Національний університет біоресурсів
і природокористування України

ЗБІРНИК

ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ
XIV МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
«ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»
з нагоди 93-ї річниці від дня народження
доктора технічних наук, професора, академіка АН ВШ України,
Обухової Віолетти Сергіївни
(1926-2005)

29 березня 2019 року

м. Київ

УДК 514.18

ЕТАПИ РОЗВИТКУ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич
Національний університет біоресурсів і природокористування України,
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

Постановка проблеми. Розвиток методології аналітичного опису мінімальних поверхонь є важливою проблемою геометричного моделювання. Умова рівності нулю середньої кривини у всіх точках мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену плоску або просторову лінію, є необхідною умовою мінімуму площі. Геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість. Періодичні мінімальні поверхні використовуються: для побудови пористої архітектури полімерів та кераміки [1], будівельних [2], фільтрувальних матеріалів [3], у галузі тканинної інженерії [2] та для проектування металевих стільникових листових матеріалів [4]. Стільникові матеріали, утворені на основі періодичних мінімальних поверхонь, характеризуються рівномірним розподілом напружень при стискуванні та оптимізованою протидією до руйнування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія мінімальних поверхонь має більш ніж двохсотлітню історію. У тій чи іншій мірі задачами утворення мінімальних поверхонь займалися майже усі відомі математики. У монографії У. Мікса (W. Meeks III) та Й. Переса (Joaquin Perez) «A survey on classical minimal surface theory» [6], опублікованої у 2012 році, показано основні напрямки сучасних досліджень, огляд результатів та дискусійних питань топології мінімальних поверхонь

Як відомо, задача знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену лінію, зводиться до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [5, с. 683]. Тому одним із напрямків сучасних досліджень є удосконалення чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа.

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь існує інший напрям наукових досліджень, пов'язаний із використанням властивостей функцій комплексної змінної, що дозволяє отримати параметричні рівняння мінімальних поверхонь та досліджувати їх диференціальні характеристики.

Мета досліджень. Здійснити огляд основних етапів розвитку класичної теорії мінімальних поверхонь, вирізнити проблематику її результатів та дискусійних питань.

Результати дослідження та їх обговорення. Перші дослідження мінімальних поверхонь відомі з праць Ж. Лагранжа (J. Lagrange), який розглянув *варіаційну задачу*: «Знайти поверхню найменшої площі, яку натягнуто на заданий контур» (1786 р.). Ж. Лагранж зробив висновок, що поверхня найменшої площі, задана функцією $z = z(x;\, y)$, повинна задовольняти рівняння Ейлера-Лагранжа [М2, с. 683]:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

Г. Монж (G. Monge) в 1776 році виявив, що умова мінімальності площі приводить до умови рівності нулю середньої кривини H поверхні в усіх її точках. Тому поверхні із нульовою середньою кривиною H почали називати «мінімальними», хоча рівність $H = 0$ є тільки необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні.

Диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа (1) у загальному випадку не інтегрується, тому задачі аналітичного опису мінімальних поверхонь стимулювали розвиток багатьох суміжних областей математики. У 1784 році Г.Монж і у 1787 році А. Лежандр (A. Legendre) запропонували найперші загальні методи інтегрування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа, які відомі у вигляді формул Монжа, отриманих за допомогою комплексних характеристик цього рівняння [М2, с. 683]:

$$\begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau); \\ y = B(t) + B_1(\tau); \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases} \qquad (2)$$

де: t і τ – комплексні змінні;

$A(t); B(t); C(t); A_1(\tau); B_1(\tau); C_1(\tau)$ – *голоморфні* функції.

Вказані голоморфні функції $A(t); B(t); C(t); A_1(\tau); B_1(\tau); C_1(\tau)$ повинні задовольняти умови:

$$A'^2(t) + B'^2(t) + C'^2(t) = 0;\quad A_1'^2(\tau) + B_1'^2(\tau) + C_1'^2(\tau) = 0.$$

Формули Монжа довгий час не застосовувалися з причини недостатнього розвитку теорії функцій комплексної змінної і нові результати аналітичного опису мінімальних поверхонь почали з'являтися тільки на початку 30–х років XIX століття. У 1832 році С. Пуассон (S. Poisson) представив розв'язок варіаційної задачі Лагранжа у випадку, якщо край (лінія) поверхні наближений до плоскої кривої. Пізніше, до відомих мінімальних поверхонь – катеноїда, яку відкрив ще у 1774 році Л. Ейлер (L. Euler), та гелікоїда (1776 рік, Ж. Меньє, J. Meusnier) було додану третю мінімальну поверхню – поверхню *Шерка* (H. Scherk, 1834). У 1842 році Е. Каталан (E. Catalan) довів, що гелікоїд – єдина лінійчата мінімальна поверхня [М2, с. 684].

У 1844 році було поставлено та розв'язано *проблему Бйорлінга* (Björling problem) – знайти мінімальну поверхню, що проходить через дану незамкнуту аналітичну криву ℓ, із заданими дотичними площинами до неї. Є. Бйорлінгом було доведено, що розв'язок цієї проблеми завжди існує та в явному вигляді виражається за допомогою *формули Шварца* (H. Schwarz) для мінімальних поверхонь. Було доведено, що завжди можна знайти аналітичний опис мінімальної поверхні, якщо відомо одну з її спеціальних ліній (геодезичних, асимптотичних або ліній кривини). У 1866 році опубліковано формули представлення Вейєрштрасса-Еннепера (Weierstrass-Enneper representation), які аналітично описують мінімальну поверхню $S(x, y, z)$ за допомогою голоморфних функцій $f(w)$ та $g(w)$, визначених у крузі або на всій площині зміни внутрішніх ізометричних (або ізотермічних) координат (u, v): $w = u + i \cdot v$ [5, с. 685]:

$$\begin{cases} x(u,v) = \mathrm{Re}\int\limits_0^w f(w)\cdot\left(1 - g(w)^2\right)\cdot dw; \\ y(u,v) = \mathrm{Re}\int\limits_0^w i\cdot f(w)\cdot\left(1 + g^2(w)\right)\cdot dw; \\ z(u,v) = 2\cdot\mathrm{Re}\int\limits_0^w f(w)\cdot g(w)\cdot dw. \end{cases} \tag{3}$$

Ці формули визначають *регулярну* мінімальну поверхню, якщо функції $f(w)$ та $g(w)$ не мають спільних нулів функції. Формули Вейєрштрасса дали можливість аналітично описати та вивчити диференціальні властивості багатьох мінімальних поверхонь, зокрема алгебраїчних, утворених за допомогою алгебраїчних функцій $f(w)$ і $g(w)$.

У 1874 році Г. Шварц (H.A. Schwarz) представив формулу для аналітичного опису мінімальних поверхонь у *ізометричних* (або *ізотермічних*) координатах (u,v) у вигляді:

$$\bar{r}(w) = \bar{r}(u + i\cdot v) = \mathrm{Re}\left[\bar{F}(w) - i\cdot\int\limits_0^w \bar{n}(w)\cdot d\bar{F}(w)\right], \tag{4}$$

де $\bar{F}(w)$ та $\bar{n}(w)$– тривимірні вектори з голоморфними координатами, які співпадають відповідно з вектором $\bar{r}(u;\,0)$ та з одиничним вектором нормалі $\bar{n}(u;\,0)$ до заданої мінімальної поверхні.

Якщо $\mathrm{Im}\,w = 0$, то вказана формула Шварца (1.4) дозволяє знайти розв'язок задачі Бйорлінга у явному вигляді [5, с. 684].

У 1878 році С.Лі (S. Lie) інтерпретував формули Монжа (2), поставивши у відповідність кожній мінімальній поверхні з гармонічним радіус-вектором $\bar{r}(w)$ комплексно-аналітичну криву [5, с. 684]:

$$z = \bar{R}(w) \in C^3, \;\; \mathrm{Re}\,\bar{R}(w) = \frac{1}{2}\bar{r}(w) \tag{5}$$

С.Лі представив мінімальну поверхню як поверхню переносу кривої $\bar{R}(w)$ та її комплексно-спряженої кривої, що стало початком встановлення зв'язків між теорією мінімальних поверхонь і теорією аналітичних кривих. Праці К.Вейєрштрасса, С. Лі, Б. Рімана, Г. Шварца та ін. у кінці XIX ст. привели до використання в теорії мінімальних поверхонь методів теорії функцій комплексної змінної.

Реалізація мінімальних поверхонь у вигляді мильних плівок, натягнутих на дротові каркаси різноманітної форми, яку дослідно здійснив у 1848 році Ж.Плато (J. Plateau) визначила фізичний зміст задачі мінімізації області з заданим граничним контуром. Цю задачу стали називати *задачею Плато*.

Серед задач аналітичного опису мінімальних поверхонь слід вирізнити *задачу Жергонна* (J. Gergonne) або *задачу про мінімальну поверхню з довільною границею*: знайти мінімальну поверхню, якщо частину її границі задано, а інша частина границі розміщується на деякій заданій поверхні. Початкові результати розв'язання задачі Жергонна включають випадки, коли задану частину границі мінімальної поверхні утворено відрізками прямих, а інша її частина знаходиться на заданих площинах.

Наступний «золотий час» дослідження мінімальних поверхонь було започатковано з початку XX століття видатними математиками: А. Корном (A. Korn), С.М. Бернштейном, Г. Лібманом (H. Liebman), Р. Курантом (R. Courant), Т. Радо (T. Rado) та ін. У цей час задачі теорії мінімальних поверхонь розв'язувалися методами теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. У 1915 році С.М. Бернштейн [6] довів відому теорему про «мінімальні графіки»: якщо $f(x;\,y)$ – розв'язок рівняння мінімальних поверхонь, визначених на усій площині, то $f(x;\,y)$ – лінійна функція. Розвиток багатовимірної теорії мінімальних поверхонь пов'язаний із спробами узагальнити теорему Бернштейна у випадку вищих розмірностей. Класичну задачу Плато: знайти у тривимірному евклідовому просторі поверхню мінімальної площі заданого топологічного виду, обмежену заданою кривою, – було розв'язано Дж. Дугласом (J. Douglass) у 1939 році.

У 60-х роках XX століття було запропоновано абсолютно новий підхід до проблеми Плато, при якому спочатку мінімум площі досліджувався серед більш загального, ніж поверхні, класу об'єктів. Потім було доведено твердження, що існує мінімізуючий об'єкт, який і є у дійсності поверхнею. У роботі Е.Райфенберга [7] у ролі об'єктів розглядаються компактні підмножини, які мають задану границю, і мінімізується їх двовимірна хаусдорфова міра. Зокрема, цей підхід, щодо дослідження регулярності мінімальних поверхонь, реалізовано у роботах [8,9]. За наукові роботи у цьому напрямку Карен Уленбек (Karen Keskulla Uhlenbeck) нагороджена у 2019 році Абелевою премією з математики Академії наук Норвегії (Abel Prize).

Використання комп'ютерних технологій було вирішальним для відкриття у вісімдесятих роках XX ст. нових прикладів повних мінімальних поверхонь без самоперетинів. Пошук нових мінімальних поверхонь здійснювали: Eric W.Weisstein, L.P.M. Jorge, W. Meeks III, A. Costa, R. Osserman, O. Lichtenfels, S.Hildebrandt, E.R. Neovius, G. Thomsen, A. Schoen та інші. Велика кількість цих відкритих прикладів призвела до нових припущень щодо класифікації мінімальних поверхонь із заданою топологією [6].

Висновки. Серед основних напрямків сучасних досліджень та дискусійних питань топології мінімальних поверхонь можна вирізнити:

– проблеми топологічної класифікації мінімальних поверхонь у просторі;

– питання єдиності одно періодичних мінімальних поверхонь Шерка [6];

- гіпотеза Ж.С. Адамара (J.S. Hadamard) та задача Калабі-Яу (Calabi-Yau) для мінімальних поверхонь, яка базується на висновках М. Надірашвілі, щодо існування повної обмеженої мінімальної поверхні від'ємної гаусової кривини у трьохвимірному евклідовому просторі [6];

- теорія Колдінга-Мінікоцці (T. H. Colding, W. P. Minicozzi II) вкладених (без самоперетинів) мінімальних поверхонь;

- дослідження асимптотичної поведінки мінімальних кільцевих країв із нескінченною гаусовою кривиною.

Література

D'yachenko S.V., Lebedev L.A., Sychev M.M. Physicomechanical Properties of a Model Material in the Form of a Cube with the Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces of the Gyroid Type. Technical Physics. 2018. Vol. 63(7). P. 984–987. Available at: https://doi.org/10.1134/S1063784218070101

1. Al-Ketan O., Adel Assad M., Abu Al-Rub R. K. Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures. *Composite Structures*. 2017. Vol. 176. P. 9–19. Available at: https://doi.org/ 10.1016/ j.compstruct.2017.05.026

2. Navya Thomas, Nurshaun Sreedhar, Oraib Al-Ketan, Reza Rowshan, Rashid K. Abu Al-Rub, Hassan Arafat. 3D printed triply periodic minimal surfaces as spacers for enhanced heat and mass transfer in membrane distillation. *Desalination*. 2018. Vol. 443. P. 256 – 271. Available at: https://doi.org/10.1016/j.desal.2018.06.009

3. Zhang L., Feih S., Daynes S., Chang S., Wang M. Yu., Wen Ju.W., Lu F. Energy absorption characteristics of metallic triply periodic minimal surface sheet structures under compressive loading. *Additive Manufacturing*. 2018. Vol. 23. P. 505–515. Available at: https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.08.007

Математическая энциклопедия [Текст] / [гл. ред. И. М. Виноградов]. – Т. 3. – М.: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982. – С. 683–690.

4. Meeks III W. H., Perez J. A survey on classical minimal surface theory: University lecture series; vol.60. 2012. Available at: http://www.ugr.es/~jperez/ papers/monograph-book2.pdf

5. Reifenberg E. R. Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type. *Acta Math.*1960. No.104. P.1—92. doi:10.1007/ BF02547186. https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485889150

6. Sacks Jonathan, Uhlenbeck Karen. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Annals of Mathematics*. Second Series. 1981. Vol. 113 (1). P. 1–24. doi:10.2307/1971131

7. Schoen R., Uhlenbeck K. A regularity theory for harmonic maps. *Journal of Differential Geometry*. 1982. Vol. 17 (2). P. 307–335. doi:10.4310/jdg/1214436923