + U_4' \cdot (y_{04}' \cdot \sin(\Theta_0 - \Theta_4) + y_{04}'' \cdot \cos(\Theta_0 - \Theta_4)) = -Q_4$$

$$U_0 := 111000 \quad U_1 := 35000 \quad U_2 := 35000 \quad U_3 := 35000 \quad U_4 := 110000$$

Given

$$Y_{11} \cdot U_1 - (y_{12} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_3) = \frac{\bar{S}_1}{U_1}$$

$$Y_{22} \cdot U_2 - (y_{21} \cdot U_1 + y_{23} \cdot U_3) = \frac{\bar{S}_2}{U_2}$$

$$Y_{33} \cdot U_3 - (y_{30} \cdot U_0 + y_{23} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_1) = \frac{\bar{S}_3}{U_3}$$

$$Y_{44} \cdot U_4 - y_{04} \cdot U_0 = \frac{\bar{S}_4}{U_4}$$

$$\text{Find}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{pmatrix} 4.41 \times 10^4 + 7.394i \times 10^3 \\ 4.425 \times 10^4 + 7.536i \times 10^3 \\ 4.374 \times 10^4 + 7.266i \times 10^3 \\ 1.114 \times 10^5 + 225.492i \end{pmatrix}$$

Given

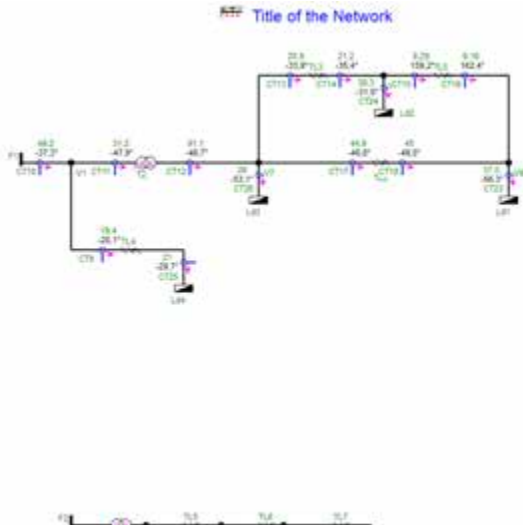
$$Y_{11} \cdot U_1^2 - \bar{U}_1 \cdot (y_{12} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_3) = \bar{S}_1$$

$$Y_{22} \cdot U_2^2 - \bar{U}_2 \cdot (y_{21} \cdot U_1 + y_{23} \cdot U_3) = \bar{S}_2$$

$$Y_{33} \cdot U_3 - \bar{U}_3 \cdot (y_{30} \cdot U_0 + y_{23} \cdot U_2 + y_{13} \cdot U_1) = \bar{S}_3$$

$$Y_{44} \cdot U_4 - \bar{U}_4 \cdot y_{04} \cdot U_0 = \bar{S}_4$$

$$\text{Find}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{pmatrix} 3.419 \times 10^3 + 281.57i \\ 4.731 \times 10^3 + 729.599i \\ -1.281 \times 10^3 + 256.662i \\ -340.408 + 194.728i \end{pmatrix}$$



Object ID	Object Name	Object Type	Object Value	Object ID	Object Name	Object Type	Object Value
CT10	CT10	CT	1.000000	CT11	CT11	CT	1.000000
CT11	CT11	CT	1.000000	CT12	CT12	CT	1.000000
CT12	CT12	CT	1.000000	CT13	CT13	CT	1.000000
CT13	CT13	CT	1.000000	CT14	CT14	CT	1.000000
CT14	CT14	CT	1.000000	CT15	CT15	CT	1.000000
CT15	CT15	CT	1.000000	CT16	CT16	CT	1.000000
CT16	CT16	CT	1.000000	CT17	CT17	CT	1.000000
CT17	CT17	CT	1.000000	CT18	CT18	CT	1.000000
CT18	CT18	CT	1.000000	CT19	CT19	CT	1.000000
CT19	CT19	CT	1.000000	CT20	CT20	CT	1.000000
CT20	CT20	CT	1.000000	CT21	CT21	CT	1.000000
CT21	CT21	CT	1.000000	CT22	CT22	CT	1.000000
CT22	CT22	CT	1.000000	CT23	CT23	CT	1.000000
CT23	CT23	CT	1.000000	CT24	CT24	CT	1.000000
CT24	CT24	CT	1.000000	CT25	CT25	CT	1.000000
CT25	CT25	CT	1.000000	CT26	CT26	CT	1.000000
CT26	CT26	CT	1.000000	CT27	CT27	CT	1.000000
CT27	CT27	CT	1.000000	CT28	CT28	CT	1.000000
CT28	CT28	CT	1.000000	CT29	CT29	CT	1.000000
CT29	CT29	CT	1.000000	CT30	CT30	CT	1.000000
CT30	CT30	CT	1.000000	CT31	CT31	CT	1.000000
CT31	CT31	CT	1.000000	CT32	CT32	CT	1.000000
CT32	CT32	CT	1.000000	CT33	CT33	CT	1.000000
CT33	CT33	CT	1.000000	CT34	CT34	CT	1.000000
CT34	CT34	CT	1.000000	CT35	CT35	CT	1.000000
CT35	CT35	CT	1.000000	CT36	CT36	CT	1.000000
CT36	CT36	CT	1.000000	CT37	CT37	CT	1.000000
CT37	CT37	CT	1.000000	CT38	CT38	CT	1.000000
CT38	CT38	CT	1.000000	CT39	CT39	CT	1.000000
CT39	CT39	CT	1.000000	CT40	CT40	CT	1.000000
CT40	CT40	CT	1.000000	CT41	CT41	CT	1.000000
CT41	CT41	CT	1.000000	CT42	CT42	CT	1.000000
CT42	CT42	CT	1.000000	CT43	CT43	CT	1.000000
CT43	CT43	CT	1.000000	CT44	CT44	CT	1.000000
CT44	CT44	CT	1.000000	CT45	CT45	CT	1.000000
CT45	CT45	CT	1.000000	CT46	CT46	CT	1.000000
CT46	CT46	CT	1.000000	CT47	CT47	CT	1.000000
CT47	CT47	CT	1.000000	CT48	CT48	CT	1.000000
CT48	CT48	CT	1.000000	CT49	CT49	CT	1.000000
CT49	CT49	CT	1.000000	CT50	CT50	CT	1.000000
CT50	CT50	CT	1.000000	CT51	CT51	CT	1.000000
CT51	CT51	CT	1.000000	CT52	CT52	CT	1.000000
CT52	CT52	CT	1.000000	CT53	CT53	CT	1.000000
CT53	CT53	CT	1.000000	CT54	CT54	CT	1.000000
CT54	CT54	CT	1.000000	CT55	CT55	CT	1.000000
CT55	CT55	CT	1.000000	CT56	CT56	CT	1.000000
CT56	CT56	CT	1.000000	CT57	CT57	CT	1.000000
CT57	CT57	CT	1.000000	CT58	CT58	CT	1.000000
CT58	CT58	CT	1.000000	CT59	CT59	CT	1.000000
CT59	CT59	CT	1.000000	CT60	CT60	CT	1.000000
CT60	CT60	CT	1.000000	CT61	CT61	CT	1.000000
CT61	CT61	CT	1.000000	CT62	CT62	CT	1.000000
CT62	CT62	CT	1.000000	CT63	CT63	CT	1.000000
CT63	CT63	CT	1.000000	CT64	CT64	CT	1.000000
CT64	CT64	CT	1.000000	CT65	CT65	CT	1.000000
CT65	CT65	CT	1.000000	CT66	CT66	CT	1.000000
CT66	CT66	CT	1.000000	CT67	CT67	CT	1.000000
CT67	CT67	CT	1.000000	CT68	CT68	CT	1.000000
CT68	CT68	CT	1.000000	CT69	CT69	CT	1.000000
CT69	CT69	CT	1.000000	CT70	CT70	CT	1.000000
CT70	CT70	CT	1.000000	CT71	CT71	CT	1.000000
CT71	CT71	CT	1.000000	CT72	CT72	CT	1.000000
CT72	CT72	CT	1.000000	CT73	CT73	CT	1.000000
CT73	CT73	CT	1.000000	CT74	CT74	CT	1.000000
CT74	CT74	CT	1.000000	CT75	CT75	CT	1.000000
CT75	CT75	CT	1.000000	CT76	CT76	CT	1.000000
CT76	CT76	CT	1.000000	CT77	CT77	CT	1.000000
CT77	CT77	CT	1.000000	CT78	CT78	CT	1.000000
CT78	CT78	CT	1.000000	CT79	CT79	CT	1.000000
CT79	CT79	CT	1.000000	CT80	CT80	CT	1.000000
CT80	CT80	CT	1.000000	CT81	CT81	CT	1.000000
CT81	CT81	CT	1.000000	CT82	CT82	CT	1.000000
CT82	CT82	CT	1.000000	CT83	CT83	CT	1.000000
CT83	CT83	CT	1.000000	CT84	CT84	CT	1.000000
CT84	CT84	CT	1.000000	CT85	CT85	CT	1.000000
CT85	CT85	CT	1.000000	CT86	CT86	CT	1.000000
CT86	CT86	CT	1.000000	CT87	CT87	CT	1.000000
CT87	CT87	CT	1.000000	CT88	CT88	CT	1.000000
CT88	CT88	CT	1.000000	CT89	CT89	CT	1.000000
CT89	CT89	CT	1.000000	CT90	CT90	CT	1.000000
CT90	CT90	CT	1.000000	CT91	CT91	CT	1.000000
CT91	CT91	CT	1.000000	CT92	CT92	CT	1.000000
CT92	CT92	CT	1.000000	CT93	CT93	CT	1.000000
CT93	CT93	CT	1.000000	CT94	CT94	CT	1.000000
CT94	CT94	CT	1.000000	CT95	CT95	CT	1.000000
CT95	CT95	CT	1.000000	CT96	CT96	CT	1.000000
CT96	CT96	CT	1.000000	CT97	CT97	CT	1.000000
CT97	CT97	CT	1.000000	CT98	CT98	CT	1.000000
CT98	CT98	CT	1.000000	CT99	CT99	CT	1.000000
CT99	CT99	CT	1.000000	CT100	CT100	CT	1.000000

load flow did not converge OK

Висновок: на даних практичних роботах ми мали можливість попрацювати зі схемою заміщення, по якій розраховували параметри елементів, власні й взаємні провідності вузлів, також склали рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів і балансу потужностей, також попрацювали з програмним забезпеченням eplek, в якому побудували свою схему та по ній також розраховували ті параметри.

Практична робота 15

Тема: обчислення власних і взаємних провідностей вузлів електричної мережі. Складання рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів і балансу потужностей

Мета заняття: набуття практичного досвіду розробки елементів математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі.

2.1. Порядок виконання завдань практичного заняття

1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом по темі заняття;
2. Обчислити взаємні провідності вузлів Y_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4$) в заданій електричній мережі;
3. Обчислити власні провідності вузлів Y_{ii} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) заданої електричної мережі;
4. Скласти комплексні рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів для вузлів 1, 2, 3, 4 заданої електричної мережі;
5. Скласти комплексні рівняння усталеного режиму у формі балансу потужностей для вузлів 1, 2, 3, 4 заданої електричної мережі;
6. Скласти рівняння балансу активних та реактивних потужностей у прямокутних координатах для вузлів 1, 2, 3, 4 заданої електричної мережі;
7. Скласти рівняння балансу активних та реактивних потужностей у полярних координатах для вузлів 1, 2, 3, 4 заданої електричної мережі;
8. Підготувати відповіді на контрольні питання.

Взаємні провідності вузлів схеми визначаємо за формулою:

$$y_{ij} = (1/z_{ij}) \cdot K_T$$

де $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$ – опір ділянки між вузлами i та j ; K_T – коефіцієнт трансформації. Для ділянок ЛЕП дорівнює 1.

$$y_{03} := \frac{1 \cdot K_T}{Z_{03}} = 0.001 - 0.014i$$

$$y_{04} := \frac{1}{Z_{04}} = 0.047 - 0.08i$$

$$y_{32} := \frac{1}{Z_{32}} = 0.093 - 0.126i$$

$$y_{21} := \frac{1}{Z_{21}} = 0.111 - 0.152i$$

$$y_{31} := \frac{1}{Z_{31}} = 0.278 - 0.379i$$

Власна провідність вузла і дорівнює сумі провідностей всіх ділянок, які з'єднані в цьому вузлі (повздовжніх і поперечних):

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij} \cdot p - 0,5 \cdot \sum_j Y_{ij}^{\text{ПТ}} + \sum_f Y_{if}^{\text{ПТ}}$$

Тут – взаємна провідність між вузлом і та суміжними вузлами j, що з'єднані з ним; $p = 1$ для ділянок ЛЕП; $p = 1/ K_T$, якщо вузол і є вузлом початку трансформаторної ділянки (обмотка ВН трансформатора); $p = K_T$, якщо вузол і є вузлом кінця трансформаторної ділянки (обмотка НН трансформатора); – поперечна провідність ділянок ЛЕП між вузлом і та вузлами j,

що з'єднані з ним;

– поперечна провідність трансформаторних ділянок між вузлом і та вузлами f. Враховується, якщо вузол і є вузлом початку трансформаторної ділянки.

$$Y_{00} := y_{04} + y_{03} K_T - 0.5 \cdot (b_{04} \cdot j) + g_T + b_T \cdot j = 0.05 - 0.121i$$

$$Y_{11} := y_{31} + y_{21} - 0.5 \cdot (b_{31} \cdot j + b_{21} \cdot j) = 0.389 - 0.531i$$

$$Y_{22} := y_{32} + y_{21} - 0.5 \cdot (b_{32} \cdot j + b_{21} \cdot j) = 0.204 - 0.278i$$

$$Y_{33} := \frac{y_{03}}{K_T} + (y_{32} + y_{31}) - 0.5 \cdot (b_{32} \cdot j + b_{31} \cdot j) + g_T + b_T \cdot j = 0.371 - 0.51i$$

$$Y_{44} := y_{04} - 0.5 \cdot (b_{04} \cdot j) = 0.047 - 0.08i$$

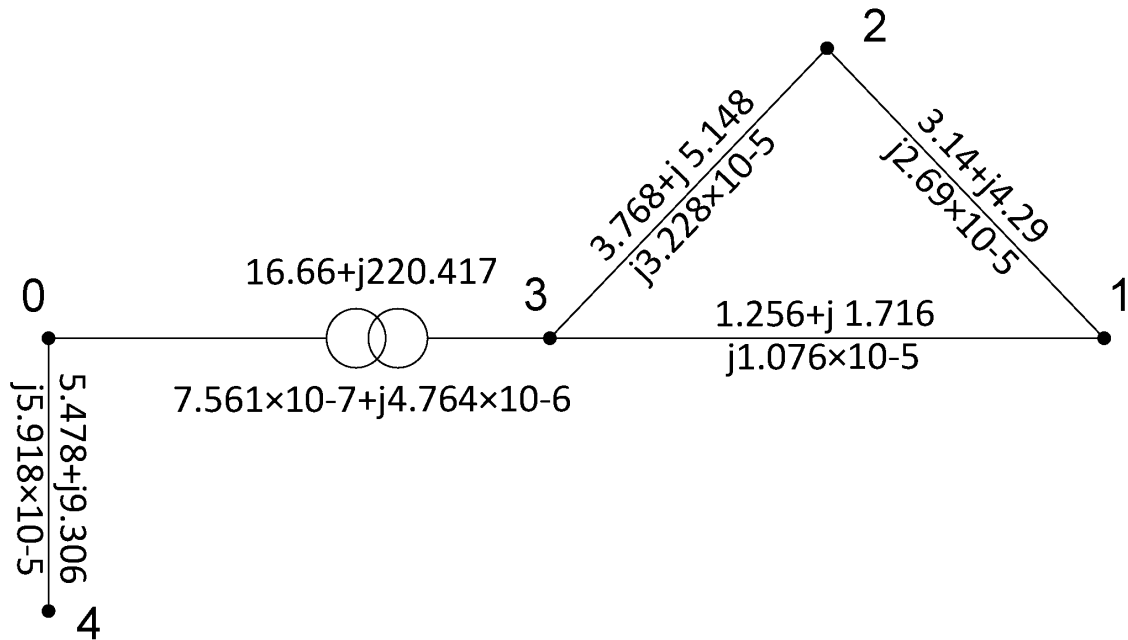


Рис.1 Розрахункова електричної мережі

Складаємо нелінійні рівняння усталеного режиму з комплексними складовими у формі балансу струмів.

Вузол 1

$i = 1$; суміжні вузли $j = 2, 3$

$$y_{11} \times \dot{U}_1 - (y_{21} \times \dot{U}_2 + y_{31} \times \dot{U}_3) = \frac{S_1}{\dot{U}_1}$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.389 - 0.531i) \times U_1 - ((0.111 - 0.152i) \times U_2 + (0.278 - 0.379i) \times U_3) = \frac{4 + 6i}{U_1}$$

Вузол 2

$i = 2$; суміжні вузли $j = 1, 3$

$$y_{22} \times \dot{U}_2 - (y_{32} \times \dot{U}_3 + y_{21} \times \dot{U}_1) = \frac{S_2}{\dot{U}_2}$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.204-0.278i) \times \dot{U}_2 - ((0.093-0.126i) \times \dot{U}_3 + (0.111-0.152i) \times \dot{U}_1) = \frac{5+3i}{\dot{U}_2}$$

Вузол 3

$i = 3$; суміжні вузли $j = 0, 1, 2$

$$y_{33} \times \dot{U}_3 - (y_{03} \times \dot{U}_0 + y_{32} \times \dot{U}_2 + y_{31} \times \dot{U}_1) = \frac{S_3}{\dot{U}_3}$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.371-0.51i) \times \dot{U}_3 - ((0.001-0.014i) \times \dot{U}_0 + (0.093-0.126i) \times \dot{U}_2 + (0.278-0.379i) \times \dot{U}_1) = \frac{3+4i}{\dot{U}_3}$$

Вузол 4

$i = 4$; суміжні вузли $j = 0$

$$y_{44} \times \dot{U}_4 - (y_{04} \times \dot{U}_0) = \frac{S_4}{\dot{U}_4}$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.047-0.08i) \times \dot{U}_4 - (0.047-0.08i \times \dot{U}_0) = \frac{3.5+2i}{\dot{U}_4}$$

Запишемо рівняння усталеного режиму із комплексними складовими у формі балансу потужностей. Їх можна отримати із рівнянь балансу струмів, помноживши ці рівняння на ($i = 1, 2, 3, 4$):

Вузол 1

$i = 1$; суміжні вузли $j = 2, 3$

$$y_{11} \times \dot{U}_1^2 - \dot{U}_1 \times (y_{21} \times \dot{U}_2 + y_{31} \times \dot{U}_3) = S_1$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.389 - 0.531i) \times \dot{U}_1^2 - \dot{U}_1 \times ((0.111 - 0.152i) \times \dot{U}_2 + (0.278 - 0.379i) \times \dot{U}_3) = 4 + 6i$$

Вузол 2

$i = 2$; суміжні вузли $j = 1, 3$

$$y_{22} \times \dot{U}_2^2 - \dot{U}_2 \times (y_{32} \times \dot{U}_3 + y_{21} \times \dot{U}_1) = S_2$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.204 - 0.278i) \times \dot{U}_2^2 - \dot{U}_2 \times ((0.093 - 0.126i) \times \dot{U}_3 + (0.111 - 0.152i) \times \dot{U}_1) = 5 + 3i$$

Вузол 3

$i = 3$; суміжні вузли $j = 0, 1, 2$

$$y_{33} \times \dot{U}_3^2 - \dot{U}_3 \times (y_{03} \times \dot{U}_0 + y_{32} \times \dot{U}_2 + y_{31} \times \dot{U}_1) = S_3$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.371 - 0.51i) \times \dot{U}_3^2 - \dot{U}_3 \times ((0.001 - 0.014i) \times \dot{U}_0 + (0.093 - 0.126i) \times \dot{U}_2 + (0.278 - 0.379i) \times \dot{U}_1) = 3 + 4i$$

Вузол 4

$i = 4$; суміжні вузли $j = 0$

$$y_{44} \times \dot{U}_4^2 - \dot{U}_4 \times (y_{04} \times \dot{U}_0) = S_4$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0.047-0.08i)_4 \times \dot{U}_4^2 - \dot{U}_4 \times (0.047-0.08i \times \dot{U}_0) = 3.5+2i$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у прямокутних координатах:

Вузол 1

$i = 1$; суміжні вузли $j = 2, 3$

$$y'_{11} \times U_1^2 - U_1' \left[(y'_{21} \times U_2' - y''_{21} \times U_2'') + (y'_{31} \times U_3' - y''_{31} \times U_3'') \right] - U_1'' \left[(y'_{21} \times U_2'' + y''_{21} \times U_2') + (y'_{31} \times U_3'' + y''_{31} \times U_3') \right] = P_1$$

$$y''_{11} \times U_1^2 - U_1' \times \left[(y'_{21} \times U_2'' + y''_{21} \times U_2') + (y'_{31} \times U_3'' + y''_{31} \times U_3') \right] + U_1'' \times \left[(y'_{21} \times U_2' - y''_{21} \times U_2'') + (y'_{31} \times U_3' - y''_{31} \times U_3'') \right] = -Q_1$$

Вузол 2

$i = 2$; суміжні вузли $j = 1, 3$

$$y'_{22} \times U_2^2 - U_2' \left[(y'_{32} \times U_3' - y''_{32} \times U_3'') + (y'_{21} \times U_1' - y''_{21} \times U_1'') \right] - U_2'' \left[(y'_{32} \times U_3'' + y''_{32} \times U_3') + (y'_{21} \times U_1'' + y''_{21} \times U_1') \right] = P_2$$

$$y''_{22} \times U_2^2 - U_2' \times \left[(y'_{32} \times U_3'' + y''_{32} \times U_3') + (y'_{21} \times U_1'' + y''_{21} \times U_1') \right] + U_2'' \times \left[(y'_{32} \times U_3' - y''_{32} \times U_3'') + (y'_{21} \times U_1' - y''_{21} \times U_1'') \right] = -Q_2$$

Вузол 3

$i = 3$; суміжні вузли $j = 0, 1, 2$

$$y'_{33} \times U_3^2 - U_3' \left[(y'_{03} \times U_0' - y''_{03} \times U_0'') + (y'_{32} \times U_2' - y''_{32} \times U_2'') + (y'_{31} \times U_1' - y''_{31} \times U_1'') \right] \\ - U_3'' \left[(y'_{03} \times U_0'' + y''_{03} \times U_0') + (y'_{32} \times U_2'' + y''_{32} \times U_2') + (y'_{31} \times U_1'' + y''_{31} \times U_1') \right] = P_4$$

$$y''_{22} \times U_2^2 - U_3' \times \left[(y'_{03} \times U_0'' + y''_{03} \times U_0') + (y'_{32} \times U_2'' + y''_{32} \times U_2') + (y'_{31} \times U_1'' + y''_{31} \times U_1') \right] \\ + U_3'' \times \left[(y'_{03} \times U_0' - y''_{03} \times U_0'') + (y'_{32} \times U_2' - y''_{32} \times U_2'') + (y'_{31} \times U_1' - y''_{31} \times U_1'') \right] = -Q_4$$

Вузол 4

$i = 4$; суміжні вузли $j = 0$

$$y'_{44} \times U_4^2 - U_4' \left[(y'_{04} \times U_0' - y''_{04} \times U_0'') \right] \\ - U_4'' \left[(y'_{03} \times U_0'' + y''_{03} \times U_0') \right] = P_4$$

$$y''_{44} \times U_4^2 - U_4' \times \left[(y'_{04} \times U_0'' + y''_{04} \times U_0') \right] \\ + U_4'' \times \left[(y'_{04} \times U_0' - y''_{04} \times U_0'') \right] = -Q_4$$

Запишемо рівняння балансу потужностей із дійсними складовими у полярних координатах:

Вузол 1

$i = 1$; суміжні вузли $j = 2, 3$

$$y'_{11} \times U_1^2 - U_1 \times \left[U_2 \times (y'_{21} \times (\cos(\Theta_2 - \Theta_1)) + y''_{21} \times (\sin(\Theta_2 - \Theta_1))) \right. \\ \left. + U_3 \times (y'_{31} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_1)) + y''_{31} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_1))) \right] = P_1$$

$$y''_{11} \times U_1^2 - U_1 \times \left[U_2 \times (y'_{21} \times (\sin(\Theta_2 - \Theta_1)) + y''_{21} \times (\cos(\Theta_2 - \Theta_1))) \right. \\ \left. + U_3 \times (y'_{31} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_1)) + y''_{31} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_1))) \right] = -Q_1$$

Вузол 2

$i = 2$; суміжні вузли $j = 1, 3$

$$\begin{aligned}
& y'_{22} \times U_2^2 - U_2 \times [U_3 \times (y'_{32} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_2)) + y''_{32} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_2))) \\
& \quad + U_1 \times (y'_{21} \times (\cos(\Theta_2 - \Theta_1)) + y''_{21} \times (\sin(\Theta_2 - \Theta_1)))] = P_2 \\
& y''_{22} \times U_2^2 - U_2 \times [U_3 \times (y'_{32} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_2)) + y''_{32} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_2))) \\
& \quad + U_1 \times (y'_{21} \times (\sin(\Theta_2 - \Theta_1)) + y''_{21} \times (\cos(\Theta_2 - \Theta_1)))] = -Q_2
\end{aligned}$$

Вузол 3

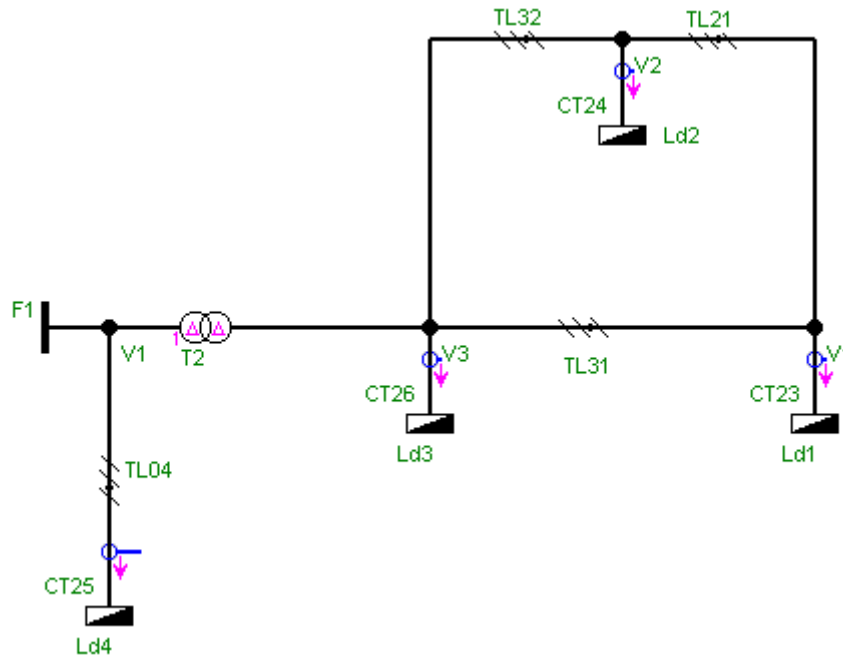
$i = 3$; суміжні вузли $j = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
& y'_{33} \times U_3^2 - U_3 \times [U_0 \times (y'_{03} \times (\cos(\Theta_0 - \Theta_3)) + y''_{03} \times (\sin(\Theta_0 - \Theta_3))) \\
& \quad + U_2 \times (y'_{32} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_2)) + y''_{32} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_2))) \\
& \quad + U_1 \times (y'_{31} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_1)) + y''_{31} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_1)))] = P_3 \\
& y''_{33} \times U_3^2 - U_3 \times [U_0 \times (y'_{03} \times (\sin(\Theta_0 - \Theta_3)) + y''_{03} \times (\cos(\Theta_0 - \Theta_3))) \\
& \quad + U_2 \times (y'_{32} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_2)) + y''_{32} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_2))) \\
& \quad + U_1 \times (y'_{31} \times (\sin(\Theta_3 - \Theta_1)) + y''_{31} \times (\cos(\Theta_3 - \Theta_1)))] = -Q_3
\end{aligned}$$

Вузол 4

$i = 4$; суміжні вузли $j = 0$

$$\begin{aligned}
& y'_{44} \times U_4^2 - U_4 \times [U_0 \times (y'_{04} \times (\cos(\Theta_0 - \Theta_4)) + y''_{04} \times (\sin(\Theta_0 - \Theta_4)))] = P_4 \\
& y''_{44} \times U_4^2 - U_4 \times [U_0 \times (y'_{04} \times (\sin(\Theta_0 - \Theta_4)) + y''_{04} \times (\cos(\Theta_0 - \Theta_4)))] = -Q_4
\end{aligned}$$



Схем.1 Побудована за варіантом у програмному середовищі Elplek

Висновок: у данній практичній роботі набув практичного досвіду розробки елементів математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі.

Як враховується трансформатор при обчисленні взаємних та власних провідностей вузлів

Формування математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі передбачає складання алгебраїчних рівнянь усталеного режиму. Вони визначають аналітичну залежність між відомими і невідомими параметрами схеми та режиму. Рівняння описують баланс струму або потужності у вузлах мережі. Залежно від способу подання вузлових навантажень споживачів та джерел електроенергії (у вигляді струму чи потужності) рівняння усталеного режиму можуть бути лінійними або нелінійними. Якщо навантаження у вузлі мережі задане постійним струмом ($I_i = \text{const}$), режим вузла описується лінійними рівняннями балансу струмів

В практичних розрахунках комплексні рівняння часто використовуються у перетвореному вигляді: комплексні величини у їх складі подаються у вигляді дійсних та

уявних складових. В результаті перетворень комплексне рівняння розпадається на два дійсних рівняння.

Якщо електрична мережа містить трансформатори, що з'єднують ділянки різних класів напруг, то при розрахунках провідностей треба враховувати параметри трансформаторної ділянки і її орієнтацію відносно вузла i . Будемо вважати, що вузол початку трансформаторної ділянки відповідає обмотці трансформатора з високою напругою, вузол кінця ділянки – його обмотці з низькою напругою. Коефіцієнт трансформації K_T розраховуємо за формулою

Тоді взаємну провідність вузлів i та j обчислюють за формулою

$$Y_{ij}^{вз} = Y_{ij} K_T$$

Y_{ij} – поздовжня провідність ділянки (ЛЕП чи трансформатор). Визначається за формулою. При цьому величина $Y_{ij}^{вз}$ не залежить від орієнтації трансформаторної ділянки відносно вузла i , тобто виконується принцип взаємності $Y_{ij}^{вз} = Y_{ji}^{вз}$.

Для ділянок ЛЕП коефіцієнт трансформації $K_T = 1$.

Власні провідності вузлів визначають як суму провідностей віток схеми, сполучених з цими вузлами. Взаємні провідності вузлів дорівнюють сумі провідностей віток, які сполучають ці вузли. Якщо між двома вузлами вітки немає, то відповідна взаємна провідність дорівнює нулю.

Система рівнянь записана для схеми з n незалежними вузлами. При цьому напруга базового $n+1$ - го вузла вважається заданою. Кожне з n рівнянь системи (А.1) відповідає балансу комплексних струмів у вузлі, тому ці рівняння називають рівняннями вузлових напруг у формі балансу струмів.

При заданих потужностях вузлів струми навантаження залежать від напруг вузлів

$$I_k = \frac{S_k^*}{\sqrt{3}U_k^*} \quad (A2)$$

Де S^A спряжена комплексна потужність трифазного навантаження k -го вузла;

Де U_k^Δ спряжений комплекс напруги k-го вузла.

На практиці часто використовують рівняння вузлових напруг у формі балансу потужностей. Такі рівняння можна одержати, якщо кожне з рівнянь системи (А.1) помножити на спряжений комплекс напруги відповідного вузла, виразивши струм навантаження через потужність навантаження вузла згідно з (А.2):

$$\left. \begin{aligned} U_1^* (-Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + \dots + Y_{1n}\dot{U}_n + Y_{1s}\dot{U}_s) &= S_1^* \\ U_2^* (Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 + \dots + Y_{2n}\dot{U}_n + Y_{2s}\dot{U}_s) &= S_2^* \\ \dots & \\ U_n^* (Y_{n1}\dot{U}_1 + Y_{n2}\dot{U}_2 + \dots - Y_{nn}\dot{U}_n + Y_{ns}\dot{U}_s) &= S_n^* \end{aligned} \right\} \text{А.3}$$

Таким чином, система нелінійних рівнянь з комплексними змінними (А.3) зводиться до системи рівнянь порядку $2k$ з дійсними змінними.

Власна провідність і-го вузла Y_{ii} дорівнює сумі провідностей усіх ділянок схеми заміщення (поздовжніх і поперечних), які з'єднані в ньому:

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij} - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{\text{ПЛ}}$$

Y_{ij} - взаємна провідність вузлів і та j де формула $Y_{ij}^{\text{ПЛ}} = G_{\text{Л}} + jB_{\text{Л}}$ - поперечна провідність ділянки ЛЕП.

Якщо у вузлі і з'єднані трансформаторні ділянки, власну провідність вузла розраховують за формулою

$$\tilde{Y}_{ii} = \sum_j Y_{ij}^{\text{ТТ}} \cdot p - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{\text{ТТ}} + \sum_l Y_{il}^{\text{ТТ}}$$

де $p = 1$ - для ділянки ЛЕП; $p = 1 / K_{\text{Т}}$, якщо вузол і є вузлом початку трансформаторної ділянки; $p = K_{\text{Т}}$, якщо вузол і є вузлом кінця трансформаторної ділянки; $Y_{il}^{\text{ТТ}} = G_{\text{Т}} + jB_{\text{Т}}$ поперечна провідність трансформатора. Враховується, якщо вузол і є вузлом початку трансформаторної ділянки.

Додатки

Довідкова таблиця 1: Розрахункові дані ПЛ 35-150 кВ зі сталелегалюмінієвими дротами АС (на 100 км):

Переріз провода, мм ²	r ₀ , Ом, при +20°C	35 кВ		110 кВ			150 кВ		
		x ₀ , Ом	b ₀ , См·10 ⁻⁴	x ₀ , Ом	b ₀ , См·10 ⁻⁴	q ₀ , Мвар	x ₀ , Ом	b ₀ , См·10 ⁻⁴	q ₀ , Мвар
35	77,3	44,5	2,59	–	–	–	–	–	–
50	59,2	43,3	2,65	–	–	–	–	–	–
70	42	42,0	2,73	–	–	–	–	–	–
95	31,4	41,1	2,81	42,9	2,65	3,5	–	–	–
120	24,9	40,3	2,85	42,3	2,69	3,6	43,9	2,61	6,5
150	19,5	39,8	2,90	41,6	2,74	3,65	43,2	2,67	6,7
185	15,6	38,4	2,96	40,9	2,82	3,7	42,4	2,71	6,8
240	12	–	–	40,1	2,85	3,75	41,6	2,75	6,9

Довідкова таблиця 2: Трифазні двохобмоткові трансформатори 110 кВ:

Тип трансфор- матора	S _{ном} МВА	Межі регулю- вання	Каталожні дані						Розрахункові дані		
			U _{ном} обмоток, кВ		U _к , %	ΔP _{кз} кВт	ΔP _{х.х.} кВт	I _{х.х.} %	R _т , Ом	X _т , Ом	ΔQ _{х.х.} , кВАр
			ВН	НН							
ТМН- 2500/110	2,5	±10×1,5% ±8×1,5%	110	6,6; 11; 22	10,5	22	5,0	1,5	46,6	555	37,5
ТМН- 4000/110	4,0	±9×1,78%	115	–	–	–	–	–	–	–	–
ТМН- 6300/110	6,3	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	50	10	1,0	16,6	220	63
ТДН- 10000/110	10	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	60	14	0,9	7,95	139	90
ТДН- 16000/110	16	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	85	21	0,85	4,38	86,7	136
ТРДН- 25000/110	25	±9×1,78%	115	6,3/6,3; 6,3/10,5; 10,5/10,5	10,5	120	29	0,8	2,54	55,9	200
ТРДН- 32000/110	32	±9×1,78%	115		10,5	145	35	0,75	1,87	43,5	240
ТРДНС- 32000/110					16	145	35	0,75	1,87	66	240
ТРДН- 40000/110	40	±9×1,78%	115		10,5	175	42	0,7	1,44	34,8	280
ТРДНС- 40000/110				16	175	42	0,7	1,44	52,8	280	
ТД- 40000/110				115	3,15; 6,3; 10,5	10,5	175	52	0,7	1,44	34,8
ТРДЦН- 63000/110	63	±9×1,78%	115	6,3/6,3; 6,3/10,5;	10,5	260	59	0,65	0,87	22	410
ТРДЦН- 80000/110	80	±9×1,78%	121	10,5/10,5	10,5	315	70	0,6	0,65	17,3	480
ТД- 80000/110	80	±2×2,5%	121	6,3; 10,5; 13,8; 3,15	10,5	315	70	0,6	0,65	17,3	480
ТДЦ- 125000/110	125	±2×2,5%	121	10,5; 13,8	10,5	520	120	0,55	0,33	11,1	678
ТДЦ- 200000/110	200	±2×2,5%	121	13,8; 18; 15,75; 20	10,5	700	170	0,5	0,23	6,95	1000
ТДЦ- 250000/110	250	±2×2,5%	121	15,75; 20	10,5	790	200	0,5	0,17	5,55	1250

Позначення типів трансформаторів

А	Т	С	Т	Г	Е		
				З			
О	Р	ДП	АН	У			
		МВ					
		Ц					

Автотрансформатор _____

Число фаз

трифазний _____

однофазний _____

З розщепленою обмоткою _____

Охолодження:

природне повітряне _____

природне масляне _____

масляне з наддувом і з природньою

циркуляцією масла _____

масляне з наддувом і з примусовою

циркуляцією масла _____

масляно-водяне з природньою

циркуляцією масла _____

масляно-водяне з примусовою

циркуляцією масла _____

Трьохобмотковий _____

Вид переключення віток:

виконання однієї з обмоток з

пристроєм регулювання під

напругою (РПН) _____

Особливості виконання:

грозозахисний _____

захисне виконання _____

удосконалений _____

те ж з автоматичним РПН _____

Для електрифікації залізниць _____

Номинальна потужність, кВ·А _____

Клас напруги обмотки ВН (для автотрансформаторів з обмоткою СН 110 кВ та вище – також клас напруги обмотки СН), кВ _____

Додаток . Матриці і їх перетворення

Визначення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця величин, записаних у певній послідовності; ці величини називаються *елементами матриці*. Така таблиця записується у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

де p - число рядків матриці; s - число її стовпців.

Запис групи величин у вигляді матриці не передбачає виконання яких-небудь дій над ними. Це лише форма впорядкованого запису даних величин у вигляді умовної таблиці. Строгий порядок запису дає можливість оперувати відразу з усією таблицею, позначуваної одним символом. Так, наведену вище матрицю можна позначити символом A и записати скорочено у вигляді

$$A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, s.$$

де i - номер рядка; j -номер стовпця.

Дві матриці називаються *рівними*, якщо рівні їхні відповідні елементи. Якщо число рядків матриці не дорівнює числу її стовпців ($p \neq s$), то така матриця називається *прямокутної розмірів $p \times s$* .

Якщо числа рядків і стовпців матриці однакові ($p = s$), то матриця називається *квадратної порядку p* . Матриця, що полягає з одного рядка ($p = 1, s > 1$), називається *рядком*; матриця, що полягає з одного стовпця ($s = 1, p > 1$), — *стовпцем*; матриця $A = (a)$, що полягає з однієї величини ($p = s = 1$), ототожнюється із цією величиною.

Переставивши в матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

розмірів $p \times s$ строки зі стовпцями, одержимо *транспоновану матрицю* розмірів $s \times p$:

$$A_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

Очевидно, що для рядка транспонованою матрицею є стовпець, а для шпальта-рядок.

Квадратна матриця A рівна транспонованій A^t , якщо вона *симетрична*, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$. Часткам случаємо симетричної матриці є *діагональна* матриця, у якої відмінні від нуля лише елементи, розташовані на діагоналі. Діагональна матриця порядку p

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{bmatrix}$$

скорочено записується як

$$A = \text{diag}(a_i), i = 1, 2, \dots, p.$$

Якщо всі елементи a_i - діагональної матриці дорівнюють одиниці, тобто

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (\Delta_{ij})$$

де Δ_{ij} - символ Кронекера ($\Delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ й $\Delta_{ij} = 1$ при $i = j$), те така матриця називається *одиничної* й позначається символом **1**. Стовпець, усі елементи якого дорівнюють одиниці, називається *одиничним стовпцем* і позначається **n**. Транспонований одиничний стовпець є одиничний рядок **nt**.

Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовий* і позначається символом **0**.

Визначником квадратної матриці A називається визначник, елементи якого дорівнюють елементам матриці; він позначається символом $|A|$.

Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ називається *неособливої* (або невиродженою), якщо її визначник відмінний від нуля; а якщо ні, то матриця називається *особливої*.

Множення матриць на число й додавання матриць. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ *на число* a називається матриця, елементи якої отримані з елементів матриці A множенням на число a :

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1s} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha a_{p1} & \alpha a_{p2} & \dots & \alpha a_{ps} \end{bmatrix}.$$

Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, що мають однакове число рядків і стовпців, називається матриця $C = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$).

Множення матриць. Множення матриць A і B визначається тільки в припущенні, що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B . При цьому елементи матриці-добутку $C = A \times B$ обчислюються в такий спосіб: елемент c_{ij} i -ї рядка j -го стовпця матриці C дорівнює сумі добутку елементів i -ї рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B . При

$$A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, s;$$

$$B = (b_{ij}), i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, q;$$

одержимо $C = A \times B = (c_{ij}), i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q$, причому

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^s a_{il} b_{lj}$$

Очевидно, що добуток двох прямокутних матриць є прямокутна матриця, число рядків якої дорівнює числу рядків першої матриці-співмножника, а число стовпців — числу стовпців другої матриці співмножника.

Добуток двох матриць не має властивість коммутативності, тобто $A \times B \neq B \times A$. Навіть сама постановка питання про цю рівність має сенс тільки для квадратних матриць A і B однакового порядку. Дійсно, матриці $A \times B$ й $B \times A$ мають сенс одночасно тільки в тому випадку, якщо число рядків першої матриці дорівнює числу стовпців другий, а число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другий. При виконанні цих умов матриці $A \times B$ й $B \times A$ будуть квадратними, але різних порядків, якщо A і B не квадратні. Але навіть і для квадратних матриць однакового порядку*у загальному випадку $A \times B \neq B \times A$.

В окремих випадках множення двох матриць може бути коммутативно. При цьому матриці-співмножники називаються *перестановочними*. Так, одинична матриця перестановочна з кожної квадратною матрицею того ж порядку й відіграє • серед квадратних матриць таку ж роль, як і одиниця серед чисел, тобто

$$1 \times A = A \times 1 = A$$

З визначення операції множення матриць випливає, що транспонована матриця-добуток дорівнює добутку транспонованих матриць-співмножників, узятих у зворотному порядку:

$$(A \times B)_t = B_t \times A_t.$$

Обіг матриць. Для квадратної неособливої матриці A визначена операція її обігу, тобто знаходження зворотної матриці A^{-1} . Зворотною

матрицею стосовно даної називається матриця, яка, будучи помноженою як праворуч, так і ліворуч на дану матрицю, дає одиничну матрицю:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1.$$

Елементи зворотної матриці $A^{-1} = B = (b_{ij})$ обчислюються по формулі

$$b_{ij} = A_{ji} / |A|,$$

де A_{ji} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} ; у визначнику матриці A .

Зворотна матриця добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку зворотних матриць співмножників, узятому у зворотному порядку:

$$(A \times C)^{-1} = C^{-1} \times A^{-1}$$

Крім того, транспонована зворотна матриця рівна зворотній транспонованій матриці:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

Обіг матриці за допомогою розбивки на блоки. Зворотну матрицю $B = A^{-1}$ можна одержати, розв'язавши систему матричних рівнянь $AB = 1$ при виставі матриць у блоковій формі, тобто при поділі матриці, що звертається, на кілька матриць меншого порядку (блоків). Розбивка вихідної матриці A на блоки здійснюється тем або іншим способом відповідно до її конкретної структури.

Розглянемо найбільше часто застосовуваний випадок розбивки матриці на чотири блоки таким чином, що діагональні блоки є квадратними й неособливими. Тоді одержимо наступне матричне рівняння:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{П1-1})$$

де блоки матриці B мають ті ж розміри, що й відповідні блоки матриці A .

Пусти порядок вихідної матриці A рівний p , а порядки її квадратних діагональних блоків A_{11} і A_{22} рівні відповідно q і r ($p = q + r$). Тоді блоки A_{12} й A_{21} у загальному випадку ($q \neq r$) будуть прямокутними розмірів $q \times r$ і $r \times q$ відповідно.

Відповідно до правил множення блокових матриць представимо (П1-1) у вигляді чотирьох матричних рівнянь:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = 1; \quad (\text{П1-2а})$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0; \quad (\text{П1-2б})$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0; \quad (\text{П1-2в})$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 1; \quad (\text{П1-2г})$$

Дозволяючи отриману систему (П1-2а) - (П1-2г) щодо блоків матриці B одержимо шукану матрицю A^{-1} . При цьому обіг матриці A порядку p у загальному випадку зводиться до обігу матриць порядків q і r і до виконання

операцій додавання й множення блоків матриці A . Оскільки операція обігу матриць є найбільш трудомісткою, доцільно будувати обчислювальну схему таким чином, щоб кількість матриць, що звертаються, було мінімальним (для розглянутого завдання -двом). У цьому випадку можливі, дві такі схеми розв'язку, одна з яких будується в такий спосіб.

Множачи (П1-2в) на $A_{12}A_{22}^{-1}$ ліворуч, одержимо

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} + A_{12}B_{21} = 0,$$

звідки

$$A_{12}B_{21} = -A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

Підставимо отримане вираз в (П1-2а):

$$A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = 1$$

звідки

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}.$$

Отриманий результат підставимо в (П-2в) і розв'язний це рівняння відносно B_{21} :

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Множачи (П1 -2г) ліворуч $A_{12}A_{22}^{-1}$ на одержимо

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} + A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1}$$

Або

$$A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}A_{21}B_{12}.$$

Отриманий результат підставимо в (П1-2б):

$$A_{11}B_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} = -A_{12}A_{22}^{-1},$$

звідки

$$B_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}.$$

Підставивши B_{12} в (П1-2г), визначимо

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}.$$

Таким чином, блоки матриці B обчислюються відповідно до виражень:

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}; \quad (\text{П1-3а})$$

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}; \quad (\text{П1-3б})$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}; \quad (\text{П1-3в})$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}; \quad (\text{П1-3г})$$

Розрахунки по цих виразх вимагає обігу двох матриць: A_{22} і $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$.

Аналогічно можна побудувати й другу схему визначення блоків матриці B , яка базується на обігу матриць A_{11} і $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Згідно із цією схемою

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}; \quad (\text{П1-4а})$$

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}; \quad (\text{П1-4б})$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}; \quad (\text{П1-4в})$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}; \quad (\text{П1-4г})$$

Власні значення матриці. *Власними значеннями* квадратної матриці A порядку n називається коріння характеристичного рівняння

$$|A - \lambda \cdot 1| = 0,$$

т. е. рівняння

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Власні значення матриці з речовинними елементами можуть бути або речовинними, або комплексно-сполученими числами.

Квадратична форма й визначена-позитивно-певна матриця. *Квадратична форма* - це однорідний поліном другого ступеня від декількох змінних:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Тут A - симетрична квадратна матриця порядку n , називана *матрицею квадратичної форми*; x -*стовпець* того ж порядку.

Квадратична форма називається *речовинної*, якщо елементи A - A -речовинні числа.

Речовинна квадратична форма називається певною-певній-визначеної-позитивно-певної, якщо вона позитивна при будь-яких значеннях $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, не все з яких дорівнюють нулю. Речовинна симетрична матриця називається *певною-певній-визначеної-позитивно-певної*, якщо відповідна їй квадратична форма позитивно визначена. Прикладом визначеної-позитивно-певної матриці може служити діагональна матриця з позитивними елементами (зокрема, одинична матриця). Якщо *Визначена-g-позитивно-певна* матриця, а A -*Довільна* квадратна неособлива матриця того ж порядку, що й G , то матриця - $A_i G A$ також визначена-позитивно-певна. Зокрема, при $G=1$, одержуємо, що матриця $A_i 1 A = A_i A$ — визначена-позитивно-певна.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Хоменко О.В. Математичні задачі енергетики. Моделювання і аналіз усталених режимів роботи електричних систем [Електронне видання]: навч. посіб. / О.В. Хоменко. - К.: НТУУ «КПІ», 2016. - 109 с. - Бібліогр.: с. 109.
2. Демидович Б.П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966.
3. Справочник по проектированию ^лектро^нергетических систем. Под ред. С.С. Рокотяна и И. М. Шапиро. Изд.3-е, перераб. и доп. М., «Энергия», 1987.
4. Идельчик В.И. Расчеты и оптимизация режимов ^лектрических сетей и систем. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 288 с.
5. Электрические системы. Режимы работы ^лектрических систем и сетей. Под. Ред. В. А. Веникова. Учебн. пособие для ^лектро^нерг. вузов. М., «Высш. школа», 1975.
6. Электрические системы. Математические задачи ^лектро^нергетики: Учебник для студентов вузов / Под ред. В. А. Веникова - М.: Высш. школа, 1981. - 288 с.
7. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики. - Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті. 1982. - 380 с.
8. Романюк Ю.Ф. Електричні системи та мережі: Навч. посіб. - К.: Знання, 2007. - 292 с.
9. Миньков С.Л., Миньков Л.Л. Основы численных методов. - Томск: Издательство научно-технической литературы, 2005.
10. Сулейманов В.М. Електричні мережі та системи: підручн. [Текст] / В.М. Сулейманов, Т.Л. Кацадзе. - К.: НТУУ «КПІ», 2008. - 456 с.

11. *Задачин В.М.* Чисельні методи: навчальний посібник / В.М. Задачин, І.Г. Конюшенко. - Х.: Вид. ХНЕУ ім. Кузнеця, 2014. - 180 с.
12. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. Львів, Вища школа, 1989.- 464 с.
13. Электрические системы: Математические задачи электроэнергетики: Учебник / Под ред. В.А.Веникова.- М.: Высш. шк., 1981. -288 с.
14. Демирчан К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высш. шк., 1988.- 335 с.
15. Перхач В.С. Теоретична електротехніка.- К.: Вища школа, 1992-439 с.
16. Сэнди К. Современные методы анализа электрических систем.- М.: Энергия, 1979.- 360 с.
17. Брамеллер А., Аллан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы: анализ электроэнергетических систем. / Пер. с англ. В.А.Строева/- М.: Энергия, 1979.- 192 с.
18. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики).-М.: Высш. шк., 1984.-439 с.
19. Жуков Л.А., Стратан И.П. Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем.- М.: Энергия, 1979.- 416 с.
20. Винославский В.Н., Тарадай В.И., Бутц У., Хайнце Д. Автоматизация проектирования систем электроснабжения.- Киев-Лейпциг, 1988.- 208 с.
21. Ягуп В.Г. Автоматизированный расчет тиристорных схем. -Харьков: Вища школа, 1986.- 160 с.
22. Щербачев О.В. и др. Применение цифровых вычислительных машин в электроэнергетике: Уч. пособие.- Л.: Энергия, 1980.-240 с.
23. Математичні задачі електроенергетики: робоча програма, методичні вказівки до вивчення дисципліни та контрольні завдання (для студентів

заочної форми навчання спец. 7.090603). Укл. Ягуп В.Г. - Харків: ХНАМГ, 2006. - 27 с.

24. Применение матричных методов для расчета и анализа режимов электрических сетей: Методическое пособие по выполнению курсовой работы и изучению дисциплины «Математические задачи энергетики» для студентов специальностей 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети», «Автоматизация и управление энергетическими процессами», специализация «Диспетчерское управление в электроэнергетических системах и сетях» / Т.А. Шиманская; Под редакцией В.Т. Федина. – Мн.: БНТУ, 2008. – 112 с.
25. Электрические системы, т.1. Математические задачи энергетики. Под ред. В. А. Веникова. Учебное пособие для электроэнергетических вузов. М., “Высшая школа”, 1981, 336 с.
26. Идельчик В. И. Электрические системы и сети. М., Энергоатомиздат, 1989
27. Веников В. А. Математические задачи электроэнергетики. М., “Высшая школа”, 1981
28. Расчет и анализ режимов работы сетей. Под ред. В. А. Веникова, Москва, Энергия, 1974
29. Передача и распределение электрической энергии: учеб. пособие / А.А. Герасименко, В.Т. Федин. – Красноярск: ИПЦ КГТУ; Минск: БНТУ, 2006.- 808 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
РОЗДІЛ 1. СХЕМА ЗАМІЩЕННЯ І РОЗРАХУНКОВА СХЕМА ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕМЕНТІВ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ	5
РОЗДІЛ 2. ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ І ВЗАЄМНИХ ПРОВІДНОСТЕЙ ВУЗЛІВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ.СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ У ФОРМІ БАЛАНСУ СТРУМІВ І БАЛАНСУ ПОТУЖНОСТЕЙ	16
РОЗДІЛ 3. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МАТРИЦЯ ПРОВІДНОСТЕЙ.	25
РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ.МЕТОД ГАУСА	37
РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ	50
РОЗДІЛ 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ	62
РОЗДІЛ 7. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА.	73
РОЗДІЛ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ	97
РОЗДІЛ 9. РОБОЧА ПРОГРАМА ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕМ ДИСЦИПЛІНИ	105

РОЗДІЛ 10. РІВНЯННЯ РЕЖИМІВ, ЩО ВСТАНОВИЛИСЯ, ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ	122
РОЗДІЛ 11. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ, ЩО ВСТАНОВИЛИСЯ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ	160
РОЗДІЛ 12. ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ	188
РОЗДІЛ 13. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРАКТИЧНИХ РОБІТ	233
ДОДАТКИ	256
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	264