МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ГЕОДАНИХ

Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт з дисципліни

Київ - 2025

УДК 528.4

Підготовлено відповідно до програми «Математичне опрацювання та аналіз геоданих», затвердженою для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій». Наведено програмний матеріал з курсу «Математичне опрацювання та аналіз геоданих», що вивчається студентами факультету землевпорядкування на другому курсі навчання, зокрема: математична обробка результатів рівноточних та нерівноточних вимірювань однієї величини, вирівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом, вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом, вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду корелатним способом, строге вирівнювання полігонометричного ходу 1-го розряду корелатним способом.

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету землевпорядкування НУБіП України (протокол №2 від 17 квітня 2025 року)

Укладачі: *доц.* ***Кривов'яз Є.В.****, доц* ***Жук О.П.***

Рецензенти: професор кафедри геодезії та картографії НУБіП України, д.е.н. Опенько І.А.
доцент кафедри вищої та прикладної математики НУБіП України, к.ф.-м.н. Арнаута Н.В.

Навчальне видання

Методичні рекомендації з дисципліни "Математичне опрацювання та аналіз геоданих" для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій»

Укладачі: ***Кривов'яз Євгенія Вікторівна,***
Жук Олексій Павлович
Відповідальний за випуск доц. **Є.В. Кривов'яз**

Підписано до друку _______ Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Ум. друк. арк. 4,5. Обл. вид. арк. 4,8
Тираж 100 Зам. №32825
ЦП «Компринт»

Змістовний модуль 1
Тема 1. «Елементи теорії похибок вимірювань»
Математична обробка результатів рівноточних та нерівноточних вимірювань однієї величини (6 год.)

Лабораторне заняття 1. Обчислення характеристик точності (СКП) визначених геодезичних величин. (2 год.)

Методичні вказівки

Точність геодезичних вимірів характеризують абсолютним та відносним значенням похибок. До абсолютних відносять похибки істинні Δ, середні квадратичні m та граничні Δгр.

Відносною похибкою Ɛm називають відношення відповідної абсолютної похибки до значення вимірюваної величини χ

$$\varepsilon_m = \frac{m}{\chi} = \frac{1}{\chi},$$

Приклади опрацювання задач

1. Виміряні дві лінії теодолітного ходу: перша довжиною *211,3м* із середньою квадратичною похибкою *5,2см*, друга – *354,2м* із похибкою *6,0см*. З якою точністю будуть одержані відстані, що дорівнюють сумі та різниці цих ліній, в абсолютному та відносному вигляді?

Вихідні функції для вирішення задачі:

$$f_1 = L_1 + L_2 = 211{,}3 + 354{,}2 = 565{,}5м$$

$$f_2 = L_2 - L_1 = 354{,}2 - 211{,}3 = 142{,}9м$$

СКП функції знаходим за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

$$m_{f_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial L_1}\right)^2 \cdot m_{L_1}^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial L_2}\right)^2 \cdot m_{L_2}^2} = \sqrt{1^2 \cdot 5,2^2 + 1^2 \cdot 6,0^2} = 7{,}9см$$

$$m_{f_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial L_2}\right)^2 \cdot m_{L_2}^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial L_1}\right)^2 \cdot m_{L_1}^2} = \sqrt{1^2 \cdot 6,0^2 + (-1)^2 \cdot 5,2^2} = 7{,}9см$$

Відносні середні квадратичні похибки визначаються за формулою:

$$\varepsilon_m = \frac{m}{\chi} = \frac{1}{\chi},$$

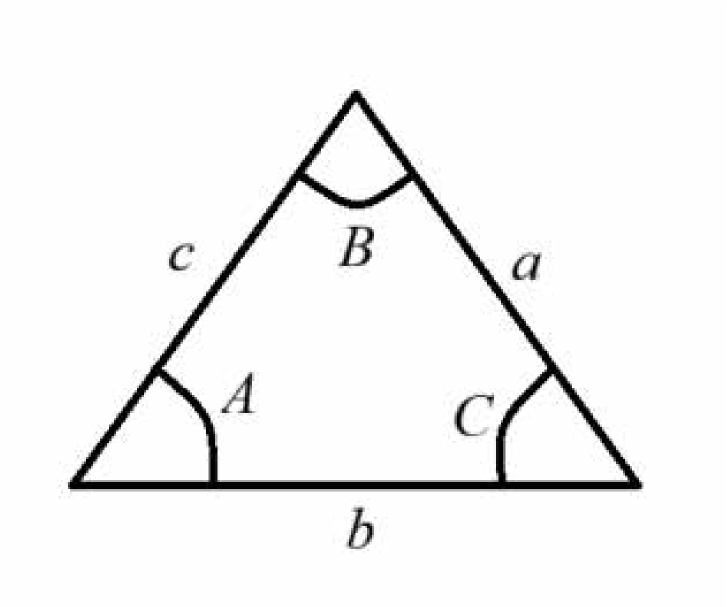
тоді

$$\varepsilon_{f_1} = \frac{m_{f_1}}{f_1} = \frac{7{,}9}{565{,}5} = \frac{1}{7158}$$

$$\varepsilon_{f2} = \frac{m_{f_2}}{f_2} = \frac{7{,}9}{142{,}9} = \frac{1}{1809}$$

2. У трикутнику *ABC* виміряні кути теодолітом 2Т30П та сторона b із середньою квадратичною похибкою $m_b = \pm 5$*см*. Обчислити інші сторони цього трикутника та його площу, а також визначити їх середні квадратичні похибки:

$$A = 36°24'$$
$$B = 54°52'$$
$$C = 98°46'$$
$$b = 254{,}30\text{м}.$$



Вихідні функції для вирішення задачі:

-для знаходження інших сторін застосуємо Теорему Синусів

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

тоді

$$a = \frac{bSinA}{SinB} = \frac{254{,}30Sin36°24'}{Sin54°52'} = 184{,}52\text{м}$$

$$c = \frac{bSinC}{SinB} = \frac{254{,}30Sin98°46'}{Sin54°52'} = 307{,}32\text{м}$$

-для знаходження площі застосуємо наступну формулу:

$$S = \frac{1}{2}abSinC = \frac{1}{2}184{,}52 \cdot 254{,}30Sin98°46' = 23187{,}62\text{м}^2$$

СКП функції знаходим за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

-формули СКП сторін

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{SinA}{SinB}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{bCosA}{SinB}\right)^2 \cdot \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(\frac{-bSinACosB}{Sin^2B}\right)^2 \cdot \frac{m_B^2}{\rho^2}}$$

$$m_c = \sqrt{\left(\frac{SinC}{SinB}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{bCosC}{SinB}\right)^2 \cdot \frac{m_C^2}{\rho^2} + \left(\frac{-bSinCCosB}{Sin^2B}\right)^2 \cdot \frac{m_B^2}{\rho^2}}$$

-формула СКП площі

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{1}{2}bSinC\right)^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{1}{2}aSinC\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{1}{2}abCosC\right)^2 \cdot \frac{m_C^2}{\rho^2}}$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо СКП шуканих величин

Індивідуальні завдання до виконання

1. Виміряні дві лінії теодолітного ходу: перша довжиною *211,3м* із середньою квадратичною похибкою *5,2см*, друга – *354,2м* із похибкою *6,0см*. З якою точністю будуть одержані відстані, що дорівнюють сумі та різниці цих ліній, в абсолютному та відносному вигляді? (При розрахунках у кожну лінію внести поправку за номер варіанта n, що дорівнює $+0{,}5\text{м} \cdot n$).

2. У трикутнику *ABC* виміряні кути теодолітом 2Т30П та сторона b із середньою квадратичною похибкою $m_b = \pm 5\text{см}$. Обчислити інші сторони цього трикутника та його площу, а також визначити їх середні квадратичні похибки:

$$A = 36°24'$$
$$B = 54°52' + 1' \cdot n$$
$$C = 98°46' - 1' \cdot n$$
$$b = 254{,}30\text{м}.$$

<u>Лабораторне заняття 2. Визначення заданих параметрів точності вимірювань (2 год.)</u>

Методичні вказівки

Приклади опрацювання задач

1. Знайти середні квадратичні похибки приростів координат, якщо довжина лінії $s = 264{,}12\text{м} \pm 0{,}04\text{м}$, а дирекційний кут $\alpha = 88°24' \pm 0{,}5'$.

Вихідні функції для вирішення задачі:

$$\Delta X = S \cdot Cos\alpha = 264{,}12 \cdot Cos88°24' = 7{,}37\text{м}$$

$$\Delta Y = S \cdot Sin\alpha = 264{,}12 \cdot Sin88°24' = 264{,}02\text{м}$$

СКП функції знаходимо за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

$$m_{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta X}{\partial S}\right)^2 \cdot m_S^2 \;\; + \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot m_\alpha^2} = \sqrt{Cos\alpha^2 \cdot m_S^2 \;\; + (S(-Sin\alpha))^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}}$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial S}\right)^2 \cdot m_S^2 \;\; + \left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot m_\alpha^2} = \sqrt{Sin\alpha^2 \cdot m_S^2 \;\; + (SCos\alpha)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}}$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо СКП шуканих величин

2. Обчислити перевищення між точками та його середню квадратичну похибку, якщо відстань між точками $s = 187{,}63 \pm 0{,}20$м, кут нахилу дорівнює $\nu = -8°26' \pm 0,5'$, висота інструменту $\text{i} = 1{,}564 \pm 0{,}005$м, висота наведення $\upsilon = 2{,}980 \pm 0{,}005$*м*.

Вихідна функція для вирішення задачі:

$$h = S \cdot tg\nu + i - \upsilon = 187{,}63 \cdot tg - 8°26' + 1{,}564 - 2{,}980 = -29{,}23м$$

СКП функції знаходим за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

-формула СКП перевищення

$$m_h = \sqrt{tg\nu^2 \cdot m_s^2 + \left(\frac{S}{Cos^2\nu}\right)^2 \cdot \frac{m_\nu^2}{\rho^2} + 1^2 m_i^2 + 1^2 m_\upsilon^2}$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо СКП шуканих величин

Індивідуальні завдання до виконання

1. Знайти середні квадратичні похибки приростів координат, якщо довжина лінії $s = 264{,}12м(+0{,}05 \cdot n) \pm 0{,}04$м, а дирекційний кут $\alpha = 88°24'(+2° \cdot n) \pm 0,5'$.
2. Обчислити перевищення між точками та його середню квадратичну похибку, якщо відстань між точками $s = 187{,}63(+0{,}5м \cdot n) \pm 0{,}20$м, кут нахилу дорівнює $\nu = -8°26'(+2' \cdot n) \pm 0,5'$, висота інструменту $\text{i} = 1{,}564 \pm 0{,}005$м, висота наведення $\upsilon = 2{,}980 \pm 0{,}005$*м*.

<u>Лабораторне заняття 3. Опрацювання ряду рівноточних і нерівноточних вимірів (2 год.)</u>

Методичні вказівки

Приклади опрацювання задач

1. З якою точністю повинна бути виміряна похила відстань $D \approx 250$ та кут нахилу $\nu \approx 5°$, щоб горизонтальне прокладення було визначено з середньою квадратичною похибкою $m_s = \pm 0{,}05м$, враховуючи рівність впливів похибок цих величин?

Вихідні функції для вирішення задачі:

$$S = D \cdot Cos^2\nu = 250 \cdot Cos^2 5° = 249м$$

СКП функції знаходим за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial D}\right)^2 \cdot m_D^2 \;\; + \left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)^2 \cdot m_\nu^2}$$

$$= \sqrt{(Cos\nu^2)^2 \cdot m_D^2 \;\; + (D(-Sin\nu) \cdot 2Cos\nu)^2 \cdot m_\nu^2}$$

Враховуючи, згідно умови задачі, рівність впливів похибок

$$0{,}5m_s = \sqrt{(Cos\nu^2)^2 \cdot m_D^2}$$

$$0{,}5m_s = \sqrt{(-2DSin\nu Cos\nu)^2 \cdot m_\nu^2}$$

Звідси

$$m_D \;\; = \frac{\sqrt{0.5} \cdot m_s}{Cos\nu^2}$$

$$m_\nu \;\; = \frac{\sqrt{0.5} \cdot m_s}{-2DSin\nu Cos\nu}$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо СКП шуканих величин

2. З якою точністю повинна бути виміряна відстань $s \approx 150$м та кут нахилу $\nu \approx -8°$, якщо перевищення необхідно одержати з точністю $m_h = 2{,}0см$? При розрахунках застосувати принцип рівного впливу похибок.

Вихідна функція для вирішення задачі:

$$h = S \cdot tg\nu = 150 \cdot tg - 8° = -21м$$

СКП функції знаходим за формулою:

$$m_u^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2\right]$$

тоді

-формула СКП перевищення

$$m_h = \sqrt{tg\nu^2 \cdot m_s^2 + \left(\frac{S}{Cos^2\nu}\right)^2 \cdot m_\nu^2}$$

Враховуючи, згідно умови задачі, рівність впливів похибок

$$0{,}5m_h = \sqrt{tg\nu^2 \cdot m_s^2}$$

$$0{,}5m_h = \sqrt{\left(\frac{S}{Cos^2\nu}\right)^2 \cdot m_\nu^2}$$

Звідси

$$m_s = \frac{\sqrt{0.5} \cdot m_h}{tg\nu}$$

$$m_\nu = \frac{\sqrt{0.5} \cdot m_h}{\frac{S}{Cos^2\nu}}$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо СКП шуканих величин

Індивідуальні завдання до виконання

1. З якою точністю повинна бути виміряна похила відстань $D \approx 250 + 1\text{м} \cdot n$ та кут нахилу $\nu \approx 5°$, щоб горизонтальне прокладення було визначено з середньою квадратичною похибкою $m_s = \pm 0{,}05м$, враховуючи рівність впливів похибок цих величин?

2. З якою точністю повинна бути виміряна відстань $s \approx 150\text{м}$ та кут нахилу $\nu \approx -8°$, якщо перевищення необхідно одержати з точністю $m_h = 2{,}0см(+0{,}05см \cdot n)$? При розрахунках застосувати принцип рівного впливу похибок.

Тема 2. «Вирівнювальні обчислення в геодезичних мереж. Параметричний спосіб вирівнювання»

Вирівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом (6 год.)

<u>Лабораторне заняття 4. Визначення коефіцієнтів і вільних членів рівнянь поправок (2 год.)</u>

Методичні рекомендації

Сутність параметричного способу зрівнювання зводиться до безпосереднього одержання зрівняних невідомих. В якості необхідних невідомих (*параметрів*) обирають декілька величин, не пов'язаних між собою математичними співвідношеннями. Причому параметрами можуть бути як виміряні величини, так і не вимірювані.

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Виконати зрівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом та обчислити середню квадратичну похибку кута *AOD*.

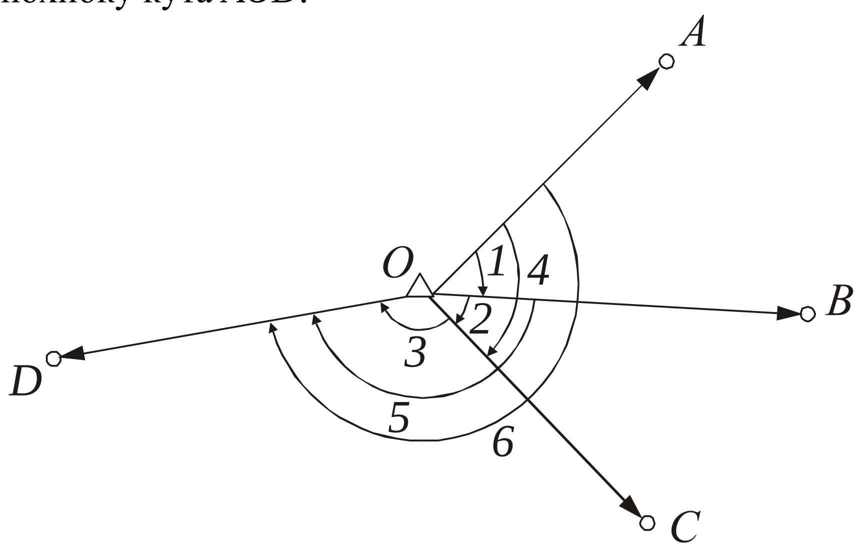


Схема розміщення кутів до задачі

***Таблиця 1*.**

Вихідні дані до задачі

№ кута	Назва кута	Виміряні значення x_i	Невідомі $f(t_1, t_2, t_3)$
1	*AOB*	$38°31'16''$	t_1
2	*BOC*	$46°07'30''$	t_2
3	*COD*	$77°43'47''$	t_3
4	*AOC*	$84°38'44''$	$t_1 + t_2$
5	*BOD*	$123°51'20''$	$t_2 + t_3$
6	*AOD*	$162°22'30''$	$t_1 + t_2 + t_3$

Математична сутність задачі

Параметри слід обирати так, щоб всі вимірювані величини x_i можна було виразити як їх функції. У даному прикладі параметрами будуть перший, другий та третій кути. Тоді всі інші кути будуть являти собою суми незалежних змінних.

Значення кута *AOD* може бути визначено як функція виміряних кутів:

$$AOD = 360° - t_1 - t_2 - t_3.$$

Складання рівнянь поправок

Вирівнювання параметричним способом виконують за умови мінімуму суми квадратів поправок безпосередніх вимірювань, тому ці поправки виражають через наближені значення параметрів та через значення виміряних величин, складаючи таким чином параметричні рівняння поправок:

$$\upsilon_1 = t_1 - x_1;$$

$$\upsilon_2 = t_2 - x_2;$$

$$\upsilon_3 = t_3 - x_3;$$

$$\upsilon_4 = (t_1 + t_2) - x_4;$$

$$\upsilon_5 = (t_2 + t_3) - x_5;$$

$$\upsilon_6 = (t_1 + t_2 + t_3) - x_6;$$

За наближені значення параметрів у даній задачі візьмемо *виміряні* значення кутів *1, 2, 3*, тоді невідомі можна виразити через наближені значення та поправки до них:

$$t_1 = t_1^0 + \delta t_1 = 38°31'16'' + \delta t_1;$$

$$t_2 = t_2^0 + \delta t_2 = 46°07'30'' + \delta t_2;$$

$$t_3 = t_3^0 + \delta t_3 = 77°43'47'' + \delta t_3.$$

Прийнявши до уваги формули та значення виміряних величин перейдемо через рівняння до системи лінійних рівнянь поправок:

$$\upsilon_i = a_i\delta t_1 + b_i\delta t_2 + c_i\delta t_3 + l_i,$$

де $\frac{\partial f_i}{\partial t_1} = a_i, \frac{\partial f_i}{\partial t_2} = b_i, \frac{\partial f_i}{\partial t_3} = c_i$ – часткові похідні відповідної функції параметрів; l_i – вільний член, що визначається як $f_i(t_1^0, t_2^0, t_3^0) - x_i = l_i$. Тоді:

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon_1 &= +\delta t_1 + 0 + 0 + 0;\\
\upsilon_2 &= 0 + \delta t_2 + 0 + 0;\\
\upsilon_3 &= 0 + 0 + \delta t_3 + 0;\\
\upsilon_4 &= +\delta t_1 + \delta t_2 + 0 + 2'';\\
\upsilon_5 &= 0 + \delta t_2 + \delta t_3 + (-3'');\\
\upsilon_6 &= +\delta t_1 + \delta t_2 + \delta t_3 + 3''.
\end{aligned}\right\}$$

За цими рівняннями складають таблицю коефіцієнтів рівнянь поправок (табл. 2). У даній таблиці в колонки 2 – 5 виписують коефіцієнти та вільні члени рівнянь поправок. При складанні таблиці виконують контроль обчислень за *методом сум*. Для цього по кожному рядку знаходять суми коефіцієнтів та вільних членів s_i. Далі знаходять суми по стовпцях та перевіряють правильність обчислень:

$$[a] + [b] + [c] + [l] = [s].$$

Таблиця 2.

Коефіцієнти рівнянь поправок

№ рівняння	$a_i(t_1)$	$b_i(t_2)$	$c_i(t_3)$	l_i	s_i	v_i	v^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1	0	0	0	+1		
2	0	+1	0	0	+1		
3	0	0	+1	0	+1		
4	+1	+1	0	+2	+4		
5	0	+1	+1	-3	-1		
6	+1	+1	+1	+3	+6		
Сума	+3	+4	+3	+2	+12		
Невідомі							
Контроль	$[av] =$		$[bv] =$		$[cv] =$		

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом та обчислити середню квадратичну похибку кута *AOE*.

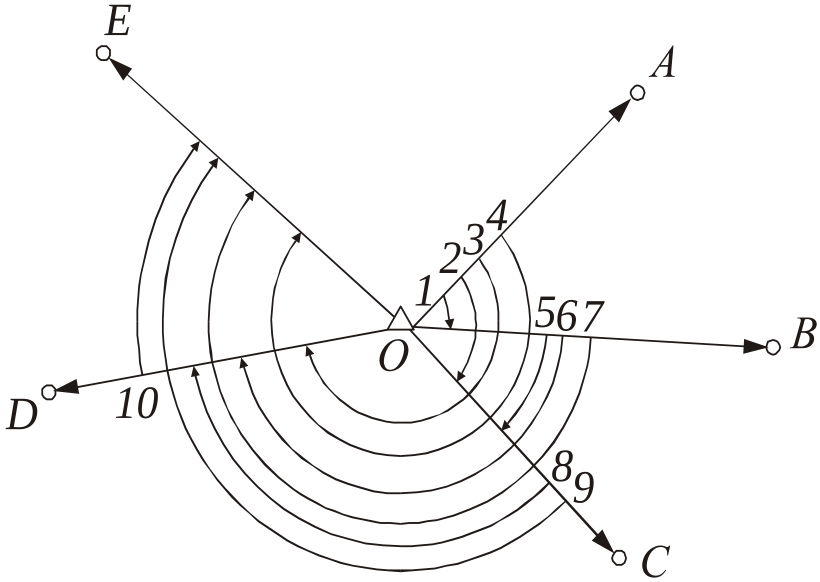


Схема розміщення кутів

Для даної задачі вихідні дані слід вибирати за таким правилом: за *другою цифрою* заданого викладачем варіанта вибирають значення кутів у відповідному стовпці; із цих даних відкидають кут, якій відповідає *першій цифрі* заданого варіанта (крім *1, 5, 8, 0*) (табл. 3).

Таблиця 3.

Вихідні дані до задачі

№ кутів	Кути	Значення кутів (без секунд)	Варіанти									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
			Секунди кутів									
1	*AOB*	60°53′	18″	32″	26″	52″	31″	10″	20″	32″	27″	34″
2	*AOC*	136°21′	54″	49″	52″	50″	37″	43″	30″	51″	54″	53″
3	*AOD*	203°10′	29″	35″	27″	46″	33″	31″	17″	40″	35″	32″
4	*AOE*	263°15′	40″	51″	51″	48″	33″	44″	16″	53″	52″	51″
5	*BOC*	75°28′	37″	18″	24″	01″	05″	33″	11″	18″	28″	17″
6	*BOD*	142°17′	11″	02″	00″	00″	04″	22″	03″	02″	08″	01″
7	*BOE*	202°22′	19″	18″	21″	01″	10″	30″	05″	14″	26″	20″
8	*COD*	66°48′	37″	45″	33″	58″	57″	49″	50″	45″	38″	42″
9	*COE*	126°53′	45″	59″	55″	59″	59″	56″	51″	56″	58″	58″
10	*DOE*	60°05′	11″	18″	23″	04″	03″	09″	01″	12″	20″	20″

Лабораторне заняття 5. Складання та розв’язання системи нормальних рівнянь (2 год.)

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Виконати зрівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом, та обчислити середню квадратичну похибку кута AOD.

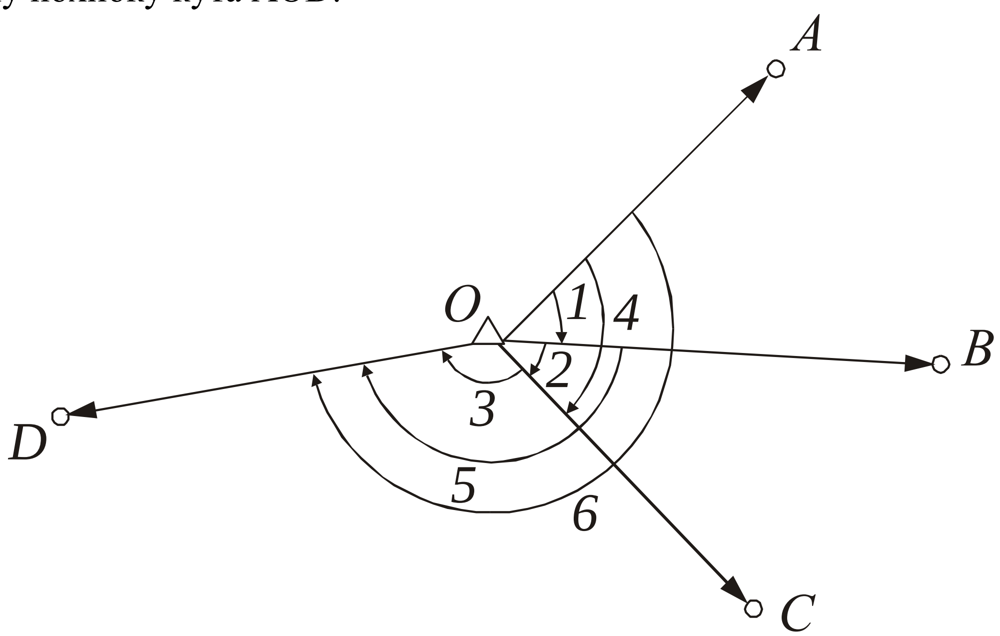


Схема розміщення кутів

Складання системи нормальних рівнянь

Від системи лінійних рівнянь поправок переходять до системи нормальних рівнянь. Коефіцієнти нормальних рівнянь одержують шляхом множення елементів одного стовпця на інший та наступного їх додавання. Результати обчислення заносять у таблицю 4:

Таблиця 4.

Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Позначення	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	f	Σ
$[a$	+3	+2	+1	+5	+11	-1	+5
$[b$	*+2*	+4	+2	+2	+10	-1	+7
$[c$	*+1*	*+2*	+3	0	+6	-1	+5
$[l$	*+5*	*+2*	*0*	+22	+29		+7
$[s$	*+11*	*+10*	*+6*	*+29*	+56	-3	+24

Результати обчислень контролюють за методом сум:

$$\left.\begin{aligned}
[aa] + [ab] + [ac] + [al] &= [as] \\
[ba] + [bb] + [bc] + [bl] &= [bs] \\
[ca] + [cb] + [cc] + [cl] &= [cs] \\
[la] + [lb] + [lc] + [ll] &= [ls] \\
[sa] + [sb] + [sc] + [sl] &= [ss]
\end{aligned}\right\}$$

У таблицю включена також оцінювана функція f та контрольні суми Σ, які визначають за формулою:

$$\Sigma_i = [aa] + [ab] + [ac] + f_i = [as] - [al] + f_i,$$

де f_i – часткові похідні функції: $f_1 = f_2 = f_3 = -1$.

Розв'язання системи нормальних рівнянь (*алгоритм Гаусса*)

У геодезичній практиці для рішення системи нормальних рівнянь широко застосовується спосіб Гаусса, який є дуже ефективним. Перевагою цього способу є одноманітність послідовних дій, які супроводжуються постійним контролем обчислень і в кінці яких одержують вагу останнього невідомого. Сутність способу зводиться до послідовного виключення невідомих δt із системи нормальних рівнянь.

Вирішення системи нормальних рівнянь виконується за схемою, наведеною в таблиці 5. В цій схемі літера N з індексами позначає елементи нормального рівняння, літера E – елімінаційного рівняння. Нижній індекс порядковий номер елементу в системі рівнянь: перша цифра індексу відповідає номеру рівняння, друга – порядковий номер невідомого в цьому рівнянні; верхній індекс – номер системи, в якій виключена відповідна кількість невідомих (з індексом 0 позначається неперетворена система рівнянь).

Послідовність дій при вирішенні нормальних рівнянь способом Гаусса така:

1. У перший рядок таблиці (позначений N_{1i}^{0}) виписують коефіцієнти, вільний член та їх суму з першого нормального рівняння неперетвореної системи.

2. У другому рядку (елімінаційному), позначеному $E_{1\text{i}}$, записують значення, одержані в результаті ділення всіх значень рядка 1 на квадратичний коефіцієнт $-[aa]$.

3. У третій рядок (N_{2i}^{0}) виписують коефіцієнти другого нормального рівняння, починаючи з квадратичного. Ці значення записують у колонки під відповідними невідомими.

Таблиця 5.

Рішення нормальних рівнянь

№ рядків	Позначення рядків	δt_1	δt_2	δt_3	l	s	f	Σ
1	N_{1i}^{0}	+3	+2	+1	+5	+11	-1	+5
2	E_{1i}	-1	-0,67	-0,33	-1,67	-3,67	+0,33	-1,67
3	N_{2i}^{0}		+4	+2	+2	+10	-1	+7
4	$E_{12}N_{1i}^{0}$		-1,34	-0,67	-3,35	-7,37	0,67	-3,35
5	N_{2i}^{I}		+2,66	+1,33	-1,35	+2,63	-0,33	+3,65
6	E_{2_i}		-1	-0,50	+0,51	-0,99	+0,12	-1,37
7	N_{3i}^{0}			+3	0	+6	-1	+5
8	$E_{13}N_{1i}^{0}$			-0,33	-1,65	-3,63	+0,33	-1,65
9	$E_{23}N_{2i}^{I}$			-0,67	+0,68	-1,32	+0,17	-1,83
10	N_{3i}^{II}			**+2,00**	-0,97	+1,05	-0,50	+1,52
11	E_{3_i}			-1	+0,49	-0,53	+0,25	-0,76
12	N_{4i}^{0}				*+22*	*+29*		+7
13	$E_{14}N_{1i}^{0}$				*-8,35*	*-18,37*	+1,67	-8,35
14	$E_{24}N_{2i}^{I}$				*-0,69*	*+1,34*	-0,17	+1,86
15	$E_{34}N_{3i}^{II}$				*-0,48*	*+0,51*	-0,253	+0,74
16	N_{4i}^{III}				***12,48***	***12,48***	**1,25**	**1,25**
17								
18								
19								

4. У наступному рядку записують результати множення коефіцієнта першого елімінаційного рівняння E_{12}, розташованого під другим невідомим, на елементи рядка 1, починаючи з другого невідомого.

5. Додають по стовпцях величини в рядках 3 та 4. Таким чином, будуть знайдені елементи $[bb \cdot 1]$, $[bc \cdot 1]$, $[bl \cdot 1]$ та $[bs \cdot 1]$ алгоритму Гаусса, одержані шляхом виключення з рівнянь першого невідомого.

6. Другий елімінаційний рядок ($E_{2\text{i}}$) одержують розділивши елементи рядка N_{2i}^{I} на $-[bb \cdot 1]$.

7. У наступний рядок N_{3i}^{0} виписують коефіцієнти третього нормального рівняння, починаючи з квадратичного.

8. До восьмого рядка записують значення, одержані після множення коефіцієнта першого елімінаційного рівняння E_{13} на елементи першого нормального рівняння N_{1i}^{0}, починаючи з третього невідомого. У дев'ятому рядку виконують множення коефіцієнта другого елімінаційного рівняння E_{23} на елементи рівняння N_{2i}^{I}.

9. Знаходять елементи рядка N_{3i}^{II}, які одержують додаванням по стовпцям величин рядків 7, 8, 9 (N_{3i}^{0}, $E_{13}N_{1i}^{0}$, $E_{23}N_{2i}^{I}$).

10. У третьому елімінаційному рядку $E_{3\text{i}}$ виконують виключення третього невідомого із системи рівнянь. Для цього значення попереднього рядка ділять на $-[cc \cdot 2]$ (або, відповідно, на $-N_{33}^{II}$).

11. Оскільки в даному прикладі розглянуто три незалежних невідомих (t_1, t_2, t_3), то вже наступним кроком є визначення за аналогічною процедурою значень $[ll \cdot k]$ та $[ls \cdot k]$ (де k – кількість незалежних змінних). Ці значення використовують для контролю обчислення поправок, але зазвичай їх можна не використовувати.

У процесі *прямих* обчислень виконують контроль обчислень за формулами:

$$[aa] + [ab] + [ac] + [al] = [as];$$

$$[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + [bl \cdot 1] = [bs \cdot 1];$$

$$[cc \cdot 2] + [cl \cdot 2] = [cs \cdot 2];$$

$$[ll \cdot 3] = [ls \cdot 3] = [ss \cdot 3].$$

Для знаходження середньої квадратичної похибки та ваги функції, вигляд якої встановлений завчасно, використовують додаткові стовпці в схемі вирішення нормальних рівнянь (стовпці f та Σ). У них виконують ті ж обчислювальні процедури, що й у стовпці вільних членів *l*.

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом та обчислити середню квадратичну похибку кута *AOE*.

Для даної задачі вихідні дані слід вибирати за таким правилом: за *другою цифрою* заданого викладачем варіанта вибирають значення кутів у відповідному стовпці; із цих даних відкидають кут, якій відповідає *першій цифрі* заданого варіанта (крім *1*, *5*, *8*, *0*) (табл. 5).

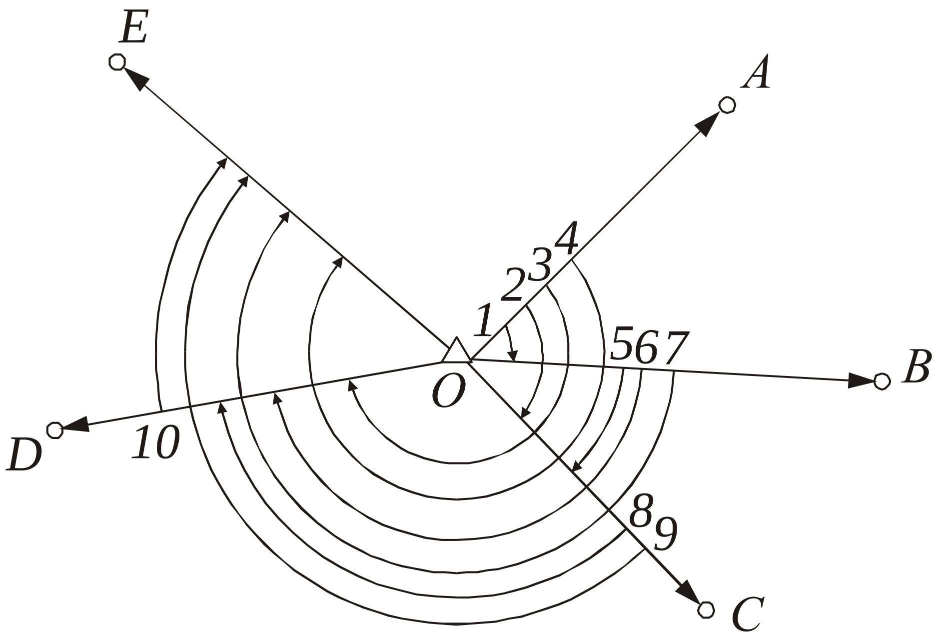


Схема розміщення кутів

Таблиця 5.

Вихідні дані до задачі

№ кутів	Кути	Значення кутів (без секунд)	Варіанти									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
			Секунди кутів									
1	*AOB*	60°53′	18″	32″	26″	52″	31″	10″	20″	32″	27″	34″
2	*AOC*	136°21′	54″	49″	52″	50″	37″	43″	30″	51″	54″	53″
3	*AOD*	203°10′	29″	35″	27″	46″	33″	31″	17″	40″	35″	32″
4	*AOE*	263°15′	40″	51″	51″	48″	33″	44″	16″	53″	52″	51″
5	*BOC*	75°28′	37″	18″	24″	01″	05″	33″	11″	18″	28″	17″
6	*BOD*	142°17′	11″	02″	00″	00″	04″	22″	03″	02″	08″	01″
7	*BOE*	202°22′	19″	18″	21″	01″	10″	30″	05″	14″	26″	20″
8	*COD*	66°48′	37″	45″	33″	58″	57″	49″	50″	45″	38″	42″
9	*COE*	126°53′	45″	59″	55″	59″	59″	56″	51″	56″	58″	58″
10	*DOE*	60°05′	11″	18″	23″	04″	03″	09″	01″	12″	20″	20″

<u>Лабораторне заняття 6. Визначення параметричних величин та оцінка точності одержаних результатів (2 год.)</u>

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

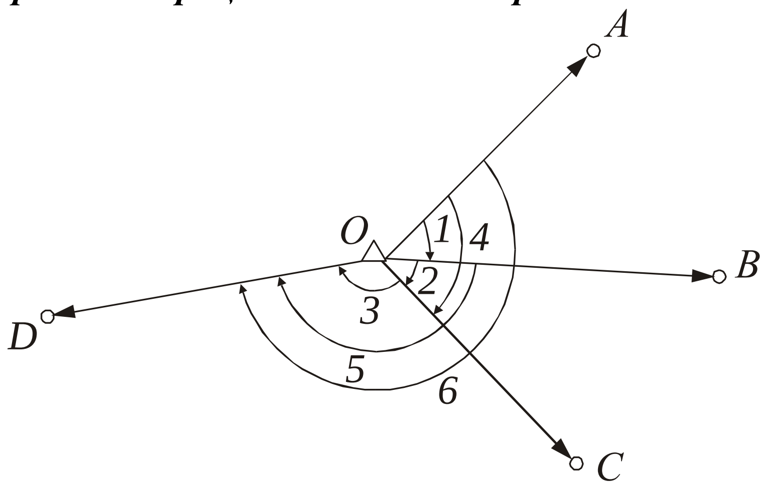


Схема розміщення кутів

Виконати зрівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом, та обчислити середню квадратичну похибку кута AOD.

Таблиця 6.

Рішення нормальних рівнянь

№ рядків	Позначення рядків	δt_1	δt_2	δt_3	l	s	f	Σ
1	N_{1i}^{0}	+3	+2	+1	+5	+11	-1	+5
2	E_{1i}	-1	-0,67	-0,33	-1,67	-3,67	+0,33	-1,67
3	N_{2i}^{0}		+4	+2	+2	+10	-1	+7
4	$E_{12}N_{1i}^{0}$		-1,34	-0,67	-3,35	-7,37	0,67	-3,35
5	N_{2i}^{I}		+2,66	+1,33	-1,35	+2,63	-0,33	+3,65
6	E_{2_i}		-1	-0,50	+0,51	-0,99	+0,12	-1,37
7	N_{3i}^{0}			+3	0	+6	-1	+5
8	$E_{13}N_{1i}^{0}$			-0,33	-1,65	-3,63	+0,33	-1,65
9	$E_{23}N_{2i}^{I}$			-0,67	+0,68	-1,32	+0,17	-1,83
10	N_{3i}^{II}			**+2,00**	-0,97	+1,05	-0,50	+1,52
11	E_{3_i}			-1	+0,49	-0,53	+0,25	-0,76
12	N_{4i}^{0}				*+22*	*+29*		+7
13	$E_{14}N_{1i}^{0}$				*-8,35*	*-18,37*	+1,67	-8,35
14	$E_{24}N_{2i}^{I}$				*-0,69*	*+1,34*	-0,17	+1,86
15	$E_{34}N_{3i}^{II}$				*-0,48*	*+0,51*	-0,253	+0,74
16	N_{4i}^{III}				***12,48***	***12,48***	**1,25**	**1,25**
17				**+0,49**	+0,49			
18			**+0,26**	-0,25	+0,51			
19		**-2,00**	-0,17	-0,16	-1,67			

Послідовність одержання невідомих із оберненого ходу вирішення задачі така (табл. 6):

1. Із схеми прямого ходу обирається значення на перетині стовпця вільних членів l_i та останнього елімінаційного рядка E_{ki} (у даному прикладі E_{34}). Це значення переписують окремо у нижньому рядку стовпця вільних членів.

2. Під цим значенням у стовпці вільних членів записують також в окремі рядки значення з попередніх елімінаційних рядків у зворотному порядку (зверху донизу: E_{34}, E_{24}, E_{14}).

3. Значення останнього невідомого $\delta t_3 = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$ знаходять як суму значень по рядку 17, в якому на цей час міститься тільки одне значення. Цю суму записують у даному рядку у стовпці відповідного невідомого.

4. Перемножують значення останнього невідомого (δt_3) на коефіцієнти елімінаційних рядків його стовпця у зворотному порядку (E_{23}, E_{13}) та записують ці значення у нижні рядки.

5. Виконуючи додавання одержаних значень по рядку 18, одержують наступну невідому δt_2, яку записують у цьому ж рядку відповідного стовпця.

6. Значення цієї невідомої перемножують на коефіцієнти елімінаційних рядків аналогічно порядку і результати записують у нижні рядки. Інші невідомі знаходять, дотримуючись розглянутого оберненого ходу рішення задачі. Їх значення записують на перетині відповідних рядків та стовпців.

Правильність рішення нормальних рівнянь та визначення невідомих перевіряють підстановкою їх значень у сумарне рівняння:

$$([aa] + [ab] + [ac])\delta t_1 + ([ba] + [bb] + [bc])\delta t_2 +$$

$$+([ca] + [cb] + [cc])\delta t_3 + ([la] + [lb] + [lc]) = 0.$$

Таблиця 7.

Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

№ рівняння	$a_i(t_1)$	$b_i(t_2)$	$c_i(t_3)$	l_i	s_i	v_i	v^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1	0	0	0	+1	-2,0	4,00
2	0	+1	0	0	+1	+0,3	0,09
3	0	0	+1	0	+1	+0,5	0,25
4	+1	+1	0	+2	+4	+0,3	0,09
5	0	+1	+1	-3	-1	-2,2	4,84
6	+1	+1	+1	+3	+6	+1,8	3,24
Сума	+3	+4	+3	+2	+12	-1,3	**12,51**
Невідомі	**-2,0**	**+0,3**	**+0,5**				
Контроль	$[av] = +0{,}1$		$[bv] = +0{,}2$		$[cv] = +0{,}1$		

Після визначення та контролю невідомих обчислюють поправки v_i за формулами, які записують у відповідний стовпець таблиці.

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= +\delta t_1 + 0 + 0 + 0;\\
v_2 &= 0 + \delta t_2 + 0 + 0;\\
v_3 &= 0 + 0 + \delta t_3 + 0;\\
v_4 &= +\delta t_1 + \delta t_2 + 0 + 2'';\\
v_5 &= 0 + \delta t_2 + \delta t_3 + (-3'');\\
v_6 &= +\delta t_1 + \delta t_2 + \delta t_3 + 3''.
\end{aligned}\right\}$$

Обчислення поправок контролюють за формулою:

$$[av] = [bv] = [cv] = 0.$$

Оцінка точності

Для оцінки точності визначають значення v^2 та їх суму, що можна перевірити за формулою:

$$[v^2] = [ll \cdot k] = [ls \cdot k],$$

де значення $[ll \cdot k]$, $[ls \cdot k]$ визначені в таблиці рішення нормальних рівнянь.

При оцінці точності визначають:

1. Середню квадратичну похибку вимірювання:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{12{,}51}{6-3}} = 2{,}0''$$

де n – кількість рівнянь поправок; k – кількість невідомих (параметрів).

2. Похибку самої похибки:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-k)}} = \frac{2{,}0}{\sqrt{2(6-3)}} = 0{,}8''$$

3. Вагу останнього невідомого (визначена в таблиці рішення нормальних рівнянь):

$$p_{\delta t_3} = [cc \cdot (k-1)] = 2{,}0$$

4. Середні квадратичні похибки невідомих:

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{p_t}} = \frac{2{,}0}{\sqrt{2{,}0}} = 1{,}4''$$

5. Для визначення середньої квадратичної похибки та ваги однієї або декількох функцій можна використати додатковий стовпець f у схемі рішення нормальних рівнянь. Вагу та середню квадратичну похибку функції невідомих визначають за формулами:

$$-\frac{1}{p_F} = \frac{f_1 f_1}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]}$$

де $$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1,$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$$

Вага функції f визначається у додатковому стовпці таблиці рішення нормальних рівнянь:

$$\frac{1}{p_f} = +1{,}25$$

Середня квадратична похибка функції дорівнює:

$$m_f = m\sqrt{\frac{1}{p_f}} = 2{,}0\sqrt{1{,}25} = 2{,}2''$$

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання кутів, виміряних у всіх комбінаціях на одному геодезичному пункті, параметричним способом та обчислити середню квадратичну похибку кута *AOE*.

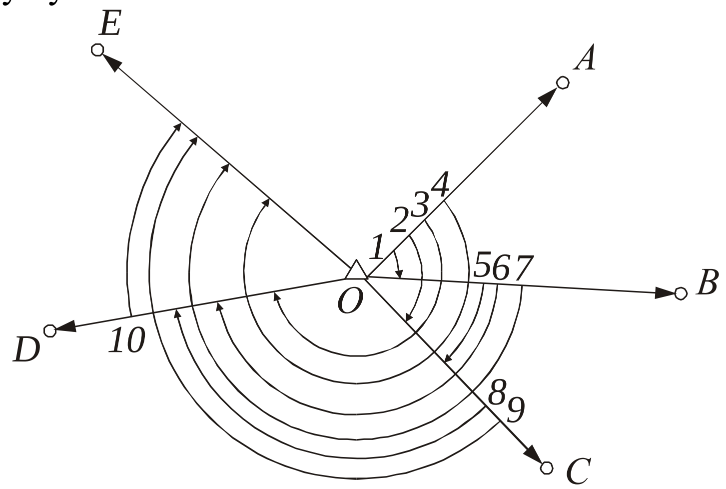


Схема розміщення кутів

Вихідні дані до задачі

№ кутів	Кути	Значення кутів (без секунд)	Варіанти									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
			Секунди кутів									
1	*AOB*	60°53′	18″	32″	26″	52″	31″	10″	20″	32″	27″	34″
2	*AOC*	136°21′	54″	49″	52″	50″	37″	43″	30″	51″	54″	53″
3	*AOD*	203°10′	29″	35″	27″	46″	33″	31″	17″	40″	35″	32″
4	*AOE*	263°15′	40″	51″	51″	48″	33″	44″	16″	53″	52″	51″
5	*BOC*	75°28′	37″	18″	24″	01″	05″	33″	11″	18″	28″	17″
6	*BOD*	142°17′	11″	02″	00″	00″	04″	22″	03″	02″	08″	01″
7	*BOE*	202°22′	19″	18″	21″	01″	10″	30″	05″	14″	26″	20″
8	*COD*	66°48′	37″	45″	33″	58″	57″	49″	50″	45″	38″	42″
9	*COE*	126°53′	45″	59″	55″	59″	59″	56″	51″	56″	58″	58″
10	*DOE*	60°05′	11″	18″	23″	04″	03″	09″	01″	12″	20″	20″

Для даної задачі вихідні дані слід вибирати за таким правилом: за *другою цифрою* заданого викладачем варіанта вибирають значення кутів у відповідному стовпці; із цих даних відкидають кут, якій відповідає *першій цифрі* заданого варіанта (крім *1, 5, 8, 0*).

Вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом (6 год.)

<u>Лабораторне заняття 7. Попередні обчислення в мережі тріангуляції (2 год.)</u>

Методичні рекомендації

При зрівнюванні тріангуляційних мереж параметричним способом у якості невідомих величин (параметрів) приймають координати визначуваних пунктів або поправки до попередньо визначених координат. Для цього складають рівняння поправок безпосередніх вимірювань, у яких виражають ці поправки через поправки до наближених значень координат та через значення виміряних величин.

На етапі попередніх обчислень необхідно визначити наближені значення функцій параметричних величин

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

За вихідними даними визначають координати опорних точок В, С шляхом розв’язання прямої геодезичної задачі

Обчислення попередніх координат пунктів

Координати пунктів тріангуляційної мережі визначають, розв’язуючи рівняння прямої засічки (за формулами Юнга):

$$x_3 = \frac{x_1\,ctg\,2 + x_2\,ctg\,1 - y_1 + y_2}{ctg\,1 + ctg\,2};$$

$$y_3 = \frac{y_1\,ctg\,2 + y_2\,ctg\,1 + x_1 - x_2}{ctg\,1 + ctg\,2},$$

де *1, 2* – номери та кути вихідних точок трикутника; *3* – точка, координати якої визначаються.

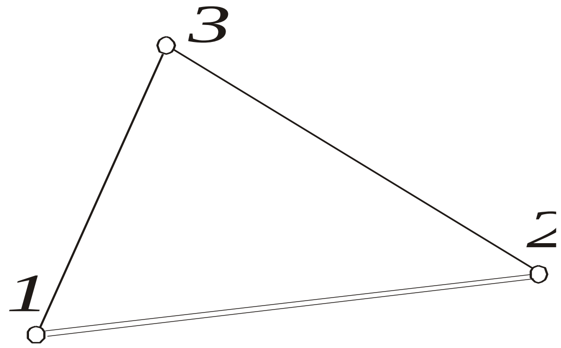


Схема розташування точок трикутника

Передачу координат від опорних пунктів геодезичної мережі виконують послідовно. Шлях передачі координат значення не має; його вибирають так, щоб кількість передач була найменшою.

Обчислення попередніх дирекційних кутів та довжин ліній

Використавши попередньо визначені координати пунктів, обчислюють дирекційні кути сторін мережі тріангуляції за відомою формулою:

$$tg\,\alpha_{ki} = \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}.$$

Контроль обчислень здійснюють за формулою:

$$tg(\,45° + \alpha_{ki}) = \frac{(x_i - x_k) + (y_i - y_k)}{(x_i - x_k) - (y_i - y_k)}.$$

Довжини ліній обчислюють також за визначеними попередніми координатами:

$$D_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2.$$

Попереднє обчислення трикутників

Метою попереднього обчислення трикутників тріангуляції є визначення наближених довжин його сторін. Для цього використовують співвідношення теореми синусів:

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

Для попереднього розв'язання трикутників використовують значення виміряних кутів із вихідних даних, визначених з достатньою точністю (до значень мінут), та довжини вихідних сторін геодезичної мережі.

Довжини сторін обчислюють поступово, переходячи від одного трикутника до іншого, взявши при цьому обчислену раніше сторону як вихідну.

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

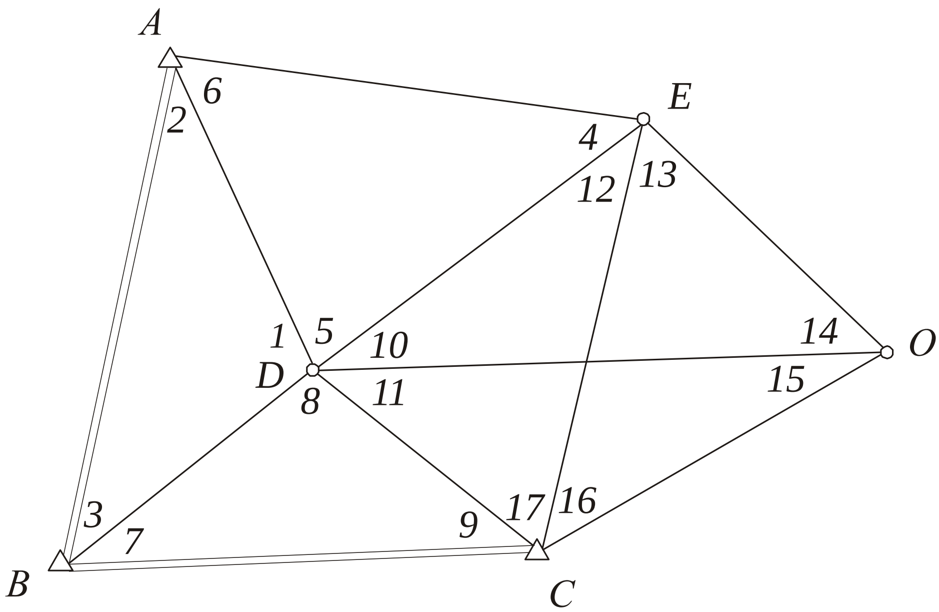


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	D	98°24′35″		10	D	38°11′44″	
2	A	36°48′15″		11	D	41°54′28″	
3	B	44°47′07″		12	E	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	E	51°50′17″		13	E	52°24′42″	
5	D	88°58′08″		14	O	41°15′14″	
6	A	39°11′39″		15	O	38°53′31″	
7	B	40°44′28″		16	C	47°26′35″	
8	D	92°31′10″		17	C	51°45′30″	
9	C	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

<u>Лабораторне заняття 8. Складання рівнянь поправок у параметри (2 год.)</u>

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Складання рівнянь поправок

Параметрами у заданій тріангуляційній мережі оберемо координати пунктів *D, E, O* (x та y). Таким чином, кількість невідомих дорівнюватиме $k = 6$.

За наближені значення невідомих приймемо попередньо обчислені координати визначуваних пунктів. У результаті обчислень будуть визначені *поправки* до них. Загальне рівняння зв'язку для дирекційних кутів та значень координат має вигляд:

$$\alpha_{ik} = arctg\frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = arctg\frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}}$$

Визначення коефіцієнтів лінійних рівнянь поправок у напрямки

Часткові похідні від функції за аргументами дорівнюють:

$$\frac{\partial \alpha''_{ik}}{\partial x_i} = \rho''\frac{sin\,\alpha_{ik}}{D_{ik}};$$

$$\frac{\partial \alpha''_{ik}}{\partial y_i} = -\rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{D_{ik}}; \qquad \frac{\partial \alpha''_{ik}}{\partial x_k} = -\rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{D_{ik}};$$

$$\frac{\partial \alpha''_{ik}}{\partial y_k} = \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{D_{ik}};$$

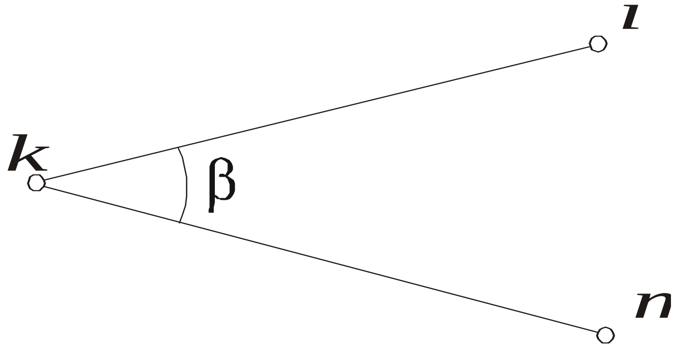
Прийнявши до уваги $\rho = 206265''$, вводимо позначення:

$$a_{ki} = -a_{ik} = +2{,}063 \frac{\sin \alpha_{ki}}{s_{,км}};$$

$$b_{ki} = -b_{ik} = -2{,}063 \frac{\cos \alpha_{ki}}{s_{,км}}.$$

Примітка: при коефіцієнті, використаному в формулах поправки у координати δx та δyбудуть одержані у *сантиметрах*.

Визначення коефіцієнтів лінійних рівнянь поправок у кути



До складання рівнянь поправок

Будь-який кут мережі одержують як різницю дирекційних кутів:

$$\beta = \alpha_{km} - \alpha_{ki}.$$

Рівняння поправок для кута, який утворений напрямками *ki* та *km*, буде мати вигляд:

$$\upsilon_\beta^k = (a_{km} - a_{ki})\delta x_k + (b_{km} - b_{ki})\delta y_k - a_{km}\delta x_m - b_{km}\delta y_m +$$

$$+a_{ki}\delta x_i + b_{ki}\delta y_i + l_\beta^k,$$

де $l_\beta^k = (\alpha'_{km} - \alpha'_{ki}) - \beta^k_{\text{вим}}$; $\alpha'_{km}, \alpha'_{ki}$ – наближені значення дирекційних кутів; $\beta^k_{вим}$ – виміряне значення кута на точці *k*.

Примітка: при складанні рівнянь поправок слід прийняти до уваги, що поправки координат вихідних пунктів дорівнюють нулю.

Визначення вільних членів лінійних рівнянь поправок у кути

Обчислення вільних членів рівнянь поправок зручно виконати у таблиці. У цю таблицю для кожного утвореного трикутника тріангуляційної мережі виписують значення виміряних кутів і їх значення, обчислені за різницею відповідних дирекційних кутів.

Обчислення вільних членів рівнянь поправок

Трикутник	Назва вершини	№ кута	Виміряний кут	Різниця дирекційних кутів	l	υ	Зрівняний кут
ADB	*D*	1	98°24′36″	98°24′36″	0		
	A	2	36°48′15″	36°48′16″	+1		
	B	3	44°47′07″	44°47′08″	+1		
	$\Sigma =$ 179°89′58″			180°00′00″	+2		
...	...	...	...	...	...	...	...

Обчислені коефіцієнти рівнянь поправок та визначені вільні члени записують у відповідну таблицю, розглянуту у попередній роботі.

Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Від рівнянь поправок переходять до відповідних нормальних рівнянь. Коефіцієнти нормальних рівнянь одержують у розглянутому раніше порядку: шляхом множення елементів одного стовпця таблиці лінійних рівнянь на інший та наступного їх додавання. Контроль обчислень здійснюють за методом сум.

Оскільки точність геодезичної побудови визначається її найслабкішим місцем, для оцінки точності геодезичної мережі обирають найслабшу сторону, якою є *найвіддаленіша від базисних ліній сторона EO*, функцію якої включають до розв’язку нормальних рівнянь.

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

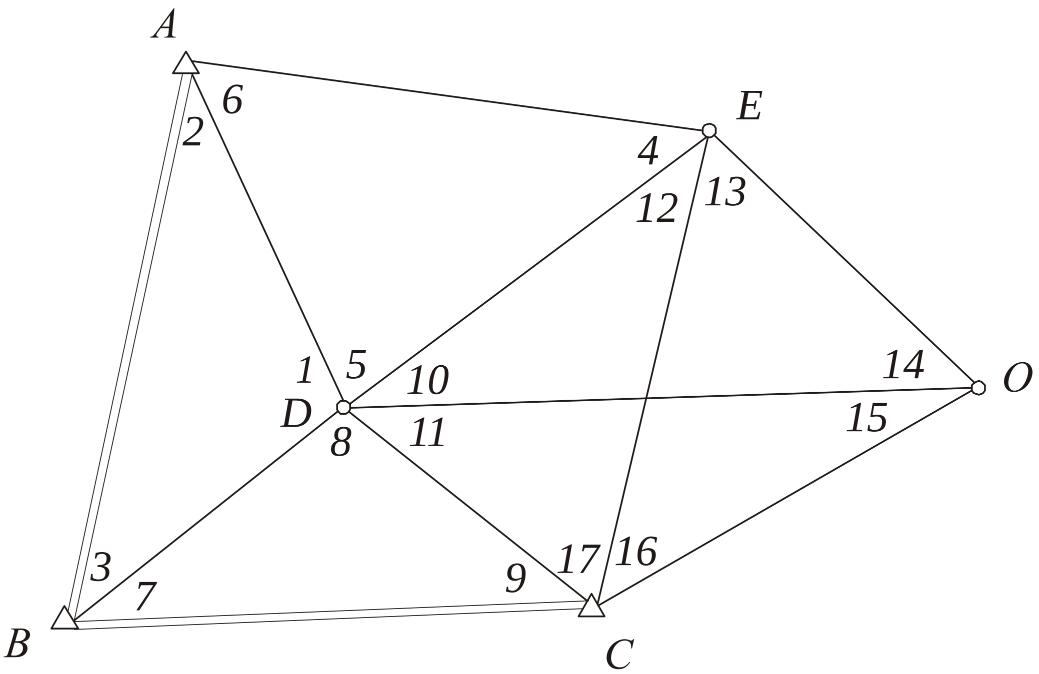


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	D	98°24′35″		10	D	38°11′44″	
2	A	36°48′15″		11	D	41°54′28″	
3	B	44°47′07″		12	E	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	E	51°50′17″		13	E	52°24′42″	
5	D	88°58′08″		14	O	41°15′14″	
6	A	39°11′39″		15	O	38°53′31″	
7	B	40°44′28″		16	C	47°26′35″	
8	D	92°31′10″		17	C	51°45′30″	
9	C	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

Лабораторне заняття 9. Обчислення поправок у координати геодезичних пунктів (2 год.)

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Вирішення системи нормальних рівнянь виконується способом Гаусса.

Алгоритм розв’язання цієї системи наданий у попередній задачі. За результатами розв’язання системи нормальних рівнянь визначають параметричні поправки – поправки до обчислених раніше наближених координат додаткових пунктів геодезичної мережі.

Після визначення величин поправок до прийнятих параметрів обчислюють остаточні значення координат пунктів:

$$x = x_0 + \delta x;$$

$$y = y_0 + \delta y,$$

де x_0, y_0 – попередньо обчислені координати пунктів.

Після визначення та контролю невідомих обчислюють поправки υ_i у виміряні кути. Обчислення поправок контролюють. Зрівняні кути одержують додаванням відповідних поправок до виміряних значень.

Оцінка точності

Для оцінки точності геодезичної мережі визначають середню квадратичну похибку вимірювання кута:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{N-2k}},$$

де N – кількість виміряних кутів у мережі; k – кількість пунктів, що визначаються.

Середня квадратична похибка слабкої сторони EO буде дорівнювати:

$$m_s = \frac{s}{\rho''}\mu\sqrt{\frac{1}{p_f}}$$

Середня квадратична похибка положення найвіддаленішого пункту O визначається похибками його координат:

$$m_{y_o} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\delta y_o}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[gg\cdot(k-1)]}} = \sqrt{\frac{\mu}{[gg\cdot 5]}};$$

$$m_{x_o} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_o}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[gg\cdot 5]\frac{[ee\cdot 4]}{[gg\cdot 4]}}}.$$

Абсолютна похибка положення пункту O дорівнює:

$$M_O = \sqrt{m_{x_o}^2 + m_{y_o}^2}$$

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

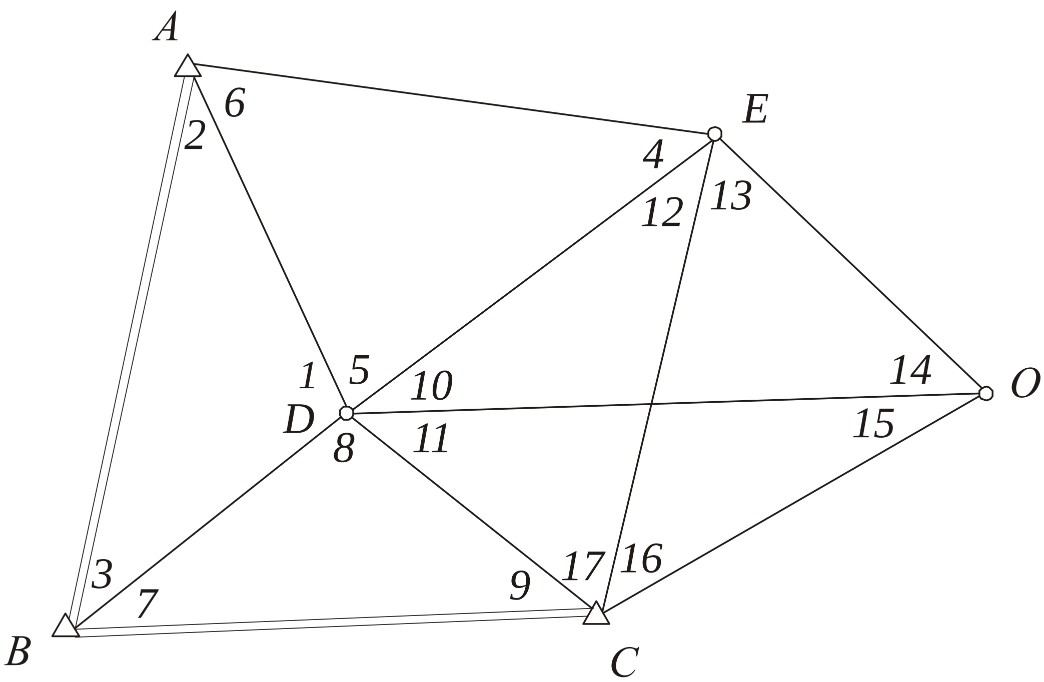


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	D	98°24′35″		10	D	38°11′44″	
2	A	36°48′15″		11	D	41°54′28″	
3	B	44°47′07″		12	E	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	E	51°50′17″		13	E	52°24′42″	
5	D	88°58′08″		14	O	41°15′14″	
6	A	39°11′39″		15	O	38°53′31″	
7	B	40°44′28″		16	C	47°26′35″	
8	D	92°31′10″		17	C	51°45′30″	
9	C	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

Змістовний модуль 2

Тема 3. «Вирівнювальні обчислення в геодезичних мережах. Корелатний спосіб вирівнювання»

Вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду корелатним способом (6 год.)

Лабораторне заняття 10. Складання умовних рівнянь поправок у мережі тріангуляції (2 год.)

Методичні рекомендації

Корелатний спосіб зрівнювання геодезичних мереж доцільно використовувати при зрівнюванні нескладних фігур тріангуляції, які включають невелику кількість визначуваних пунктів (геодезичний трикутник, центральна система, вставка в кут, ланцюг трикутників і т.п.). Корелатний спосіб зрівнювання може застосовуватись як при зрівнюванні безпосередньо виміряних величин, так і при зрівнюванні величин, які є функціями.

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Визначення кількості незалежних умов, що виникають у мережі

Загальна кількість умов у невільній мережі тріангуляції визначається за формулою:

$$R = N - (m - 2) \times 2 + q = 17 - (6 - 2) \times 2 + 2 = 11$$

де N – число всіх виміряних у мережі кутів; m – число геодезичних пунктів у мережі; q – число надлишкових вихідних величин.

Кількість умовних рівнянь за їх видами дорівнює:

- умови фігур: число умов фігур трикутників дорівнює числу неперекривних трикутників із усіма виміряними в них кутами, доданому до числа суцільних діагоналей. Визначається це значення за такою формулою:

$$f = l - m + 1 = 11 - 6 + 1 = 6$$

де f – число умов фігур; l – число суцільних ліній;

- умова горизонту – число умов горизонту g дорівнює числу центральних систем у мережі r:

$$g = r = 1;$$

- умови дирекційних кутів – число умов дирекційних кутів a дорівнює числу вихідних дирекційних кутів t без одного:

$$a = t - 1 = 2 - 1 = 1;$$

- умови полюсів – число умов полюсів дорівнює числу центральних систем, доданого до числа діагоналей. Його можна обчислити за формулою:

$$p = L - 2m + 3 = 11 - 2 \times 6 + 3 = 2$$

де p – число полюсних умов; L – число всіх ліній;

- умови базисів – число умов базисів b у тріангуляції, не замкненій вихідними сторонами, дорівнює числу вихідних сторін (базисів) c без однієї (у тріангуляції, замкненій вихідними сторонами, число умов базисів дорівнює числу вихідних сторін без трьох):

$$b = c - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Перевіряємо відповідність кількості умовних рівнянь загальній кількості незалежних умов:

$$R = f + g + a + p + b = 6 + 1 + 1 + 2 + 1 = 11.$$

Складання умовних рівнянь поправок:

Умова фігури у трикутнику відповідає рівнянню:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = w$$

де β_i – виміряні значення кутів; w – нев’язка в трикутнику.

Для заданої геодезичної мережі необхідно розглянути шість трикутників, для яких умовні рівняння поправок мають вигляд:

$$\Delta ABD: v_1 + v_2 + v_3 - 3 = 0;$$

$$\Delta ADE: v_4 + v_5 + v_6 + 4 = 0;$$

$$\Delta BDC: v_7 + v_8 + v_9 - 5 = 0;$$

$$\Delta CDE: (v_{10} + v_{11}) + v_{12} + v_{17} + 0 = 0;$$

$$\Delta DCO: v_{11} + v_{15} + (v_{16} + v_{17}) + 4 = 0;$$

$$\Delta DEO: v_{10} + (v_{12} + v_{13}) + v_{14} - 2 = 0.$$

Допустиме значення нев’язки фігури визначається за формулою:

$$w = 2{,}5\mu\sqrt{n} = 2{,}5 \cdot 5'' \sqrt{3} \approx 21''$$

де μ – середня квадратична похибка вимірювання кута (для 1-го розряду геодезичної мережі $\mu = 5''$); n – кількість кутів фігури.

Умова вихідних дирекційних кутів виникає за наявності двох базисних ліній із відомими дирекційними кутами у геодезичній мережі. Для даної мережі умова вихідних дирекційних кутів має вигляд:

$$(\alpha_{AB} \pm 180°) + \beta_3 + \beta_7 - \alpha_{BC} = w$$

звідки нев'язка дорівнює:

$$w = (\alpha_{BC} \pm 180° - \alpha_{AB}) - (\beta_3 + \beta_7) = 85°31'37'' - 85°31'35'' = +2''$$

Умовне рівняння поправок для вихідних дирекційних кутів має вигляд:

$$\upsilon_3 + \upsilon_7 + 2 = 0$$

Умова горизонту виникає на пунктах, на яких при вирівнюванні включають всі кути, утворені сусідніми напрямками, що сходяться на цьому пункті. В цьому випадку сума кутів на такому пункті повинна дорівнювати 360° (повне коло).

Для умови горизонту можна записати рівняння:

$$\sum \beta_n - 360° = w$$

де n – кількість кутів на згаданому пункті.

Нев'язка для центральної мережі на заданій схемі дорівнює:

$$w = (1 + 5 + 8 + 10 + 11) - 360° = +5''$$

Відповідне цій умові умовне рівняння поправок буде мати вигляд:

$$\sum \upsilon_n + w = \upsilon_1 + \upsilon_5 + \upsilon_8 + \upsilon_{10} + \upsilon_{11} + 5 = 0$$

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

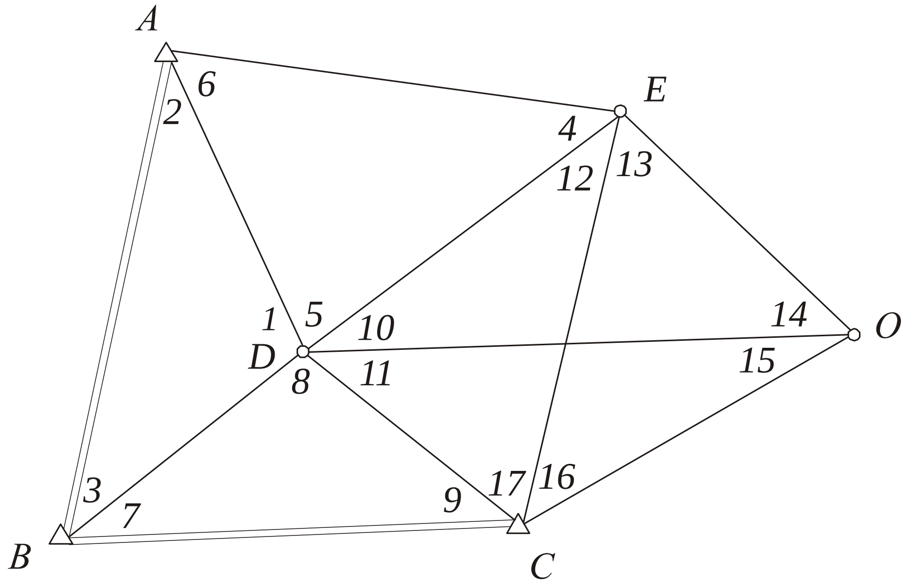


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	D	98°24′35″		10	D	38°11′44″	
2	A	36°48′15″		11	D	41°54′28″	
3	B	44°47′07″		12	E	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	E	51°50′17″		13	E	52°24′42″	
5	D	88°58′08″		14	O	41°15′14″	
6	A	39°11′39″		15	O	38°53′31″	
7	B	40°44′28″		16	C	47°26′35″	
8	D	92°31′10″		17	C	51°45′30″	
9	C	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

Лабораторне заняття 11. Створення умовних рівнянь, що відповідають синусним геометричним умовам у мережі тріангуляції (2 год.)

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Обчислення коефіцієнтів синусних умовних рівнянь

Коефіцієнти синусних умовних рівнянь визначаються як часткові похідні складеної функції залежностей, що виникають у фігурах трикутників між довжинами сторін і протилежними їм кутами на основі теореми синусів для плоского прямолінійного трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Для виведення простої залежності для обчислення часткових похідних до даної функції застосовується алгоритм логарифмування із подальшим виведенням похідних, що дає можливість зазначити загальний вигляд залежності:

$$\Delta_i = \frac{10^n M}{\rho''} ctg\,\beta,$$

де $M = 0{,}4343$ – модуль десяткових логарифмів.

Значення Δ_i являє собою *зміну n-го десяткового знака логарифма синуса кута при збільшенні кута на 1″.*

Умови вихідних сторін (базисів) виникають у тих же випадках, що й умови вихідних дирекційних кутів. Передача довжини лінії від одного базису на інший через сторони трикутників відбувається шляхом вирішення цих трикутників за теоремою синусів.

Умовне рівняння поправок базисної умови має вигляд:

$$-\Delta_{i-1}v_{i-1} + \Delta_{i+1}v_{i+1} - \Delta_{j-1}v_{j-1} + \Delta_{j+1}v_{j+1} - \ldots + w = 0.$$

де $\beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots$ – проміжні кути, через які відбувається передача довжин ліній між базисами.

Величина нев’язки для базисної умови визначається формулою

$$w = lg\, D_{AB} + lgsin\, \beta_{i+1} + lgsin\, \beta_{j+1} + \ldots - lgsin\, \beta_{i-1} - lgsin\, \beta_{j-1} - \ldots - lg\, D_{CD},$$

де D – довжини відомих базисних сторін.

Полюсна умова виникає в такій фігурі, в якій можна зобразити замкнений ланцюг трикутників, що починається та закінчується на одній і тій же стороні: центральна система, геодезичний чотирикутник. П*олюсом* називають точку, пов’язану сторонами з усіма вершинами багатокутника. У геодезичному чотирикутнику полюсом є фіктивна точка, яка знаходиться на перетині його діагоналей.

Полюсне умовне рівняння має вигляд:

$$s\frac{sin\, \beta_{i+1}\, sin\, \beta_{j+1}\, sin\, \beta_{k+1} \ldots}{sin\, \beta_{i-1}\, sin\, \beta_{j-1}\, sin_{k-1} \ldots} - s = w,$$

де s – довжини сторони, взята за вихідну лінію.

У центральній мережі для створення полюсної умови вибирається *внутрішня* лінія, у геодезичному чотирикутнику – *зовнішня* сторона. Тому залежно від обраної сторони визначаються проміжні кути в геодезичних мережах.

У геодезичній мережі, що *має вигляд центральної системи*, умовне рівняння поправок полюсної умови у логарифмічній формі відповідає базисній умові, але за виключенням довжин базисних ліній, оскільки при розрахунках вони беруться рівними. Тому нев’язка буде визначатись за формулою:

$$w = (lgsin\, \beta_{i+1} + lgsin\, \beta_{j+1} + \ldots) - (lgsin\, \beta_{i-1} + lgsin\, \beta_{j-1} + \ldots).$$

У *геодезичному чотирикутнику* полюсом є фіктивна точка, яка знаходиться на перетині його діагоналей. У цьому випадку рівняння поправок полюсної умови має наступного вигляду:

$$w = (\Delta_2 v_2 + \Delta_4 v_4 + \Delta_6 v_6 + \Delta_8 v_8) - (\Delta_1 v_1 + \Delta_3 v_3 + \Delta_5 v_5 + \Delta_7 v_7),$$

тобто нев’язка буде дорівнювати різниці суми добутків зміни логарифмів синусів парних та непарних кутів на відповідні поправки. Нев’язка в цьому випадку визначається за формулою:

$$w = lg\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8}.$$

Вибір кутів, що беруть участь при створенні кожної полюсної умови, відповідає зазначеному вище принципу передачі довжин.

Для даної у прикладі мережі мають місце дві полюсні умови: для центральної мережі *ABCE* та геодезичного чотирикутника *CDEO*. Для мережі *ABCE* при передачі довжин використовують кути 2 та 3, 4 та 6, 7 та 9, 12 та 17. У чотирикутнику *CDEO* – через всі його виміряні кути. Умовні рівняння поправок мають вигляд:

- для мережі *ABCE*:

$$2{,}1v_3 - 2{,}8v_2 + 2{,}6v_6 - 1{,}7v_4 + 2{,}0v_9 - 2{,}4v_7 + 1{,}9v_{12} - 1{,}7v_{17} - 9{,}3 = 0;$$

- для мережі *CDEO*:

$$2{,}7v_{10} - 1{,}9v_{12} + 1{,}6v_{13} - 2{,}4v_{14} + 2{,}6v_{15} - 1{,}9v_{16} + 1{,}7v_{17} - 2{,}3v_{11} + 7{,}4 = 0.$$

Для оцінки точності геодезичної мережі за найслабшою стороною *EO* складається вагова функція *F*:

$$F = \alpha_{EO} = \alpha_{AB} - \beta_2 + \beta_5 - (\beta_{12} + \beta_{13}).$$

Приріст (зміну) цієї функції одержуємо у вигляді рівняння:

$$\Delta F = -v_2 + v_5 - v_{12} - v_{13}.$$

Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.

Коефіцієнти складених умовних рівнянь поправок та вагової функції *F* виписуються у відповідну таблицю. У цій таблиці коефіцієнти умовних рівнянь розміщують окремо по стовпцях, Їх кількість повинна відповідати загальній кількості умовних рівнянь у мережі.

Кути позначають у рядках; під ними записують значення нев'язок *w*, корелат *k* та контрольних добутків kw.

Для подальшого контролю обчислень знаходять суми s_i коефіцієнтів із врахуванням вагової функції.

Обчислення та контроль коефіцієнтів нормальних рівнянь

Від коефіцієнтів умовних рівнянь переходять до визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат за розглянутим у попередніх темах принципом. Обчислення цих коефіцієнтів обов'язково контролюють за методом сум. При контролі вільні члени нормальних рівнянь корелат (нев'язки) не включають до розрахунків:

$$\left.\begin{array}{c}[aa] + [ab] + \ldots + [aF] = [as]\\ [ba] + [bb] + \ldots + [bF] = [bs]\\ \ldots\ldots\ldots\\ [Fa] + [Fb] + \ldots + [FF] = [Fs]\end{array}\right\}.$$

Після перевірки за цими формулами обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат визначають суми:

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma_1 = [as] + w_1\\ \Sigma_2 = [bs] + w_2\\ \ldots\\ \Sigma_r = [ms] + w_R\end{array}\right\},$$

де *R* – кількість умовних рівнянь поправок.

Коефіцієнти умовних рівнянь корелат

№ кута	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*m*	*F*	*s*	*υ*	$υ^2$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11				
1	+1							+1	+0,3				+2,3	-0,2	0,0
2	+1								+2,8	-2,8		-1	0	+4,1	16,6
3	+1						+1			+2,1			+4,1	-0,9	0,8
4		+1								-1,7			-0,7	-1,5	2,3
5		+1						+1				+1	+3,0	-3,6	12,9
6		+1								+2,6			+3,6	+1,1	1,2
7			+1				+1			-2,4			-0,4	-1,1	1,2
8			+1					+1	-0,1				+1,9	+2,0	4,0
9			+1						-2,0	+2,0			+1,0	+4,1	17,1
10				+1		+1		+1			+2,7		+5,7	-1,3	1,7
11				+1	+1			+1			-2,3		+0,7	-1,9	3,7
12				+1		+1				+1,9	-1,9	-1	+1,0	+3,3	10,9
13						+1					+1,6	-1	+1,6	-0,1	0,0
14						+1					-2,4		-1,4	+0,2	0,0
15					+1						+2,6		+3,6	-1,1	1,2
16					+1						-1,9		-0,9	-0,8	0,6
17				+1	+1					-1,7	+1,7		+2,0	-0,1	0,0
w	-3	+4	-5	0	+4	-2	+2	+5	-2,9	-9,3	+7,4				$[υ^2]$ = 74,0
k	+2,62	-0,48	+5,17	+2,01	-0,97	+0,02	-4,81	-3,12	+1,12	+0,60	-0,07				
kw	-7,87	-1,90	-25,87	0	-3,86	-0,04	-9,62	-15,58	-3,25	-5,61	-0,50		[*kw*]= - 74,09		

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

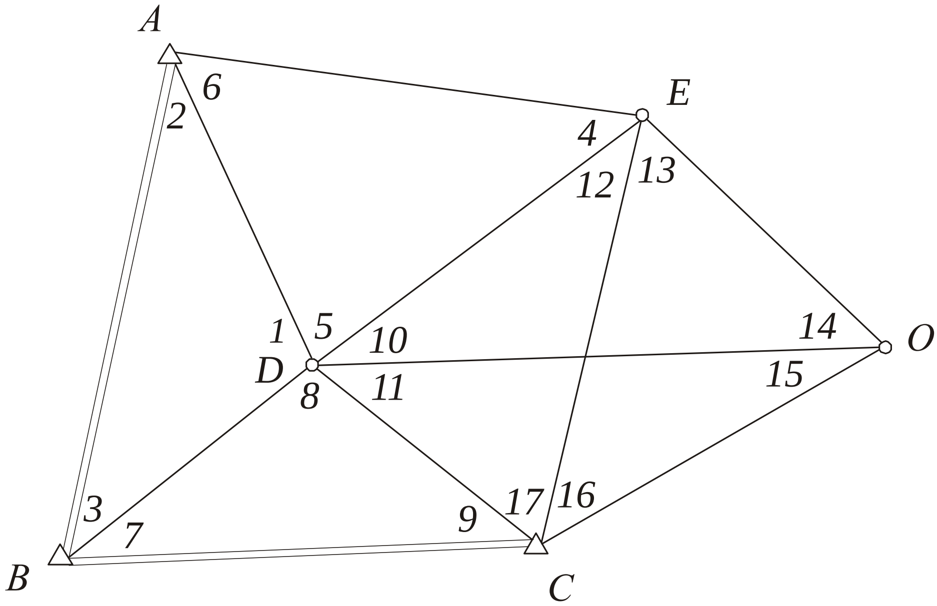


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	*D*	98°24′35″		10	*D*	38°11′44″	
2	*A*	36°48′15″		11	*D*	41°54′28″	
3	*B*	44°47′07″		12	*E*	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	*E*	51°50′17″		13	*E*	52°24′42″	
5	*D*	88°58′08″		14	*O*	41°15′14″	
6	*A*	39°11′39″		15	*O*	38°53′31″	
7	*B*	40°44′28″		16	*C*	47°26′35″	
8	*D*	92°31′10″		17	*C*	51°45′30″	
9	*C*	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

<u>Лабораторне заняття 12. Складання та розв’язок системи нормальних рівнянь корелат (2 год.)</u>

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Рішення нормальних рівнянь корелат

Для рішення системи нормальних рівнянь корелат використовують алгоритм Гаусса, викладений раніше, за повною або скороченою (без запису проміжних результатів) схемою.

Контролюють правильність обчислення корелат, для чого знайдені корелати підставляють у сумарне рівняння:

$$([aa] + [ab] + \ldots + [am])k_1 + ([ba] + [bb] + \ldots + [bm])k_2 + \ldots +$$
$$+([ma] + [mb] + \ldots [mm])k_R + (w_1 + w_2 + \ldots + w_R) = 0.$$

Обчислення поправок у виміряні кути

Після визначення та перевірки корелат приступають до обчислення поправок у кути:

$$\upsilon_i = \frac{a_i k_1 + b_i k_2 + \ldots + m_i k_R}{p_i},$$

де p_i – вага виміряного кута (для даної мережі $p_i = 1$, оскільки всі виміряні кути рівноточні).

Обчислення поправок у виміряні кути виконується у відповідній колонці. Для встановлення правильності обчислення поправок їх підставляють у відповідні умовні рівняння. Якщо ці рівняння задовольняються, то знаходять υ_i^2, $[\upsilon^2]$ та добутки kw, причому $[\upsilon^2] = -[kw]$.

Остаточне обчислення геодезичної мережі

Одержані поправки додають до виміряних значень кутів. Користуючись вирівняними значеннями кутів виконують остаточне розв’язання трикутників та обчислення координат пунктів.

Оцінка точності

Середня квадратична похибка результату безпосереднього виміру дорівнює:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{R}}.$$

Середня квадратична похибка зрівняної сторони *EO*:

$$m_s = \frac{s}{\rho''}\mu\sqrt{\frac{1}{p_F}}.$$

Індивідуальні завдання до виконання

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції 1-го розряду параметричним способом та виконати оцінку точності геодезичної побудови.

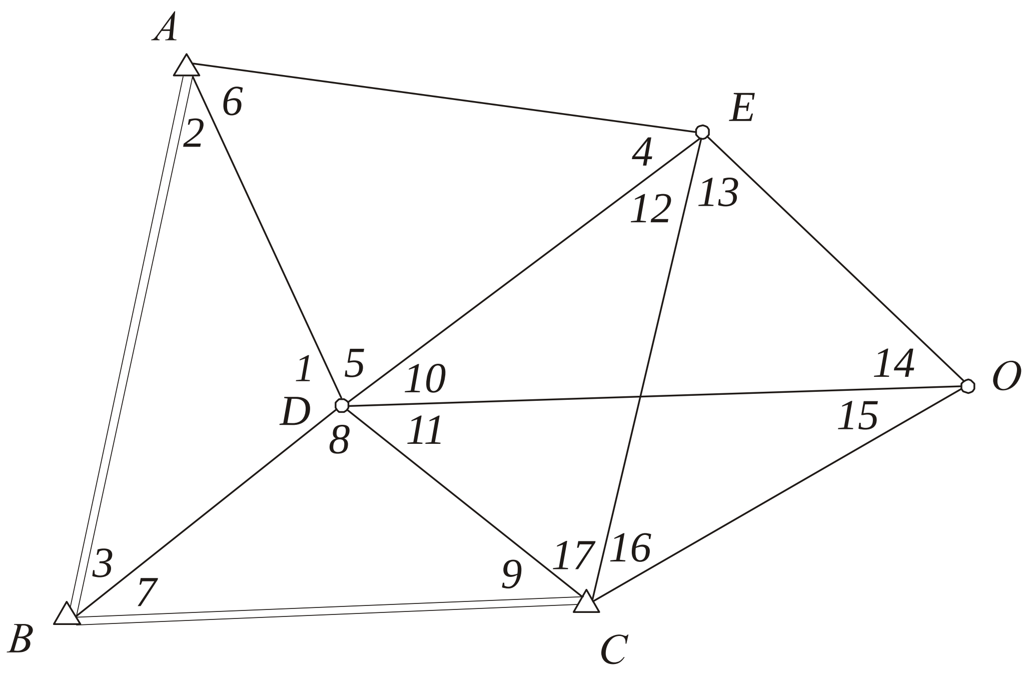


Схема розміщення кутів у геодезичній мережі

Вихідні дані до задачі

Результати польових вимірювань

№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта	№ кута	Назва вершини	Виміряний кут	Поправка до варіанта
1	*D*	98°24′35″		10	*D*	38°11′44″	
2	*A*	36°48′15″		11	*D*	41°54′28″	
3	*B*	44°47′07″		12	*E*	48°08′18″	$+0,1'' \cdot n$
4	*E*	51°50′17″		13	*E*	52°24′42″	
5	*D*	88°58′08″		14	*O*	41°15′14″	
6	*A*	39°11′39″		15	*O*	38°53′31″	
7	*B*	40°44′28″		16	*C*	47°26′35″	
8	*D*	92°31′10″		17	*C*	51°45′30″	
9	*C*	46°44′17″	$+0,1'' \cdot n$				

Відомості про вихідну геодезичну мережу

Пункт	Координати		Дирекційний кут		Довжина лінії, м
	$x + 10м \cdot n$	$y + 10м \cdot n$	Значення	Поправка	
A	5627324,97	8634115,84			
			190°44′28″	$+3° \cdot n$	4497,23
B					
			96°16′05″	$+3° \cdot n$	3736,30
C					

Строге вирівнювання полігонометричного ходу 1-го розряду корелатним способом (6 год)

Лабораторне заняття 13. Попередні обчислення в полігонометричному ході (2 год.).

Методичні рекомендації

Виконати строге вирівнювання полігонометричного ходу 1-го розряду корелатним способом та оцінити його точність.

Для проведення обчислень та записів їх результатів використовують "Відомість визначення координат точок ходу"

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Обчислення кутової нев'язки полігонометричного ходу:

$$f_\beta = \beta_{вим} - 180° \cdot \text{К} - (\alpha_{кін} - \alpha_{поч}),$$

де *К* – число виключень 180°.

Допустимість кутової нев'язки визначається за формулою:

$$f_{\beta доп} = 2m_\beta\sqrt{n+1}.$$

У випадку допустимої кутової нев'язки її розподіляють порівну на всі кути з протилежним знаком:

$$\upsilon_\beta' = -\frac{f_\beta}{n+1}.$$

Визначають дирекційні кути ходу α_i, використавши виправлені первинними поправками кути повороту β_i

Обчислюють прирости координат та визначають лінійні нев'язки f_x та f_y, їх абсолютне та відносне значення. Лінійну нев'язку порівнюють із допустимою для даного розряду точності величиною.

Індивідуальні завдання до виконання

Вихідні дані про опорну геодезичну мережу

Дирекційний кут		Координати вихідних пунктів, м		
Лінія	Величина	№ точки	*x*	*y*
п.п.*1624 – 1*	167° 26′ 35″	*1*	52321,058	84775,211
7 – п.п.*3217*	352° 04′ 09″	*7*	53275,096	85799,870

Результати польових вимірів

№ точки	Кут повороту (лівий) β	Поправка до варіанта	Назва лінії	Довжина лінії $s, м$	Точність польових вимірів
1	76° 15′ 23″	$+0,1'' \cdot n$	1-2	354,125	$m_\beta = 2,0''(+0,1'' \cdot n)$
2	156° 28′ 54″		2-3	411,235	
3	211° 07′ 07″		3-4	188,231	Коефіцієнт випадкового впливу лінійних вимірів $\mu = 0,00025$
4	204° 51′ 08″		4-5	279,322	
5	73° 21′ 00″		5-6	365,504	
6	219° 54′ 08″		6-7	106,840	
7	142° 39′ 44″				

Відомість обчислення координат точок полігонометричного ходу

Пункт	Кут повороту (лівий)	Дирекцій-ний кут	Довжина лінії, м	Приріст координат		Координати, м	
				Δx	Δy	*x*	*y*
п.п.1624							
		167° 26′ 35″					
1	*+1,4″* 76° 15′ 23″					52321,058	84775,211
		63° 41′ 59,4″	354,125	*+14,9* +156,904	*-0,5* +317,468		
2	*+1,4″* 156° 28′ 54″					52477,976	85092,678
		40° 10′ 54,8″	411,235	*+24,8* +314,184	*-10,5* +265,335		
3	*+1,5″* 211° 07′ 07″					52792,185	85358,003
		71° 18′ 03,3″	188,231	*+12,1* +60,346	*-1,6* +178,295		
4	*+1,4″* 204° 51′ 08″					52852,543	85536,297
		96° 09′ 12,7″	279,322	*+16,3* -29,941	*+0,7* +277,713		
5	*+1,4″* 73° 21′ 00″					52822,618	85814,010
		349° 30′ 14,1″	365,504	*+11,0* +359,388	*-15,8* -66,583		
6	*+1,4″* 219° 54′ 08″					53182,017	85747,411
		29° 24′ 23,5″	106,840	*+4,2* +93,075	*-0,1* +52,459		
7	*+1,5″* 142° 39′ 44″					53275,096	85799,870
		352° 04′ 09″					
п.п. 3217							

Σ 1084° 37′ 24″ Σ 1705,257

$f_\beta = -10''$

$f_x = -0{,}08$ $f_y = +0{,}028$

$f_{\beta\ \text{доп}} = 2 \cdot 2''\sqrt{7} = \pm 11$

$f_s = 0{,}087 \quad \dfrac{f_s}{[s]} = \dfrac{0{,}087}{1705{,}257} = \dfrac{1}{19600}$

Лабораторне заняття 14. Визначення корелат для обчислення поправок у виміряні величини полігонометричного ходу (2 год.)

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Визначення положення геометричного центру ваги ходу

Прийнявши початок відліку координат у першій точці полігонометричного ходу, визначають умовні координати його пунктів (x', y') відносно неї, та координати центра ваги ходу $x_ц, y_ц$ з точністю до 1 м:

$$x_i' = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i ; \qquad y_i' = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i .$$

$$x_ц = \frac{[x']}{n+1}; \qquad y_ц = \frac{[y']}{n+1}.$$

Для спрощення вирівнювальних обчислень вводять систему центральних координат (ξ, η), початок яких віднесено до центра ваги ходу:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= x_i' - x_ц; \\ \eta_i &= y_i' - y_ц. \end{aligned}\right\}$$

Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат

Для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат спочатку ведуть розрахунок окремих елементів, які записують у комірках стовпців 6 – 11 відомості обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу.

Обчислення коефіцієнтів виконують за формулами із урахуванням вагових значень для виміряних величин:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{q}{\rho''}[\eta^2] + [\Delta x \cos\alpha]; \\ B &= \frac{q}{\rho''}[\xi^2] + [\Delta y \sin\alpha]; \\ C &= -\frac{q}{\rho''}[\xi \cdot \eta] + [\Delta x \sin\alpha], \end{aligned}\right\}$$

де

$$q = \frac{1}{p}.$$

Вага функції впливу похибок кутових та лінійних вимірів визначається за формулою:

$$p = \frac{\mu^2}{m_\beta^2}\rho'' = 0{,}00322,$$

$$q = \frac{1}{p} = 310{,}28.$$

Для полегшення обчислень величини $\xi^2, \eta^2, \xi \cdot \eta$ зменшують у 1000 разів (стовпці 8 – 10), а величину q/ρ – збільшують у 1000 разів:

$$1000\frac{q}{\rho} = 1{,}504.$$

Відомість обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу

Пункт	Умовні координати		ξ	η	$\frac{\xi^2}{1000}$	$\frac{\xi \cdot \eta}{1000}$	$\frac{\eta^2}{1000}$	$\Delta x \cos \alpha$	$\Delta x \sin \alpha$	$\Delta y \sin \alpha$	$q\eta k_2$	$q\xi k_3$	Поправка кута υ''_β
	x	y											
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
1	0	0	-496	-671	246	+333	450				-8,0	-0,1	-7,9
								70	+141	285			
2	+157	+317	-339	-354	115	+120	125				-4,2	-0,1	-4,1
								240	+203	171			
3	+471	+583	-25	-88	1	+2	8				-1,0	0,0	-1,0
								19	+57	169			
4	+531	+761	+35	+90	1	+3	8				+1,1	0,0	+1,1
								3	-30	276			
5	+501	+1039	+5	+368	0	+2	135				+4,4	0,0	+4,4
								353	-65	12			
6	+860	+972	+364	+301	132	+110	91				+3,6	+0,1	+3,5
								81	+46	26			
7	+953	+1024	+457	+353	209	+161	125				+4,1	+0,1	+4,0
		Σ	+1	-1	704	+731	942	766	+352	939	0,0	0,0	0,0
	$x_ц =$ $= +496$	$y_ц =$ $= +671$											

Продовження

Поправка дирекційного кута υ_α	$10^3 k_2 \Delta x$	$10^3 k_3 \Delta y$	Поправка лінії υ_{Si}, мм	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho}$	$\upsilon_S \cos\alpha$	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho}\Delta y$	Поправка $\upsilon_{\Delta x}$, мм	$\upsilon_S \sin\alpha$	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho}\Delta x$	Поправка $\upsilon_{\Delta y}$, мм
15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*
-7,9	+6,1	+0,1	+6,2	-0,0383	+2,7	-12,2	+14,9	+5,5	-6,0	-0,5
-12,0	+12,0	+0,1	+12,2	-0,0584	+9,3	-15,5	+24,8	+7,8	-18,3	-10,5
-13,1	+2,3	+0,1	+2,4	-0,0635	+0,8	-11,3	+12,1	+2,3	-3,8	-1,5
-12,0	-1,1	+0,1	-1,0	-0,0583	+0,1	-16,2	+16,3	-1,0	+1,7	+0,7
-7,7	+13,8	0,0	+13,8	-0,0371	+13,5	+2,5	+11,0	-2,5	-13,3	-15,8
-4,1	+3,6	0,0	+3,6	-0,0200	+3,1	-1,1	+4,2	+1,8	-1,9	-0,1
							+83,3			**-27,7**
						$f_x = -0{,}082$			$f_y = +0{,}028$	

Обчислення кореляційних множників (корелат)

Обчислення виконують за одержаними раніше даними за формулами:

$$k_2 = \frac{C \cdot f_y - B \cdot f_x}{A \cdot B - C^2}$$

$$k_3 = \frac{C \cdot f_x - A \cdot f_y}{A \cdot B - C^2}$$

Індивідуальні завдання до виконання

Вихідні дані про опорну геодезичну мережу

Дирекційний кут		Координати вихідних пунктів, м		
Лінія	Величина	№ точки	x	y
п.п.*1624 – 1*	167° 26′ 35″	*1*	52321,058	84775,211
7 – п.п.*3217*	352° 04′ 09″	*7*	53275,096	85799,870

Результати польових вимірів

№ точки	Кут повороту (лівий) β	Поправка до варіанта	Назва лінії	Довжина лінії $s, м$	Точність польових вимірів
1	76° 15′ 23″	$+0,1'' \cdot n$	1-2	354,125	$m_\beta = 2,0''(+0,1'' \cdot n)$
2	156° 28′ 54″		2-3	411,235	
3	211° 07′ 07″		3-4	188,231	Коефіцієнт випадкового впливу лінійних вимірів $\mu =$ 0,00025
4	204° 51′ 08″		4-5	279,322	
5	73° 21′ 00″		5-6	365,504	
6	219° 54′ 08″		6-7	106,840	
7	142° 39′ 44″				

Лабораторне заняття 15. Обчислення вторинних поправок Ув’язка значень величин полігонометричного ходу та остаточні обчислення (2 год.)

Методичні рекомендації

Приклад опрацювання задачі вирівнювання

Обчислення вторинних поправок у кути

Вторинні поправки у значення виміряних кутів обчислюють за формулою:

$$\upsilon''_{\beta_i} = q(\eta_i k_2 - \xi_i k_3),$$

та записують у стовпці 12 – 14 відомості обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу:

Контроль обчислення поправок: $[\upsilon''_\beta] = 0$)

Обчислення поправок у дирекційні кути

Виконують за формулою:

$$\upsilon_{\alpha_i} = \sum_1^i \upsilon''_{\beta}.$$

Результати записують у стовпці 15 відомості обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу.

Обчислення поправок у довжини ліній

Виконують за формулою:

$$\upsilon_{Si} = \Delta x_i k_2 + \Delta y_i k_3,$$

Контроль обчислень: $[\upsilon_S] = [\Delta x]k_2 + [\Delta y]k_3)$.

Результати обчислень записують у стовпці 16 – 18 відомості обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу.

Обчислення поправок у прирости координат

Виконують за формулою:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{\Delta x_i} &= \upsilon_{Si} \cos\alpha_i - \frac{\upsilon''_{\alpha_i}}{\rho}\Delta y_i; \\ \upsilon_{\Delta y_i} &= \upsilon_{Si} \sin\alpha_i + \frac{\upsilon''_{\alpha_i}}{\rho}\Delta x_i, \end{aligned}\right\}$$

виконуючи контроль обчислень:

$$\left.\begin{aligned} [\upsilon_{\Delta x}] &= -f_x; \\ [\upsilon_{\Delta y}] &= -f_y. \end{aligned}\right\}$$

Результати записують у стовпці 19 – 25 відомості обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу.

Поправки в прирости виписують над відповідними значеннями у відомість обчислення координат точок полігонометричного ходу та виконують обчислення координат пунктів полігонометричного ходу за виправленими приростами координат.

Оцінку точності вирівняних елементів полігонометричного ходу виконують за відомою формулою:

$$M_f = \mu\sqrt{\frac{1}{p_f}}.$$

Відомість обчислення вторинних поправок полігонометричного ходу

Пункт	Умовні координати		ξ	η	$\frac{\xi^2}{1000}$	$\frac{\xi \cdot \eta}{1000}$	$\frac{\eta^2}{1000}$	$\Delta x \cos\alpha$	$\Delta x \sin\alpha$	$\Delta y \sin\alpha$	$q\eta k_2$	$q\xi k_3$	Поправка кута υ''_β
	x	y											
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
1	0	0	-496	-671	246	+333	450				-8,0	-0,1	-7,9
								70	+141	285			
2	+157	+317	-339	-354	115	+120	125				-4,2	-0,1	-4,1
								240	+203	171			
3	+471	+583	-25	-88	1	+2	8				-1,0	0,0	-1,0
								19	+57	169			
4	+531	+761	+35	+90	1	+3	8				+1,1	0,0	+1,1
								3	-30	276			
5	+501	+1039	+5	+368	0	+2	135				+4,4	0,0	+4,4
								353	-65	12			
6	+860	+972	+364	+301	132	+110	91				+3,6	+0,1	+3,5
								81	+46	26			
7	+953	+1024	+457	+353	209	+161	125				+4,1	+0,1	+4,0
		Σ	+1	-1	704	+731	942	766	+352	939	0,0	0,0	0,0
	$x_ц =$ $= +496$	$y_ц =$ $= +671$											

Продовження

Поправка дирекційного кута υ_α	$10^3 k_2 \Delta x$	$10^3 k_3 \Delta y$	Поправка лінії υ_{Si}, мм	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho}$	$\upsilon_S \cos\alpha$	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho} \Delta y$	Поправка $\upsilon_{\Delta x}$, мм	$\upsilon_S \sin\alpha$	$10^3 \frac{\upsilon_\alpha}{\rho} \Delta x$	Поправка $\upsilon_{\Delta y}$, мм
15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*
-7,9	+6,1	+0,1	+6,2	-0,0383	+2,7	-12,2	+14,9	+5,5	-6,0	-0,5
-12,0	+12,0	+0,1	+12,2	-0,0584	+9,3	-15,5	+24,8	+7,8	-18,3	-10,5
-13,1	+2,3	+0,1	+2,4	-0,0635	+0,8	-11,3	+12,1	+2,3	-3,8	-1,5
-12,0	-1,1	+0,1	-1,0	-0,0583	+0,1	-16,2	+16,3	-1,0	+1,7	+0,7
-7,7	+13,8	0,0	+13,8	-0,0371	+13,5	+2,5	+11,0	-2,5	-13,3	-15,8
-4,1	+3,6	0,0	+3,6	-0,0200	+3,1	-1,1	+4,2	+1,8	-1,9	-0,1
							+83,3			**-27,7**
						$f_x = -0{,}082$			$f_y = +0{,}028$	

Індивідуальні завдання до виконання

Вихідні дані про опорну геодезичну мережу

Дирекційний кут		Координати вихідних пунктів, м		
Лінія	Величина	№ точки	x	y
п.п.*1624 – 1*	167° 26′ 35″	*1*	52321,058	84775,211
7 – п.п.*3217*	352° 04′ 09″	*7*	53275,096	85799,870

Результати польових вимірів

№ точки	Кут повороту (лівий) β	Поправка до варіанта	Назва лінії	Довжина лінії $s, м$	Точність польових вимірів
1	76° 15′ 23″	$+0,1'' \cdot n$	1-2	354,125	$m_\beta = 2,0''(+0,1'' \cdot n)$
2	156° 28′ 54″		2-3	411,235	
3	211° 07′ 07″		3-4	188,231	Коефіцієнт випадкового впливу лінійних вимірів $\mu = 0,00025$
4	204° 51′ 08″		4-5	279,322	
5	73° 21′ 00″		5-6	365,504	
6	219° 54′ 08″		6-7	106,840	
7	142° 39′ 44″				

Зміст

Список використаних джерел

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.

2. Войтенко С.П., Шульц Р.В., Кузьмич О.Й., Кравченко Ю.В. Математичне оброблення геодезичних вимірів: підручник / за ред. С. П. Войтенка. – К.: Знання, 2015. – 654 с.

3. Жук О.П., Ковальов М.В., Бодак Є.В. Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт з дисципліни студентами факультету землевпорядкування. – НУБіП України. – 2012. – 46 с.

4. Жук О.П., Ковальов М.В., Кривов'яз Є.В. Конспект лекцій з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів». – НУБіП України. – 2013. – 56 с.

5. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник. Львів: Растр-7, 2007.

6. Метешкін К.О., Шаульський Д.В. Математична обробка геодезичних вимірів: навч. Посібник. Х.: ХНАМГ, 2012. 176 с.

7. Рижок З.Р.,Полковська Л.Л., Ступень Р.М., Колодій П.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Навчальний посібник. Львів: « Галицька видавнича спілка», 2020. 180 с.

8. Боровий В.О. , Літнарович Р.М. , Мардієва Л.П. Особливості зрівноваження лінійно-кутової мережі з недостатньою кількістю вимірів . Інженерна геодезія. Випуск 45, - К.:, КНУБА, 2001.

9. Літнарович Р.М. Геодезія. .Планові державні геодезичні мережі. Конспект лекцій. – Чернігів: ЧДІЕіУ, 2002.

10. Тадєєв О.А. Математична обробка геодезичних вимірів: конспект лекцій для студентів напряму 0801 «Геодезія , картографія та землеустрій». – Рівне: Вид. НУВГП., 2013 –146 с.

11. Чумаченко О.М., Математичні методи і моделі в землеустрої: підручник /О.М.Чумаченко, А.Г. Мартин, Є.В. Кривов'яз – К.: «ТОВ Компринт», 2016. – 630 с.

12. 2. Chumachenko O.,Mathematical methods and models in land management: Навчальний посібник / Martyn A., Chumachenko O., Kryvoviaz Ye., Kharchuk N., Dubovik O. K.: - К.: «ТОВ Компринт», 2018. - 632 с.