Національний університет біоресурсів
і природокористування України

ЗБІРНИК

ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ
XIV МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
«ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»
з нагоди 93-ї річниці від дня народження доктора технічних наук, професора, академіка АН ВШ України, Обухової Віолетти Сергіївни (1926-2005)

29 березня 2019 року

м. Київ

УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ТИПУ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ДИСКРЕТНОГО НЕВПОРЯДКОВАНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

В.І. Черняк
Кременецький лісотехнічний коледж

З поняттям векторного поля ***a*** на площині класична теорія зв’язує лінійну систему диференціальних рівнянь виду [1]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{B}\boldsymbol{x} \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\}$ – точка на площині;

B – матриця 2х2.

Залежно від власних значень $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$ матриці ***B*** в працях [1, 2] розглядають такі типи особливих точок (рис.1):

1. Якщо $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$ мають дійсні значення та
   - мають різні знаки, $\boldsymbol{\lambda\mu<0}$ – *сідло*;
   - мають однакові знаки, $\boldsymbol{\lambda\mu>0}$ – *вузол*;
   - $\boldsymbol{\lambda=0}$ – *сідло-вузол*;
2. Якщо $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$ мають комплексні значення, $\boldsymbol{\lambda=\alpha+iw;}$
   - $\boldsymbol{\alpha=0}$ – *центр*;
   - $\boldsymbol{\alpha\neq0}$ – *фокус*.

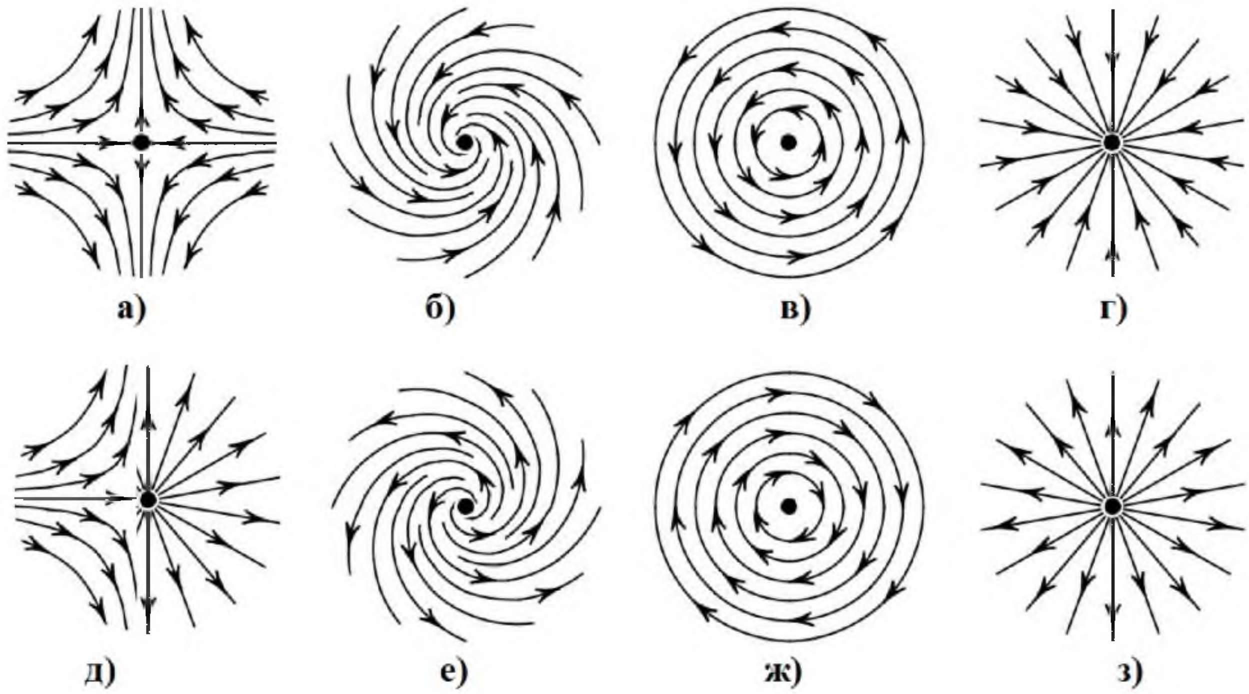

Рис. 1. Фазові портрети особливих точок в класичній теорії векторного поля на площині: а – *сідло*; б – *стійкий фокус*; в, ж – *центр*; г – *стійкий вузол, поглинач*; д – *сідло-вузол*; е – *нестійкий фокус*; з – *нестійкий вузол*, *джерело.*

Якщо вектори поля направлені до особливої точки, то така точка називається *стійкою* (на рис. 1 це буде *стійкий фокус* і *стійкий вузол)*, якщо вектори направлені від особливої точки – нестійкою (на рис. 1 це буде *нестійкий фокус* і *нестійкий вузол*) [1, 3].

В праці [3] нестійкий вузол називають джерелом, а стійкий – поглиначем.

В працях [1, 2] та в багатьох інших описані методи визначення типу особливих точок векторного поля, заданого континуально. Проте аналіз літератури з прикладної геометрії показав повну відсутність розроблених методів визначення типу особливих точок для дискретно представлених векторних полів, тому метою даної роботи є розробка алгоритму визначення типу особливих точок дискретно представленого на нерівномірній сітці векторного поля в двовимірному просторі.

Вихідними даними для розробки алгоритму є координати особливої точки, координати точок поля та координати векторів в цих точках. Для спрощення умовно прийнято, що особлива точка знаходиться в початку координат ***O***.

Пропонується два способи визначення типу особливих точок.

Перший спосіб ґрунтується на візуальній оцінці фазових траєкторій особливих точок (рис. 1) і визначенні кута A_1 між вектором поля a_1 в точці ***1*** і вектором r_1, протилежним до радіус-вектора цієї точки поля (рис. 2).

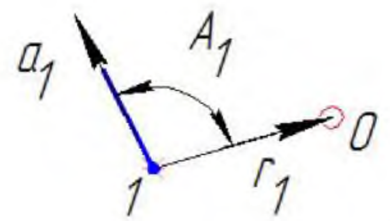

Рис. 2 До визначення кута між радіус-вектором точки поля та вектором поля в цій точці

Значення кута A_1 може бути в межах від -180° до 180°. Кут A_1 вважатимемо додатнім, якщо вектор a_1 обертається навколо точки ***1*** відносно вектора r_1 проти руху годинникової стрілки.

Візуальна оцінка фазових траєкторій особливих точок дозволяє стверджувати, що:

а) Якщо кути A_1 всіх точок поля мають один і той самий знак та рівні 90°, то така особлива точка є *центром;*

б) Якщо кути A_1 всіх точок поля мають один і той самий знак та менші 90°, то така особлива точка є *стійким фокусом;*

в) Якщо кути A_1 всіх точок поля мають один і той самий знак та більші 90°, то така особлива точка є *нестійким фокусом;*

г) Якщо кути A_1 всіх точок поля мають різні знаки та менші 90°, то така особлива точка є *стійким вузлом;*

д) Якщо кути A_1 всіх точок поля мають різні знаки та більші 90°, то така особлива точка є *нестійким вузлом;*

е) Якщо більшість кутів A_1 направлені в одну сторону, то така особлива точка є *сідлом-вузлом;*

є) Якщо попередні умови не виконуються, то така особлива точка є *сідлом;*.

Вище згадані висновки справедливі тільки в тому випадку, якщо координати особливої точки є коректними. Якщо ж координати особливої точки вказані з деякою похибкою, то в твердженнях ***а-д*** слова ”всіх точок” необхідно замінити на „більшість точок”, тому що змінюється при цьому величина і знак кута A_1 деяких точок поля. Шляхом обчислювальних експериментів встановлено, що під терміном більшість точок – це мінімум 80 відсотків від загальної кількості точок поля.

Тому алгоритм визначення типу ізольованої особливої точки першим способом буде таким.

1. Визначаємо окремо значення і знак кута A_1 для всіх точок поля
2. Визначаємо кут A як середнє значення кутів A_1 за формулою

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_1 , \qquad (2)$$

де n – кількість точок поля.

Цей крок дозволяє трохи згладити неточність визначення координат особливої точки.

3. Якщо кути більшості точок поля мають один і той самий знак та кут A рівний $90^o \pm \Delta A$, то така особлива точка є *центром*.
4. Якщо кути більшості точок поля мають один і той самий знак та кут A менший $90^o - \Delta A$, то така особлива точка є *стійким фокусом*.
5. Якщо кути A_1 більшості точок поля мають один і той самий знак та кут A більший $90^o + \Delta A$, то така особлива точка є *нестійким фокусом*.
6. Якщо кути більшості точок поля мають різні знаки та кут A менший $90^o - \Delta A$, то така особлива точка є *стійким вузлом*.
7. Якщо кути більшості точок поля мають різні знаки та кут A більший $90^o + \Delta A$, то така особлива точка є *нестійким вузлом*.
8. Якщо більшість кутів A_1 направлені в одну сторону, то така особлива точка є *сідлом-вузлом*.
9. Якщо попередні умови не виконуються, то така особлива точка є *сідлом*.

Шляхом обчислювальних експериментів встановлено, що похибка для кута становить $\Delta A \approx 5^o$.

Другий спосіб ґрунтується на застосуванні матриці ***B*** з формули (1).

В праці [1] матриця ***B*** обчислюється за формулою

$$B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Для дискретно представлених полів формула (3) набуває вигляду

$$B = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{2x} - a_{1x}}{2\partial x} & \dfrac{a_{4x} - a_{3x}}{2\partial y} \\ \dfrac{a_{2y} - a_{1y}}{2\partial x} & \dfrac{a_{4y} - a_{3y}}{2\partial y} \end{vmatrix} . \qquad (4)$$

В (4) a_{1x}, … , a_{4x}, a_{1y}, …, a_{4y} – значення координат векторів поля у вузлах сітки ***1-4*** (рис. 3) з центром в особливій точці ***O*** (початок координат); ∂x, ∂y відхилення вершин сітки від особливої точки по відповідних осях.

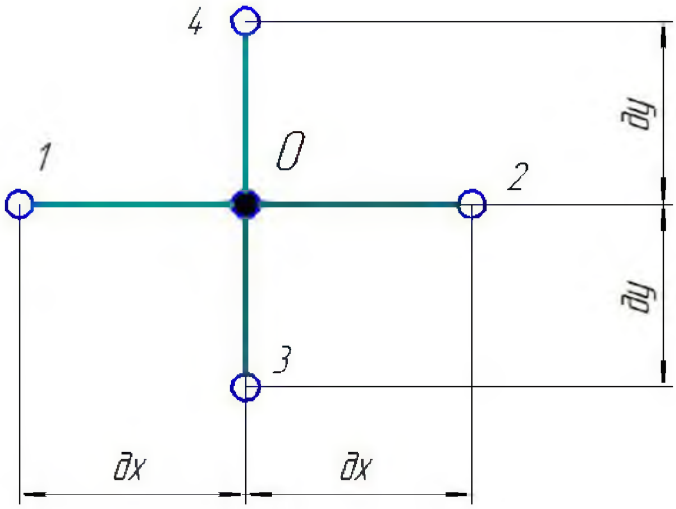

Рис. 3 Фрагмент прямокутної сітки з центром в особливій точці.

Ідея полягає в тому, що спочатку на особливу точку накладається прямокутна сітка і методом інтерполяції визначаються координати векторів поля у вершинах 1, 2, 3 і 4 цієї сітки, а потім за формулою (4) визначається матриця ***B*** та її власні значення $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\mu}$. За цими значеннями визначаємо тип особливої точки згідно класифікації, розробленої в працях [1, 2], яка описана на початку статті.

Перевірка адекватності результатів роботи даних алгоритмів проводилась таким чином. З праць [1, 2] були запозичені аналітичні рівняння координат векторів полів і відповідно визначеними типами особливих точок. В точках нерівномірної сітки було визначено координати векторів полів за наведеними вище рівняннями, після чого автором за допомогою розроблених алгоритмів проводилось визначення типу особливої точки. Результати виконання алгоритмів повністю співпали з аналітично визначеними типами особливих точок при умові, що координати особливої точки є точними. Якщо ж координати особливої точки задати з відхиленнями, то спостерігались некоректні результати роботи алгоритмів, які наведені в таблиці 1.

Як видно з таблиці 1, при не великих відхиленнях особливої точки від дійсного положення, тільки другий спосіб некоректно визначає особливу точку типу *сідло-вузол*. При більших відхиленнях обидва способи некоректно визначають особливі точки типів *нестійкий фокус* і *стійкий фокус*.

Таблиця 1. Типи особливих точок, які визначені авторськими способами та аналітично

Дійсні типи особливих точок	Номер способу	Типи особливих точок, які визначені розробленими способами, при координатах особливої точки		
		{0, 0}	{0.5, 0.5}	{1, 1}
центр	1 2	центр центр	центр центр	центр центр
стійкий фокус	1 2	стійкий фокус стійкий фокус	стійкий фокус стійкий фокус	*стійкий вузол* *стійкий вузол*
нестійкий фокус	1 2	нестійкий фокус нестійкий фокус	нестійкий фокус нестійкий фокус	*нестійкий вузол* *нестійкий вузол*
стійкий вузол	1 2	стійкий вузол стійкий вузол	стійкий вузол стійкий вузол	стійкий вузол стійкий вузол
нестійкий вузол	1 2	нестійкий вузол нестійкий вузол	нестійкий вузол нестійкий вузол	нестійкий вузол нестійкий вузол
сідло-вузол	1 2	сідло-вузол сідло-вузол	сідло-вузол *стійкий вузол*	сідло-вузол *стійкий вузол*
сідло	1 2	сідло сідло	сідло сідло	сідло сідло

Висновки. В статті запропоновано алгоритм визначення типу особливих точок дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в двовимірному просторі. Подальші дослідження можна спрямовати на розробку алгоритмів визначення типу особливих точок дискретно представленого векторних полів в тривимірному і багатовимірному просторах.

Література

1. *Илья Щуров.* Обыкновенные дифференциальные уравнения (Интерактивный учебник) – Електронний ресурс режим доступу: http://math-info.hse.ru/odebook/chapter/label/chap:10prim:linearization/

2. *Медведева Н. Б.* Особые точки векторных полей на плоскости [Текст] / Н.Б. Медведева // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 5. – С. 121–127 – Електронний ресурс режим доступу: http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9905_121.pdf

3. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А.Гольдфайн – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132с.