

В.Є. Лукін, В.М. Теплюк, В.В. Григораш

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ АГРАРНОГО СПРЯМУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів

третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти,
які навчаються за спеціальністю 151- Автоматизація та комп'ютерно-
інтегровані технології та G7- Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво
Кваліфікація: PhD доктор філософії

Київ – 2025

УДК 681.51
ББК 30.10.73

*Рекомендовано вченою радою
Національного університету біоресурсів і
природокористування України як посібник для здобувачів
третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти, що навчаються за спеціальністю 151-
Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології та G7 «Автоматизація, комп'ютерно-
інтегровані технології та робототехніка».
(Витяг з протоколу № 13 від 26 червня 2025 р.)*

Рецензенти:

Юрченко О.М., доктор технічних наук, професор (ІЕД НАН України)

Манько О.О., доктор технічних наук, професор (КФКЗ України)

Шворов С.А., доктор технічних наук, професор (НУБіП України)

«Особливості моделювання та ідентифікації об'єктів аграрного спрямування»
В.Є. Лукін, В.М. Теплюк, В.В. Григоращ. Навчальний посібник – Київ:
Редакційно-видавничий відділ НУБіП України. 2025. – 268 с.

ISBN 978-617-8598-96-3

У навчальному посібнику викладені теоретичні основи навчальної дисципліни «Особливості моделювання та ідентифікації об'єктів аграрного спрямування». В лекційному курсі приділена увага особливостям моделювання та ідентифікації об'єктів, які використовуються в АПК. Розглянуто класифікацію моделей і їх використання при вирішенні конструктивних, технологічних задач і створенні систем автоматизації, а також показана розробка математичних моделей об'єктів керування в статистиці аналітичними методами. Описані аналітичні методи розробки динамічних моделей об'єктів керування з урахуванням випадкових процесів. Описана структурна ідентифікація і розглянута її класифікація. Вивчаються методи і особливості вимірювання і методи оброблення результатів вимірювання а також планування та обробка результатів факторного експерименту. Наведені алгоритми і програми на MathCad і Simulink MATLAB методів розв'язання поставлених задач і завдання для їх виконання в лабораторних роботах, а також приклади виконання самостійної роботи.

Матеріали навчального посібника призначені для використання при підготовці здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти, що навчаються за спеціальністю 151-Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології та G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво. Кваліфікація: PhD доктор філософії.

УДК 681.51
ББК 30.10.73

© В.Є. Лукін, В.М. Теплюк, В.В. Григоращ, 2025
© НУБіП України, 2025

СПИСОК ПРИЙНЯТИХ СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ

АПК – Агропромисловий комплекс
АСК – Автоматизована система керування
АД – Асинхронний двигун
БГУ – Біогазова установка
ВО – Виконавчий орган
ДЕ – Джерело енергії
ЕОМ – електронно обчислювальна машина
ЕД – Електродвигун
ЕП – Електричний пристрій
ІМ – Імітаційна модель
МНК – метод найменших квадратів
МП – Механічний пристрій
ПК – Пристрій керування
ПФЕ – Повний факторний експеримент
РКД – речовини колоїдної дисперсності
САУ – система автоматичного управління
САК – Система автоматичного керування
СВ – сонячний водонагрівач
СК – сонячний колектор
ТОК – технологічний об'єкт керування
ТОУ – Технологічний об'єкт управління
рН – водневий показник

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ТА СФЕРА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ	9
1.1. Вступ до моделювання	9
1.2. Постановка задачі і завдання математичного моделювання об'єктів керування.....	10
1.3. Види моделей і їх призначення.....	13
1.4. Етапи математичного моделювання.....	18
1.5. Класифікація математичних моделей	19
Контрольні запитання	21
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ В СТАТИЦІ АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ.....	22
2.1. Вступ до статичних моделей в керуванні технологічними процесами	22
2.2. Розробка статичних моделей в механіці і електрифікації.....	24
2.3. Використання в моделюванні рівнянь балансів мас і тепла	27
2.4. Використання в моделях рівнянь теплопередачі	30
Приклад 2.1. Побудова статичної математичної моделі повітряного ресивера.....	31
Контрольні запитання	36
РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ.....	37
3.1. Динамічний режим об'єктів моделювання.....	37
3.2. Динамічні характеристики об'єктів моделювання	38
3.3. Перетворення Лапласа і його властивості	40
3.4. Використання частотних характеристик для моделювання динаміки об'єктів.....	42
3.5. Використання ступінчастих збурень для отримання передатних функцій.....	45
3.6. Динамічні властивості об'єктів керування.....	48
Контрольні запитання	51
РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗРОБКИ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	53
4.1. Загальні особливості аналітичного і статистичного методів отримання динамічних характеристик об'єктів керування.....	53
4.2. Розробка динамічних моделей аналітичним методом.....	55
4.3. Статистика в динамічних моделях	57
4.3.1. Випадкові процеси в динамічних моделях.....	57
4.3.2. Кореляційна функція випадкового процесу	59
4.3.3. Спектральний розклад стаціонарної випадкової функції	61
4.3.4. Перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою	66
Контрольні запитання	71

РОЗДІЛ 5. СТРУКТУРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ	72
5.1. Вступ до ідентифікації.....	72
5.2. Особливості структурної ідентифікації. Спрощення властивостей системи	72
5.3. Ідентифікація нелінійних систем.....	80
5.4. Класифікація методів ідентифікації	82
5.5. Використання критеріїв ідентифікації	85
5.6. Класи методів ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів	87
5.7. Методи оцінювання результатів ідентифікації	89
Контрольні запитання	92
РОЗДІЛ 6. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ.....	93
6.1. Загальні поняття про вимірювання.....	93
6.2. Види похибок.....	95
6.2.1. Похибки рівно точних вимірювань	97
6.2.2. Розподіл випадкових значень вимірів.....	99
6.2.3. Оцінка надійності вимірів	103
6.3. Кореляція між параметрами дослідів.....	105
Контрольні запитання	106
РОЗДІЛ 7. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ	108
7.1. Побудова математичних моделей по експериментальних даних	108
7.2. Послідовність процесу експериментальної ідентифікації	110
7.3. Планування експерименту при ідентифікації	114
7.4. Ідентифікація за допомогою регресійних методів.....	119
Контрольні запитання	125
РОЗДІЛ 8. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ	126
8.1. Вступ до планування експерименту	126
8.2. Повний факторний експеримент першого порядку.....	127
8.3. Оброблення ПФЕ першого порядку	129
8.4. Плани другого порядку.....	132
8.5. Рототабельні плани другого порядку	135
Контрольні запитання	137
РОЗДІЛ 9. ПОБУДОВА ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ І ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ	138
9.1. Аналіз отриманого рівняння регресії по результатах ПФЕ першого порядку	138
9.2. Прийняття рішень в залежності від адекватності рівняння і значимості коефіцієнтів.....	138
9.3. Круте сходження по поверхні відгуку	142
9.3.1. Оптимізація градієнтним методом на основі ПФЕ.....	142
9.3.2. Розрахунок крутого сходження	143
9.4. Приклад розв'язання задачі з рухом до оптимуму по градієнту.....	146
9.4.1. Алгоритм розв'язання задачі оптимізації розмірів збірника соку	146

Контрольні запитання	150
РОЗДІЛ 10. ОПТИМІЗАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ ПО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНИМ МОДЕЛЯМ.....	151
10.1. Поняття про оптимізацію	151
10.2. Постановка задачі оптимізації	152
10.3. Деякі властивості критерію оптимальності.....	154
10.4. Задачі багатокритеріальної оптимізації	156
10.5. Постановка задачі багато параметричної оптимізації.....	162
10.6. Точність, ефективність обчислень і методи рішення задач оптимізації функції декількох змінних.....	167
Контрольні запитання	168
ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ.....	169
Лабораторна робота 1 на тему: Знаходження квадратичної математичної моделі по даних двох параметричного пасивного експерименту в середовищі MatCad.....	169
Лабораторна робота 2 на тему: Оптимізація результатів досліджень з використанням багатокритеріальної цільової функції	174
Лабораторна робота 3 на тему: Моделювання динамічного режиму двох ємнісного повітряного ресивера з використанням MathCad.....	187
Лабораторна робота 4 на тему: Моделювання і розрахунок перехідних процесів в електричній схемі пристрою з використанням MathCad.....	193
Лабораторна робота 5 на тему: Постановка плану експерименту другого порядку і оброблення результатів досліджень з використанням пакету MathCad	199
Лабораторна робота 6 на тему: Дослідження технологічних параметрів клімату на фермі ВРХ за допомогою математичної моделі з використанням пакетів MathCad і Simulink MATLAB	210
Лабораторна робота 7 на тему: Імітаційне моделювання метаногенеза в апаратах БГУ в середовищі Simulink MATLAB	220
Лабораторна робота 8 на тему: Моделювання процесу приготування вологих кормів для свиней як об'єкта керування	228
САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ	235
Самостійна робота 1 на тему: Вивчення додаткової бібліотеки Simulink Extras в середовищі Simulink MATLAB для реалізації одно параметричної системи регулювання.....	235
Самостійна робота 2 на тему: Вивчення додаткової бібліотеки Simulink Extras в середовищі Simulink MATLAB для реалізації двох параметричної системи регулювання.....	245
Самостійна робота 3 на тему: Вивчення аналітичного конструювання регуляторів за допомогою класичного варіаційного обчислення на математичній моделі, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку.....	255
Самостійна робота 4 на тему: Вивчення методу динамічного програмування для аналітичного конструювання регулятора керування електродвигуном дробарки.....	261
ЛІТЕРАТУРА.....	267

Вступ

Сучасний математичний апарат і вміння створювати імітаційні моделі і проводити дослідження на них з використанням сучасних пакетів прикладних математичних програм дозволяють аспірантам і науковцям успішно проводити дослідження, вивчати об'єкти керування і розробляти ефектні і економічні системи їх автоматизації. Вміння створювати і проводити повний факторний експеримент за планом дозволяє економити значні матеріальні і енергетичні ресурси, ефективно і швидко отримувати математичні моделі для подальшого їх використанні в дослідженнях і практиці сільськогосподарських виробництв.

Дисципліна «Особливості моделювання та ідентифікації об'єктів аграрного спрямування». важлива для здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальністю G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» при формуванні моделей об'єктів дослідження і плануванні експериментів, які будуть проводитись на об'єкті автоматизації. Вона тісно пов'язана із структурою виробництва АПК, його технологією і системою керування цим виробництвом.

Моделювання за допомогою імітаційних моделей являється ефективним засобом, який широко використовується при розробці і керуванні технологічними процесами, при створенні і втіленні автоматичних і автоматизованих систем керування, виборі кращих технологічних структур і схем виробництва, кращих технологічних режимів в окремих апаратах.

Математичне і імітаційне моделювання дозволяє аспіранту правильно організувати процес досліджень, провести його оперативними методами і з мінімальними економічними затратами, знайти найкращу структуру і умови функціонування, об'єктів, які вивчаються і проєктованих систем автоматизації. Це дозволяє ще на етапі проєктування зменшити трудові і матеріальні затрати на розробку неефективних систем.

Модель може відображати любі, як реальні, так і неймовірні ситуації, бо на неї не діють ніякі реальні обмеження. Модель дозволяє дослідити дії системи в любих можливих умовах. Завдяки цьому зменшується потреба в складному лабораторному обладнанні й в експлуатаційних випробуваннях систем і апаратів. Використання математичних моделей і комп'ютерів дозволяє скорочувати вивчення і випробування процесів, апаратів і технологічних систем, що займає в реальних умовах дні і місяці до секунд і хвилин.

Математичний опис і оптимізація технологічних режимів, контроль, автоматизація і інтенсифікація діючих процесів, вивчення недоступних для виміру величин, оптимальне проєктування нових процесів і апаратів, а також технологічних схем забезпечується використанням математичних методів і засобів обчислювальної техніки.

Основними методами дослідження і розрахунків технологічних процесів являється метод математичного моделювання і методи ідентифікації

математичних моделей, а стратегією проведення досліджень – дослідження, що проводяться за планом повного факторного експерименту першого і другого порядків за умов оптимізації.

Метою вивчення дисципліни є теоретична і практична підготовка здобувачів, отримання ними знань з розробки і дослідження математичних моделей сільськогосподарського виробництва, обробки експериментальних даних і планування експерименту для підвищення ефективності досліджень на основі комп'ютерних технологій і вміння використовувати їх в навчальному процесі, дослідницьких і проектних роботах.

Задачі вивчення полягають в формуванні науковців, здатних:

- вміти проводити ідентифікацію об'єктів автоматизації аграрного спрямування з використанням біотехнічних елементів в таких об'єктах;
- вивчити основні алгоритми і правила побудови математичних і імітаційних моделей з використанням аналітичних і статистичних методів;
- вирішувати моделі на персональних комп'ютерах з використанням необхідних математичних методів, що становить необхідну теоретичну і практичну базу для подальшого вивчення спеціальних дисциплін пошукачем PhD з автоматизації сільського господарства;
- виконати дослідження математичної моделі з використанням математичних пакетів, таких, як MatLab і MathCad з вивченням можливих каналів керування даним виробництвом;
- ознайомитись з основними напрямками і правилами оптимізації проведення експериментів на основі економічних і узагальнених критеріїв оптимізації.

У навчальному посібнику викладені теоретичні основи навчальної дисципліни де розглянуто особливості моделювання та ідентифікації об'єктів керування галузей АПК, а також представлені технологічні процеси і системи з наявністю біологічних об'єктів. Описані аналітичні методи розробки динамічних моделей з урахуванням випадкових процесів, які протікають на підприємствах АПК. Викладена і обґрунтована структурна ідентифікація технологічних об'єктів та класифікація методів ідентифікації. Наведені приклади створення динамічних моделей процесів підготовки і переробки сільськогосподарської сировини аналітичними методами, а також приклади створення математичних моделей дослідницькими методами. Наведені алгоритми і програми на MathCad і Simulink MATLAB методів розв'язання поставлених задач і завдання для їх виконання в лабораторних роботах, а також при виконанні самостійної роботи.

Автори написали такі розділи: Лукін В.Є. (3-10 розділи, лабораторні роботи та самостійні роботи студентів з дисципліни), Теплюк В.М. (1 розділ), Григораш В.В. (2 розділ).

РОЗДІЛ 1

КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ТА СФЕРА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

1.1. Вступ до моделювання

Сучасні технологічні об'єкти і процеси є результатом осмислення, формалізації і наукових досліджень явищ фізичного світу та практичної діяльності багатьох поколінь вчених, інженерів, робітників.

Поява нових технологій і удосконалення вже відомих відбувається за рахунок все більш глибокого розуміння суттєвості процесів, їх внутрішніх зв'язків та тенденцій розвитку.

Математичне моделювання, як емпірико-теоретичний метод пізнання, набуло широке застосування при побудові сучасної наукової картини світу, що посприяло створенню новітніх технологій. Таким чином, *теоретичною основою багатьох технологічних процесів є розвинуті математичні моделі.*

Створення математичних моделей технологічних процесів та об'єктів вимагає не тільки ґрунтовного знання фізичних процесів, математичних методів, а і володіння відповідною методикою. Велике різноманіття технологічних процесів утруднює розробку універсальних алгоритмів створення математичних моделей, але можна визначити головні етапи цього процесу.

Системний аналіз є загальною методичною основою, на якій ґрунтуються основні етапи створення математичних моделей починаючи з постановки задачі, окреслення меж об'єкту чи процесу і їх первинної структуризації і закінчуючи аналізом розробленої моделі.

На початкових етапах створення математичної моделі *проводиться структурна ідентифікація*, яка в першому наближенні визначає вид математичних співвідношень, які описують властивості об'єкта, що моделюється. *Подальші етапи пов'язані з параметризацією об'єкта та встановленням функціональних залежностей між параметрами.*

Аналіз досвіду використання математичних моделей технологічних процесів свідчить, що достатньо часто виникає необхідність в визначенні чи уточненні величини параметрів математичної моделі. Ця задача вирішується за допомогою параметричної ідентифікації.

Наявність математичної моделі дозволяє цілеспрямовано виконувати оптимізацію технологічного процесу чи стану об'єкту та прогнозування їх розвиток.

Складність вирішення задачі створення математичних моделей та їх структурної і параметричної оптимізації пояснюється необхідністю використання спеціальних розділів математики, теорії автоматичного керування, теорії випадкових процесів, спектрального аналізу та ін. Це значно утруднює вивчення студентами дисциплін, що пов'язані з ідентифікацією та моделюванням технологічних процесів та об'єктів. В лекціях будуть розглядатися методичні особливості створення математичних

моделей та їх ідентифікації, а також частково будуть висвітлені теоретичні відомості з деяких розділів математики та інших дисциплін.

Важливе місце в моделюванні займають приклади створення математичних моделей процесів та об'єктів з різних галузей техніки. Перспективним в моделюванні є використання пакетів програм комп'ютерної математики MATLAB з моделюючим середовищем SIMULINK.

Курс поділений на два модулі.

В першому модулі проводиться класифікація моделей і розглядаються питання створення математичних моделей, а також висвітлюються питання пов'язані з визначенням адекватності моделей.

В другому модулі розглядаються питання ідентифікації математичних моделей різними методами.

1.2. Постановка задачі і завдання математичного моделювання об'єктів керування

Моделювання – це опис певного об'єкта. В галузі систем керування об'єктами моделювання є, відповідно, самі об'єкти, системи і процеси керування ними, а також їх складові частини.

Моделювання можна розглядати як відображення об'єкта множиною його описів. При цьому, якщо об'єкту O моделі M властиві певні набори характеристик $O\{\bar{X}\}$ і $M\{\bar{Z}\}$, то повинна існувати відповідність характеристик моделі і об'єкта. Найчастіше модель свідомо будують як спрощений опис об'єкта для полегшення його дослідження. Це тому, що природні об'єкти характеризуються безліччю показників, більша частина яких несуттєва з точки зору мети моделювання. Так, наприклад, при моделюванні системи керування вологістю на фермі несуттєвими є характеристики стін, вид корму, освітленість та інше. В результаті між моделлю та об'єктом немає повної відповідності.

Тому задачу моделювання можна викласти так: для модельованого об'єкта необхідно підібрати такий опис, який би достатньо повно відображав сам об'єкт з точки зору заданої мети моделювання.

В зображенні системи використовуються такі математичні об'єкти:

Θ_Y – набір характеристик стану системи – модель стану;

Θ_X – набір характеристик вхідних впливів – модель впливів;

F – функціонал перетворень – модель системи $F = A[\Theta_X, \Theta_Y]$,

де на формулі відображено визначення моделі об'єкта F на основі експериментальних даних за допомогою процедури ідентифікації A .

Якщо об'єктом моделювання є система керування, призначенням якої є приведення об'єкта керування у заданий стан, то модель повинна відображати залежність стану об'єкту від керуючого впливу і зовнішніх контрольованих Z_1 і неконтрольованих Z_2 збурень з урахуванням структурних характеристик і параметрів системи. Схема моделі системи

керування показана на рис. 1.1. Компоненти моделі зв'язані між собою рівняннями:

$$U = C[X, Y, Z_1];$$
$$Y = F[U, Z_1, Z_2],$$

де: U – вектор керування, X, Y – вектори вхідних і вихідних параметрів.

Наявність неконтрольованих збурень зумовлює часткову невизначеність моделі.

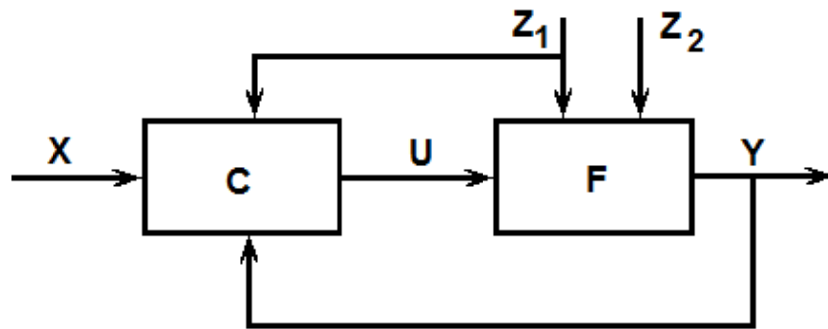


Рис. 1.1. Схема моделі системи керування

Модель проходить певний цикл свого існування, який має такі етапи:

- Вибір виду моделі, який найкраще реалізує мету моделювання;
- Ідентифікацію об'єкта моделювання, чим встановлюється відповідність між вибраною моделлю і конкретним об'єктом моделювання;
- Отримання результатів моделювання, виконання математичних, функціональних і інших перетворень, які знаходяться в моделі;
- Використання результатів моделювання для розв'язання задач прогнозування, оптимізації і керування об'єктами, які вивчаються.

Всі етапи важливі, проте самим важливим і складним є етап ідентифікації. В результаті виконання цього етапу ми отримуємо модель, яка нами використовується для досягнення мети моделювання. В ході виконання кожного із етапів можна повернутися до одного із попередніх етапів для покращення результатів моделювання.

За допомогою моделі можна вирішувати одну із самих складних задач керування, задачу оптимізації керування.

Для вирішення задачі оптимізації необхідно мати такі елементи:

1. Критерій оптимальності, максимальне або мінімальне значення якого необхідно знайти.
2. Параметри оптимізації, змінюючи які забезпечують нам досягнення оптимуму.
3. Обмеження на параметри оптимізації і характеристики системи, яку моделюємо, і які дозволяють отримати задовільний оптимальний розв'язок.
4. Модель системи яка встановлює залежності між її характеристиками, параметрами оптимізації і критерієм оптимальності.

При вирішенні задачі оптимізації самим важливим компонентом є критерій оптимальності, який залежить від виду і класу моделі і має свої характеристики і про які ми будемо говорити далі.

Обмеження на параметри оптимізації створюють поле допустимих значень критерію оптимальності. В залежності від виду моделі вона може бути представлена у вигляді багатогранника (лінійна модель) або у вигляді тіла з непласкою поверхнею (нелінійна модель).

Моделювання є галуззю науки, яка весь час знаходиться у розвитку.

Спочатку основним об'єктом моделювання були фізичні явища, згодом почали моделюватися технологічні об'єкти і процеси, далі біотехнологічні системи і біологічні процеси. З появою роботів і мікропроцесорів інтенсивний розвиток отримали моделі інформаційних процесів, інтелектуальних і соціальних процесів. Зараз починають створювати моделі штучного інтелекту.

Якщо спершу використовувались тільки фізичні моделі, згодом з'явилося аналогове моделювання, то зараз в першу чергу використовуються математичні моделі для розв'язку яких створюються алгоритми і комп'ютерні програми.

Сучасні об'єкти і відповідно моделі характеризуються невизначеністю їх структури і параметрів, тому для їх розв'язку розробляються нові евристичні методи і мови програмування.

Моделювання системи керування тісно пов'язано з життєвим циклом системи. Життєвий цикл розпадається на такі етапи:

1. Постановка задачі керування. З цього витікає і задача моделювання.
2. Дослідження об'єкта керування. Вони можуть виконуватися з створенням і використанням математичної моделі об'єкта керування.
3. Оптимального проектування системи керування. Цей етап доцільно виконувати з використанням математичної моделі системи керування.
4. Виготовлення системи керування.
5. Впровадження і розробка системи керування.
6. Експлуатація і модернізація системи керування.
7. Зняття з експлуатації системи керування.

Виконання даних етапів можливе з поверненням і корекцією попередніх етапів. На етапі виготовлення системи керування необхідно розробляти і програмне забезпечення для роботи даної системи.

На етапі впровадження системи керування перевіряється якість розробленої системи, достовірність моделі, вносяться необхідні уточнення і корективи.

На етапі експлуатації системи керування модель системи представлена у вигляді технічної документації системи, яка використовується персоналом при обслуговуванні, ремонті і модернізації системи керування.

Зняття системи керування з експлуатації це процес який вимагає дослідження наслідків зупинки роботи системи і тому тут для аналізу необхідна математична модель.

1.3. Види моделей і їх призначення

Моделі та моделювання досить поширені поняття в науці, техніці та побуті. Під моделлю розуміють уявну або фізичну побудову, яка може в деяких умовах представляти або замінювати відповідне явище (об'єкт моделювання), давати про нього досить точну та достовірну інформацію. Модель дозволяє прогнозувати поведінку об'єкта моделювання, а деякі види моделей дають можливість зробити і кількісну оцінку реакції об'єкта в конкретній ситуації.

Моделі застосовуються в тих випадках, коли використання самого об'єкта моделювання нераціональне, невигідне або неможливе. Об'єктом моделювання може бути всяке явище, процес, предмет, пристрій, будова та ін.

Людським розумом створені моделі всесвіту, сонячної системи, атмосферних явищ, соціальних структур, людини і її органів, тварин, різноманітних машин, пристроїв, живих клітин, молекул білків, органічних та неорганічних речовин, атомів хімічних елементів, різних елементарних частинок та іншого.

При цьому під моделлю ми розуміємо уявне представлення про яке не-будь явище або пристрій; пристосування, яке має зовнішній вигляд або конструкцію подібні до об'єкта моделювання; зображення, які із використанням прийнятих або досить зрозумілих позначень відтворюють структуру, будову або конструкцію об'єкта моделювання; математичний вираз, який при відповідних перетвореннях або розв'язанні дає числові результати аналогічні об'єкту моделювання; програму, реалізовану на комп'ютері та багато іншого.

Вид, фізичне втілення, матеріал виготовлення та конструкція моделі залежить від її призначення та способу застосування. При розробці чи проектуванні споруд, для оцінки їх естетичних характеристик, моделі мають вигляд макетів, а для дослідження міцності – вигляд математичних виразів, за якими можна розрахувати допустимі навантаження.

Під час розробки та проектування автоматичних систем керування або оцінки якісних взаємозв'язків між елементами системи їх моделюють за допомогою структурних або функціональних схем, а для дослідження стійкості або перехідних процесів систему моделюють математичними виразами, алгоритмами, програмами, які відображають кількісні залежності між вхідними та вихідними змінними.

Як видно із наведених прикладів, одні і ті ж явища та побудови можна представляти різними видами моделей в залежності від способу їх подальшого використання. В зв'язку з цим розглянемо основні способи використання моделей.

Під час пізнання явищ, предметів та іншого із навколишнього світу у людини, в її свідомості виробляються про них уявлення. Ці уявлення є фактично моделями відповідних об'єктів у свідомості людини. Такі моделі, методи їх отримання та застосування є предметом досліджень теорії пізнання. Таким чином, одним із найбільш поширених *способів використання моделей* є формування уявлень під час пізнання навколишнього світу.

Другим, досить поширеним способом застосування моделей є створення певної системи моделі світу для спрощення його сприймання дитячим розумом. Це дитячі іграшки. Вони певним чином відтворюють реальні явища, тварини чи пристрої.

Широко використовуються моделі у навчальному процесі в школах та вузах. Схеми, макети, муляжі, структурні формули, географічні карти та інше являються моделями відповідних об'єктів вивчення, полегшують сприйняття багатьох складних понять.

Застосовуються також моделі у виробничій діяльності людей. Для використання в проектно-конструкторських роботах, окрім наведених вище моделей, застосовуються також компоновки різного складного обладнання, наприклад: кабіни літака чи металорізального верстата; фізична модель гідроелектростанції; випробувальна установка хіміко-технологічного процесу чи виробництва; математичні моделі в системах автоматизації проектування технологічних процесів; обладнання, пристроїв чи систем автоматизації. Для керування виробничими процесами в рамках автоматизованих систем керування технологічними процесами (АСКТП) часто використовуються математичні моделі технологічних процесів. За ними проводяться розрахунки параметрів процесу, які неможливо виміряти, виробляються керуючі впливи при відхиленні технологічних режимів від заданого значення, проводиться діагностування процесів та інше.

Подібні математичні моделі застосовуються також у тренажерах операторів складних потенційно небезпечних технологічних процесів або водіїв рухомих машин. Тренажери використовуються, наприклад, для навчання операторів атомних електростанцій, пілотів літаків, водіїв автомашин та в інших випадках.

Моделі широко застосовуються також в науково-дослідних роботах (НДР). Вони є, як правило, узагальненням характерних особливостей досліджуваних явищ, через що розробка моделей, особливо математичних, є однією із основних задач НДР.

Розробка моделі явища, яке вивчається, може бути кінцевою метою цілого дослідження, але частіше всього вона використовується для всебічного аналізу об'єкта моделювання. Окрім того, моделі, особливо математичні, застосовуються в системах автоматизації наукових досліджень і дають можливість значно прискорити такі дослідження шляхом обробки результатів у ході самого експерименту.

Моделі можуть характеризувати всі властивості об'єкта моделювання, а можуть лише характеризувати якісь із них. Моделі, які відображають всі

характерні властивості об'єкта моделювання, називаються повними моделями. Якщо моделі відображають лише окремі властивості об'єкта моделювання, то вони називаються частинними моделями, або характеристиками. Найчастіше застосовуються частинні моделі.

В залежності від ознаки класифікації, моделі можна розділити на матеріальні та уявні, формалізовані та неформалізовані, просторово подібні, фізично подібні, математично подібні, експериментальні та інші.

Поклавши за основу ознаку матеріальності і використовуючи для розмежування на підкласи другі ознаки, розглянемо класифікацію моделей.

Для наочності класифікацію моделей наведемо у вигляді схеми. На рис. 1.2 приведено класифікацію моделей, виконану з використанням обраної ознаки.

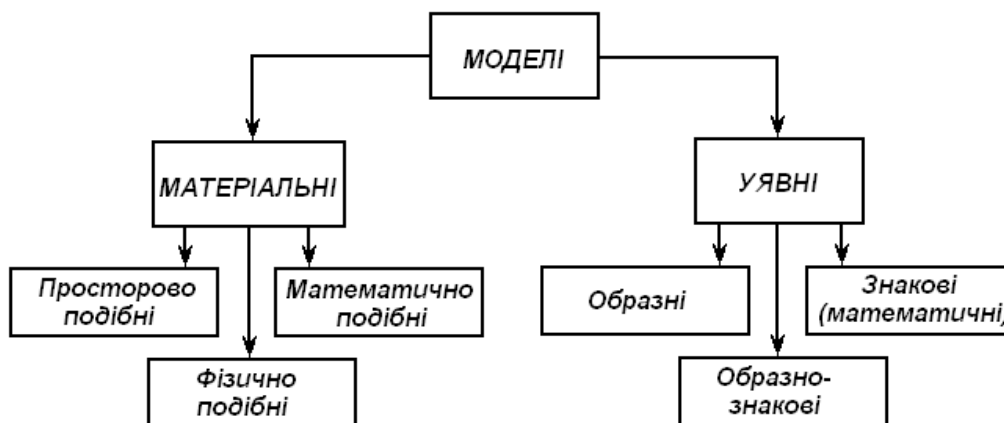


Рис. 1.2. Класифікація моделей

Розглянемо коротку характеристику класів і підкласів моделей, а також області їх застосування.

Всі моделі можна розділити на матеріальні та уявні.

Матеріальні моделі – це моделі, виконані у вигляді певних фізичних пристроїв, які виконують функції моделей.

Уявні або нематеріальні моделі – це певна уява у свідомості людини (моделі, які існують в уяві людини), або викладені певним чином на папері чи інших-носіях інформації. Уявні моделі, виходячи з останнього, можна назвати ще й інформаційними.

Уявні та матеріальні моделі, у свою чергу, в залежності від ступеню формалізації, призначення та форми представлення можна розділити на ряд підкласів (видів).

Матеріальні моделі, як видно із схеми, приведеної на рис. 1.1, ділять на просторово подібні, фізично подібні та математично подібні.

Просторово подібні моделі характеризуються подібністю просторових форм з об'єктом моделювання. Про особливості функціонування та інші характеристики об'єкта моделювання просторово подібні моделі інформації не несуть. Як приклад просторово подібних моделей можна навести макети, муляжі, компоновки.

Фізично подібні (фізичні) моделі характеризуються фізико-хімічною аналогією з процесом чи обладнанням, що моделюються. Використовуються тоді, коли масштаб об'єкта дослідження є незручним або не вигідним для дослідження. У цьому випадку виготовляють зменшену або збільшену фізичну модель об'єкта досліджень і проводять з нею відповідні дослідження. Для цього необхідна не тільки просторова подібність, але й подібність процесів, що протікають у моделі та об'єкті моделювання.

Математично подібні моделі – це матеріальні моделі, які мають з об'єктами моделювання лише однакові математичні властивості. Фізична природа об'єкта моделювання та моделі можуть бути зовсім різними. Вибір принципу дії та фізичного втілення у математично подібних моделях зв'язаний із зручністю їх використання, вартістю та швидкістю розробки.

Прикладом математично подібної моделі може бути електронна модель технологічних процесів хімічного реактора, набрана на аналоговій обчислювальній машині. У цьому випадку відпадає необхідність створення спеціальної складної установки для проведення дослідження об'єкта моделювання як у фізичному моделюванні.

Дослідження можна проводити з використанням універсальних обчислювальних засобів, однак у цих випадках виникає потреба у високій точності та достовірності моделі.

Уявні моделі розділяють на образні або іконічні, образно-знакові та знакові або формалізовані,

Образні або іконічні моделі – це те неформалізоване уявне представлення, яке ми отримуємо під час знайомства або вивчення якогось явища чи іншого об'єкта.

Розумова діяльність – це оперування образами, тобто певними представленнями, які людина отримує в процесі пізнання навколишньої дійсності або тим чи іншим чином виникаючими в її свідомості. Процес пізнання людиною навколишньої дійсності базується на формуванні, розширенні та поглибленні таких представлень або образних моделей. Вони, як і інші моделі, можуть бути правильними, не зовсім правильними чи зовсім не відповідати дійсності.

У процесі практичної діяльності людина перевіряє правильність її образних моделей – наскільки її уява відповідає дійсності.

Вивчення об'єкта моделювання, поглиблення уяви про нього в процесі вивчення – це фактично процес поліпшення образних моделей, які створились до цього. Інші види моделей, які створюються людьми, є реалізацією та формалізацією образних моделей, через що можна стверджувати, що образні моделі мають найширше застосування в діяльності людей переважно для особистого використання. Однак образні моделі, як словесні викладки уявлень, можна передавати також і іншим людям. Більш детальне представлення про образні моделі дає теорія пізнання.

Образно-знакові моделі – це, в деякій мірі, формалізовані уявлення з використанням умовних зображень для користування широкого загалу або спеціалістів. Вони несуть об'єктивну інформацію в частково формалізм-

ваному вигляді. Однак це не зовсім формалізовані моделі, так як основним їх елементом є уява людини, яка користується цими моделями. Прикладами таких моделей є: географічні мапи, структурні схеми процесів та систем; технологічні, функціональні, принципові та інші схеми; креслення пристроїв; структурні формули хімічних сполук; розрахункові схеми та інше.

Образно-знакові моделі широко використовуються в різних сферах діяльності людей, починаючи від навчання в школах і закінчуючи виробничою та науковою працею. Хоча образно-знакові моделі не є формалізованими, вони відображають об'єкт моделювання, можуть давати кількісні дані про об'єкт моделювання в рамках, звичайно, тієї інформації, яку несе модель.

Наприклад, за географічною картою можна визначити відстань між пунктами чи висоту даної місцевості над рівнем океану, але не можна визначити наявність та вид трав'яного покриву та інше. Креслення деталі дає можливість визначити її розміри та конструктивні особливості, але, звичайно не дає інформації про вагу та ціну.

Знакові моделі – це цілком формалізовані моделі, що представлені математичними залежностями, формулами, алгоритмами, які відображають залежність одних кількісних величин від інших. Ці моделі також називають математичними.

Математична модель – це система математичних співвідношень, що описують досліджуваний процес або явище. Для її складання можна використати будь-які математичні засоби. Наприклад, мова диференціальних або інтегральних рівнянь, теорію множин, теорію ймовірностей та ін.

Математичні моделі, що належать до різних рівнів організації матерії й різні форми її руху, є універсальними.

Під час їх застосування не потрібно оперувати уявленнями, вони несуть інформацію про кількісні взаємозв'язки в об'єкті моделювання. За такими моделями важко або зовсім неможливо уявити технологію, призначення чи зовнішній вигляд об'єкта. Однак у тій інформаційній області, яку відображає математична модель, вона є найбільш довершеною, так як дозволяє дати числові залежності між її параметрами.

Ця особливість математичних моделей використовується для узагальнення, отримання фундаментальних залежностей в природі та техніці. Фізико-математичні та технічні галузі науки пов'язані з розробкою та використанням математичних моделей відповідних явищ. Всі фундаментальні закони електротехніки, гідравліки, теплопередачі, хімічної кінетики та інших галузей науки і техніки являються математичними моделями відповідних явищ природи.

Сфера застосування математичних моделей значно розширилась з появою обчислювальної техніки в наукових дослідженнях та техніці. Програмне забезпечення обчислювальних машин є формалізованою (математичною) моделлю задачі, яка розв'язується. Під математичним моделюванням будемо розуміти розробку та застосування математичних моделей.

1.4. Етапи математичного моделювання

Математичне моделювання – потужний метод пізнання зовнішнього світу, а також прогнозування й керування. Аналіз математичних моделей дозволяє проникнути в сутність досліджуваних явищ. Процес математичного моделювання, а саме вивчення явища за допомогою математичних моделей, можна підрозділити на 4 етапи.

Перший етап – формулювання законів, що зв'язують основні об'єкти моделі. Цей етап вимагає широкого знання фактів, що ставляться до досліджуваних явищ, і глибокого проникнення в їхній взаємозв'язок. Ця стадія завершується записом у математичних термінах сформульованих якісних уявлень про зв'язки між об'єктами моделі.

Другий етап – дослідження математичних задач, до яких приводять математичні моделі. Основним питанням тут є розв'язання прямої задачі, тобто одержання в результаті аналізу моделі вихідних даних (теоретичних наслідків) для подальшого їхнього зіставлення з результатами спостережень досліджуваних явищ. На цьому етапі важливу роль здобуває математичний апарат, необхідний для аналізу математичних моделей, а також обчислювальна техніка – потужний засіб для одержання кількісної вихідної інформації як результату розв'язання складних математичних задач. Часто математичні задачі, що виникають на основі різних математичних моделей явищ, бувають однаковими. Це дає підставу розглядати такі типові математичні задачі, як самостійний об'єкт, абстрагуючись від досліджуваних явищ.

Третій етап – з'ясування того, чи задовольняє прийнята (гіпотетична) модель критерію практики, тобто з'ясування питання про те, чи погоджуються результати спостережень із теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень. Якщо модель була цілком визначена – всі параметри її були задані, то визначення відхилень теоретичних наслідків від спостережень дає розв'язання прямої задачі з наступною оцінкою відхилень. Якщо відхилення виходять за межі точності спостережень, то модель не може бути прийнята.

Часто при побудові моделі деякі її характеристики залишаються невизначеними. Задачі, в яких визначаються характеристики моделі (параметричні, функціональні) таким чином, щоб вихідна інформація була порівнянна в межах точності спостережень із результатами спостережень досліджуваних явищ, називаються зворотними задачами.

Якщо математична модель є такою, що ні при якому виборі характеристик умовам критерію практики не може задовольнити, то вона непридатна для дослідження розглянутих явищ. Застосування критерію практики до оцінки математичних моделей дозволяє робити висновок про правильність положень, що лежать в основі гіпотетичної моделі, що піддягає вивченню.

Четвертий етап – наступний аналіз моделі у зв'язку з нагромадженням даних про досліджувані явища й модернізація моделі. У процесі розвитку науки й техніки дані про досліджувані явища усе більше й більше уточнюються й настає момент, коли висновки, одержувані на підставі

прийнятої математичної моделі, не відповідають нашим знанням про явище. Таким чином, виникає необхідність побудови нової, більш досконалої математичної моделі.

Метод математичного моделювання, що зводить дослідження явищ зовнішнього світу до математичних задач, займає провідне місце серед інших методів дослідження, особливо у зв'язку з появою комп'ютерів. Він дозволяє: проектувати нові технічні засоби, що працюють в оптимальних режимах; використовувється для рішення складних завдань науки й техніки; допомагає при пошуку нових фізичних явищ. Математичні моделі виявили себе як важливий засіб в питаннях керування складними системами. Вони застосовуються у всіляких областях знання, стали необхідним апаратом в області економічного планування і є важливим елементом автоматизованих систем керування.

1.5. Класифікація математичних моделей

Проведемо класифікацію математичних моделей виходячи з методів їх отримання (рис. 1.3).

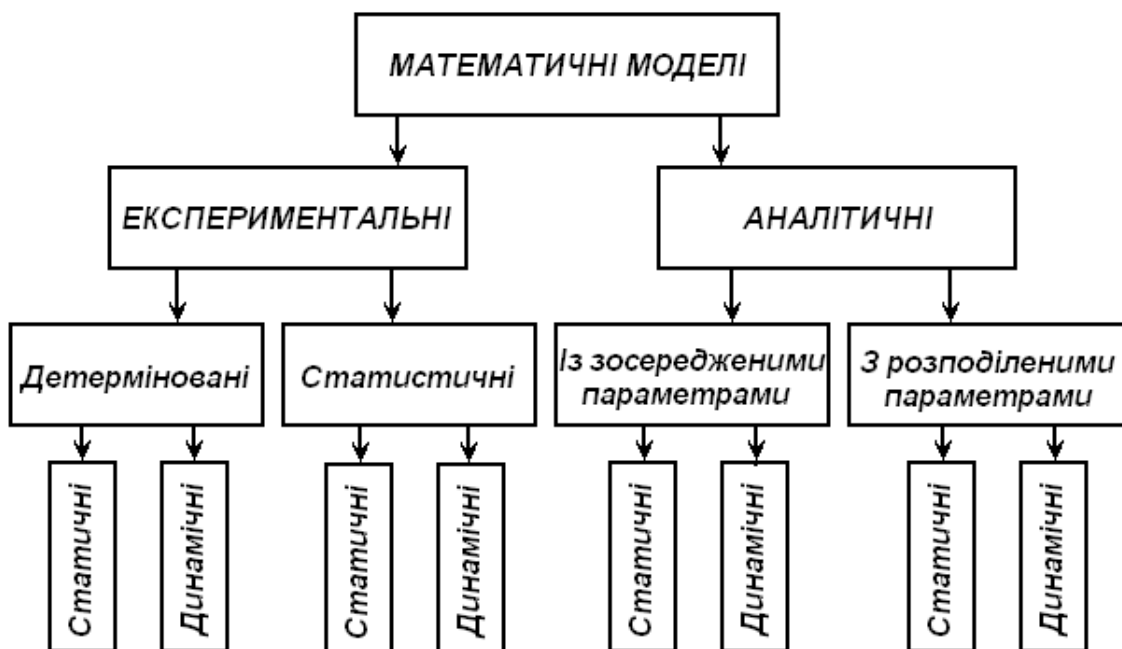


Рис. 1.3 Класифікація математичних моделей

Історично склалося так, що інформація про об'єкти і процеси накопичувалась завдяки спостереженням та експериментам, і подальша її обробка дозволяє створити математичну модель. **Експериментальний шлях створення математичних моделей** хоч і є найбільш природним, але має вади, пов'язані з обмеженнями можливостей органів почуттів людини і тому передбачає використання приладів. Створення та використання приладів є самостійною дуже складною науково-технічною задачею, яка не має в загальному випадку кінцевого рішення, оскільки процес пізнання світу нескінченний.

Виходячи з цього обмеження, математичні моделі, які будуються на основі експериментальних даних, умовно поділяють на дві групи.

Перша з них – це *детерміновані моделі*, вони охоплюють ті явища, об'єкти і процеси, в яких з великою достовірністю можна визначити причинно-наслідкові зв'язки між вхідними і вихідними величинами, чи між параметрами та вихідними величинами, чи розвиток стану об'єкта або розвиток процесу у часі. Побудова таких моделей, як правило, обмежується багатьма умовами, які уточнюють область використання моделі. Прикладом детермінованої моделі може бути закон Гука, що пов'язує силу та деформацію пружини лінійною залежністю. У цьому разі обмеженням є величина деформації, але при більш глибокому аналізі фізичних процесів, які відбуваються, при деформації пружини, можна знайти інші обмеження для лінійної математичної моделі, наприклад, – температурні.

Друга група математичних моделей, що будуються на основі експериментальних даних – це *статистичні моделі*. Явища, об'єкти і процеси, які вони описують, відрізняються великою складністю причинно-наслідкових зв'язків. У цьому разі досить важко визначити домінуючі фактори, які визначають розвиток стану об'єкта або розвиток процесу у часі. Тому при побудові таких моделей використовують поняття теорії ймовірностей. При цьому визначається ймовірність розвитку процесів і станів, а моделі характеризують усереднені значення вхідних і вихідних величин, параметрів та характеристик.

Час, як фізична величина, завжди присутній у наших уявленнях про навколишнє середовище, але при створенні математичної моделі деяких явищ, можна вважати, що на визначеному інтервалі часу явище суттєво не змінюється. Це припущення дозволяє створювати статичні математичні моделі, які не враховують плину часу. Використання таких моделей дуже поширене, тому що їхня складність завдяки розвиненому математичному апарату значно менша, ніж складність математичних моделей, що враховують час.

Динамічні моделі *складаються для явищ, об'єктів та процесів*, які цікавлять дослідників саме з точки зору їх зміни у часі, або коли час неможливо виключити з розгляду в наслідок його швидкоплинності. Саме динамічні моделі дозволяють робити прогнози розвитку і передбачати події.

З рис. 1.3 видно, що статичні і динамічні моделі складаються як для детермінованого, так і для статистичного підходів до аналізу експериментальних даних.

Побудова аналітичних моделей спирається на певний науковий світогляд, який сформульований у вигляді концепцій, постулатів, теорій, законів. Звичайно не теоретичні узагальнення практичного досвіду, але прослідити логічний ланцюг думок від спостереження до формулювання теоретичного узагальнення не завжди можливо. В якості прикладу можна навести концепцію атомарної побудови Всесвіту, яку сформулював 2500 років назад Демокрит з Абдери, і якою ми користуємося у теперішній час.

В методичному плані основою для створення математичних аналітичних моделей є закони збереження енергії, речовини, імпульсу, моменту та інші.

Виходячи з особливостей явищ, об'єктів та процесів, для яких створюється модель, та цілей, які ставляться, параметри моделі можуть залежати або не залежати від просторового виміру. Якщо параметри моделі, які відбивають властивості об'єкта моделювання, залежать від просторових координат, то такі моделі називаються математичними моделями з розподіленими параметрами. Наприклад, електрична мережа високої напруги, яка має велику довжину, має розподілені по довжині параметри, які характеризують її повний електричний опір. Тому розвиток перехідних електричних процесів в мережі можна моделювати не тільки в часі, а і в просторі.

Моделі з зосередженими параметрами є частковим випадком математичних моделей з розподіленими параметрами. В них з метою спрощення параметри, які відбивають властивості явищ, об'єктів та процесів, віднесені до ідеалізованих елементів. Такий елемент не має просторових розмірів, а лише є носієм властивостей. Зазначений підхід до створення моделей виправдовує внесені спрощення, якщо цілі побудови моделі не передбачають визначення залежностей в процесах, які відбуваються в середині ідеалізованого елемента.

Аналітичні, як і експериментальні моделі бувають статичними і динамічними в залежності від вимог щодо врахування фактору часу.

Проведена класифікація не є повністю вичерпною. Процес дослідження навколишнього світу, який потребує створення нових математичних моделей і поглиблення існуючих, безперечно потребує систематизації математичних моделей і з інших точок зору, але саме через процес класифікації математичних моделей з точки зору їх отримання дозволяє визначити відповідний інструмент дослідження явищ, об'єктів та процесів.

Контрольні запитання

1. Що є методичною основою створення математичних моделей?
2. Що виконує структурна ідентифікація об'єкта, який моделюється?
3. В чому полягає задача моделювання технологічного об'єкта керування?
4. Які параметри входять до моделі системи керування?
5. З яких етапів складається цикл існування математичної моделі об'єкта?
6. Які елементи необхідно мати, щоб вирішити задачу оптимізації?
7. Перерахуйте етапи розвитку моделювання, як науки?
8. Так як моделювання системи керування тісно пов'язано з життєвим циклом системи, то перерахуйте етапи і особливості етапів цього циклу?
9. Чим відрізняються матеріальні і уявні моделі, і які класи моделей входять до цих напрямів?
10. В чому полягає особливість математичних моделей?
11. З яких етапів складається створення математичних моделей?
12. Зробіть класифікацію математичних моделей з урахуванням експериментальних і аналітичних методів їх створення?

РОЗДІЛ 2

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ В СТАТИЦІ АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ

2.1. Вступ до статичних моделей в керуванні технологічними процесами

Об'єкт керування, як і інші об'єкти моделювання, може бути в сталому (стаціонарному, статичному) режимі та в динамічному (нестационарному, перехідному) режимі.

Статичний та динамічний режими об'єкта керування знаходяться між собою в складному взаємозв'язку. Статичний, сталий режим, можна розглядати як окремий випадок більш поширеного перехідного режиму. Об'єкти керування, як правило знаходяться в нестационарних, перехідних режимах і дуже рідко у надійно сталому режимі. Однак і динамічний режим можна розглядати як перехідний між двома сталими, статичними режимами. Обидві ці уяви є вірні, обидва ці підходи до моделей широко використовуються.

Сталий статичний режим характеризується узгодженістю всіх матеріальних та енергетичних входів і виходів об'єкта та незмінністю в часі всіх його параметрів, що визначають даний режим роботи. Узгодити входи та виходи об'єкту для більшості об'єктів моделювання можна на різних рівнях значень їх визначальних параметрів і, таким чином, можна побудувати залежність між входами та виходами для каналів, що викликають інтерес. Однак є також нестійкі об'єкти, які не мають сталих режимів і через що в них відсутня залежність між входами та виходами.

Функціональна залежність виходів об'єкта y_i ($i = 1, \dots, n$) від входів x_j ($j = 1, \dots, m$) в статичних режимах роботи називають його статичною моделлю

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Статичну модель, що відображає всі параметри об'єкта моделювання, називають повною статичною моделлю. Якщо ж модель відображає лише окремі зв'язки в об'єкті, то таку модель називають частинною. Прикладом такої частинної моделі може бути функціональний взаємозв'язок одного вихідного параметра зі всіма вхідними:

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m) \quad (2.2)$$

У більшості випадків як статичні моделі використовуються частинні моделі.

Функціональна залежність вихідного параметра від вхідного в статичному режимі називають статичною характеристикою. Статична характеристика є математичною моделлю одного каналу впливу об'єкта моделювання для його функціонування в сталих режимах. Її можна виразити залежністю

$$y_i = f_i(x_j) \quad (2.3)$$

Така характеристика показує, як буде змінюватися вихідна величина y_i від зміни вхідної величини x_j у статичних режимах, тобто в режимах, коли перехідні процеси в об'єкті закінчуються.

Статичні характеристики можуть бути представлені математичними рівняннями, графічними залежностями виходу від входу, а також ймовірнісними залежностями.

Найбільш простою аналітичною залежністю, що відображає статичну характеристику, є лінійне алгебраїчне рівняння:

$$Y_i = Y_{i0} + KX_j, \quad (2.4)$$

де Y_{i0} – початкове значення вихідної величини Y_i для $X_j = 0$; K – коефіцієнт передачі об'єкта для каналу впливу, що розглядається.

Але залежність між виходами та входами об'єкта частіше всього є нелінійною, а звідси і рівняння статички частіше всього будуть нелінійними. Таких нелінійних алгебраїчних рівнянь може бути дуже багато: параболічні, гіперболічні, експоненціальні, логарифмічні та інші. Найчастіше нелінійні статичні характеристики представляють у вигляді полінома:

$$y = y_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (2.5)$$

де a_1, \dots, a_n – коефіцієнти рівняння статички.

Таке представлення нелінійних залежностей ґрунтується на теоремі Вейерштрасса, відповідно з якою всяку нелінійну залежність на певному інтервалі можна виразити поліномом і точність такої апроксимації буде залежати від підбору степені полінома.

Для об'єктів з просторовим розподіленням параметрів рівнянням статички буде диференціальне рівняння. Наприклад, для одномірного розподілення температури θ по товщині стінки в напрямі координати X рівняння статички, яке зв'язує температуру стінки в точці X , тобто $\theta(x)$ з температурами стінки на її поверхнях θ_1 та θ_2 , має вигляд:

$$A \frac{d\theta(x)}{dx} + \theta(x) = k_1\theta_1 + k_2\theta_2 \quad (2.6)$$

де A , k_1 та k_2 – коефіцієнти рівняння статички.

У випадку 2-х чи 3-х мірного розподілення визначального параметра в об'єкті моделювання рівняннями статички будуть диференціальні рівняння в частинних похідних.

Для випадку відсутності детермінованого (закономірного) зв'язку між вихідними та вхідними параметрами, тобто за наявності випадкових впливів та взаємозв'язків між параметрами об'єкту моделювання, його статичні характеристики представляються ймовірнісними залежностями – кореляційними чи регресійними.

Досить часто статичні характеристики технологічних об'єктів моделювання зручно представляти топологічними (графовими) залежностями у вигляді поточкових, сигнальних, структурних чи інших графів. Об'єкти моделювання, що мають дискретний характер, наприклад, тарільчасті ректифікаційні колони, ланцюжок реакторів повного змішування і такі інші, досить ефективно представляти скінчено – різницевиими рівняннями. Можна

ще привести значну кількість методів представлення статичних моделей чи характеристик.

Статичні моделі чи характеристики досить широко використовуються у науці та техніці. Більшість фундаментальних залежностей є статичними характеристиками, чи рівняннями статички. Це – закони збереження матерії чи енергії, рівняння матеріальних чи енергетичних балансів, закони Ома, Кірхгофа та багато інших.

Для дослідження, розробки чи проектування різних систем, пристроїв та обладнання розробляють та застосовують їх статичні залежності. Найбільш поширеною формою представлення є функціональна залежність однієї вихідної величини від декількох вхідних, наприклад для двох:

$$y = f(x_1, x_2),$$

яка може бути представлена у формі полінома

$$y = y_0 + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_1x_2 + k_4x_1^2 + k_5x_1x_2^2 + k_6x_1^3 + \dots, \quad (2.7)$$

де k_1, k_2, \dots – коефіцієнти моделі.

Якщо об'єкт має декілька вхідних параметрів, то його модель як правило представляють системою рівнянь статички, кожне з яких відображає функціональну залежність однієї вихідної величини від однієї чи декількох вхідних:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.8)$$

або у векторно-матричній формі

$$\bar{Y} = A \cdot \bar{X}, \quad (2.9)$$

де \bar{Y} – вектор виходів, \bar{X} – вектор входів, A – матриця коефіцієнтів.

Статичні моделі можуть бути отримані аналітичним (розрахунковим), експериментальним та експериментально-аналітичним методом.

Розглянемо приклади створення статичних математичних моделей.

2.2. Розробка статичних моделей в механіці і електрифікації

Досвід створення статичних моделей аналітичними методами налічує багато років. Покажемо на деяких прикладах, як від простих моделей, побудованих в механіці та електриці, можна перейти до більш складних моделей технологічних об'єктів.

1). Припустимо, що є балка, яка знаходиться в спокої і лежить на двох опорах. Розрахункова схема цієї механічної системи зображена на рис. 2.1.

Треба побудувати математичну модель, яка б визначила сили реакції опор при будь якому місці навантаження. При розробці принципової схеми були прийняті деякі припущення:

– балка є невагомою;

- балка не прогинається;
- навантаження розміщується між опорами;
- навантаження зосереджено в точці.

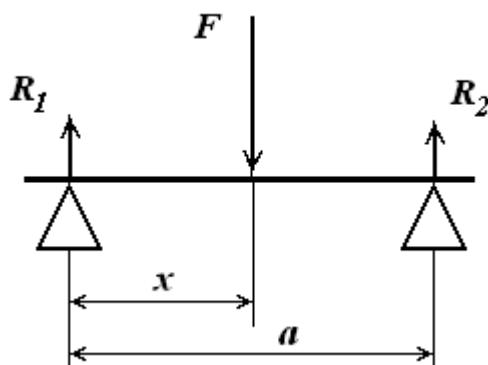


Рис. 2.1. Принципова схема статичної механічної системи

Побудова моделі починається з твердження, що балка знаходиться у спокої. Далі треба записати рівняння балансу моментів сил виходячи з того, що відносно лівої опори момент сил, створений навантаженням, дорівнює моменту сил, що створює сила реакції правої опори.

$$F \cdot x = R_2 \cdot a$$

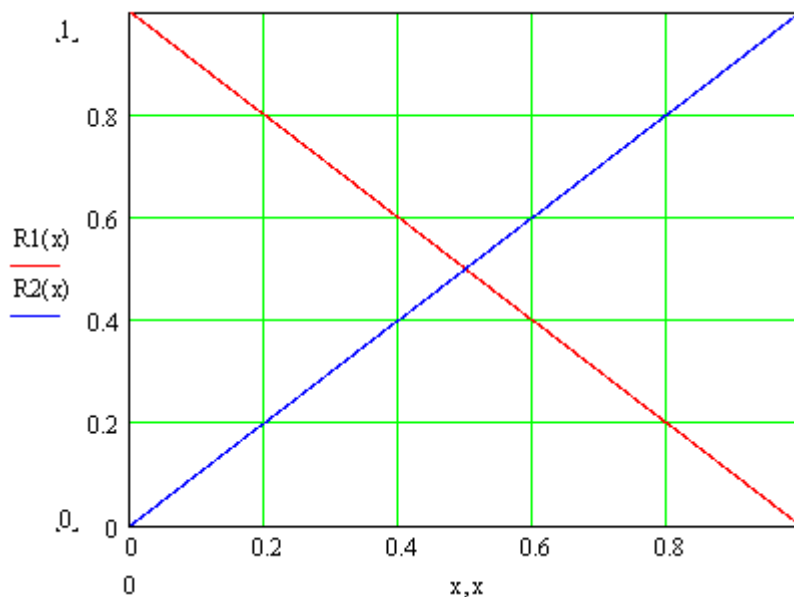


Рис. 2.2. Графіки залежностей сил реакції опор R_1 та R_2 від місця розташування навантаження

З цього рівняння визначимо силу реакції опори R_2 .

$$R_2 = \frac{F \cdot x}{a}$$

Аналогічне рівняння отримаємо для сили реакції опори R_1 .

$$R_1 = \frac{F \cdot (a - x)}{a}.$$

На рис. 2.2 приведені графіки залежностей сил реакції опор R_1 та R_2 від місця розташування навантаження, якщо покласти $F = 1$ та $a = 1$. З рисунку добре видно, що опори будуть навантаженні мінімально, якщо навантаження розмістити на середині балки.

2). Розглянемо побудову математичної моделі електричного кола постійного струму.

Важливим питанням моделювання електричних кіл є визначення розподілу струмів у складних лінійних колах з декількома джерелами. Класичним методом побудови статичної математичної моделі таких кіл є безпосереднє застосування законів Кірхгофа.

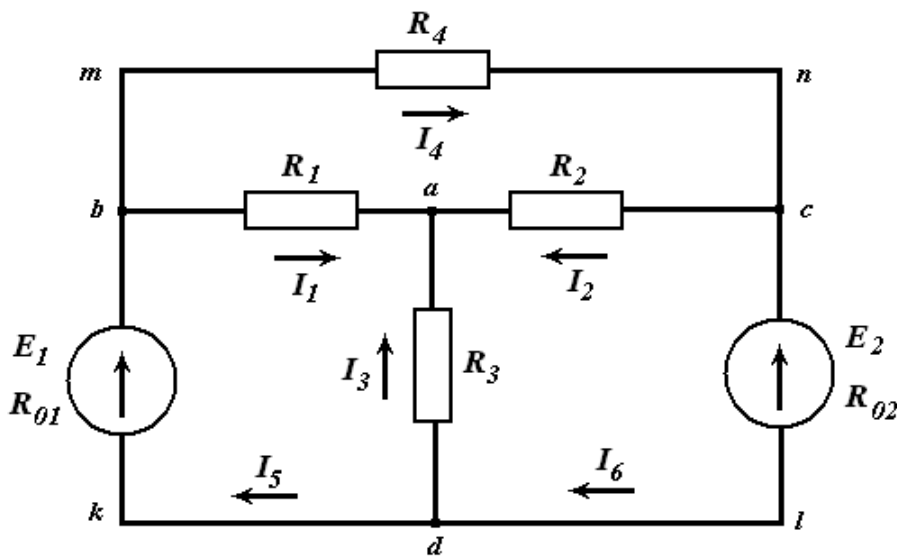


Рис. 2.3. Схема електричного кола постійного струму

Перший закон Кірхгофа стверджує, що електричний заряд не накопичується в вузлі електричного кола. Це і є рівнянням балансу: алгебраїчна сума струмів, які втікають в вузол електричного кола, дорівнюють алгебраїчній сумі струмів, які з нього витікають. Другий закон Кірхгофа теж є рівнянням балансу (за аналогією з механікою, балансом сил), який стверджує, що алгебраїчна сума падінь напруги в замкненому електричному колі дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил (ЕРС), які діють у цьому колі.

Розглянемо складне електричне коло (рис. 2.3), яке містить шість гілок.

Якщо задані значення всіх ЕРС та опорів резисторів, а відповідно до умов задачі необхідно визначити струми у гілках, то маємо задачу з шістьма невідомими. В цьому випадку слід скласти стільки рівнянь, скільки є невідомих струмів.

Порядок складання моделі наступний.

Якщо коло містить послідовні та паралельні з'єднання, то його спрощують, замінюючи ці з'єднання еквівалентними.

Довільно вказують напрямки струмів в усіх гілках. Якщо прийнятий напрямок струму не збігається з дійсним, то при розрахунку такі струми беруть зі знаками мінус.

Складають $(n - 1)$ рівнянь за першим законом Кірхгофа (n – число вузлів).

Рівняння, яких не вистачає, в кількості $m - (n - 1)$, де m – кількість гілок, складають за другим законом Кірхгофа, при цьому обхід контуру можна прийняти як за стрілкою годинника, так і проти неї. За позитивні ЕРС і струми приймають такі, напрямки яких збігається з напрямком обходу контуру. Напрямок дії ЕРС усередині джерела приймають від мінуса до плюса (див. рис. 2.3).

Одержана система рівнянь і є статичною математичною моделлю, але для відповіді на поставлене запитання її розв'язують відносно невідомих струмів.

Складемо рівняння для електричного кола, зображеного на рис. 2.3. Обравши довільно напрямки струмів у гілках кола, складаємо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів a, b, c :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

$$I_5 - I_1 - I_4 = 0$$

$$I_4 - I_2 - I_6 = 0$$

Прийнявши напрямки обходу контурів за стрілкою годинника, складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для трьох довільно вибраних контурів

для контуру $adkba$

$$E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_{01} I_5,$$

для контуру $bacldkb$

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_{01} I_5 + R_{02} I_6,$$

для контуру $bmncab$

$$0 = -R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_4,$$

Розв'язуючи спільно складені рівняння в загальному виді визначаємо струми у гілках електричного кола.

Звичайно математичні моделі статички технологічних об'єктів створити значно важче, оскільки вони поєднують різні за фізичною природою процеси.

2.3. Використання в моделюванні рівнянь балансів

Основні залежності, на яких базуються моделі статички технологічних об'єктів є рівняннями матеріальних чи енергетичних, і в першу чергу – теплових балансів. Ці рівняння дозволяють відобразити зв'язок об'єкта моделювання з іншими об'єктами чи пристроями. Це будуть рівняння

сумарних балансів. Крім того, балансні рівняння можуть відображати внутрішні залежності об'єкта моделювання. Це будуть балансні рівняння його складових частин, або балансні рівняння для окремих компонентів технологічного середовища чи балансні рівняння для теплоносіїв. У другому випадку відтворюються технологічні процеси, що відбуваються в об'єкті моделювання, а для цього використовуються основні кінетичні, гідродинамічні, тепло-масообмінні залежності цих процесів.

Досить часто виникає питання, які рівняння балансів і в якій кількості необхідно представити для отримання математичної моделі статички об'єкта? Універсального рецепту для розв'язання цього питання дати неможливо, але існує певний підхід до розв'язання цього питання. Він полягає у тому, що потрібно в залежності від фізико-хімічної суті вихідного параметру скласти одне або систему рівнянь, що зв'язують цей вихід з входами, що нас цікавлять. У цьому випадку до складу отриманих рівнянь можуть входити проміжні змінні параметри, які неможливо виразити наявними рівняннями. У зв'язку з ним виникає потреба в додаткових рівняннях, щоб виразити ці проміжні змінні через вхідні чи інші, які нам відомі.

Таким чином, слід більш детально розглянути складання рівнянь сумарного балансу, складання системи рівнянь матеріального балансу, що відображають внутрішні зв'язки змінних стану елементів об'єкта, а також складання рівнянь теплових балансів.

Рівняння сумарних балансів базуються на передумові, що загальна кількість речовини або енергії, що заходять до об'єкту, дорівнює загальній кількості речовини або енергії, що виходить з об'єкту. Необхідно звернути увагу, що кількість речовини або енергії, що знаходиться в об'єкті, залишається незмінною, як і значення технологічних параметрів, що її відображає.

Рівняння сумарного балансу як матеріального, так і енергетичного можна записати

$$Q_{вх} = Q_{вих}, \quad (2.10)$$

де $Q_{вх}$ – сумарний вхід речовини або енергії, $Q_{вих}$ – сумарний вихід речовини або енергії з об'єкту,

$$Q_{вх} = \sum_{i=1}^m Q_{вхi}, \quad (2.11)$$

де m – кількість вхідних потоків речовини або енергії; $Q_{вхi}$ – кількісне значення i -го масового потоку речовини або ж енергії;

$$Q_{вих} = \sum_{j=1}^n Q_{вихj}, \quad (2.12)$$

де n – кількість вихідних потоків речовин або енергії, $Q_{вихj}$ – кількісне значення j -го масового потоку речовини або енергії. Таким чином, рівняння сумарного матеріального чи теплового балансу буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^m Q_{вхi} = \sum_{j=1}^n Q_{вихj} \quad (2.13)$$

Розглянемо тепер матеріальні та теплові баланси для складових частин об'єкта моделювання.

Більшість об'єктів керування мають декілька більш чи менш відокремлених складових частин, кожна з котрих характеризується певним значенням технологічного параметру.

Наприклад у сушильній установці можна виділити частину, в якій готується сушильний агент (топка, калорифер) та камеру сушки. Щоб можна було розкрити внутрішні зв'язки в такому об'єкті, складають рівняння матеріальних чи теплових балансів для кожної такої частини. Для цього отримуємо систему рівнянь статички, кожне з яких має вигляд (2.13)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m1} Q_{exi}^{(1)} &= \sum_{j=1}^{n1} Q_{exj}^{(1)} \\ \sum_{i=1}^{m2} Q_{exi}^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n2} Q_{exj}^{(2)} \\ \sum_{i=1}^{mk} Q_{exi}^{(k)} &= \sum_{j=1}^{nk} Q_{exj}^{(k)} \end{aligned}, \quad (2.14)$$

де k – кількість складових частин об'єкта моделювання, для яких формується рівняння балансу.

Крім складових частин об'єкта рівняння балансів можна отримати і для окремих компонентів технологічного середовища чи теплоносіїв. Розглянемо рівняння матеріальних балансів для окремих компонентів технологічного середовища.

Для статичного режиму маса окремого компонента технологічного середовища, що подається на вхід об'єкта разом з тим, що виникло в результаті хімічних чи фізичних перетворень, дорівнює масі цього компоненту на виході з об'єкта разом з кількістю його, що пішла на певні хімічні чи фізичні перетворення технологічного середовища

$$\sum_{i=1}^m Q_i C_i + Q_{n1} = \sum_{j=1}^n Q_j C_j + Q_{n2} \quad (2.15)$$

де C_i – концентрація компонента в i -му вхідному потоці (кг/кг); C_j – концентрація цього ж компонента в j -му вихідному потоці (кг/кг); Q_{n1} – кількість компонента, що виникла в наслідок хімічних чи фізичних перетворень інших компонентів технологічного середовища; Q_{n2} – кількість речовини, що витрачається на якійсь хімічні чи фізичні перетворення.

Такі ж рівняння можна отримати і для окремих фаз технологічного середовища (газоподібної, рідинної чи твердої). Якщо розглядати декілька компонентів чи фаз, то можна отримати систему рівнянь (2.15), яка разом з рівняннями (2.14) та сумарних балансів (2.13) складе статичну модель об'єкта керування.

2.4. Використання в моделях рівнянь теплопередачі

Розглянемо тепер рівняння теплових балансів для об'єкта моделювання. Крім рівняння сумарного теплового балансу під час статичного моделювання об'єктів керування широко використовуються і інші рівняння теплових балансів для окремих фаз, теплоносіїв, для конструктивних елементів об'єкту. Під час розрахунків теплових балансів для конструктивних елементів, теплоносіїв чи фаз технологічного середовища об'єкта моделювання потрібно враховувати існуючий обмін теплової енергії між цими елементами, теплоносіями чи фазами. У цьому випадку під теплоносіями розуміємо теплообмінні середовища, які відокремлені теплообмінними стінками. Теплообмін між фазами проходить прямим контактом фаз без розділової поверхні.

Крім того, під час складання рівнянь теплових балансів слід враховувати теплові ефекти хімічних реакцій, зміни фазового стану речовин, механічної роботи (наприклад при змішуванні), теплові втрати в навколишній простір.

Тепловий потік між теплоносіями за наявності стінок розділу розраховується згідно з формулою теплопередачі

$$Q_T = k \cdot F \cdot \Delta\theta_{cp} \quad (2.16)$$

де k – коефіцієнт теплопередачі; F – поверхня теплообміну; θ_{cp} – середня різниця температур теплоносіїв.

Для розрахунку теплообміну між теплоносіями можна тепловий потік Q_T визначити як тепловіддачу від теплоносія до стінки розділу і від цієї стінки до іншого теплоносія за залежністю

$$Q_T = \alpha \cdot F \cdot \Delta\theta_{cp} \quad (2.17)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; θ_{cp} – різниця температур теплоносія та стінка розділу.

Потрібно також враховувати вид теплопередачі – конвекційний чи радіаційний (випромінюванням). Наведені формули (2.16) та (2.17) відносяться до найбільш поширеного в технологічних процесах конвекційного теплообміну.

Теплообмін між фазами розрахувати складніше у зв'язку з тим, що поверхню відокремлення фаз визначити не завжди можливо, коефіцієнт тепловіддачі у цьому випадку також визначити не завжди можливо. Крім того, теплообмін між фазами часто супроводжується масообміном, що має певний тепловий ефект, наприклад теплота випарювання вологи чи конденсації пару.

Тепловий ефект хімічної реакції Q_p можна виразити залежністю

$$Q_p = \frac{G_p}{M} \cdot q_p, \quad (2.18)$$

де G_p – кількість (маса) речовини, що вступила в реакцію (кг/год); M – маса кілограм-молекули речовини, що прореагували (кг-моль); q_p – тепловий ефект хімічної реакції в перерахунку на кг-моль речовини (кДж/кг-моль).

Тепловий ефект фізичних перетворень речовини (випарювання, конденсації, розчинення, кристалізації) Q_ϕ можна виразити залежністю

$$Q_\phi = G_\phi \cdot q_\phi \quad (2.19)$$

де G_ϕ – маса речовини, що змінила фазовий стан за одиницю часу (кг/год); q_ϕ – питомий тепловий ефект фізичного перетворення речовини (кДж/кг).

Теплота, що утворилася під час виконання механічної роботи, наприклад під час змішування (теплота дисипації) Q_m , може бути виражена залежністю

$$Q_m = A \cdot q_m, \quad (2.20)$$

де A – виконана робота за одиницю часу, q_m – тепловий еквівалент механічної роботи. Теплота, що приноситься або вноситься потоком речовин (фізичне тепло потоку речовини) Q_i , може бути виражено як

$$Q_i = G_i \cdot C_i \cdot \theta_i, \quad (2.21)$$

де G_i – витрата речовини в i -тому потоці (кг/год); C_i – теплоємність цієї ж речовини (кдж/кг /·град); θ_i – температура речовини в i -му потоці.

Підставляючи вирази (2.16) – (2.21) в рівняння теплових балансів відповідних конструктивних елементів, компонентів чи фаз, ми отримаємо систему рівнянь теплових балансів, тобто систему рівнянь статички.

Приклад 2.1. Побудова статичної математичної моделі повітряного ресивера

Побудуємо статичну математичну модель повітряного ресивера, зображеного на рис. 2.4, аналітичним методом.

Від джерела стисненого повітря з тиском P_0 і щільністю ρ_0 до ресивера крізь вентиляційний пристрій з коефіцієнтом відкриття α надходить повітря. Об'єм ресивера становить величину V , тиск повітря – P , а щільність повітря – ρ . Далі повітря виходить з ресивера крізь вентиляційний пристрій з коефіцієнтом відкриття β , його тиск становить P_1 і щільністю ρ_1

Припустимо, що потрібно розрахувати статичну модель $P = F(\alpha, \beta)$ та побудувати статичну характеристику $P = F_1(\alpha)$ повітряного ресивера для випадку ізотермічного розширення газу. Припущення про ізотермічний характер процесу ґрунтується на тому, що процес зниження тиску за допомогою ресивера відбувається повільно, а стінки ресиверу достатньо тонкі і мають високий коефіцієнт теплопровідності і тому температура в ресивері дорівнює температурі зовнішнього середовища.

Визначимо межі об'єкта моделювання та його входи і виходи.

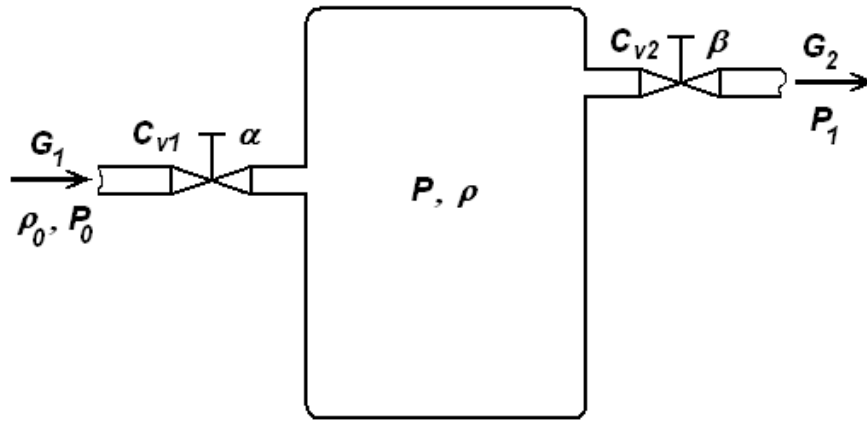


Рис. 2.4. Принципова схема ресивера для розробки статичної математичної моделі

Відповідно до заданої функціональної залежності $P = F(\alpha, \beta)$ маємо одну вихідну величину (P) та дві вхідні (α і β). Інші можливі входи, наприклад P_0 , P_1 будуть незмінними і не розглядатимуться як входи. Виходячи з місць розташування вихідної величини P та входів α і β ми можемо визначитися межами об'єкта моделювання та місцями установки регулюючих органів α і β .

Як розрахункову схему приймемо умовне зображення об'єкта моделювання, представлене на рис. 2.4.

При складанні моделі об'єкта для каналу тиску P запишемо рівняння матеріального балансу виходячи з того, що повітря в ресивері не може накопичуватися. Тому кількість повітря, що потрапила до ресивера G_1 повинно дорівнювати кількості повітря, що вийшло з ресивера

$$G_1 = G_2, \quad (2.22)$$

Виразимо значення витрат G_1 та G_2 відомими формулами витрат повітря, яке проходить через клапани

$$G_1 = C_{v1} \cdot \alpha \sqrt{(P_0 - P) \cdot \rho_0}, \quad (2.23)$$

$$G_2 = C_{v2} \cdot \beta \sqrt{(P_0 - P) \cdot \rho}, \quad (2.24)$$

де C_{v1} та C_{v2} – коефіцієнти витрат клапанів, ρ_0 та ρ – щільність повітря для тиску відповідно P_0 та P ,

Підставимо формули (2.23) та (2.24) в рівняння (2.22)

$$C_{v1} \cdot \alpha \sqrt{(P_0 - P) \cdot \rho_0} = C_{v2} \cdot \beta \sqrt{(P_0 - P) \cdot \rho}. \quad (2.25)$$

Рівняння (2.25) є рівнянням статички, яке зв'язує вихідну величину P із входами α і β . Однак у цьому рівнянні є значення щільності повітря ρ_0 та ρ , які для ізотермічного розширення газу повністю визначаються значеннями тиску P_0 та P . В зв'язку з тим, що P_0 , а значить і ρ_0 є величини сталі, то для виключення проміжної змінної слід через тиск виразити лише значення щільності ρ .

Для ізотермічного закону розширення ми можемо записати рівняння

$$P \cdot V = \frac{m}{M} R \cdot T ,$$

де m – маса газу; M – молярна маса.

Відомо, що

$$V = \frac{m}{\rho} . \quad (2.26)$$

Тоді запишемо

$$\frac{mP}{\rho} = RT \frac{m}{M}$$

або

$$\rho = \frac{P \cdot M}{R \cdot T} = \gamma P , \quad (2.27)$$

де $\gamma = \frac{M}{R \cdot T}$.

Підставимо (2.27) в (2.25) і отримаємо

$$C_{v1} \cdot \alpha \sqrt{(P_0 - P) \cdot \rho_0} = C_{v2} \cdot \beta \sqrt{(P - P_1) \cdot P \gamma} \quad (2.28)$$

З формальної точки зору рівняння (2.28) і є математичною статичною моделлю ресивера, але його практичне використання неможливе. Для практичного використання отриманої моделі треба отримати статичні характеристики бажано в аналітичній формі. Але якщо це неможливо, то можна обмежитись розрахунками P виходячи з можливого кроку зміни α і β .

Для розрахунку статичних характеристик визначимо P в явній формі, тобто виразимо його через інші змінні та константи. Для цього визначимо квадрати лівої та правої частин рівняння (2.28)

$$C_{v1}^2 \cdot \alpha^2 (P_0 - P) \cdot \rho_0 = C_{v2}^2 \cdot \beta^2 (P - P_1) \cdot P \gamma \quad (2.29)$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо квадратне рівняння відносно змінної P

$$C_{v2}^2 \cdot \beta^2 \gamma \cdot P^2 + (C_{v1}^2 \cdot \alpha^2 \cdot \rho_0 - C_{v2}^2 \cdot \beta^2 \gamma \cdot P_1) P - C_{v1}^2 \cdot \alpha^2 \cdot \rho_0 P_0 = 0 . \quad (2.30)$$

Знайдемо корені цього рівняння

$$P_{1,2} = \frac{(C_{v2}^2 \beta^2 P_1 \gamma - C_{v1}^2 \alpha^2 \rho_0) \pm \sqrt{(C_{v1}^2 \alpha^2 \rho_0 - C_{v2}^2 \beta^2 P_1 \gamma)^2 + 4 C_{v1}^2 C_{v2}^2 \rho_0 P_0 \beta^2 \alpha^2 \gamma}}{2 C_{v2}^2 \beta^2 \gamma} \quad (2.31)$$

Значення заданої функціональної залежності $P = f(\alpha \text{ і } \beta)$ одержано в загальному вигляді. Перейдемо до числового виразу отриманої функціональної залежності. Для цього визначимо числові значення всіх необхідних величин. Початкові умови, та розраховані величини (основного статичного режиму) занесемо в табл. 2.1.

Значення параметрів основного статичного режиму

№ п.п.	Назва параметру	Позначення	Розмірність	Числові значення
1.	Витрата повітря на вході	G_1	кг/ГОД	40
2.	Витрата повітря на виході	G_2	кг/ГОД	40
3.	Тиск повітря на вході	P_0	кг/см ²	6
4.	Тиск повітря в ресивері	P	кг/см ²	4
5.	Тиск повітря на виході	P_1	кг/см ²	2
6.	Ступінь відкриття вхідного клапану	α	–	0,5
7.	Ступінь відкриття вихідного клапану	β	–	0,5
8.	Температура повітря	t	°С	20
9.	Коефіцієнт витрати вхідного клапану	C_{v1}	см ^{5/2} /ГОД	$2,10 \cdot 10^4$
10.	Коефіцієнт витрати вихідного клапану	C_{v2}	см ^{5/2} /ГОД	$1,82 \cdot 10^4$
11.	Щільність повітря на вході	ρ_0	кг/см ³	$7,24 \cdot 10^{-6}$
12.	Щільність повітря в ресивері	ρ	кг/см ³	$4,83 \cdot 10^{-6}$
13.	Допоміжний параметр	M/RT	Моль/Н·м	$1,21 \cdot 10^{-6}$

Дані для розрахунку: $P_0 = 6$ кг/см²; $P = 4$ кг/см²; $P_1 = 2$ кг/см²; $G_1 = 40$ кг/ГОД; $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,5$; $t = 20$ °С.

Відомо, що ρ_0 для тиску 6 кг/см² та температури 20°С, буде дорівнювати 7,24 кг/м³. Виразимо його розмірність в кг/см³: $\rho_0 = 7,24 \cdot 10^{-6}$ кг/см³.

Щільність повітря ρ для тиску 4 кг/см² розрахуємо наступним чином

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}, \quad (2.32)$$

де $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$; $V = \frac{m}{\rho}$; $T_0 = T$.

$$\text{Звідси} \quad \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P}{\rho} \cdot \rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$$

$$\text{Тоді} \quad \rho = \frac{P}{P_0} \rho_0 = \frac{4}{6} 7,24 \cdot 10^{-6} = 4,827 \cdot 10^{-6} \quad \text{кг/см}^3$$

Заносимо значення ρ_0 та ρ в табл. 2.1.

Визначимо коефіцієнти витрати C_{v1} та C_{v2} з виразів (2.23) та (2.24)

$$C_{v1} = \frac{G_1}{\alpha \sqrt{(P_0 - P) \rho_0}},$$

$$C_{v2} = \frac{G_2}{\beta \sqrt{(P_0 - P_1) \rho}}$$

Розраховуємо числові значення C_{v1} та C_{v2}

$$C_{v1} = \frac{40}{0,5\sqrt{(6-4) \cdot 7,24 \cdot 10^{-6}}} = \frac{80}{\sqrt{14,86 \cdot 10^{-6}}} = 21,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{5/2} / \text{год}$$

$$C_{v2} = \frac{40}{0,5\sqrt{(4-2) \cdot 4,82 \cdot 10^{-6}}} = \frac{80}{\sqrt{9,64 \cdot 10^{-6}}} = 18,21 \cdot 10^3 \text{ см}^{5/2} / \text{год}$$

Розрахуємо добуток RT із (2.27) і отримаємо $\gamma = \frac{\rho_0}{P_0}$

$$\gamma = \frac{\rho_0}{P_0} = \frac{7,24 \cdot 10^{-6}}{6} = 1,207 \cdot 10^{-6}.$$

Тепер підставимо в (2.31) значення всіх параметрів з табл. 2.1, крім P , α і β . Після розрахунків та спрощення отримаємо

$$P_{1,2} = \frac{\beta^2 - 4\alpha^2 \pm \sqrt{(4\alpha^2 - \beta^2)^2 + 48\beta^2\alpha^2}}{\beta^2} \quad (2.33)$$

Очевидно, що знак "мінус" перед коренем приведе до отримання від'ємних значень тиску P , що не відповідає дійсності. Таким чином, тиск P зв'язаний з входами α і β залежністю.

$$P = \frac{\beta^2 - 4\alpha^2 + \sqrt{(4\alpha^2 - \beta^2)^2 + 48\beta^2\alpha^2}}{\beta^2} \quad (2.34)$$

Отримана залежність (2.34) є статичною моделлю об'єкта, вираженою в явній формі $P = f(\alpha, \beta)$.

Тепер розрахуємо статичну характеристику $P = f_1(\alpha)$. Для цього в залежність (2.34) підставимо значення $\beta = 0,5$, що відповідає основному статичному режиму. Після такої підстановки отримаємо

$$P = 1 - 16\alpha^2 + 4\sqrt{16\alpha^4 + 10\alpha^2 + 0.0625} \quad (2.35)$$

Вираз (2.35) є статичною характеристикою об'єкту моделювання для каналу $P = f_1(\alpha)$. Побудуємо по ньому графік статичної характеристики. Вхідна величина може змінюватися в межах $\alpha = 0, \dots, 1$.

Значення α та розраховані за виразом (2.35) значення P занесемо у табл.2.2.

Таблиця 2.2

Залежність P від α в статичному режимі

№ п.п.	α	P кг/см ²	№ п.п.	α	P кг/см ²
1	0	2,00	7	0,6	4,82
2	0,1	2,46	8	0,7	5,029
3	0,2	3,155	9	0,8	5,191
4	0,3	3,74	10	0,9	5,319
5	0,4	4,198	11	1	5,421
6	0,5	4,55			

З використанням значень α та P табл. 2.2 на рис.2.5 побудована статична характеристика $P = f_1(\alpha)$.

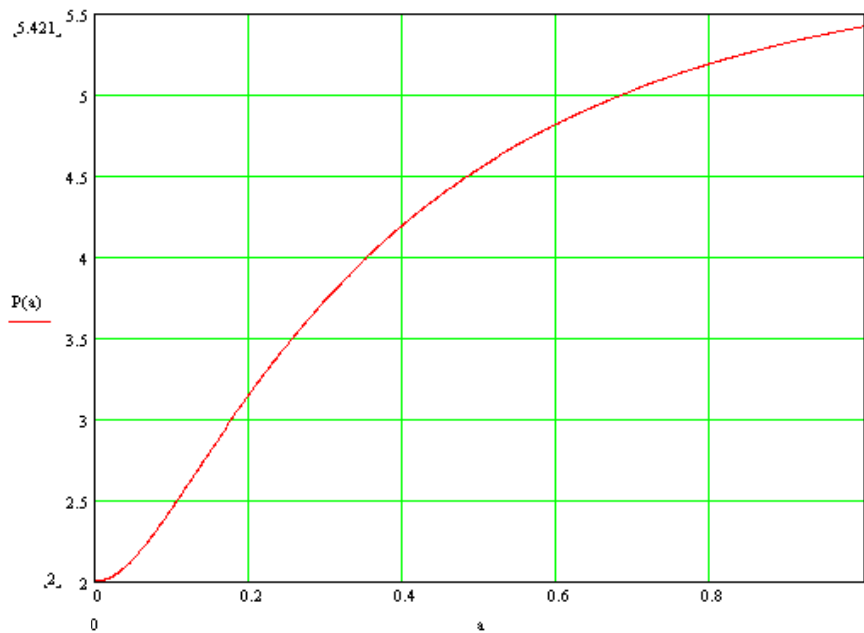


Рис. 2.5. Статична характеристика ресивера для каналу $P = f_1(\alpha)$.

Отримана статична характеристика має велике практичне значення, оскільки дозволяє визначити ступінь відкриття клапана для отримання на виході ресиверу потрібного тиску. Розв'язання моделі не просте, тому що графік статичної характеристики нелінійний.

Контрольні запитання

1. Який взаємозв'язок між статичним і динамічним режимами функціонування систем з точки зору керування?
2. Чим відрізняються повна і частинна статичні моделі системи?
3. Як можуть бути представлені статичні характеристики системи?
4. Сформулюйте теорему Вейерштрасса для статичної моделі?
5. Як можуть бути представлені статичні моделі з просторовим розподіленням параметрів?
6. Які фундаментальні залежності фізики є статичними характеристиками, чи рівняннями статички?
7. Як зображуються математичні моделі статички багато параметричних задач?
8. На основі яких рівнянь створюються математичні моделі статички для механічної системи опорної балки?
9. Які закони електротехніки використовуються для створення статичної моделі електричного кола постійного струму?
10. Як записуються матеріальні і енергетичні баланси технологічних об'єктів керування у статиці?
11. Який вигляд мають статичні рівняння теплообміну в статиці?
12. На чому базується статична математична модель ресивера?
13. Що характеризує статична характеристика ресивера по каналу тиску?

У залежності від виду використаної дії збурення динамічні характеристики діляться на часові (з використанням одноразових збурень) та частотні (з використанням періодичних збурень синусоїдальної форми).

Динамічні характеристики як часові, так і частотні, можуть бути представлені аналітичними залежностями та графіками. Класифікація динамічних характеристик представлена на рис. 3.1.

У межах двох основних видів динамічних характеристик – часових та частотних – розрізняються певні їх групи. Часові характеристики в залежності від форми стандартного впливу збурення діляться на перехідні, імпульсні та хвильові імпульсні, а від форми представлення – на рівняння динаміки, передатні функції, імпульсні характеристики та ін.

Серед частотних характеристик використовуються амплітудно-фазові характеристики (АФХ), амплітудно-частотні характеристики (АЧХ), фазові частотні характеристики (ФЧХ), дійсна частотна характеристика ($Re(\omega)$), уявна частотна характеристика ($Im(\omega)$) та ін.



Рис. 3.1. Класифікація динамічних характеристик об'єктів моделювання

На вид частотних характеристик впливає система координат (декартова, полярна чи логарифмічна), а також спосіб представлення.

Розглянемо основні особливості динамічних характеристик, представлених на рис. 3.1.

Рівняння динаміки може відобразити один або декілька каналів впливу з однією вихідною величиною. Рівняння динаміки каналу впливу є

аналітичним виразом перехідного процесу вихідної величини каналу в неявній формі. Розв'язання рівняння динаміки є аналітичним виразом перехідних процесів чи характеристик уже в явній формі, тобто перехідний процес чи перехідна характеристика є графіком функції, отриманої шляхом розв'язання відповідного рівняння динаміки, який відображає канал впливу. Рівняння динаміки, що відображає декілька каналів впливу, можна перетворити в декілька рівнянь динаміки, що відображають один канал впливу.

Інерційні системи описуються звичайно диференціальними або інтегральними рівняннями. Якщо параметри об'єкта можна вважати зосередженими, то рівняння динаміки будуть звичайними диференціальними рівняннями. Об'єкти з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. У загальному вигляді диференціальні рівняння нелінійні, але при малих відхиленнях від положення рівноваги їх можна замінити лінійними рівняннями. *Процес заміни нелінійного рівняння лінійним називається лінеаризацією диференціального рівняння.*

При цьому всі нелінійні функції змінних, які входять у рівняння руху, розкладають у ряд Тейлора в околицях робочої точки (сталого значення змінних). Так як відхилення малі, при розкладанні залишають лише члени, що містять відхилення в перших ступенях, після чого з отриманих рівнянь віднімають рівняння рівноваги (статика) і отримують запис лінеаризованих рівнянь у відхиленнях.

Зокрема, нелінійна функція двох змінних $F(x, y)$ розкладається в околицях робочої точки (x_0, y_0) у ряд Тейлора за формулою

$$F(x, y) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0, y_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{dF}{dy} \right|_0 \Delta y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n F(x_0, y_0).$$

Лінійна частина наведеного розкладу визначається лише першими трьома членами, інші доданки можна не рахувати в силу малого значення Δx , Δy . Таким чином, поверхня $F(x, y)$ замінюється площиною

$$A\Delta x + B\Delta y + C = F(x, y).$$

3.3. Перетворення Лапласа і його властивості

Для лінійних диференціальних рівнянь можна використовувати інтегральне перетворення Лапласа, яке дозволяє формально отримати з диференціального рівняння алгебраїчне.

Нехай $f(t)$ – дійсна функція дійсного змінного t , що задовольняє умовам Діріхле (безперервна і яку можна диференціювати на розглянутому інтервалі) і рівна нулю при $t < 0$. Будемо називати цю функцію оригіналом. Кожному оригіналу $f(t)$ завжди можна поставити у відповідність функцію $F(p)$ комплексного змінного $p = \alpha \pm j\omega$, визначену як інтеграл вигляду

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.6)$$

де L – оператор прямого перетворення Лапласа, Права частина рівняння (3.6) називається прямим перетворенням Лапласа функції $f(t)$, а функція $F(p)$ – зображенням Лапласа.

Розглянемо деякі властивості перетворення Лапласа.

1. Властивість лінійності. Зображення алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює сумі зображень цих функцій

$$L\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i L\{f_i(t)\}. \quad (3.7)$$

Справедливість виразу (3.7) випливає з виразу (3.6), відповідно до якого перетворення Лапласа являє собою лінійну операцію.

2. Диференціювання оригіналів. Похідній від функції $f(t)$ відповідає різниця зображень цієї функції $F(p)$, помноженої на p , і її початкового значення $f(0)$

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0). \quad (3.8)$$

Дійсно, помноживши (3.6) на p і взявши інтеграл по частинах, отримаємо

$$pF(p) = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-pt} f'(t) dt = f(0) + L\{f'(t)\}.$$

Виконавши цей прийом n раз, остаточно отримаємо

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0). \quad (3.9)$$

Вираз (3.9) є математичним записом теореми диференціювання. При нульових початкових умовах теорема диференціювання приймає вигляд

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p).$$

3. Зображення інтеграла. Можна показати, що

$$L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(p)}{p} \text{ при } \int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0.$$

У відповідності із властивостями 1 й 2, диференційні рівняння в області дійсної змінної t перетворюються в області комплексної змінної p в алгебраїчний вираз. При цьому автоматично враховуються початкові умови й визначаються постійні інтегрування. Маємо

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x. \quad (3.10)$$

Помноживши (3.10) на e^{-pt} після інтегрування його по t у межах від 0 до ∞ при нульових початкових умовах, одержимо це рівняння, перетворене по Лапласу

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) X(p) \end{aligned}$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)}{(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)} X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} X(p). \quad (3.11)$$

Позначимо $B(p)/A(p) = W(p)$. Тоді (3.11) перепишеться у вигляді $Y(p) = W(p)X(p)$, звідки

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3.12)$$

Вираз (3.12), що представляє собою відношення значення вихідної величини системи (об'єкту автоматизації) $Y(p)$ до значення вхідної величини $X(p)$ при нульових початкових умовах, називається передатною функцією системи (об'єкту автоматизації).

Оскільки при дослідженні динамічних властивостей системи потрібно визначити залежність змінних системи від функції дійсного аргументу t , виникає обернене завдання як від зображення змінної перейти до її оригіналу.

Найбільш загальним способом знаходження оригіналу $y(t)$ за відомим зображенням $Y(p)$ є застосування оберненого перетворення Лапласа

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} Y(p) e^{pt} dp,$$

де L^{-1} – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Найбільш простим способом знаходження оригіналу за зображенням є використання таблиць, у яких для найпоширеніших функцій дійсної змінної t наведені відповідні зображення. Якщо зображення $Y(p)$ можна представити дрібно-раціональною функцією вигляду

$$Y(p) = B(p)/A(p),$$

де $B(p)$ і $A(p)$ – поліноми відповідно m -го і n -го ступеня, причому для інерційних об'єктів $m < n$, то оригінал $y(t)$ можна знайти скориставшись теоремою розкладання Хевісайда-Карсона

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (3.13)$$

де p_k – корінь рівняння $A(p) = 0$, а $A'(p)$ визначається як похідна $A'(p) = dA(p)/dp$.

3.4. Використання частотних характеристик для моделювання динаміки об'єктів

Із частотних характеристик частіше всього використовуються амплітудно-фазові характеристики (АФХ).

Скористаємося прямим перетворенням Фур'є, яке можна отримати з перетворення Лапласа при $p = j\omega$

$$\Phi\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt .$$

Тоді перетворення Фур'є при нульових початкових умовах запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} & \left(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n \right) Y(j\omega) = \\ & = \left(b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}j\omega + b_m \right) X(j\omega) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Позначивши поліноми, що розташовані у дужках правої й лівої частин рівняння як $A(j\omega)$ і $B(j\omega)$ відповідно, отримаємо

$$B(j\omega)Y(j\omega) = A(j\omega)X(j\omega) ,$$

звідки

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = W(j\omega) . \quad (3.15)$$

Вираз (3.15) є частотною функцією або амплітудно-фазо-частотною характеристикою системи (АФЧХ), яку можна записати у вигляді

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j \arg W(j\omega)} , \quad (3.16)$$

де $|W(j\omega)| = A(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика системи (АЧХ); $\arg(j\omega) = \varphi(\omega)$ – фазочастотна характеристика системи (ФЧХ). Частотна функція системи (3.16) може бути представлена і у алгебраїчному вигляді

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) ,$$

де $A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$;

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg Q(\omega) / P(\omega) .$$

У цьому випадку $P(\omega)$ називають дійсною частотною характеристикою, а $Q(\omega)$ – уявною частотною характеристикою. У деяких випадках при математичному моделюванні використовується логарифмічна частотна характеристика вигляду

$$\lg W(j\omega) = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega) \lg e ,$$

де $\lg A(\omega)$ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАХ), а $\lg e = 0,434$.

У випадку подачі на вхід системи гармонійного сигналу $x = a \sin \omega t$, з урахуванням того, що $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, можна записати у вигляді $x^*(t) = a e^{j\omega t}$ [$x(t) = \text{Im} x^*(t)$], часткове розв'язання рівняння (3.14) відшукується у тому ж вигляді, що й вхідний сигнал $x(t)$

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{або} \quad y^*(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} . \quad (3.17)$$

Підставивши $x^*(t)$ і $y^*(t)$ у рівняння (3.14) і скоротивши його на $e^{j\omega t}$, остаточно одержимо $A(j\omega)A_0e^{j\varphi} = B(j\omega)a$, звідки

$$\frac{A_0}{a} e^{j\varphi} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = W(j\omega). \quad (3.18)$$

Порівнюючи вирази (3.16) і (3.18) при $\omega = \text{const}$ отримаємо

$$|W(j\omega)| = \frac{A_0}{a}; \quad \arg W(j\omega) = \varphi.$$

Якщо ω – змінна величина, то величина A_0 буде функцією частоти; тоді $A_0(\omega)/a = A(\omega)$. Таким чином, амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$ характеризує посилення періодичного сигналу на різних частотах (рис. 3.2, а).

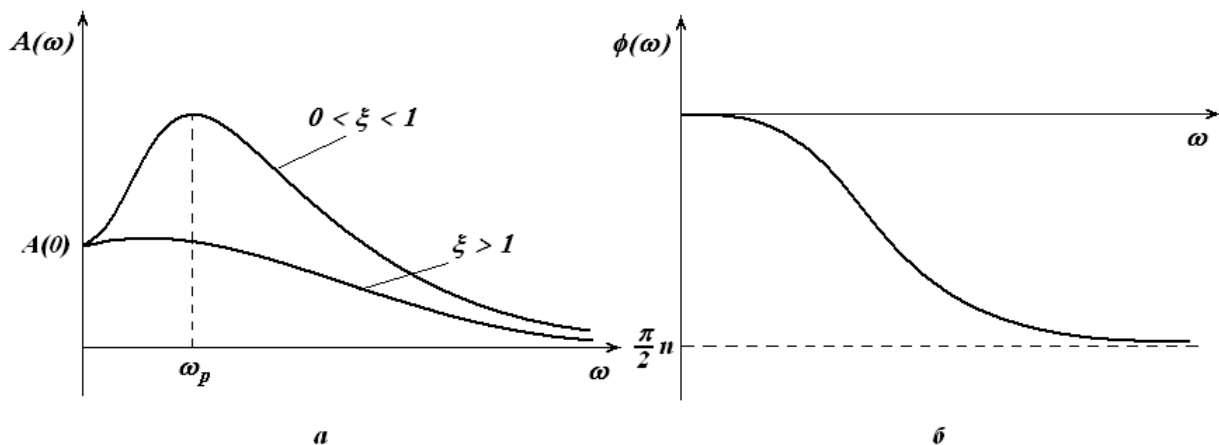


Рис. 3.2. Графічне подання амплітудно-фазо-частотних характеристик

Як видно з рисунка в системі можуть бути відсутні (крива 1) і виникати резонансні коливання (крива 2, ω_p – частота резонансу).

Фазо-частотна характеристика $\varphi(\omega)$, що характеризує зсув фаз між вхідним $x(t)$ і вихідним $y(t)$ сигналами, представлена на рис. 3.2, б. З рисунка видно, що з ростом частоти ω запізнювання вихідної координати $y(t)$ стосовно вхідної $x(t)$ збільшується.

Геометричне місце кінців вектора частотної функції $W(j\omega)$ на комплексній площині при зміні частоти від нуля до нескінченності називається годографом вектора $W(j\omega)$ (рис. 3.3).

Помітимо, що для знаходження функції дійсного змінного i при відомій функції $Y(j\omega)$ необхідно скористатися зворотним перетворенням Фур'є

$$y(t) = \Phi^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Зі співвідношення $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$ виходить, що частотна характеристика повністю визначена, якщо задано кожну з пар $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, або $P(\omega)$ і $Q(\omega)$. Однак за певних умов існує однозначний зв'язок між $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, а також $P(\omega)$ і $Q(\omega)$.

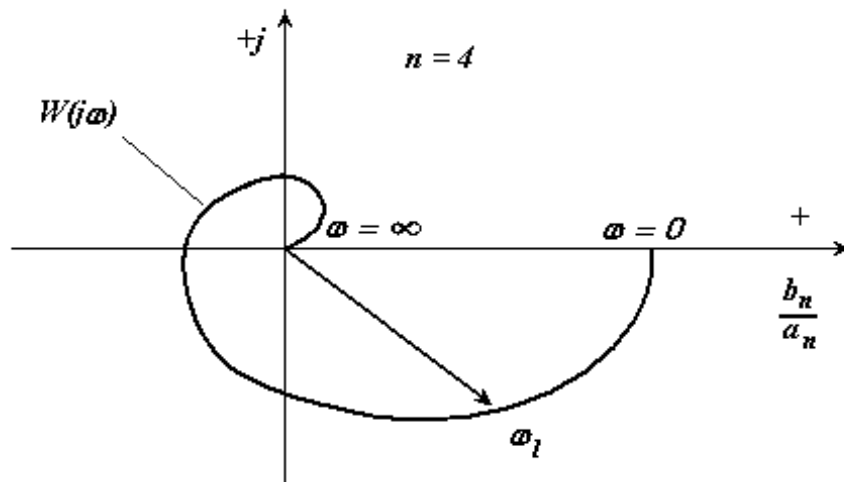


Рис. 3.3. Годограф вектора $W(j\omega)$

Це дозволяє спростити дослідження систем, обмежуючись, наприклад, розглядом тільки $A(\omega)$ або $P(\omega)$. У теорії інтегралів Фур'є доводиться, що умова існування однозначного зв'язку полягає в тому, щоб частотна функція $W(j\omega) = B(j\omega)/A(j\omega)$ не мала ні нулів, ні полюсів у нижній напівплощині поліномів чисельника й знаменника (нули – корінь полінома $B(j\omega) = 0$, отже, при цьому $W(j\omega) = 0$, а полюси – корінь полінома $A(j\omega) = 0$, отже, $W(j\omega) = \infty$).

Системи, які задовольняють цим умовам, називаються мінімально-фазовими (рис. 3.4). З усіх можливих систем з однією й тією ж АЧХ вони дають найменше зрушення фаз (при будь-якій частоті).

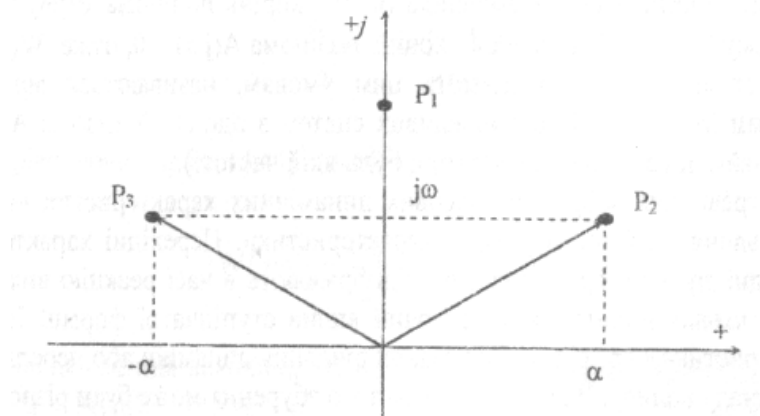


Рис. 3.4. Розміщення нулів та полюсів мінімально-фазової системи

3.5. Використання ступінчастих збурень для отримання передатних функцій

Із графічних зображень часових динамічних характеристик найширше застосування знайшли перехідні характеристики. Перехідні характеристики (перехідні функції, криві розгону) відображають в часі реакцію вихідної величини каналу впливу на вплив збурення ступінчатої форми. Перехідна

характеристика є графіком розв'язання рівняння динаміки або передатної функції каналу впливу. Величина ступінчастого збурення може бути різною.

Досить часто, особливо в теоретичних дослідженнях, використовується одиничне ступінчате збурення, тобто стрибкоподібне збурення величиною, що дорівнює одиниці. Однак при дослідженні об'єктів та систем керування величина збурення, як правило, відрізняється від одиниці.

Імпульсні характеристики відображають також у часі реакцію вихідного параметра каналу впливу об'єкта моделювання на збурення імпульсної форми.

Одинична ступінчаста функція (рис. 3.5, а) описує миттєву зміну вхідного сигналу й позначається $x(t) = 1(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Одинична імпульсна функція (рис. 3.5, б) описується виразом

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

При цьому $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

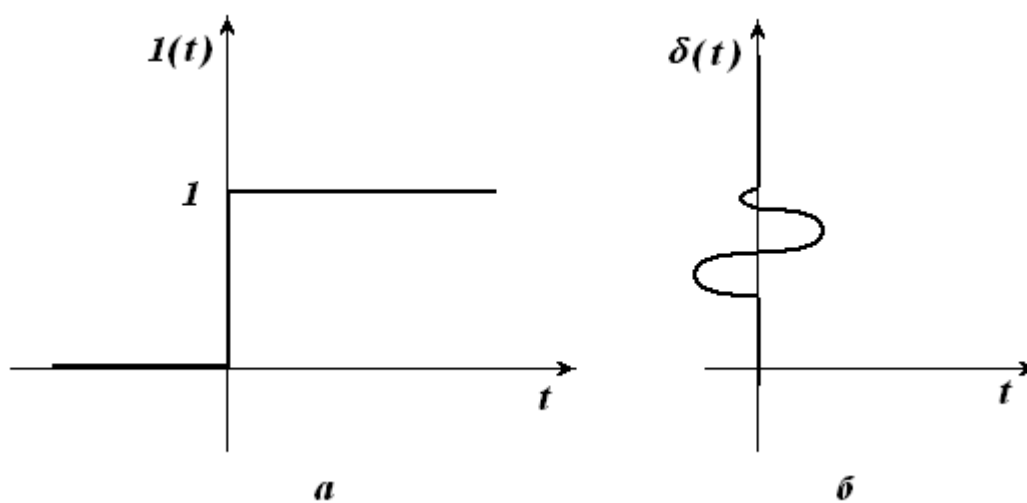


Рис. 3.5. Збурення ступінчастої і імпульсної форми

Очевидно, що функції $1(t)$ і $\delta(t)$ зв'язані між собою співвідношенням $\delta(t) = 1'(t)$. При подачі на вхід системи типового вхідного впливу виду $1(t)$ або $\delta(t)$ вихідна величина системи буде змінюватися в часі тим або іншим способом. Ця зміна і є реакцією системи на певний вплив.

Якщо $x(t) = 1(t)$ і початкові умови нульові (система перебуває в сталому стані), то реакція системи на цей вплив називається перехідною функцією або перехідною характеристикою $h(t)$. Якщо $x(t) = \delta(t)$ й початкові умови також нульові, то реакція системи називається імпульсною перехідною характеристикою або функцією ваги $w(t)$.

Функції $h(t)$ і $w(t)$ є часовими характеристиками системи або кривими розгону і для лінійних систем зв'язані співвідношенням

$$w(t) = h'(t). \quad (3.19)$$

Основним оператором лінійної системи є лінійне диференціальне рівняння, що дозволяє одержати будь-які інші форми операторів перетворення. Наприклад, нехай система керування описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$a_0 \dot{y} + a_1 y = b_0 x. \quad (3.20)$$

Перетворивши рівняння (3.20) за Лапасом при нульових початкових умовах, знайдемо передатну функцію, що також є оператором перетворення. Маємо

$$L\{a_0 \dot{y} + a_1 y\} = L\{b_0 x\},$$

або

$$(a_0 p + a_1)Y(p) = b_0 X(p),$$

звідки

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0}{a_0 p + a_1}. \quad (3.21)$$

Перетворивши рівняння (3.21) за Фур'є, можна отримати частотну функцію системи

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_0}{a_0 j\omega + a_1}, \quad (3.22)$$

Зіставивши (3.21) і (3.22), знайдемо зв'язок між $W(j\omega)$ й $W(p)$

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (3.23)$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (3.20) при типовому одиничному ступінчатому збуренні $x(t) = 1(t)$ і нульових початкових умовах, отримаємо перехідну функцію $h(t)$

$$y(t) \Big|_{x(t)=1(t)} = h(t) = \frac{b_0}{a_1} \left(1 - e^{-\frac{a_1}{a_0} t} \right).$$

Скориставшись з (3.21) і врахувавши, що $L\{1(t)\} = 1/p$, отримаємо

$$H(p) = W(p)X(p) = \frac{W(p)}{p},$$

тоді маємо

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} \quad (3.24)$$

Таким чином, вираз (3.24) зв'язує передатну функцію з перехідною функцією. При цьому $W(p) = pL\{h(t)\} = pH(p)$.

Вагову функцію $w(t)$ знаходимо з урахуванням того, що вхідний сигнал $x(t) = \delta(t) = 1'(t)$. Тому що $w(t) = h'(t)$, то

$$w(t) = (b_0/a_0)e^{\frac{a_1}{a_0}t}.$$

Скориставшись (3.21) і врахувавши, що $L\{\delta(t)\} = 1$, отримаємо $Y(p) = W(p) = L\{w(t)\}$, звідки

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (3.25)$$

Таким чином, співвідношення (3.20) – (3.25) дозволяють знайти будь-який оператор перетворення сигналів лінійної системи (диференціальне рівняння, $W(p)$; $W(j\omega)$, $h(t)$, $\omega(t)$), якщо відомо хоча б один з них.

Динамічні властивості об'єкта моделювання визначають його поведінку в динамічному або перехідному режимі, тобто режимі викликаному певним збуренням. Перехідний режим об'єкта як реакція на одноразове збурення має, таким чином, початок – дія збурення і кінець, що визначається закінченням перехідного процесу та виходом на сталий або статичний режим. Об'єкти можуть бути нестійкими і збурення, що подається на вхід такого об'єкта, може привести його вихідні характеристики за допустимі межі. Таким чином, стійкість, вид перехідного процесу, швидкодія та інші якості об'єктів керування визначаються їх динамічними властивостями.

3.6. Динамічні властивості об'єктів керування

До основних динамічних властивостей об'єктів керування можна віднести акумулюючу здатність, самовирівнювання та швидкодію (інерційність та запізнення).

Під **акумулюючою здатністю** розуміємо властивість об'єктів накопичувати речовину або енергію в перехідних режимах, тобто в таких режимах, коли змінюються з часом їх визначальні параметри.

Робота всякого неперервно діючого пристрою зв'язана з надходженням та витратою речовин або (та) енергії. При зміні визначальних його параметрів деяка кількість речовини чи енергії акумулюється в такому об'єкті. В сталому (статичному) режимі кількість акумульованої в об'єкті речовини або енергії залишається постійною, а в динамічному – змінюється. Ця кількість речовини або енергії залежить від розмірів пристрою, значення змін визначаючого акумуляцію параметра об'єкта та деяких інших властивостей об'єкта, а також його робочого середовища. Кількість акумульованої в об'єкті речовини в даний момент можна визначити одночасним перекриттям його вхідних та вихідних потоків, можна і розрахунковим шляхом, знаючи акумулюючу здатність об'єкта та значення його визначального параметра. Можна і навпаки, знайти значення визначальних параметрів об'єкта, якщо знаємо акумулюючу здатність об'єкта та кількість акумульованої в ньому речовини чи енергії. У випадку незмінної акумулюючої здатності параметри стану об'єкта визначають кількість акумульованої в ньому речовини чи енергії.

Наприклад, кількість електроенергії, накопиченої в електрохімічних акумуляторах чи ємністях (конденсаторах), визначається напругою. Кількість акумульованої теплоти характеризується температурою. Кількість акумульованого газу – тиском і т.д.

Акумулююча здатність однотипних пристроїв може бути різною. Для різних об'єктів необхідна різна кількість речовини чи енергії, щоб змінити на одиницю їх визначальний параметр.

Акумулювання речовини чи енергії зв'язано з акумулюючими ємностями. Під акумулюючою ємністю ми розуміємо частину простору, в якій визначальний параметр має однакове значення у всякій його точці.

Саме стан акумулюючої ємності характеризує значення визначального параметра, який, фактично, є мірою наповнення акумулюючої ємності.

Всі технологічні характеристики, що використовуються для контролю та керування, зв'язані з акумулюючими ємностями та процесами акумуляції. Наприклад, концентрація певного компонента в суміші відображає акумуляцію чи кількість цього компонента в суміші, рівень – акумуляцію рідини в ємності.

Об'єкт моделювання може мати декілька акумулюючих ємностей, кожна з яких характеризується певним значенням визначального параметра чи параметра стану. Параметри стану об'єкта можуть бути проміжними та вихідними. Проміжні параметри стану характеризують проміжні ємності, вихідні параметри стану характеризують ємність, що визначає значення вихідного параметра об'єкта тобто його регульовану чи керовану величину.

Математичний опис об'єкта моделювання в динамічному режимі зв'язаний з математичним описом його акумулюючих ємностей. Розглянемо математичний опис процесу акумуляції речовини чи енергії в ємності.

У динамічних режимах змінюється кількість акумульованої в ємності речовини чи енергії, у зв'язку з чим під час складання балансних рівнянь кількість речовини чи енергії на вході в ємність не буде рівною кількості відповідно речовини чи енергії на її виході

$$\sum_{j=1}^m Q_{jex}(t) \neq \sum_{j=1}^m Q_{jinx}(t). \quad (3.26)$$

У таких балансних рівняннях, що отримують для моделювання об'єктів у динамічних режимах, необхідно враховувати кількість акумульованої в ємності речовини чи енергії. На рис. 3.6 зображена розрахункова схема найбільш простого об'єкта чи акумулюючої ємності.

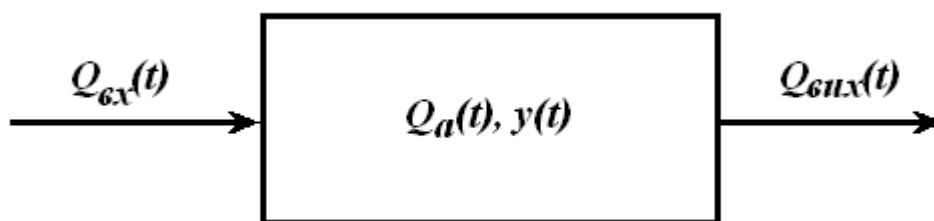


Рис. 3.6. Розрахункова схема об'єкта моделювання

Визначальний параметр (параметр стану) позначений $Y(t)$, вхідний потік – $Q_{\text{вх}}(t)$, вихідний потік – $Q_{\text{вих}}(t)$, кількість в ємності речовини чи енергії позначимо $Q_a(t)$. Відповідно до цієї розрахункової схеми складемо рівняння балансу в динамічному режимі

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = Q_a(t). \quad (3.27)$$

Кількість акумульованої в ємності речовини чи енергії $Q_a(t)$ можна виразити через визначальний параметр $Y(t)$. За нескінченно малий час dt різницю між вхідним потоком $Q_{\text{вх}}(t)$ та вихідним $Q_{\text{вих}}(t)$ можна виразити

$$[Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t)] \cdot dt = dQ_a(t) = k dy(t), \quad (3.28)$$

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = k \frac{dy(t)}{dt}. \quad (3.29)$$

Як видно з рівняння (3.29), різниця між вхідним та вихідним потоками речовини чи енергії за одиницю часу пропорційна першій похідній визначального параметра (параметра стану) за часом. Коефіцієнт пропорційності k у цьому виразі визначає величину акумулюючої здатності ємності. Наприклад, для проточної заповненої рідиною ємності визначальним параметром є рівень у ній рідини H . Якщо така ємність має один вхідний потік $Q_{\text{вх}}(t)$, та один вихідний потік $Q_{\text{вих}}(t)$, то рівняння (3.29) у цьому випадку буде мати вигляд

$$Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t) = F \frac{dH(t)}{dt}. \quad (3.30)$$

Акумулююча здатність ємності для рідини зі зміною рівня H визначається площею перетину ємності F .

Рівняння (3.29) чи (3.30) називають рівняннями динаміки акумулюючої ємності або одноємкісного об'єкта. Рівняння динаміки кожної ємності є диференціальними рівняннями першого порядку.

Багатоемнісні об'єкти в динаміці описуються системою диференціальних рівнянь першого порядку кількістю, що дорівнює кількості акумулюючих ємностей, або диференціальним рівнянням n -го порядку, де n – кількість акумулюючих ємностей об'єкта моделювання. Реальні об'єкти моделювання, в тому числі і об'єкти керування технологічними процесами, не завжди можливо представити ідеальними акумулюючими ємностями. Ємності у багатьох об'єктах не мають чіткої межі або якось ці межі розмиті. Доводиться нерідко приймати деякі спрощення, які для практичного застосування моделей є можливими. Наприклад, у проточній газовій ємності в її нижній частині тиск газу буде трохи більший, чим зверху. Однак, у випадку скінченних розмірів такої ємності різниця тиску за висотою буде настільки малою, що нею можна знехтувати, і вважати проточну газову ємність акумулюючою ємністю з однаковим тиском у всьому її об'ємі.

Здатність об'єктів керування самостійно змінювати швидкість відхилення визначального параметра від початкового статичного стану після нанесення збурення називається *самовирівнюванням*.

Виходячи з критерію самовирівнювання об'єкти керування ділять на об'єкти з позитивним самовирівнюванням, без самовирівнювання та з негативним самовирівнюванням.

Самовирівнювання об'єкта керування визначається внутрішніми зворотними зв'язками в самому об'єкті. Якщо об'єкт не має внутрішніх зворотних зв'язків, то він буде об'єктом без самовирівнювання. За наявності негативного зворотного зв'язку, що збільшує стійкість об'єкта в динамічних режимах, швидкість зміни вихідної величини з часом зменшується за рахунок зменшення впливу збурення, то що діє негативний зворотній зв'язок. Об'єкти, що мають негативні внутрішні зворотні зв'язки, належать до класу об'єктів з позитивним самовирівнюванням.

Об'єкти, що мають позитивні внутрішні зворотні зв'язки, які підсилюють дію збурення, швидкість відхилення вихідної величини з часом збільшується. Таким чином, об'єкти, що мають позитивні зворотні зв'язки, належать до класу об'єктів з негативним самовирівнюванням.

Важливою динамічною властивістю об'єкта керування є його **швидкодія**, тобто швидкість появи реакції (відгуку) об'єкта на збурення. Частіше всього, ця властивість оцінюється в кількісному плані як час відпрацювання об'єктом збурення ступінчастої форми.

Реакція об'єкта на стрибкоподібне збурення може бути миттєвою чи з деякою затримкою. Об'єкти з миттєвою реакцією на ступінчате збурення називаються безінерційними, і навпаки, об'єкти, що мають значну часову затримку реакції об'єкта на ступінчате збурення називаються інерційними. Однак, часова затримка реакції на ступінчате збурення може мати дві причини: інерційність об'єкту та наявність чистого або транспортного запізнювання. Інерційність об'єктів керування можна пояснити наявністю їх акумулюючої здатності.

Швидкодія об'єктів з позитивним самовирівнюванням оцінюється часом, зв'язаним з переходом визначального параметра зі старого на новий сталий режим. Інерційністю об'єкта в даному випадку називається його властивість, приводити до поступової зміни вихідної величини після подання збурення ступінчастої форми на вхід об'єкта. Залежність вихідної величини від часу після подання такого збурення називають перехідним процесом, а для об'єктів ця функція називається перехідною характеристикою або перехідною функцією. На практиці інерційність об'єктів з позитивним самовирівнюванням оцінюють з використанням тривалості (часу) перехідного процесу T як реакції на збурення ступінчастої форми.

Контрольні запитання

1. Коли виникає динамічний режим об'єктів моделювання і як він описується математично?
2. Як відображаються часові і частотні динамічні характеристики системи керування?

3. Як називається процес заміни нелінійного рівняння лінійним в динамічних моделях системи?
4. Як і при яких умовах виконується перетворення Лапласа динамічної моделі об'єкта керування?
5. Перерахуйте властивості перетворення Лапласа?
6. Що називається передатною функцією системи (об'єкту автоматизації)?
7. Як записується амплітудно-фазо-частотна характеристика системи керування (АФЧХ) ?
8. Коли використовуються амплітудно-частотні (АЧХ) і фазочастотні характеристики системи (ФЧХ)?
9. Що характеризує амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$ і фазочастотна характеристика $\varphi(\omega)$ динамічного об'єкта керування?
10. Що називається годографом вектора частотної функції $W(j\omega)$?
11. Для чого використовуються одиничні ступінчасті і імпульсні збурення в моделюванні динамічних об'єктів?
12. Який вигляд після перетворення має перехідна функція $h(t)$ при типовому одиничному ступінчастому збуренні $x(t) = 1(t)$ і нульових початкових умовах?
13. Що характеризує така з динамічних властивостей об'єктів, як його акумулююча здатність?
14. Як відрізняються і описуються одноємнісні і багатоемнісні об'єкти в динаміці?
15. Що таке самовирівнювання об'єкта керування?
16. В чому полягає така динамічна властивість об'єкта керування як його швидкодія?

РОЗДІЛ 4

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗРОБКИ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

4.1 Загальні особливості аналітичного і статистичного методів отримання динамічних характеристик об'єктів керування

Динамічні характеристики об'єктів керування можуть бути отримані аналітичним (розрахунковим) та експериментальним методами.

Аналітичний метод, який базується на використанні найбільш загальних залежностей для процесів, що проходять в об'єкті моделювання, а також на вивченні конструктивних, фізико-хімічних та технологічних особливостей такого об'єкту, дозволяє отримати математичні моделі для діючих об'єктів, об'єктів що споруджуються, і навіть тих, що тільки проектується. Отримані, таким чином, математичні моделі динаміки у вигляді балансних рівнянь, що враховують акумуляцію речовин чи енергії в кожній ємності об'єкта, відображають його структуру, а також взаємозв'язки між конструктивними та технологічними параметрами, ємностями і їх визначальними параметрами або параметрами станів.

Такі динамічні моделі в загальному вигляді описують, фактично, певну групу однотипних об'єктів моделювання. Прив'язка такої моделі в загальному вигляді до конкретних об'єктів здійснюється шляхом підстановки числових значень конструктивних та технологічних параметрів конкретного об'єкта в модель, записану в загальному вигляді, тобто шляхом розрахунків коефіцієнтів динамічної моделі. Таким чином, аналітичні моделі об'єктів є науковим узагальненням всіх відомостей про них, мають важливий науковий характер та досить високо ціняться, звичайно, якщо отримані моделі адекватні об'єктам.

Разом з тим, аналітичні моделі динаміки об'єктів досить часто є недостатньо точними із-за недостатньої глибини знання об'єкта моделювання, а також із-за спрощень та припущень, що приймаються під час розробки моделі. Підвищення точності таких моделей шляхом врахування багатьох малозначних чинників та залежностей може привести до таких складних виразів, які на практиці використати неможливо. Через що під час аналітичного моделювання завжди стоїть дилема: простота чи точність. Це питання розв'язується у кожному конкретному випадку.

Разом з тим, є можливість дати певні рекомендації з оптимальної складності (чи простоти), а значить і точності моделей. Такі рекомендації базуються на основі теорії похибок. Кожна операція з неточними числами вносить свою похибку в результат. Відносно до задач моделювання ці рекомендації можна сформулювати таким чином.

Включення множини малозначних параметрів для підвищення точності аналітичної моделі може збільшити складність обчислень і зменшити точність моделі. Таким чином, для конкретної математичної моделі враховуючи похибки розрахунків та знання про точність використаних

параметрів можна визначити оптимальну складність, а значить, і точність моделі, а також визначити доцільність врахування того чи іншого параметра в моделі. Це є додатковим та досить складним дослідженням і його слід використовувати лише у відповідальних випадках.

Частіше з отриманою аналітичним шляхом моделлю проводиться більш просте дослідження – перевірка на адекватність об'єкту моделювання. Дослідження адекватності можна виконати і для моделей об'єктів, що тільки розробляються. Для цього потрібно підібрати функціонуючий об'єкт, подібний тому, що моделюється, тобто такий об'єкт, який описується тією ж математичною моделлю, записаною у загальному вигляді. Далі, для цього об'єкта розраховують числову аналітичну модель і перевіряють її адекватність цьому об'єкту. В результаті такої перевірки адекватності можна прогнозувати адекватність розробленої аналітичної моделі і для не функціонуючого об'єкту моделювання.

Експериментальні методи отримання динамічних моделей базуються на результатах експериментальних досліджень, для яких внутрішня структура та взаємозв'язки проміжних параметрів є несуттєвими. Частіше всього, об'єкт моделювання розглядається як "чорний ящик", тобто щось з невідомою внутрішньою структурою. Ми знаємо лише межі об'єкта, входи та виходи. Задачами експериментальних методів дослідження динаміки є виявлення реакції об'єкта на збурення певної форми. Реакція об'єкта визначається шляхом спостереження за змінами у часі визначальних параметрів. Збурення для дослідження динамічних характеристик можуть бути одиничними або періодичними.

Експериментальні методи отримання динамічних моделей є, як правило, більш простими, менш трудомісткими, чим аналітичний метод. Крім того, отримані цими методами динамічні характеристики є, звичайно, більш точними. Однак мають місце і недоліки експериментальних методів моделювання динаміки і отриманих з їх допомогою характеристик:

1. Під час експериментального дослідження динаміки об'єктів моделювання доводиться, як правило, порушувати їх нормальну роботу шляхом подачі на вхід спеціальних впливів збурень.

2. Отримані експериментальним шляхом динамічні характеристики не відображають внутрішні взаємозв'язки в об'єкті моделювання, та його структуру.

3. Моделі динаміки, що отримані експериментальним шляхом, описують лише конкретні об'єкти, для яких вони отримані. Перенесення результатів експерименту на інші, навіть близькі за конструкцією та технологією об'єкти, є неправомірним.

Як видно з наведеного аналізу, кожен із методів має свої позитивні і негативні якості. Вибір методу моделювання слід проводити в залежності від можливості роботи з об'єктом, вимог до математичних моделей та способу їх подальшого застосування. Деякі додаткові відомості до вибору методу отримання динамічних моделей розглянемо під час їх детального дослідження.

Розглянемо основні положення та методику аналітичного отримання динамічних характеристик.

4.2. Розробка динамічних моделей аналітичним методом

Аналітичний (розрахунковий) метод отримання динамічних моделей базується на складанні рівнянь матеріальних чи енергетичних балансів акумулюючих ємностей об'єкта моделювання в перехідних (динамічних) режимах, тобто з урахуванням акумуляції речовин чи енергії, які мають місце при змінах визначальних (вихідних) параметрів. Результатом аналітичного моделювання динамічного режиму об'єкта є рівняння динаміки, яке зв'язує вихідну величину та її похідні з усіма входами об'єкта, що враховуються під час моделювання.

Якщо об'єкт має декілька вихідних (визначальних) величин, то його динамічна модель повинна мати стільки рівнянь динаміки, скільки є вихідних величин. Для аналітичного моделювання динаміки об'єктів керування потрібно визначення меж цього об'єкта, його входів та виходів, а також внутрішньої структури. Внутрішні взаємозв'язки об'єкта визначаються певними фізичними чи хімічними процесами, що проходять в його ємностях чи на їх межах, наприклад, процесами теплопередачі, масообміну, хімічного чи фізичного перетворення речовин, тощо.

Знання внутрішньої структури об'єкта моделювання, а також основних процесів, що проходять у ньому, дозволяє отримати розрахункову схему об'єкта, а з неї і самі рівняння матеріальних чи теплових балансів у динаміці. Рівняння динаміки ємностей звичайно отримують із рівнянь їх балансів у статичних (сталих) режимах шляхом врахування акумуляції речовин чи енергії в ємності під час змін у часі визначальних її параметрів.

Отримані таким чином рівняння динаміки акумулюючих ємностей з числовими коефіцієнтами можуть бути кінцевим продуктом моделювання. Однак досить часто з отриманих рівнянь динаміки ємностей, шляхом їх спільного розв'язування відносно входів та виходів, отримують одне рівняння динаміки всього об'єкта, яке зв'язує його виходи з входами. Таке рівняння буде, звичайно, вже не першого порядку.

Його порядок буде дорівнювати кількості акумулюючих ємностей. Систему рівнянь акумулюючих ємностей, записавши їх в формі Коші, можна перетворити в систему рівнянь станів, а отриману таким чином модель називають математичною моделлю в просторі станів.

Рівняння динаміки акумулюючих ємностей нерідко є нелінійними диференціальними рівняннями. Для подальшого використання їх доводиться лінеаризувати.

Розрахунок числових значень коефіцієнтів рівнянь динаміки виконується виходячи із загального (символьного) запису цих коефіцієнтів. Замість використаних під час отримання моделі позначень підставляються їх числові значення, що відповідають початковому для динаміки статичному режиму. Звичайно, таким початковим статичним (сталим) режимом є

основний статичний режим. Рівняння динаміки перед розрахунком числових значень коефіцієнтів перетворюють до канонічної форми, тобто такої форми, коли їх коефіцієнти приймають певний фізичний зміст.

Отримання рівнянь динаміки об'єктів моделювання аналітичним шляхом у значній мірі носить індивідуальний характер, у зв'язку з фізико-хімічною специфікою об'єктів. Але, разом з тим, для моделювання об'єктів із зосередженими параметрами можна розробити певну послідовність, тобто певний загальний підхід до аналітичного отримання динамічних моделей. Цей загальний підхід можна виразити у вигляді методики аналітичного моделювання об'єктів із зосередженими параметрами.

Для аналітичного моделювання об'єкта необхідно:

1. Визначити входи та виходи об'єкту моделювання, а також його границі.

2. Визначити внутрішню структуру об'єкта моделювання, ввести припущення, які спрощують модель, виділити акумулюючі ємності.

3. Ввести позначення основних параметрів об'єкта моделювання та його акумулюючих ємностей.

4. На базі пунктів 1-3 побудувати розрахункову схему об'єкта моделювання.

5. Скласти для кожної акумулюючої ємності рівняння статички у вигляді балансних рівнянь, виходячи із фізичної природи визначальних параметрів ємності.

6. Розв'язати рівняння статички. Визначити числові значення всіх констант та змінних, що задовольняють рівнянням статички.

7. Скласти таблицю числових значень констант та змінних, що входять в рівняння статички, тобто задати основний (початковий) режим.

8. Рівняння статички (п. 5) перетворити в рівняння динаміки ємностей шляхом врахування акумуляції в них речовин чи енергії.

9. Лінеаризувати рівняння динаміки ємностей з використанням розкладання його складових у ряд Тейлора.

10. Записати рівняння динаміки ємностей у канонічній формі (або, при необхідності, у формі Коші).

11. Розрахувати числові значення коефіцієнтів рівнянь динаміки, використовуючи числові значення величин, які вміщені в таблицю (п. 7).

12. Отримана система рівнянь динаміки акумулюючих ємностей і буде динамічною моделлю об'єкта керування. Якщо рівняння акумулюючих ємностей записані в канонічній формі, то така система рівнянь дає модель в канонічній (звичайній) формі. Якщо ж рівняння записані в формі Коші, то ми отримаємо модель об'єкта в просторі станів. Часто необхідно отримати одне сумарне рівняння динаміки всього багатоемкісного об'єкта моделювання. У цьому випадку змінюються пункти методики, починаючи з п. 10.

13. Перетворити рівняння динаміки акумулюючих ємностей за Лапласом.

14. Розв'язати отриману систему рівнянь моделі відносно виходу та входів об'єкта. Отримати зображення рівняння динаміки об'єкта.

15. Виконати зворотне перетворення зображення рівняння динаміки об'єкта до оригіналу.

16. Записати отримане (п. 12) рівняння динаміки в канонічній формі.

17. Розрахувати числові значення коефіцієнтів рівняння динаміки, використовуючи дані таблиці (п. 7), або числові значення коефіцієнтів рівнянь динаміки акумулюючих ємностей, якщо вони отримані.

18. Отримано рівняння динаміки об'єкта моделювання, яке зв'язує його вихідну величину з входами.

4.3. Статистика в динамічних моделях

4.3.1. Випадкові процеси в динамічних моделях

Аналіз роботи технологічних об'єктів показує, що детермінована модель вхідних і вихідних величин не завжди адекватно відображає реальні технологічні процеси. В цих величинах завжди є *випадкова складова*. Тому необхідно розробляти аналітичні динамічні моделі, в яких враховується ця складова.

На практиці дуже часто зустрічаються випадкові процеси, що протікають у часі приблизно однорідно й мають вигляд безперервних випадкових коливань навколо деякого середнього значення, причому ні середня амплітуда ні характер цих коливань не виявляють істотних змін з часом. Такі випадкові процеси називаються стаціонарними.

Як приклади стаціонарних випадкових процесів можна привести:

1. коливання літака на сталому режимі горизонтального польоту;
2. коливання напруги в електричній освітлювальній мережі;
3. випадкові шуми в радіоприймачі;
4. процес похитування корабля та ін.

Кожен *стаціонарний процес* можна розглядати як триваючий невизначено довго у часі. При дослідженні стаціонарного процесу як початок відліку можна вибрати будь-який момент часу. Досліджуючи стаціонарний процес на будь-якій ділянці часу, ми повинні отримати ті самі його характеристики.

Прикладом стаціонарного випадкового процесу може служити зміна висоти центра ваги літака в сталому режимі горизонтального польоту (рис. 4.1)

На противагу стаціонарним випадковим процесам можна вказати інші, *нестационарні, випадкові процеси*, наприклад, коливання літака в процесі пікірування, процес загасаючих коливань в електричному ланцюзі, процес горіння порохового заряду в реактивній камері й ін.

Нестационарний процес характерний тим, що він має певну тенденцію розвитку в часі. Характеристики такого процесу залежать від початку відліку та від часу.

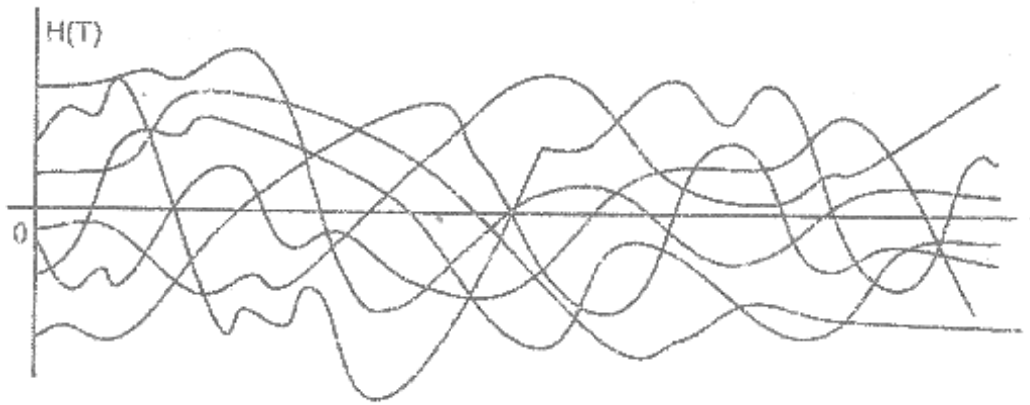


Рис. 4.1. Графіки зміна висоти центра ваги літака в сталому режимі горизонтального польоту

На рис. 4.2. зображене сімейство реалізацій нестаціонарного випадкового процесу – процесу зміни тяги двигуна реактивного снаряда у часі.

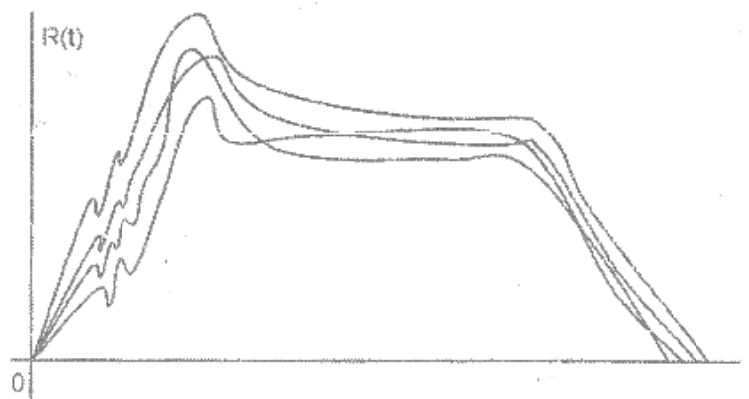


Рис. 4.2. Сімейство реалізацій нестаціонарного випадкового процесу – процесу зміни тяги двигуна реактивного снаряда в часі

Як правило, випадковий процес у будь-якій динамічній системі починається з нестаціонарної стадії – з так званого «перехідного процесу». Після згасання перехідного процесу система як правило переходить у сталий режим, і тоді випадкові процеси, що протікають у ній, можуть вважатися стаціонарними.

Стаціонарні випадкові процеси дуже часто зустрічаються у фізичних і технічних задачах. За своєю природою ці процеси простіші, ніж нестаціонарні, і описуються більш простими характеристиками. Лінійні перетворення стаціонарних випадкових процесів також значно простіші, ніж у нестаціонарних.

У зв'язку з цим на практиці набула широкого застосування спеціальна теорія стаціонарних випадкових процесів, або, точніше, теорія стаціонарних випадкових функцій (тому що аргументом стаціонарної випадкової функції в загальному випадку може бути й не час).

Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо всі її ймовірнісні характеристики не залежать від t (точніше, не міняються при будь-якій зміні аргументів, від яких вони залежать, за часом).

Так як зміна стаціонарної випадкової функції повинна протікати однорідно за часом, то природно вважати, щоб для стаціонарної випадкової функції математичне очікування буде постійним

$$m_x(t) = m_x = \text{const} . \quad (4.1)$$

Зауважимо, що ця вимога не є суттєвою: ми знаємо, що від випадкової функції завжди можна перейти до центрованої випадкової функції $X(t)$, для якої математичне очікування тотожно дорівнює нулю і, отже, задовольняє умові (4.1). Таким чином, якщо випадковий процес нестаціонарний тільки за рахунок змінного математичного очікування, це не перешкодить нам вивчати його як стаціонарний процес.

Друга умова, якій, повинна задовольняти стаціонарна випадкова функція, – це умова сталості дисперсії

$$D_x(t) = D_x = \text{const} . \quad (4.2)$$

4.3.2. Кореляційна функція випадкового процесу

Встановимо, якій умові повинна задовольняти кореляційна функція стаціонарної випадкової функції. Розглянемо випадкову функцію $X(t)$ (рис. 4.3). Прийmemo у виразі $K_x(t, t')$ значення, $t' = t + \tau$ і розглянемо $K_x(t, t + \tau)$ – кореляційний момент двох перетинів випадкової функції, розділених інтервалом часу τ . Очевидно, якщо випадковий процес $X(t)$ дійсно стаціонарний, то цей кореляційний момент не повинен залежати від того, де саме на часовій осі ми взяли інтервал τ , а повинен залежати тільки від довжини цього інтервалу. Наприклад, для інтервалів I і II на рис. 4.3, що мають однакову довжину τ , значення кореляційної функції $K_x(t, t + \tau)$ і $K_x(t_1, t_1 + \tau)$ повинні бути однаковими.

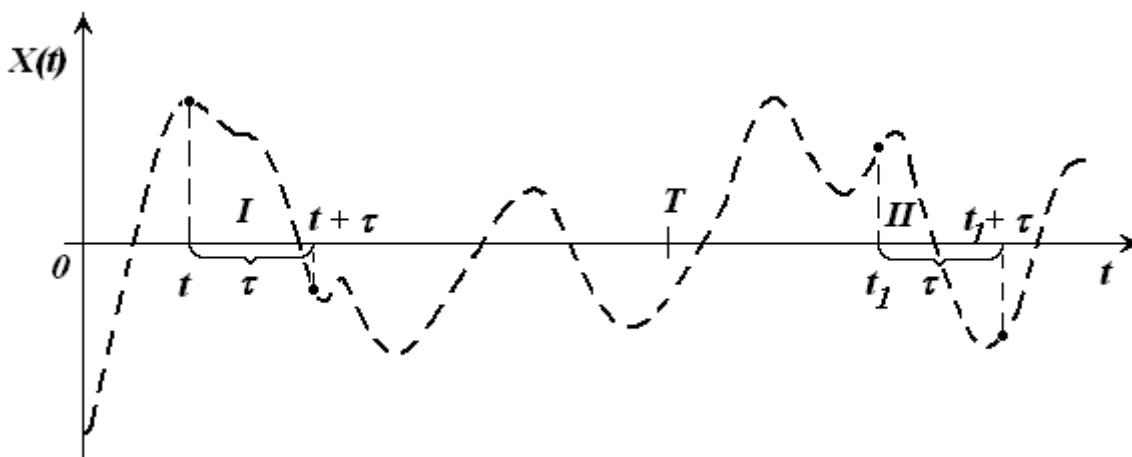


Рис. 4.3. Реалізація випадкової функції $X(t)$

Взагалі, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу повинна залежати не від положення і першого аргументу на осі абсцис, а тільки від проміжку τ між першим і другим аргументами

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau). \quad (4.3)$$

Отже, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є функцією не двох, а всього одного аргументу. Ця обставина в ряді випадків сильно спрощує операції над стаціонарними випадковими функціями.

Замітимо, що умова (4.2), що вимагає від стаціонарної випадкової функції сталості дисперсії, є частковим випадком умови (4.3). Дійсно, вважаючи, що у формулі (4.3) $t + \tau = 1$ ($\tau = 0$), маємо

$$D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(0) = const. \quad (4.4)$$

Таким чином, умова (4.3) є єдиною істотною умовою, якій повинна задовольняти стаціонарна випадкова функція. Тому надалі під стаціонарною випадковою функцією будемо розуміти таку випадкову функцію, кореляційна функція якої залежить не від обох своїх аргументів t і t' , а тільки від різниці τ між ними. Щоб не накладати спеціальних умов на математичне очікування, ми будемо розглядати тільки центровані випадкові функції.

Ми знаємо, що кореляційна функція будь-якої випадкової функції має властивість симетрії

$$K_x(t', t) = K_x(t, t').$$

Звідси для стаціонарного процесу, вважаючи $t' - t = \tau$, маємо

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau). \quad (4.5)$$

Таким чином, кореляційна функція $k_x(\tau)$ є парна функція свого аргументу і її беруть тільки для позитивних значень аргументу (рис. 4.4).

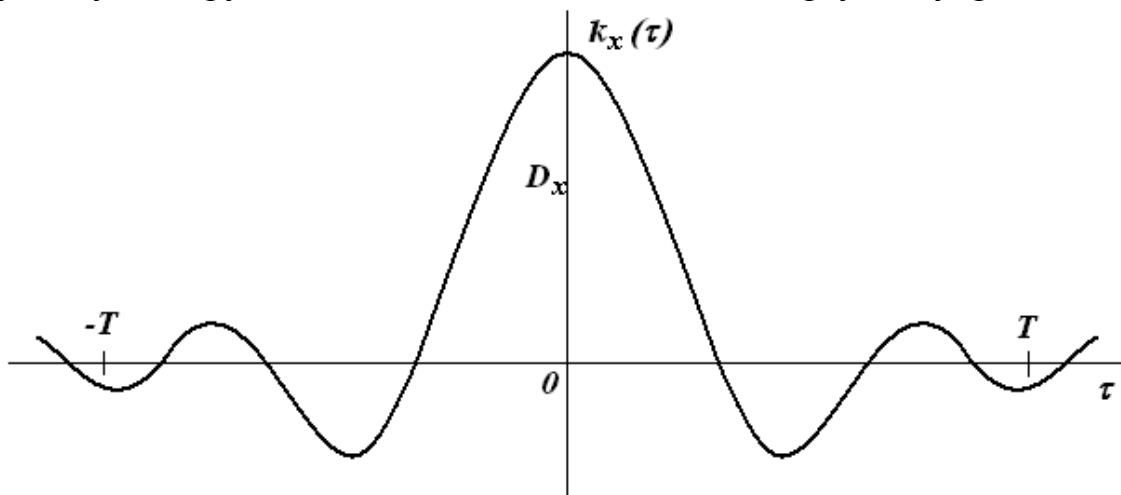


Рис. 4.4. Графік кореляційної функції $k_x(\tau)$

На практиці замість кореляційної функції $k_x(\tau)$ часто користуються нормованою кореляційною функцією

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}. \quad (4.6)$$

де $D_x = k_x(0)$ – постійна дисперсія стаціонарного процесу. Функція $\rho_x(\tau)$ є не що інше, як коефіцієнт кореляції між перетинами випадкової функції, розділеними інтервалом τ за часом. Очевидно, що $\rho_x(0) = 1$.

4.3.3. Спектральний розклад стаціонарної випадкової функції

Існує зв'язок між характером кореляційної функції і внутрішньою структурою відповідного їй випадкового процесу. Залежно від того, які частоти й у яких співвідношеннях переважають у складі випадкової функції, її кореляційна функція буває різною. Це приводить до поняття про спектральний склад випадкової функції.

Якщо який-небудь коливальний процес подається у вигляді суми гармонійних коливань різних частот (так званих «гармонік»), то *спектром коливального процесу називається функція, що описує розподіл амплітуд по різних частотах*. Спектр показує, якого роду коливання переважають у даному процесі і яка його внутрішня структура.

Для випадкового процесу амплітуди коливань також будуть випадковими величинами. Спектр стаціонарної випадкової функції буде описувати розподіл дисперсій за різними частотами.

Розглянемо стаціонарну випадкову функцію $X(t)$, що ми спостерігаємо на інтервалі $(0, T)$ (рис. 4.3).

Задано кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$.

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau),$$

яка є парною $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ і отже, на графіку буде відображена симетричною кривою відносно осі ординат (рис.4.4).

При зміні t і t' від 0 до T аргумент $x = t' - t$ змінюється від $-T$ до $+T$.

Відомо, що парну функцію на інтервалі $(-T, T)$ можна розкласти в ряд Фур'є.

Отже, випадкова функція $X(t)$ може бути представлена у вигляді канонічного розкладу

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (4.7)$$

де U_k, V_k – некорельовані випадкові величини з математичними очікуваннями, рівними нулю, і дисперсіями, однаковими для кожної пари випадкових величин з тим самим індексом k

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k. \quad (4.8)$$

Таким чином, ми отримали на інтервалі $(0, T)$ канонічний розклад випадкової функції $\overset{\circ}{X}(t)$, координатними функціями якого є функції $\cos \omega_k t, \sin \omega_k t$ при різних значеннях ω_k . Розкладом такого роду називається спектральний розклад стаціонарної випадкової функції. На поданні випадкових функцій у вигляді спектральних розкладів заснована так звана спектральна теорія стаціонарних випадкових процесів.

Спектральний розклад представляє стаціонарну випадкову функцію розкладену на гармонійні коливання різних частот ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$), причому амплітуди цих коливань є випадковими величинами.

Визначимо дисперсію випадкової функції $\dot{X}(t)$, заданої спектральним розкладом (4.7). Згідно теореми про дисперсії лінійної функції некорельованих випадкових величин

$$D_x = D \left[\dot{X}(t) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos^2 \omega_k t + V_k \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (4.9)$$

Таким чином, дисперсія стаціонарної випадкової функції дорівнює сумі дисперсій всіх гармонік її спектрального розкладу. Формула (4.9) показує, що дисперсія функції $\dot{X}(t)$ відомим образом розподілена за різними частотами. Одним частотам відповідають більші дисперсії, іншим – менші.

Розподіл дисперсій за частотами стаціонарної випадкової функції $\dot{X}(t)$ на кінцевій ділянці часу $(0, T)$ можна проілюструвати графічно у вигляді спектра дисперсій. Для цього по осі абсцис відкладаються частоти ($\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$) через рівні проміжки, а по осі ординат – відповідні дисперсії (спектр) (рис. 4.5) у вигляді ліній.

Очевидно, що сума всіх ординат побудованого в такий спосіб спектра дорівнює дисперсії випадкової функції.

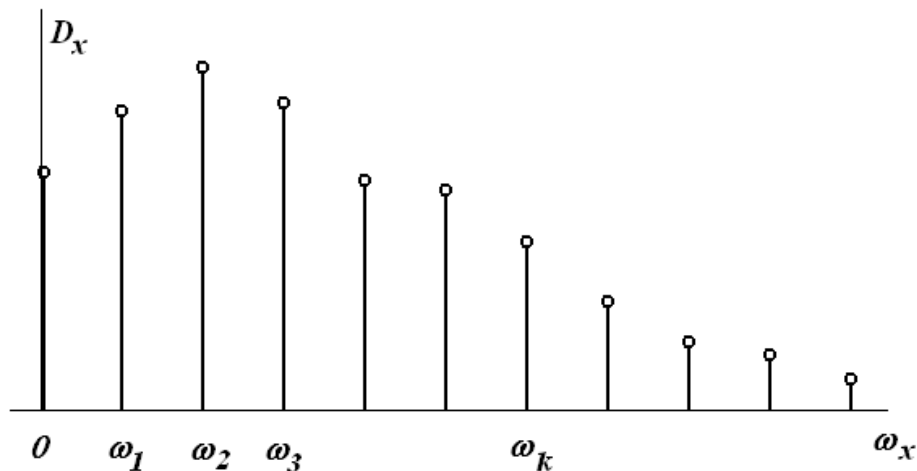


Рис. 4.5. Графік спектра стаціонарної випадкової функції

Чим більшу ділянку часу ми будемо розглядати, тим кращі будуть наші відомості про випадкову функцію. Тому в спектральному розкладі спробуємо перейти до межі при $T \rightarrow \infty$ і подивитися, в що при цьому перетвориться спектр випадкової функції. При $T \rightarrow \infty$ та $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} \rightarrow 0$ відстані між частотами ω_k , на яких будується спектр, будуть необмежено зменшуватися. При цьому дискретний спектр буде наближатися до безперервного, в якому кожному як завгодно малому інтервалу частот $\Delta\omega$ буде відповідати елементарна дисперсія $\Delta D(\omega)$.

Зобразимо неперервний спектр графічно. Для цього будемо відкладати по осі ординат вже не саму дисперсію D_k (яка нескінченно зменшується при $T \rightarrow \infty$), а середню щільність дисперсії, тобто дисперсію, що доводиться на одиницю довжини даного інтервалу частот. Позначимо відстань між сусідніми частотами $\Delta\omega$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \Delta\omega$ і на кожному відрізку $\Delta\omega$, побудуємо прямокутник із площею D_k . Отримаємо ступінчасту діаграму (рис. 4.6).

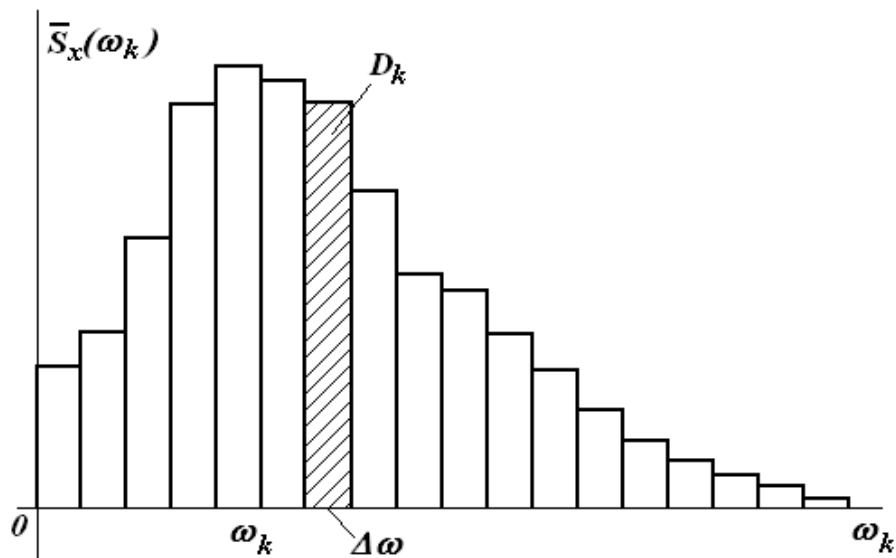
Висота діаграми на інтервалі $\Delta\omega$, яка належить до точки ω_k , дорівнює

$$S_k(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}, \quad (4.10)$$

і являє собою середню щільність дисперсії на цій ділянці.

Сумарна площа всієї діаграми дорівнює дисперсії випадкової функції.

Будемо необмежено збільшувати інтервал T . При цьому $\Delta\omega \rightarrow 0$, і ступінчаста крива буде необмежено наближатися до безперервної плавної кривої $S_x(\omega)$ (рис. 4.7), спектральної щільності стаціонарної випадкової функції $\dot{X}(t)$.



Рисю 4.6. Ступінчаста діаграма щільності дисперсії

Очевидно, що площа, обмежена кривою $S_x(\omega)$, як і раніше повинна бути рівною дисперсії D_x випадкової функції $\dot{X}(t)$.

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (4.11)$$

Формула (4.11) відображає розкладання дисперсії D_x на суму елементарних дисперсій $S_x(\omega)d\omega$, кожне з яких являє собою дисперсію, що доводиться на елементарну ділянку частот $d\omega$, яка лежить поряд з точкою ω (рис. 4.7).

Таким чином, дано визначення важливої характеристики стаціонарного випадкового процесу – спектральної щільності, що описує частотний склад стаціонарного процесу. Однак ця характеристика не є самостійною, вона повністю визначається кореляційною функцією даного процесу. Спектральна щільність $S_x(\omega)$ може бути виражена через кореляційну функцію.

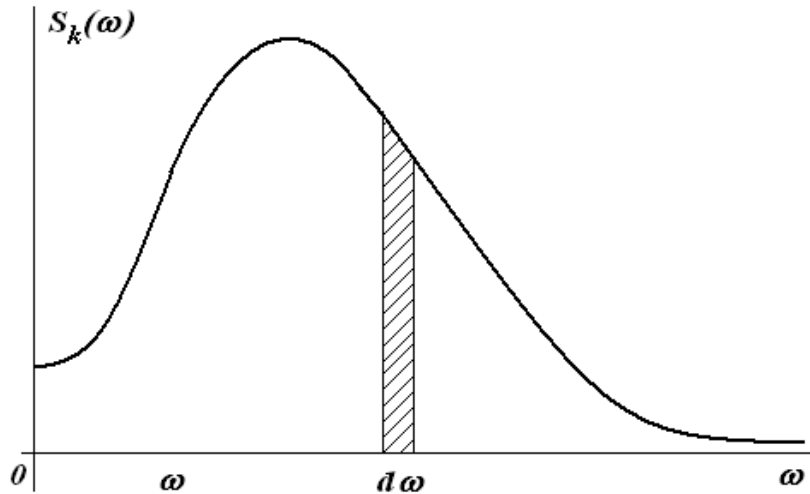


Рис. 4.7. Графік спектральної щільності дисперсії $S_x(\omega)$

Запишемо ці вирази

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (4.12)$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.13)$$

Вирази типу (4.12) відомо в математиці за назвою інтеграла Фур'є. Інтеграл Фур'є є узагальнення розкладу в ряд Фур'є для випадку неперіодичної функції, розглянутої на нескінченному інтервалі, і являє собою розкладання функції на суму елементарних гармонійних коливань із безперервним спектром.

Подібно тому як ряд Фур'є виражає розкладання функції через коефіцієнти ряду, які у свою чергу виражаються через розкладання функції, формули (4.12) і (4.13) виражають функції $k_x(\tau)$ і $S_x(\omega)$ взаємно одна через іншу. Формула (4.12) виражає кореляційну функцію через спектральну щільність; формула (4.13), навпаки, виражає спектральну щільність через кореляційну функцію. Формули типу (4.12) і (4.13), що зв'язують взаємно дві функції, називаються перетвореннями Фур'є.

Відмітимо, що із загальної формули (4.12) при $\tau = 0$ виходить раніше отримане розкладання дисперсії по частотах (4.11).

На практиці замість спектральної щільності $S_x(\omega)$ часто користуються нормованою спектральною щільністю

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}, \quad (4.14)$$

де D_x – дисперсія випадкової функції.

У ряді випадків з погляду простоти математичних перетворень виявляється зручним користуватися не дійсною, а комплексною формою запису як спектрального розкладання випадкової функції, так і її характеристик спектральної щільності й кореляційної функції. Комплексна форма запису зручна, зокрема, тому, що всілякі лінійні операції над функціями, що мають вигляд гармонійних коливань (диференціювання, інтегрування, розв'язання лінійних диференціальних рівнянь і т.д.), здійснюються набагато простіше, коли ці гармонійні коливання записані не у вигляді синусів і косинусів, а в комплексній формі, у вигляді показових функцій. Комплексна форма запису кореляційної функції й спектральної щільності застосовується в тих випадках, коли сама випадкова функція (а отже, і її кореляційна функція й спектральна щільність) дійсна.

Для перетворень скористаємося формулою Ейлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

замінімо $S_x(\omega) = 2S_x^*(\omega)$ і розширимо область інтегрування на інтервал від $-\infty$ до $+\infty$.

В результаті з формул (4.12) і (4.13) отримаємо

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (4.15)$$

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.16)$$

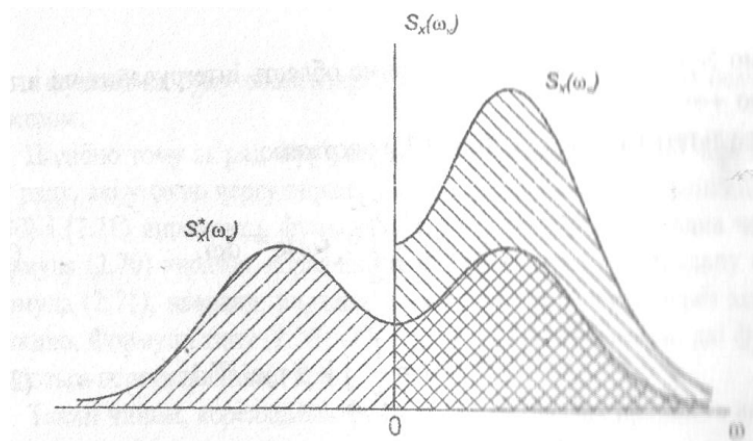


Рис. 4.8. Графіки функцій спектральної щільності, $S_x(\omega)$ та $S_x^*(\omega)$

Вважаємо, що у формулі (4.14) $\tau = 0$ та отримаємо вираз дисперсії випадкової функції $X(t)$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega. \quad (4.17)$$

Формула (4.16) виражає дисперсію випадкової функції у вигляді суми елементарних дисперсій, розподілених з деякою щільністю на всьому діапазоні частот від $-\infty$ до $+\infty$.

Порівнюючи формулу (4.16) і раніше виведену (для дійсної форми спектрального розкладання) формулу (4.11), бачимо, що вони розрізняються лише тим, що у формулі (4.16) використовується трохи інша функція спектральної щільності $S_x^*(\omega)$, визначена не від 0 до $+\infty$, а від $-\infty$ до $+\infty$, але проте із удвічі меншими ординатами. Якщо зобразити обидві функції спектральної щільності на графіку (рис.4.8), вони розрізняються тільки масштабами по осі ординат і тим, що функція $S_x(\omega)$ для від'ємних частот не визначена.

4.3.4. Перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою

Якщо і вхідний вплив $X(t)$ і реакція системи $Y(t)$ стаціонарні, завдання перетворення випадкової функції можна звести до перетворення не випадкової функції – спектральної щільності $S_x(\omega)$.

Для того щоб при стаціонарному впливі реакція системи могла бути теж стаціонарною, очевидно необхідно, щоб параметри системи (наприклад опори, ємності, індуктивності і ін.) були постійними, а не змінними. Умовимося називати лінійну систему з постійними параметрами стаціонарною лінійною системою. Звичайно робота стаціонарної лінійної системи описується лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо задачу про перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою. Нехай на вхід лінійної системи L надходить стаціонарна випадкова функція $X(t)$, реакція системи є випадкова функція $Y(t)$ (рис. 4.9). Відомі характеристики випадкової функції $X(t)$ математичне очікування m_x , і кореляційна функція $k_x(\tau)$. Потрібно визначити характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході лінійної системи.

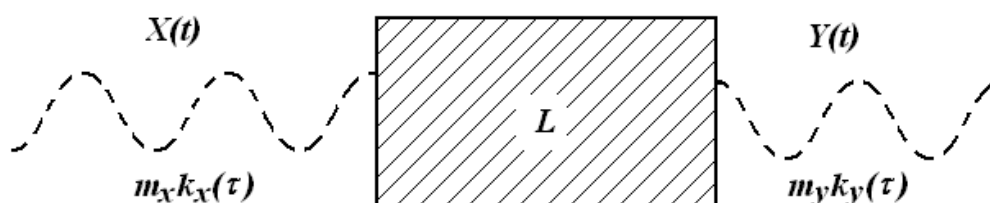


Рис. 4.9. Структурна схема перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою

Так як для розв'язання задачі нам доведеться перетворювати невинпадкові функції – математичне очікування й координатні функції, розглянемо насамперед задачу про визначення реакції системи L на невинпадковий вплив $x(t)$.

Напишемо в операторній формі лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, що зв'язує реакцію системи $y(t)$ із впливом $x(t)$

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) x(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

де $p = d/dt$ – оператор диференціювання.

Більш коротко рівняння (4.18) можна записати у вигляді

$$A_n y(t) = B_m x(t), \quad (4.19)$$

або, умовно розв'язуючи рівняння (4.19) відносно $y(t)$, записати оператор системи у «явному» вигляді

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} x(t). \quad (4.20)$$

Реакцію системи L на вплив $x(t)$ можна знайти шляхом розв'язання лінійного диференціального рівняння (4.18).

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що розв'язання складається із двох складових $y(t)$ і $y_{\text{п}}(t)$. Складова $y_{\text{п}}(t)$ – це розв'язання рівняння без правої частини й визначає *вільні*, або *власні* коливання системи. Це коливання, створені системою при відсутності вхідного впливу, якщо система в початковий момент якось була виведена зі стану рівноваги. На практиці найчастіше зустрічаються *стійкі* системи; у цих системах вільні коливання з часом згасають.

Якщо обмежитися розглядом інтервалів часу, досить, віддалених від початку процесу, коли всі перехідні процеси в системі можна вважати закінченими, і система працює в сталому режимі, можна відкинути другий доданок $y_{\text{п}}(t)$ і обмежитися розглядом тільки першого, що складає $y(t)$. Цей перший доданок визначає дії на неї заданої функції $x(t)$.

У випадку, коли вплив $x(t)$ являє собою досить просту аналітичну функцію, часто вдається знайти реакцію системи також у вигляді простої аналітичної функції. Зокрема, коли вплив представляє із себе гармонійне коливання певної частоти, система відповідає на нього також гармонійним коливанням тієї ж частоти, але зміненним за амплітудою і фазою.

Так як координатні функції спектрального розкладання стаціонарної випадкової функції $X(t)$ представляють собою гармонійні коливання, то насамперед необхідно навчитися визначати реакцію системи на гармонійне коливання заданої частоти ω . Це завдання розв'язується дуже просто, особливо якщо гармонійне коливання представлено в комплексній формі.

Припустимо, що на вхід системи надходить, гармонійне коливання вигляду

$$x(t) = e^{j\omega t}. \quad (4.21)$$

Будемо шукати реакцію системи $y(t)$ також у вигляді гармонійного коливання частоти ω , але помноженого на деякий комплексний множник $\Phi(j\omega)$.

$$y(t) = \Phi(j\omega)e^{j\omega t}. \quad (4.22)$$

Множник $\Phi(j\omega)$ знайдемо в такий спосіб. Підставимо функцію (4.20) у праву, а функцію (4.21) у ліву частину рівняння (4.18). Отримаємо

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} [\Phi(j\omega)e^{j\omega t}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [\Phi(j\omega)e^{j\omega t}] + \dots + a_1 \frac{d}{dt} [\Phi(j\omega)e^{j\omega t}] + a_0 [\Phi(j\omega)e^{j\omega t}] = \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} e^{j\omega t} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e^{j\omega t} + \dots + b_1 \frac{d}{dt} e^{j\omega t} + b_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Маючи на увазі, що при будь-якому k

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} e^{j\omega t} &= (j\omega)^k e^{j\omega t}, \\ \frac{d^k}{dt^k} [\Phi(j\omega)e^{j\omega t}] &= (j\omega)^k e^{j\omega t} \Phi(j\omega) \end{aligned}$$

і ділячи обидві частини рівняння (4.23) на $e^{j\omega t}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi(j\omega) [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] = \\ = b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ми бачимо, що множник при $\Phi(j\omega)$ являє собою багаточлен.

$$A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

у якому замість оператора диференціювання p підставлена $(j\omega)$, аналогічно права частина рівності (4.23) є не що інше, як $B_m(j\omega)$. Рівняння (4.23) можна записати у вигляді

$$\Phi(j\omega)A_n(j\omega) = B_m(j\omega),$$

звідки

$$\Phi(j\omega) = \frac{B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)}. \quad (4.25)$$

Функція $\Phi(j\omega)$ носить спеціальну назву частотної характеристики лінійної системи. Для визначення частотної характеристики досить в оператор системи, записаний у явній формі (4.20), замість оператора диференціювання p підставити $j\omega$.

Таким чином, якщо на вхід лінійної системи з постійними параметрами надходить гармонійне коливання виду $e^{j\omega t}$, то реакція системи дається у вигляді того ж гармонійного коливання, помноженого на частотну характеристику системи $\Phi(j\omega)$.

Припустимо, що на вхід системи надходить вплив виду

$$x(t) = Ue^{j\omega t}, \quad (4.26)$$

– де U - деяка величина, що не залежить від t . У силу лінійності системи величина U виходить за знак оператора і реакція системи на вплив (4.26) буде дорівнювати

$$y(t) = U\Phi(j\omega)e^{j\omega t}. \quad (4.27)$$

Очевидно, ця властивість збережеться й у тому випадку, коли величина U буде випадковою (аби тільки вона не залежала від t).

Застосуємо викладені прийоми перетворення гармонійних коливань лінійною системою до математичного очікування випадкової функції $X(t)$ і координатним функціям її спектрального розкладання.

Представимо математичне очікування m_x стаціонарної випадкової функції $X(t)$ як гармонійне коливання нульової частоти $\omega = 0$ і будемо вважати, що у формулі (4.24) $\omega = 0$

$$\Phi(0) = \frac{B_m(0)}{A_n(0)} = \frac{b_0}{a_0}, \quad (4.28)$$

звідки одержуємо математичне очікування на виході системи

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x. \quad (4.29)$$

Перейдемо до перетворення лінійною системою істотно випадкової частини функції $X(t)$, а саме функції

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x. \quad (4.30)$$

Для цього представимо функцію $\overset{\circ}{X}(t)$ на інтервалі $(0, T)$ у вигляді спектрального розкладання

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{j\omega_k t}, \quad (4.31)$$

де U_k – некорельовані випадкові величини, дисперсії яких створять спектр випадкової функції $X(t)$.

Розглянемо окремий доданок цієї суми

$$X_k(t) = U_k e^{j\omega_k t}. \quad (4.32)$$

Реакція системи на цей вплив буде мати вигляд

$$Y_k(t) = U_k \Phi(j\omega_k) e^{j\omega_k t}. \quad (4.33)$$

Відповідно до принципу суперпозиції реакція системи на суму впливів дорівнює сумі реакцій на окремі впливи. Отже, реакцію системи на вплив (4.32) можна представити у вигляді спектрального розкладання

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \Phi(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

або, позначаючи $U_k \Phi(j\omega_k) = W_k$,

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{j\omega_k t}, \quad (4.34)$$

де W_k – некорельовані випадкові величини з математичними очікуваннями, що дорівнюють нулю.

Визначимо спектр цього розкладання. Для цього знайдемо дисперсію комплексної випадкової величини W_k у розкладанні (4.34). Маючи на увазі, що дисперсія комплексної випадкової величини дорівнює математичному очікуванню квадрата її модуля, маємо

$$\begin{aligned} D[W_k] &= M[U_k \Phi(j\omega_k)]^2 = M[U_k^2 |\Phi(j\omega_k)|^2] = \\ &= |\Phi(j\omega_k)|^2 M[U_k^2] = |\Phi(j\omega_k)|^2 D_k. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Можна зробити висновок: при перетворенні стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою кожна з ординат її спектра множиться на квадрат модуля частотної характеристики системи для відповідної частоти.

Таким чином, при проходженні стаціонарної випадкової функції через лінійну стаціонарну систему її спектр певним чином змінюється: деякі частоти підсилюються, деякі, навпроти, послабляються (фільтруються). Квадрат модуля частотної характеристики (залежно від ω_k) показує, як реагує система на коливання тієї або іншої частоти.

Перейдемо у спектральному представленні випадкової функції до границі при $T \rightarrow \infty$ й від дискретного спектра – до спектральної щільності. Очевидно, спектральна щільність на виході лінійної системи виходить із спектральної щільності на вході тим же множенням на $|\Phi(j\omega)|^2$, як і ординати дискретного спектра

$$S_y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (4.36)$$

Таким чином, отримано досить просте правило: при перетворенні стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною системою її спектральна щільність множиться на квадрат модуля частотної характеристики системи.

Користуючись цим правилом, можемо легко розв'язати поставлену вище задачу – за характеристиками випадкової функції на вході лінійної системи знайти характеристики випадкової функції на її виході.

Нехай на вхід стаціонарної лінійної системи з оператором (4.25) надходить стаціонарна випадкова функція $X(t)$ з математичним очікуванням m_x і кореляційною функцією $k_x(\tau)$. Потрібно знайти математичне очікування m_y й кореляційну функцію $k_y(\tau)$ випадкової функції $Y(t)$ па виході системи.

Задача розв'язується в наступному порядку.

1. Знаходимо математичне очікування на виході

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x. \quad (4.37)$$

2. За кореляційною функцією $k_x(\tau)$ знаходимо спектральну щільність на вході

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.38)$$

3. За формулою (4.25) знаходимо частотну характеристику системи і квадрат її модуля

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{|B_m(j\omega)|^2}{|A_n(j\omega)|^2}. \quad (4.39)$$

4. Множачи спектральну щільність на вході на квадрат модуля частотної характеристики знаходимо спектральну щільність на виході

$$S_y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (4.40)$$

5. За спектральною щільністю $S_y(\omega)$ знаходимо кореляційну функцію $k_y(\tau)$ на виході системи

$$k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.41)$$

Контрольні запитання

1. Чим відрізняються аналітичний і статистичний методи отримання динамічних характеристик об'єктів керування?
2. Які недоліки мають експериментальні методи моделювання динаміки об'єктів керування?
3. На чому базується аналітичний (розрахунковий) метод отримання динамічних моделей об'єктів?
4. Яка послідовність дій при виконанні аналітичного моделювання об'єктів із зосередженими параметрами?
5. Що таке стаціонарні випадкові процеси? Наведіть їх приклади.
6. Якими є нестаціонарні, випадкові процеси і від чого вони залежать? Їх приклади.
7. Від чого залежить кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?
8. Що описує спектр коливального процесу випадкової функції?
9. Чому дорівнює дисперсія стаціонарної випадкової функції? Наведіть формулу дисперсії.
10. Що таке інтеграл Фур'є і як він описує розкладання функції на суму елементарних гармонійних коливань із безперервним спектром?
11. Якщо і вхідний вплив $\overset{\circ}{X}(t)$ і реакція системи $Y(t)$ стаціонарні, то як описується перетворення стаціонарної випадкової функції?
12. При подачі на вхід системи, гармонійного коливання виду $x(t) = e^{j\omega t}$ на виході отримаємо гармонійне коливання $y(t) = \Phi(j\omega)e^{j\omega t}$. Чому дорівнює і як називається функція $\Phi(j\omega)$?
13. Як рахується математичне очікування на виході системи стаціонарної випадкової функції $X(t)$?
14. В якій послідовності за характеристиками випадкової функції на вході лінійної системи знайти характеристики випадкової функції на її виході?

РОЗДІЛ 5

СТРУКТУРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

5.1. Вступ до ідентифікації

Під ідентифікацією об'єктів розуміють побудову його математичної моделі та визначення її параметрів по даних реакції об'єкта на відомі зовнішні збурення.

При побудові математичної моделі спочатку визначають клас та структуру її операторів, а саме закон за яким збурення (вхідні змінні) перетворюються в реакції об'єкта (вихідні процеси). Ця частина загальної задачі ідентифікації називається структурною ідентифікацією. Визначення числових значень параметрів математичної моделі, структура якої відома, чи оцінок параметрів самого об'єкта називається параметричною ідентифікацією.

Поняття "об'єкт ідентифікації" у загальному випадку має широкий сенс: це може бути регіон з складною господарчою структурою, завод або його підрозділ, механічна, електрична або біологічна система, системи без зворотного зв'язку або системи зі зворотнім зв'язком. Методи ідентифікації таких різних за призначенням, видом та структурою об'єктів та систем мають ряд загальних рис. Далі будемо розглядати тільки математичні моделі, що встановлюють зв'язок між вхідними й вихідними змінними.

Побудова математичних моделей промислових об'єктів теоретичними методами дозволить оцінювати вплив конструктивних параметрів об'єкта на його динамічні властивості, що необхідно при проектуванні нових промислових об'єктів й устаткування. Але з огляду на складність об'єктів теоретичні методи побудови математичних моделей виявляються малоефективними й тому експериментальні методи часто є єдино можливими при побудові та ідентифікації математичних моделей об'єктів керування.

Слід зауважити, що математичні моделі, отримані на основі експериментальних методів часто формально відображають функціональні зв'язки між входом та виходом, і відповідають саме цьому конкретному об'єкту чи системі. В такому разі робити узагальнення дуже важко і це можна зробити тільки тоді, коли обрані функції відповідають фізичним процесам які відбуваються всередині об'єкта чи системи.

5.2. Особливості структурної ідентифікації. Спрощення властивостей системи

Розробка аналітичних моделей в попередніх лекціях ґрунтувалася на фундаментальних законах і багаторічному досвіді людства, при цьому вирішувалася пряма задача визначення реакції системи з відомими параметрами на вплив збурення. Але так буває не завжди. Частіше буває, коли і структура майбутньої моделі, і параметри невідомі. Тоді і необхідно

проявити вміння математичного моделювання, яке спирається на глибокі знання фізичної природи явищ, об'єктів і процесів; володіння широким спектром математичних методів та засобів вирішення складних задач; на досвід організації та проведення наукового експерименту.

При всякому теоретичному дослідженні якої-небудь реальної фізичної системи ми завжди змушені *спрощувати властивості цієї системи*. Спрощення задачі завжди неминуче. При описі системи потрібно враховувати основні вирішальні фактори, що визначають ті риси поведінки системи, які нас цікавлять, не слід старатися точно врахувати всі без винятку її властивості. Це останнє нездійсненно; і значно ускладнює або і унеможлиблює рішення задачі.

При спрощенні задачі, насамперед виникає питання про те, до якого ступеня можна спрощувати властивості системи щоб отримати задовільні результати. Відповідь на це питання остаточно може дати тільки досвід.

Це справедливо лише в тому випадку, коли теоретичний опис спрощеної схеми виконано досить детально. Бездоганна теорія – це теорія, яка дає не тільки точні кількісні відповіді на поставлені питання а й наближені кількісні відповіді (наприклад може оцінити амплітуду коливального процесу за допомогою нерівностей) і повинна робити якісні висновки (наприклад про існування періодичних рухів). Тільки в цьому випадку можна вважати розбіжність теорії й досвіду безперечним доказом недостатності початкових спрощень й необхідності врахувати якісь нові властивості системи для пояснення спостережуваних явищ.

Варто підкреслити, що висновки про допустимість того чи іншого спрощення можуть бути отримані не тільки з порівняння результатів теоретичного розгляду з даними випробувань, але й із порівнянням результатів двох різних теорій, одна з яких зроблена з використанням даного спрощення, а інша – без цього спрощення. Оскільки перша теорія висунута при неврахуванні відомих обставин, а друга, навпаки, з урахуванням тих же самих обставин, то, порівнюючи результати обох теорій, отримують безпосередні висновки про те, яку роль грають ці обставини для рішення того або іншого питання. Переконавшись тим або іншим шляхом у тім, що для рішення даного питання відома обставина відіграє другорядну роль, надалі поширюємо отриманий результат і на інші, аналогічні задачі, спочатку опускаючи ці обставини, а потім перевіряючи законність цих припущень на досвіді.

Характер спрощення, припустимого при розгляді тієї чи іншої задачі, визначається всіма задачами у цілому і залежить не тільки від властивостей розглянутої системи, але й від того, на які саме питання ми хочемо отримати відповідь при розгляді задачі.

Приклад 1. Розглянемо систему, що складається із сталеві кульки, яка падає вертикально на горизонтальну сталеву дошку. Якщо нас цікавить рух кульки взагалі, то ми не помилимося, якщо будемо вважати, що кулька – це матеріальна точка, яка рухається під дією сили ваги, швидкість якої при досягненні дошки миттєво міняє свій знак.

Якщо ж нас цікавлять пружні напруження, які виникають у кульці при ударі, то зрозуміло, що ми вже не можемо розглядати кульку як матеріальну точку; кульку доводиться ідеалізувати як пружне тіло з певними константами, які характеризують властивості сталі, враховують характер деформацій, час зіткнення й т.д.

Подібний приклад можна було б привести й з теорії електричних систем, де можуть бути випадки, коли для відповіді на одні питання можна вважати ємність і самоіндукцію об'єктами із зосередженими параметрами, а для відповіді на інші питання (що ставляться до тієї ж системи) – з розподіленими.

Приклад 2. Якщо нас цікавить питання про *вільні коливання маятника* протягом деякого невеликого часу, то ми можемо відмовитися від врахування сил тертя. Однак при наявності тертя, яке відчуває маятник, це ж спрощення не дозволить нам отримати правильну відповідь на питання про рух маятника протягом великого проміжку часу, тому що рух маятника згасає. Точно так само при розгляді питання про вимушені коливання маятника під дією зовнішньої сили, яка змінюється за гармонічним законом, ми можемо не враховувати тертя в системі, якщо нас цікавить область, далека від резонансу. Поблизу резонансу те ж спрощення (неврахування тертя) позбавить нас можливості одержати правильну відповідь на питання про амплітуду змушених (сталіх) коливань, тому що при резонансі ця амплітуда істотно залежить від величини тертя. Таким чином, те саме спрощення може бути доцільним, чи недоцільним, залежно від того, на які питання ми хочемо отримати відповідь.

Допустимість того або іншого спрощення залежить і від кількісних співвідношень, які характеризують задачу. Наприклад, в прикладі з маятником можна нехтувати тертям тільки за умовою, що тертя досить мале і час, протягом якого ми вивчаємо рух маятника, також не занадто великий. Але коли ми кажемо «мало» або «багато», то це має рацію тільки тоді, коли ми вказуємо, у порівнянні з якою величиною мала чи велика дана величина. Так у нашому прикладі ми повинні вибрати, щоб показник згасання був малий порівняно із частотою коливань і щоб час спостереження був не занадто великий в порівнянні з періодом коливань. Тільки при подібних умовах можна вважати доцільними такі кількісні характеристики, як «малий» й «великий».

Однак, коли приступають до вивчення задачі, часто буває важко сказати наперед, з якою саме величиною потрібно порівнювати дану величину. Тоді застосовують кількісні характеристики, не вказуючи, у порівнянні із чим саме мала або велика дана величина. У такому випадку характеристики втрачають свою строгість, але все-таки зберігають відомий зміст, що підказується нашими знаннями про дане коло явищ. І тому навіть такі розпливчасті кількісні характеристики все-таки можуть дати нам інформацію про характер допустимої спрощення або у якому напрямку варто робити спроби в плані спрощення задачі.

Наприклад, з погляду людини спостереження протягом однієї хвилини – це ще «не довго», а тисячна частка секунди – це «дуже швидко». Тому ми часто говоримо, що коливання маятника згасають «повільно», а коливання в електричному коливальному контурі високої частота згасають «швидко». І ці твердження «малий» та «великий» хоча й не мають, строго кажучи, точного змісту, але впливають на те, яке саме спрощення застосовують до тієї чи іншої задачі. У той час як задача про власні коливання механічних систем розглядається звичайно без обліку тертя, при дослідженні питання про власні коливання в електричному коливальному контурі майже завжди відразу беруть до уваги омичний опір контуру.

Таким чином характеристики «малий» і «великий» (без вказівки, у порівнянні із чим) все-таки штовхають нас до вибору певного спрощення. При подальшому розгляді ці характеристики «малий» і «великий» здобувають цілком певний зміст, бо стає ясним, у порівнянні із чим саме повинна бути мала або велика дана величина.

У всякому фізичному розгляді питання про характер спрощення задачі грає досить істотну роль; тому треба насамперед з'ясувати, яке саме спрощення треба зробити при розгляді найбільш поширених систем. *По-перше*, ці спрощення пов'язані із числом величин, що визначають стан системи (наприклад, координат і швидкостей), і, *по-друге*, з вибором законів, що зв'язують ці стани або швидкості змін станів і залежності, що існують, між ними. У ці залежності, які в більшості розглянутих випадків можна виразити у вигляді тих або інших диференціальних рівнянь, звичайно входить деяке число постійних параметрів, що характеризують систему.

Приклад 3. Для звичайного електричного контуру в найпростішому випадку величинами, що визначають стан системи, служать заряд і струм, а постійними параметрами – індукція, ємність й опір. Зв'язок між величинами, що характеризують стан системи, визначається деяким диференціальним рівнянням, у яких постійні параметри або їхні комбінації входять як коефіцієнти. У більш складних випадках диференціальні рівняння, мають зовсім інший вид, але дуже часто виявляється можливим привести ці рівняння до такого ж виду, який мають рівняння для системи з постійними параметрами. Однак замість постійних параметрів у цьому випадку в рівнянні будуть стояти деякі змінні величини, наприклад деякі функції від величин зарядів і сил струмів. Маючи на увазі зв'язок нових рівнянь із попередніми, будемо ці змінні величини, що характеризують властивості системи, називати параметрами, хоча вони вже й не є постійними величинами. У цьому випадку можна говорити про змінні параметри. Для цих нових змінних параметрів збережемо ті ж назви, які застосовуються для постійних параметрів, наприклад, будемо говорити про змінний опір і змінну індукцію. Необхідно, однак, мати на увазі, що тим самим вводяться нові визначення цих параметрів, причому ці визначення, взагалі, можуть збігатися з колишніми визначеннями, прийнятими для постійних параметрів. Таким чином, спрощення, які пов'язані із законами, що зв'язують стани й швидкості

зміни станів, зводиться в остаточному підсумку до відомих припущень відносно виду тих функцій, які називаємо змінними параметрами системи.

Спрощення, які пов'язані із числом величин, що визначають стан системи, приводять до визначення числа ступенів волі системи. Звичайно, всяка реальна система з погляду класичної фізики має не один, а декілька ступенів волі. Наприклад, виходячи із звичайних уявлень про молекулі, треба було б вважати, що всяка механічна система має дуже велику кількість ступенів волі, яка дорівнює сумі ступенів волі всіх окремих молекул, з яких складається система. Однак у цілому ряді випадків можна відійти від молекулярної будови речовини й розглядати систему як цілу. У цьому випадку можна замінити дуже велику кількість ступенів волі нескінченно великим числом ступенів волі й перейти до рівнянь у частинних похідних. В інших випадках виявляється, що для опису питань, що цікавлять, досить взяти лише одну або декілька ступенів волі. Таким чином приходимо, з одного боку, до розуміння системи, що має нескінченно велике число ступенів волі, а з іншого боку, до розуміння дискретної системи, що має кінцеве число ступенів волі, зокрема, системи з одним ступенем волі.

Приклад 4. Нехай, досліджуючи масу тіла m на пружинці (рис. 5.1), спрощуємо задачу і розглядаємо її як систему з одним ступенем волі, відмовившись від врахування впливу маси пружинки (що вірно, якщо маса пружинки набагато менше маси m) і вважаючи, що тіло m абсолютно тверде (що має рацію, якщо тіло m набагато більш жорстке, ніж пружинка).

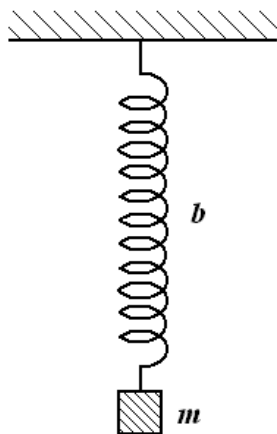


Рис. 5.1. Коливальна система з одним ступенем волі

Крім того, обмежимо рух цього тіла тільки в одному вертикальному напрямку. Останнє обмеження робиться тільки за умовою, що коливання маси m у вертикальному напрямку не викликають розгойдування її як маятника. Ці спрощення в реальній системі, звичайно, не можуть бути строго дотримані. У дійсності пружина має масу, а тіло m має пружність, але ми ідеалізуємо задачу й відмовляємося від розгляду тіла й пружини як цілісних систем (систем з розподіленими параметрами). Внаслідок цього спрощення втрачається можливість відповісти на питання про рух окремих часток тіла m і пружинки. Але якщо тіло m досить жорстке і його маса досить велика в порівнянні з масою пружинки, а початкові умови передбачають, що: в

початковий момент маса m має деяку початкову швидкість у вертикальному напрямку, то при допущеному спрощенні задачі можна задовільно відповісти на запитання про рух всієї маси m в цілому не враховуючи які-небудь інші властивості системи.

Трохи іншу задачу, що відрізняється від тільки що розглянутої лише характером початкових умов, вже не можна вирішити, застосовуючи попереднє спрощення. Нехай, наприклад, спочатку пружина розтягнута силою, прикладеною в точці m (рис. 5.1), і в момент $t = 0$ ця сила зникає. Ця система вже не буде системою з одним ступенем волі. і попередня ідеалізація вже не дозволить відповісти на питання про характер руху системи при таких початкових умовах.

Це означає, що спрощення яке визначає стан системи (зокрема число ступенів волі системи), залежить не тільки від властивостей самої системи, але й від характеру початкових умов, які задані, і тієї задачі, що поставлена перед дослідником.

Приклад 5. Електричний контур, що має ємність, індуктивність і опір (рис. 5.2), можна розглядати як систему з одним ступенем волі тільки при тій умові, що не враховуються, наприклад, ємності, які мають один стосовно іншого окремі витки котушки індукції та інше. Але, незважаючи на це спрощення, можна відповісти на питання про закон зміни напруги на обкладинках конденсатора, якщо в початкових умовах задана напруга на обкладинках конденсатора і струм в котушці індуктивності.

Зроблене спрощення не дає змоги відповісти, наприклад, на питання про закон розподілу струму всередині самої котушки індуктивності. При виконаному спрощенні й не роблячи спеціальних припущень, не можна вирішити й питання про зміну сили струму на початку процесу, якщо в початковий момент струм існує не у всій котушці, а тільки в частині її, приєднаної до джерела постійного струму, тому що ці початкові умови, так само як й у розглянутому нами механічному прикладі, несумісні із зробленим спрощенням задачі. Таким чином, відмовляючись від розгляду реальних систем як систем із розподіленими параметрами і розглядаючи їх у вигляді систем з кінцевим числом ступенів волі, зокрема у вигляді систем з одним ступенем волі, необхідно відповідним чином обмежитись у виборі початкових умов і задавати тільки такі початкові стани, які сумісні із зробленим спрощенням.

У іншому випадку виникає конфлікт між початковими умовами й рівняннями нашої ідеалізованої системи, для ліквідації якого, загалом кажучи, потрібно було б змінити характер ідеалізації системи. Однак у деяких випадках цей конфлікт може бути ліквідований без зміни характеру ідеалізації системи – саме, за допомогою деяких додаткових постулатів.

Точно так само не тільки від властивостей самої системи, але й від характеру тієї задачі, що нам поставлена, залежить рішення питання про допустимість тієї або іншої ідеалізації, пов'язаної з визначенням законів, керуючих рухом системи і з визначенням залежності параметрів від стану системи. Саме це спрощення визначає тип рівнянь, якими описується

система, і приводить до поділу систем на «лінійні» і «нелінійні», «автоколивальні» і «дисипативні» і т.д.

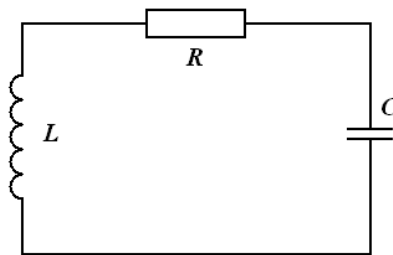


Рис. 5.2. Електричний коливальний контур

Як потрібно підходити до питання про закони, що характеризують стани системи і питання про властивості параметрів? У яких випадках яке спрощення цих властивостей може бути допущено? Загалом кажучи, параметри всякої електричної або механічної системи – ємність або пружність, опір або коефіцієнт тертя, самоіндукція або маса – завжди в більшому або меншому ступені залежать від стану системи, тобто від її координат і швидкостей. Дійсно, якщо конденсатор заряджений до якої-небудь напруги, то між його обкладинками існують сили електростатичного притягання. Оскільки абсолютно твердих систем не існує, то ці сили викличуть якусь зміну форми або розмірів обкладинок конденсатора, внаслідок чого зміниться і його ємність; ці зміни будуть тим більше, чим більше напруга між обкладинками конденсатора. Тому ємність конденсатора завжди в певному ступені буде залежати від напруги між його обкладинками.

Так само між витками котушки індукції, по яких тече струм, будуть існувати пандеромоторні сили, які трохи змінять конфігурацію витків котушки, а разом з тим і її коефіцієнт самоіндукції. Отже, коефіцієнт самоіндукції котушки неминуче в певній мірі залежить від сили струму, що протікає по котушці. Нарешті, опір провідника завжди залежить від температури, тому що при протіканні струму по провіднику виділяється тепло, що нагріває опір, то величина цього опору завжди залежить від сили струму, що протікає по ньому.

Так само легко переконатися в тому, що, наприклад, параметри зображеної на рис. 5.1 механічної системи завжди певною мірою залежать від стану системи. Наприклад, модуль пружності будь-якого матеріалу, або коефіцієнт пружності будь-якої пружини, при досить більших деформаціях вже не залишається постійним, тобто залежить від координат системи. Коефіцієнт тертя завжди (і досить складним образом) залежить від швидкості. Момент інерції обертового тіла також, загалом кажучи, не є постійною величиною, а залежить від кутової швидкості, тому що всяке фізичне тіло не є абсолютно твердим і деформується при обертанні. Отже, величини параметрів як механічних, так й електричних систем завжди в більшому або меншому ступені залежать від стану системи.

Якщо при описі розглянутих механічних й електричних систем за допомогою математичних співвідношень почати враховувати всі ці

залежності параметрів від стану системи, то були б отримані диференціальні рівняння, коефіцієнти яких залежать від координат і швидкостей, тобто до нелінійних диференціальних рівнянь. Щоб спростити задачу, ми повинні до відомих меж ідеалізувати властивості системи, зробити ряд припущень, що спрощують залежності параметрів від стану системи, тому що не завжди для відповіді на поставлені відносно даної системи питання нам необхідно враховувати цю нелінійність, яка значно затруднює теоретичний опис.

Найбільш простими і зручними були б припущення, що параметри взагалі не залежать від стану системи і є величинами постійними. Тоді при математичному описі розглянутих систем використовуються лінійні диференціальні рівняння із постійними коефіцієнтами, для яких існують регулярні методи рішення й дослідження яких не представляє ніяких труднощів.

При яких же умовах можна дати задовільну відповідь на питання про характер руху системи, якщо застосовується зазначена ідеалізація, тобто вважається, що параметри системи не залежать від її стану і є постійними? Не дивлячись на те, що це припущення не виправдується в реальних фізичних системах, в багатьох випадках ми можемо вибрати такі області зміни координат і швидкостей, у яких параметри системи практично (тобто із заданим ступенем точності) будуть залишатися постійними. Так, наприклад, якщо конструкції конденсатора й котушки самоіндукції досить тверді й найбільші значення, яких досягають напруга на обкладинках конденсатора й сила струму в котушці самоіндукції, не занадто великі, то практично ємність конденсатора й коефіцієнт самоіндукції котушки в даній області можна вважати постійними. Точно так само, якщо найбільше значення сили струму досить мале, то і опір звичайного металевого провідника можна вважати постійним.

Аналогічним образом можна вибрати таку вузьку область змін координат і швидкостей механічної системи, щоб параметри системи в цій області можна було з достатнім ступенем точності вважати постійними. Приймається припущення про те, що параметри системи не залежать від координат і швидкостей, а сили є лінійними функціями або координат, або швидкостей, або прискорень, наприклад пружна сила є лінійна функція координати (або напруга – така ж функція заряду), а сила тертя або омичне спадання напруги є лінійною функцією швидкості (відповідно сили струму), нарешті «сила інерції» і ЕРС індуктивності є лінійною функцією прискорення (похідна від сили струму).

Якщо при початкових умовах, параметри системи можна вважати постійними, система й надалі не вийде за межі цієї області, а спрощена задача дозволить нам отримати відповідь на питання які поставлені при вивченні даної системи. Для відповіді на такі питання можна вважати параметри системи незалежними від її стану і описувати її лінійними диференціальними рівняннями.

Коли ж система в силу своїх властивостей виходить за межі «лінійної області», очевидно що можуть виникнути питання, на які не можна дати відповіді, розглядаючи систему як лінійну. Тому в питанні про закони, які

зв'язують властивості параметрів зі станами системи, допустимість того чи іншого спрощення залежить не тільки від властивостей системи, але й від характеру поставленої нам задачі, і початкових умов задачі.

5.3. Ідентифікація нелінійних систем

Розглянемо поведінку системи за межами лінійної області, нелінійні системи.

Провести строгий поділ реальних фізичних систем на «лінійні» й «нелінійні», «консервативні» й «неконсервативні», або зробити поділ систем по числу ступенів волі і т.д. неможливо. Реальні фізичні системи є ні лінійними, ні консервативними, не можуть мати кінцевого числа ступенів волі, тому що вони взагалі не можуть бути описані абсолютно точно за допомогою математичних співвідношень. Тому всякий строгий поділ, включаючи класифікацію не може бути зроблений для реальних фізичних систем. Строгому поділу піддаються тільки абстрактні схеми, які отримуємо в результаті відомої ідеалізації властивостей реальної фізичної системи.

Зокрема, ті системи, які розглядаються як правило в навчальних курсах, не є якимись особливими «лінійними системами», які можуть бути виділені від інших «нелінійних систем». І в тому, і в іншому випадку розглядаються часто ті самі реальні фізичні системи, але із застосуванням до них різних способів ідеалізації. У результаті цієї ідеалізації стає можливим поділ систем на лінійні і нелінійні, і т. п.

Виконуючи цей поділ, ми приходимо до певних висновків щодо властивостей того чи іншого класу систем; однак необхідно враховувати, що властивості, які характеризують систему, є ідеалізованими властивостями. Це й природно, тому що саме виділення класу систем, що володіють даними властивостями, виявилось можливим у результаті тієї або іншої ідеалізації.

В конкретній задачі параметри фіксують тоді, коли при невеликій їх зміні вони не впливають на ті вихідні параметри (риси моделі), які ми вивчаємо. Ті ж риси поведінки моделі, які не зберігаються при малій зміні виду диференціальних рівнянь і величин параметрів, нам не цікаві, тому що вони не відбивають властивостей реальної фізичної системи. Такі системи називаються «грубими» системами і вони служать теоретичними моделями реальних фізичних систем. Ті обмеження, що накладаються на малі зміни системи, дають можливість не збільшувати число ступенів волі системи або порядок рівняння, що полегшує моделювання систем.

Такі невеликі зміни системи або незначні зміни виду диференціальних рівнянь спочатку роблять такими, що вони не змінювали порядок вихідного диференціального рівняння. Зміна виду диференціального рівняння, що підвищує порядок рівняння, приводить до врахування якихось нових ступенів волі системи, тобто враховує якісь її «паразитні» параметри.

Так, наприклад, у випадку електричної схеми, зображеної на рис. 5.3, розглядаючи тільки індуктивність L , ємність C і опір котушки індуктивності

R , тобто основні «не паразитні» параметри, використовується диференціальне рівняння другого порядку.

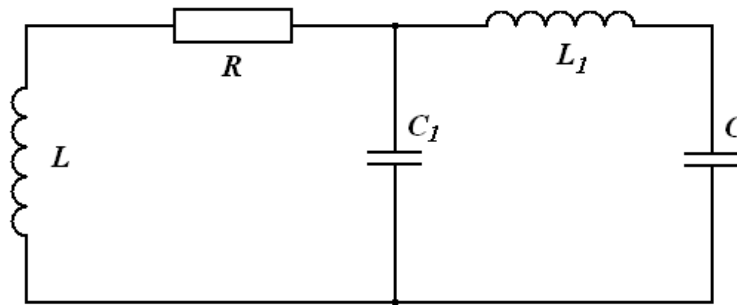


Рис. 5.3. Електрична схема з урахуванням «паразитних» параметрів

Враховуючи сумарну «паразитну» ємність між витками котушки, тобто ємність C_1 і «паразитну» самоіндукцію проводів, тобто самоіндукцію L_1 , замість рівняння другого порядку отримаємо рівняння четвертого порядку. Але оскільки C_1 і L_1 – величини малі, це рівняння четвертого порядку можна розглядати лише як незначну зміну виду вихідного диференціального рівняння другого порядку.

Розглядаючи питання про стійкість того чи іншого стаціонарного стану, треба також переконатися в тому, що даний стан не зникає і не втрачає своєї стійкості при підвищенні порядку диференціального рівняння. Якщо виявляється, що стан рівноваги, стійкий у випадку, коли враховуються основні параметри, але втрачає свою стійкість внаслідок впливу незначного параметра, що підвищує порядок рівняння, то це означає, що в дійсності цей стан рівноваги не стійкий. Тому увага до стійкості стаціонарного стану системи при зміні виду рівняння опису є цілком природна. Легко показати, що неможливо побудувати таку ідеальну модель динамічної системи (виділити клас диференціальних рівнянь), для якої стаціонарні стани завжди залишалися б стійкими при введенні в рівняння системи членів з більше високими похідними.

Тому не можна вимагати від ідеальних моделей динамічних систем незмінності характеру стаціонарних станів з появою нових ступенів волі, а можна лише враховувати вплив нових ступенів волі, беручи до уваги специфічні особливості окремих класів систем. Із станами систем, «стійкість» яких обумовлюється не властивостями реальних систем, а не врахуванням деяких ступенів волі, доводиться зустрічатися доволі часто.

Але спрощувати реальні фізичні процеси та об'єкти потрібно, тому це означає, що потрібно було б перевірити, чи не порушують стійкості даного стану впливом малих паразитних параметрів, які підвищують порядок рівняння. Повністю зробити такі перевірки неможливо, тому що число таких паразитних параметрів у всякій системі дуже велике, і крім того, може бути, що вплив цих параметрів різносторонній. Тому при перевірці їхнього впливу, ми повинні знати не тільки про наявність цих параметрів, але й про кількісні співвідношення між ними, що неможливо. Тому остаточна відповідь про

питання стійкості того чи іншого стану реальної системи може дати тільки випробування.

Треба намагатися визначити функції, які характеризують стан системи й зміни цих станів. Ці функції, які описують поведінку системи – наприклад залежність сили струму або напруги від часу, – визначаються за допомогою диференціальних рівнянь і іншого визначення не мають. Тільки для дуже невеликого класу випадків, наприклад для лінійних рівнянь із постійними коефіцієнтами, можливо звести задачу про відшукування таких функцій до іншої більш простої, наприклад до рішення алгебраїчних рівнянь або знаходженню інтегралів (квадратур) від функцій, що входять у диференціальні рівняння.

У загальному випадку використовуються звичайні наближені методи числового інтегрування (наприклад метод ізоклін, метод Рунге - Кутта).

Виходячи з вищезазначеного універсальної формальної процедури структурної ідентифікації запропонувати неможливо, але послідовність деяких кроків можна визначити. *По – перше*, на основі фундаментальних законів та досвіду складається загальна уява про математичну модель, яка формується аналітичним методом зі спрощеннями та припущеннями, прийнятими у відповідності до особливостей об'єкту моделювання та цілей моделювання. *По – друге*, проводяться спостереження та науковий експеримент за допомогою яких виконується процедура параметричної ідентифікації, а потім модель перевіряється на адекватність реальному об'єкту. *По – третє*, якщо адекватність моделі не підтверджується, проводиться перегляд спрощень та припущень і формується нова математична модель. Одною з головних ознак адекватності моделі реальному об'єкту чи процесу є наявність у моделі прогнозуючих можливостей.

Одним з головних етапів процедури структурної ідентифікації є параметрична ідентифікація. Вона спирається на добре розроблені методи організації експерименту та математичні методи обробки експериментальних даних.

5.4 Класифікація методів ідентифікації

У зв'язку з наявністю різних специфічних особливостей об'єктів керування та їх різноманітності провести повну класифікацію методів ідентифікації представляє значну трудність. Однак наявність деяких загальних властивостей у об'єктів керування дозволяє провести класифікацію залежно від класу об'єктів, типу прийнятої моделі або підходу до побудови математичної моделі, виду проведеного експерименту, типу алгоритму, апріорної інформації, критерію ідентифікації, технічних засобів.

Розглянемо коротко кожний з перерахованих вище ознак. Клас об'єкта визначається за такими ознаками:

- стохастичність;
- детермінованість;

- багатомірність;
- одномірність;
- зосередженість;
- розподіленість;
- неперервність;
- дискретність;
- лінійність;
- нелінійність;
- стаціонарність;
- не стаціонарність;
- статичність.

Залежно від типу прийнятого підходу до рішення задачі побудови моделей методи класифікуються на детерміновані, статистичні й адаптивні.

Детермінована модель будується з точки зору фізико-хімічних закономірностей процесу. В теперішній час найбільше розповсюдження одержали статистичний та адаптивний підходи до рішення задачі ідентифікації.

Адаптивний підхід передбачає корегування параметрів моделі на випадок дрейфу характеристик об'єкта.

Залежно від виду проведеного експерименту, методи ідентифікації діляться на активні, пасивні та активно-пасивні. Активні методи ідентифікації засновані на даних активного експерименту. При активному реєстраційному експерименті штучно вносяться збурення по різних каналах процесу згідно із заздалегідь спланованою програмою.

Відзначимо, що до **активних** методів ідентифікації можна віднести методи оптимального планування експерименту, що дозволяють зменшити число експериментів і провести їх у найбільш інформативних точках. Класифікувати методи активного планування експерименту досить складно. Це, насамперед, пов'язано з труднощами виявлення та відбору ознак, що дозволяють проводити однозначно класифікацію всієї множини відомих планів. Як попередню класифікацію можна запропонувати систему, що містить у собі такі класи планів: плани дисперсійного аналізу, плани експерименту з відсівом, плани багатofакторного аналізу, плани для вивчення поверхонь, плани для динамічних задач планування, плани для вивчення механізму явищ, плани для побудови діаграм склад – властивість, склад – стан. Розбивання планів на зазначені групи проведене, в основному, по задачах дослідження та методам планування експерименту, що використовується для їхнього рішення.

До **активних** методів ідентифікації, в основі яких лежать методи оптимального планування експерименту, можна віднести: метод факторного планування, повний та дрібний факторний експеримент, ортогональне планування, ротатабельне планування, методи випадкового балансу, еволюційне планування, планування по D, G A, E оптимальних планах, спеціальні методи пошуку екстремуму, нелінійне планування.

У деяких випадках для *активної* ідентифікації об'єктів керування застосовують періодичні випробувальні сигнали, до яких можна віднести ступінчастий, імпульсний, згладжений імпульсний, синусоїдальний, шум (активний та пасивний). Вибір того чи іншого вигляду випробувального сигналу виконується, виходячи з характеру роботи та властивостей об'єкта, а також з потрібної точності одержання характеристик процесу за мінімальний час. Для визначення характеристик об'єктів керування використовуються методи активної ідентифікації, засновані на використанні псевдо випадкових тестових сигналів, які дозволяють проводити ідентифікацію при невеликих величинах штучних збурень. Проте не завжди та не всюди можна наносити збурення під час виробничої експлуатації устаткування, бо це може викликати псування продукції, вихід з ладу технологічного процесу і ін.

У цьому випадку проводять *пасивний* експеримент. При пасивному експерименті контроль параметрів процесу виконують у режимі нормальної експлуатації об'єкта без внесення будь-яких штучних збурень. Як дані пасивного експерименту використовують запис в експлуатаційних журналах технологічного устаткування. Проте до такої інформації слід відноситись критично, бо персонал, що обслуговує технологічний об'єкт, може робити помилкові записи, окрім того виникають похибки викликані неодноразовою фіксацією даних вимірювань. Використання картограм приладів, що реєструють вимірювання, вимагає квантування у часі та узгодження у часі швидкостей записів реалізації процесів.

Вибір методу ідентифікації залежить від вигляду процесу обробки даних. Розрізняють пакетну обробку даних та обробку у реальному масштабі часу. У першому випадку ідентифікація носить автономний характер, у другому – неавтономний. Для автономної ідентифікації дані процесу запам'ятовуються на фізичному носії та при необхідності обробляються у пакетному режимі. Ідентифікація відбувається за одну ступінь.

Для неавтономної ідентифікації характерний процес обробки у реальному масштабі часу, тобто дані обробляються після кожного вимірювання або групи вимірювань. При груповій обробці даних частіше за все використовуються не рекурсивні алгоритми (метод найменших квадратів інструментальних змінних, максимальної правдоподібності, аналізів Фур'є та спектральний аналіз, кореляційні методи і т. ін.). Обробка даних у реальному часі передбачає використання рекурсивних алгоритмів ідентифікації. Вибір методу обробки істотно залежить від цілей ідентифікації. Так, при реалізації адаптивного керування з використанням мікропроцесорної техніки доцільно використовувати комбіновану обробку даних. На першому етапі використовується групова обробка. Тут ідентифікується структура та параметри моделі, які закладаються у комп'ютер. Під час зміни оточуючого середовища параметри моделі коректуються рекурсивними алгоритмами, так званими алгоритмами керування.

Пасивний експеримент довший у часі та більш витратний. Проте його проведення виявляється єдино можливим та економічно виправданим для багатьох технологічних процесів. Перш за все, це відноситься до великих за

обсягом об'єктів хімічної технології, вихідний продукт яких є дорогим. Використання пасивного експерименту зумовлено тим, що для таких процесів, як правило, діапазон варіювання вхідних змінних невідомий. Збільшення його може призвести до випуску неякісної продукції. Не завжди вдасться стабілізувати керовані фактори в наслідок дії на них збурень. Дія некерованих факторів може істотно впливати на фізико-хімічні процеси, які протікають в об'єкті.

Методи ідентифікації, що засновані на обробці даних пасивного експерименту, можна поділити на такі групи: не ітераційні методи (кореляційний аналіз, метод найменших квадратів і т. ін.), ітераційні методи (поточний регресійний аналіз, метод стохастичної апроксимації і ін.). Більш надійні результати дають активно-пасивні експерименти. Збурення вносяться тільки по деяких каналах, при цьому не ставиться задача строгої стабілізації інших параметрів. Слід визначити, що математичні моделі, які отримані на основі експериментальних даних справедливі тільки для діапазону зміни параметрів процесу, встановленого під час проведення реєстраційних експериментів. Наявність елементів активного експерименту дозволяє у деякій мірі розширити діапазон вимірювання параметрів процесу, що забезпечує більшу достовірність даних, а також збільшити стійкість до перешкод системи ідентифікації.

Якщо задача вибору *методу ідентифікації залежно від алгоритму побудови моделі* не формалізована, то в цьому разі ставиться задача вибору такого алгоритму, який би за мінімальний час і при мінімумі засобів дозволив би ідентифікувати об'єкт. Найбільш важкою є задача вибору класу алгоритмів ідентифікації.

На стадії визначення структури моделі повинна бути використана апріорна інформація про об'єкт. Апріорна інформація повинна відповісти на питання, що представляє собою структура об'єкта і до якого класу об'єктів віднести об'єкт, що потрібно ідентифікувати. На випадок відсутності такої інформації використовують апостеріорну інформацію, яку одержують в результаті обробки експериментальних даних про параметри об'єкта.

5.5. Використання критеріїв ідентифікації

Від обраного критерію ідентифікації залежить і метод обробки експериментальних даних. Слід зазначити, що формування критерію є важливим етапом синтезу систем ідентифікації. На практиці частіше обирають критерії, що мають не дуже високу точність при незначній кількості математичних викладок. *При ідентифікації динамічних характеристик часто використовують як критерій величину розбіжності часових, частотних, фазових, амплітудно-фазових і амплітудно-частотних характеристик.* Оцінку міри близькості $B(t)$ і $B_m(t)$ можна визначити за **критерієм максимуму правдоподібності**, що дозволяє знаходити оцінки $B(t)$ шляхом максимізації функції правдоподібності. Перевагою цього критерію є те, що рівняння правдоподібності при існуванні ефективних оцінок параметрів має

єдине чітке рішення. Проте, складність рівнянь правдоподібності заважає широко використовувати критерій максимуму правдоподібності в процесі ідентифікації.

Коли вимагається висока швидкодія системи ідентифікації, простота реалізації, то для того щоб усунути або у значній мірі ослабити вплив величини та спектра вхідних впливів на процес ідентифікації, доцільно створювати параметри моделі за розбіжністю вихідних координат моделі та об'єкта, використовуючи як критерій ідентифікації будь-який інтегральний критерій. З інтегральних критеріїв найбільше розповсюдження одержав **критерій мінімуму середньої квадратичної помилки** (СКП), що залежить від розбіжності виходів об'єкта та моделі. Цей критерій володіє наступними перевагами:

1. Має досить ясний фізичний зміст (дисперсії).
2. Не використовує ніяких інших припущень про випадкові збурення, окрім припущення про існування кінцевих дисперсій.
3. При наявності пуасонівських шумів оцінка за методом найменших квадратів дає найкраще наближення.
4. Критерій досить добре оцінює великі та тривалі помилки, а малі та короткочасні слабко позначаються на його величині.
5. У більшості випадків він забезпечує добру форму поверхні $W(x)$.
6. Критерій досить зручний під час проведення різних математичних операцій.

Вибір типу апроксимуючих функцій для побудови моделей об'єктів керування представляє деякі труднощі, пов'язані з відсутністю методів формалізованого вибору. Тип і параметри апроксимуючих функцій повинні відповідати визначеним вимогам. По-перше, тип апроксимуючих функцій повинен задовольняти умовам спостережень, ідентифікованості і керованості. По-друге, точність апроксимації не повинна істотно перевищувати точності вимірювання вхідних і вихідних параметрів. По-третє, потрібна простота математичного опису та відтворення фізико-хімічних процесів. При цьому повинен досягатись компроміс між простотою математичного опису і точністю апроксимації.

Клас апроксимуючих функцій найбільш часто використовується при ідентифікації об'єктів, може бути представлений великим класом ідентифікованих функцій, частково рекурсивних функцій, трансцендентних функцій і ін. Вигляд системи апроксимуючих функцій обирається, виходячи з вимог інтегрованості, гладкості, лінійної незалежності, ортогональності, повноти, швидкості, простоти реалізації на комп'ютері, статистичних властивостей об'єкта. Так, при ідентифікації динамічних характеристик перехідна функція $h(t)$ може бути апроксимована системою лінійно незалежних функцій (фільтрів) $f(t)$, до якого можна віднести експоненціально - гармонічні фільтри, фільтри Кауца, Лагерра, фільтри, що побудовані на ортогональних поліномах Чебишева, Лежандра, Ерміта, Якобі та ін.

Перехідна функція об'єкта апроксимується у вигляді

$$h(t) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t) \quad (5.1)$$

Аналогічно апроксимується і імпульсна перехідна функція

$$q(t) = \sum_{i=0}^n a_i f_i(t) \quad (5.2)$$

Ступінь апроксимуючого полінома знаходиться у тісному зв'язку з виглядом функції $\{F(t)\}$. На практиці величину знаходять з умови $Q_{n-1} \approx Q_n$ де Q_{n-1} залишкова дисперсія при $n-1$ ступені. Під час опису динамічного об'єкта диференціальними рівняннями задача ідентифікації зводиться до оцінки їх параметрів при заданій структурі.

Для точного опису технологічних процесів диференціальними рівняннями, порядок їх, як правило, не перевищує двох. Вибір структури моделі нелінійних об'єктів являє собою більш трудомістку задачу, ніж лінійних. Це перш за все пов'язано з великим різноманіттям нелінійних операторів, що описують об'єкти.

5.6. Класи методів ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів

Методи ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів діляться на дві групи: методи, що засновані на лінеаризації і методи, у яких модель об'єкта розглядається як істотно нелінійна. Методи, що основані на лінеаризації об'єктів, найбільш повно розвинені, прості і забезпечують у ряді випадків достатню точність. Однак у ряді випадків лінеаризації об'єктів недостатня, більш того, іноді вона просто не має значення.

Велика різноманітність типів операторів викликає різноманітність підходів до ідентифікації. Тому проведення класифікації нелінійних об'єктів допомагає знайти зв'язок між методами й оцінити їх пристосованість для різних нелінійних технологічних процесів та формально вибрати клас операторів.

Слід відзначити, що способи конструювання структур динамічних моделей можуть бути апроксимовані класом функції, що використовуються для статичних моделей. Вибір класу апроксимуючих функцій, залежить від множини факторів та представляє собою трудомістку задачу. Один з найбільш *перспективних підходів* до її рішення можливий за допомогою *методів імітаційного моделювання*.

Найбільш формалізований підхід існує до вибору структури статичних моделей на базі алгебраїчних поліномів.

Практика розробки та впровадження САК ТП показала, що тільки застосування досить простих методів ідентифікації керування призводить до життєздатності систем керування різними об'єктами. Складність систем керування знаходиться у безпосередній залежності від складності систем ідентифікації, які часто виявляються не відповідними цілям керування. Відзначимо, що складність систем ідентифікації у значній мірі залежить від

складності апроксимуючих функцій, що використовуються під час синтезу структури моделей. У зв'язку з цим виникає задача вибору класу апроксимуючих функцій з мінімальним числом вхідних параметрів. Якщо модель використовується з метою керування, то вибір параметрів, що входять у модель (суттєвих), слід проводити з числа нерегульованих, але, що контролюються, оскільки параметри в обов'язковому порядку повинні входити в модель. Ці зауваження стосуються тільки лінійних моделей відносно вхідних змінних. Для нелінійних моделей процес вибору стосується всіх параметрів. Тому надалі будемо орієнтуватись на клас нелінійних моделей відносно вхідних змінних.

З точки зору рішення задачі ідентифікації у задачі вибору суттєвих параметрів можна запропонувати два підходи. Перший підхід реалізується у *рішенні задачі ранжування змінних*, кожній змінній ставиться у відповідність деяка міра її впливу на вихідну змінну, при цьому у модель необхідно включати змінні, ранжовані за ступенем впливу. Під ранжуванням розуміється процедура розташування факторів X_j у порядку зменшення їх інформативності. Номер фактору у ранжованому ряді визначає його значимість. Іноді оцінки значимості фактору характеризуються рангом або деяким числом. Другий підхід пов'язаний з вибором підмножини, що забезпечує екстремальне допустиме значення деякої функції, що відображає точність моделі.

Для рішення поставлених задач у теперішній час існує велике число алгоритмів, в основі яких лежать методи регресійного аналізу, випадкового пошуку, факторного аналізу, теорії інформації, розпізнавання образів та ін. Ефективність рішення вказаних задач залежить від правильного вибору критерію відбору.

Для рішення першої задачі досить широко використовується інформаційний критерій, що використовує відносне співвідношення між умовною і безумовною ентропією.

Для рішення другої задачі використовують, як критерій, різні статистики. Вибір статистики залежить від статистичних властивостей вхідних сигналів і цілей вибору змінних.

Задача вибору суттєвих змінних вирішується у два етапи. На першому етапі обирається критерій, на другому – обирається стратегія пошуку змінних. Під час рішення задачі пошуку структури моделі шляхом оцінки суттєвих змінних необхідно враховувати розмірність задачі, вимив шумів, мульти-колінеарність та наявність "важких хвостів" і "аномальних вимірів". Рішення такої задачі можливе з використанням методів зміщеного та робастного оцінювання.

Більшість реальних технологічних процесів досить адекватно описується лінійними моделями, які представлені поліномами не вище третього порядку. Тому, під час вибору структури моделі доцільно враховувати подвійні, потрійні члени взаємодії і члени з другими та третіми ступенями.

Для рішення задачі вибору суттєвих змінних використовуємо *інформаційний підхід*, який вважає вибір тих змінних, які на кожному кроці забезпечують максимум інформації

$$I[x, y] = I[y/x_1] + I[y, x_2/x_1] + \dots + I[y, x_i/x_{i-1}]. \quad (5.3)$$

Слід відзначити, що для нормального закону розподілення критерій максимуму кількості інформації і мінімуму залишкової дисперсії еквівалентні. Залишкова дисперсія є у загальному випадку найбільш сильним критерієм для вибору інформативних змінних під час рішення задачі ідентифікації.

Вибір структури моделі зведемо до задачі вибору інформативних змінних, яку сформулюємо таким чином.

Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ – вектор стаціонарних випадкових змінних, розподілених за нормальним законом. Потрібно визначити вектор найменшої розмірності X , доставляючи *максимуму функції інформативності* $I[x, y]$. На випадок статистичного зв'язку між вхідними змінними внесками у інформацію $I[x, y]$ дають не тільки пари y, x_i , але також і всілякі комбінації x з вихідною змінною. Для оцінки ступеня інформативності використовуємо поняття ентропії

$$H[y] = I[x, y] + H[y/x]. \quad (5.4)$$

Ентропія вихідних змінних складається з двох частин, перша частина є мірою кількості інформації вихідної перемінної, а друга – мірою апіорної невизначеності, яка викликана впливом сукупності інших змінних, крім X .

Для скорочення об'єму обчислень доцільно використовувати різні методи ортогоналізації, зокрема, Грамма-Шмідта, Хаусхольдера, Гівенса та ін.

До використання структур на основі поліномів, під час синтезу системи ідентифікації, необхідно підходити обережно тому, що при наявності помилок округлень, помилок вимірювань матриця $(X^T X)$ при обчисленні методом найменших квадратів стає погано зумовленою, та у цьому випадку необхідно прибгати до різних модифікованих методів.

5.7. Методи оцінювання результатів ідентифікації

Вибір схеми оцінювання визначається такими факторами, як спосіб обробки даних (вибіркова обробка, обробка у реальному часі), вигляд структури моделі (лінійна, нелінійна), апіорною інформацією про перешкоди вимірювань та неконтрольовані збурення, вимогами до моделі, статистичних характеристик вхідних сигналів та ін. Розробника процесу ідентифікації задовольнить метод оцінювання, якщо він відповідає таким вимогам: простотою реалізації, високим рівнем формалізації, ступенем керованості об'єкта (модель може бути використана для керування), ефективністю.

У загальному випадку вимоги до методу оцінювання істотно залежать від цілей використання моделей. Таким чином, вибір методу оцінювання визначається багатьма міркуваннями.

Схема оцінювання, як правило, є основою методу ідентифікації. Часто розуміють під оцінюванням параметрів моделі метод ідентифікації. Правда, таке ствердження не завжди коректне. Так, існують методи, що визначають одночасно і структуру і параметри. У залежності від вигляду обробки даних методи оцінювання можна класифікувати на прямі та ітераційні.

В інтегрованих системах керування складними об'єктами використовуються як прямі, так і ітераційні методи.

Ітераційні методи використовуються в системах керування, що функціонують у реальному часі. У розподілених системах, що мають ієрархічну структуру комплексу обчислювальних засобів, на нижньому рівні використовуються комп'ютер, маючи, як правило, недостатньо пам'яті для реалізації прямих методів оцінювання. Тому на цьому рівні необхідно використовувати ітераційні методи.

До прямих методів оцінювання можна віднести: метод найменших квадратів (МНК), марківські оцінки або оцінювання за методом найменших квадратів, оцінки максимальної правдоподібності (МП), оцінювання за мінімальним середнім ризиком, байєсовські оцінки (БО), метод найменших модулів (МНМ), зміщене оцінювання (ЗО), робастні методи (РМ). До ітераційних методів можна віднести: рекурентний метод найменших квадратів (РМНК), метод стохастичної апроксимації (МСА), однокрокові та багатокрокові адаптовані алгоритми.

Одним з найбільш розповсюджених методів оцінювання є МНК. Він не вимагає ніякої апріорної інформації. Суть методу перебуває в обчисленні таких оцінок B , які забезпечили б мінімум квадратичної функції

$$J = \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i \cdot B)^2 \rightarrow \min \quad (5.5)$$

У матричній формі

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y, \quad (5.6)$$

МНК простий та економічний метод у реалізації, однак має два істотних недоліки.

Першим недоліком є отримання зміщених оцінок при наявності перешкод, при цьому зміщення зростає під час підвищення рівня перешкод. Другим недоліком є неможливість отримання оцінок при поганій зумовленості матриці $(X^T X)$, що нерідко має місце у реальних умовах.

Крім того, ще одним з недоліків є те, що при введенні у модель додаткового фактора вимагається перерахунок всіх коефіцієнтів рівняння.

У методі МП необхідно знати не тільки коваріаційну матрицю перешкоди, але і вигляд спільного розподілення ймовірностей її вибіркового значень. В оцінюванні за мінімальним середнім ризиком необхідна ще велика

апріорна інформація, тобто повинні бути задані щільності розподілення ймовірностей шуму, вхідних змінних та параметрів моделі.

Байєсовські оцінки засновуються на відомій формулі Байєса

$$P(b/y) = \frac{P(b/y) \cdot P(b)}{P(y)}, \quad (5.7)$$

де $P(y/b)$ – щільність імовірності вимірів y при фіксованому значенні параметрів моделі; $P(b)$ – щільність розподілення параметрів.

Відома також щільність імовірності шуму. Для оцінки $P(b/y)$ повинні бути апріорно відомі всі складові правої частини, що у практичних ситуаціях малоімовірно.

Використання того або іншого методу оцінювання знаходиться у прямій залежності від обсягу апріорної інформації. При визначених умовах між методами є деякий загальний зв'язок.

Метод МНК збігається з МП, якщо перешкоди не корельовані між собою. Узагальнений МНК збігається з методом МП, якщо перешкода розподілена за нормальним законом. Метод МП збігається з методом СР (середніх ризиків) при рівномірному розподіленні b та функції втрат, заданої у вигляді

$$L = \delta(b - b_m), \quad (5.8)$$

де δ – функція Дірака.

Використання математичної моделі для керування накладає додаткові труднощі у виборі методу ідентифікації. Дані труднощі пов'язані з необхідністю дослідження ефективності використання методів ідентифікації для цілей керування. Незважаючи на добрі прогностні властивості моделі не завжди вдається її використовувати у системі керування. Змінення характеристик об'єкта призводить до необхідності корекції не тільки параметрів моделі, але і параметрів алгоритму керування, У цьому випадку структура алгоритмічних модулів у САК ТП представляє складний взаємозалежний комплекс.

Слід відзначити, що у даний час формалізований підхід до вибору методу параметричної ідентифікації не розроблений. У кожному конкретному випадку приходиться на основі професійного досвіду та інтуїції піддавати деякій модернізації існуючі методи або пристосовувати їх для специфічних особливостей об'єкта керування. У загальному випадку вибір методу ідентифікації залежить від численності факторів, які необхідно врахувати апріорі. Проте, як правило, на практиці така інформація відсутня, тому виникає задача її одержання на основі даних, отриманих у результаті проведення реєстраційних експериментів на об'єкті, що функціонує.

Один із можливих шляхів рішення задачі вибору ідентифікації зв'язаний з порівняльною оцінкою основних характеристик методу, що залежать від мети використання математичної моделі. Можливо декілька способів порівняння методів:

– аналітичний;

- за реальними даними;
- за результатами імітаційного моделювання.

Аналітичний спосіб дає добрі результати при порівняльній оцінці детермінованих моделей, на випадок відсутності дії різних шумів та завад вимірювань.

Використання реальних даних не завжди приводить до позитивних результатів. По-перше, невідома точна модель, по-друге, невідомі характеристики шумів та дія неконтрольованих збурень, що міняються з часом. Це призводить до одержання специфічних результатів для кожного алгоритму.

Однак, і аналітичний, і спосіб за реальними даними можуть дати додаткову інформацію, яка дозволить найбільш цілеспрямовано організувати дослідження алгоритмів за допомогою імітаційного моделювання. Імітаційне моделювання дозволяє порівнювати показники якості методів при однакових умовах.

Як показники якості методу можуть бути використані: точність оцінювання, обчислювальна складність, надійність, керованість, універсальність і ін.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під ідентифікацією об'єктів керування?
2. Чим відрізняється структурна і параметрична ідентифікація?
3. Чому необхідно спрощувати властивості реальної фізичної системи при її ідентифікації?
4. Як виконується ідентифікація нелінійних моделей?
5. Яка послідовність кроків структурної ідентифікації?
6. Виконайте класифікацію методів ідентифікації залежно від класу об'єктів, типу прийнятої моделі, підходу до побудови математичної моделі, виду проведеного експерименту, критерію ідентифікації та ін.
7. Які розбіжності при ідентифікації динамічних характеристик об'єктів використовують як критерій ідентифікації?
8. Які переваги має критерій ідентифікації мінімуму середньої квадратичної помилки перед критерієм максимуму правдоподібності?
9. Які є класи методів ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів і чому їх відмінність?
10. В чому полягає підхід ранжування змінних при рішенні задачі динамічної ідентифікації?
11. Як в задачах ідентифікації при виборі змінних використовується інформаційний підхід?
12. Якими методами оцінюють результати ідентифікації?
13. Як порівнюють основні характеристики методів ідентифікації в залежності від мети використання математичної моделі, при виборі методу ідентифікації?

РОЗДІЛ 6

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

6.1. Загальні поняття про вимірювання

Значення технологічної величини визначають шляхом вимірювань. Будь-яка технологічна величина має істинне значення (для статистичних величин це буде істинне середнє значення). Істинним значенням технологічної величини називають таке її значення, яке якісно і кількісно відображає відповідні властивості об'єкта.

Під вимірюванням розуміють знаходження значення технологічної величини експериментальним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Вимірювання можуть бути як прямими, коли шукану величину знаходять безпосередньо з дослідних даних, так і непрямими, коли шукану величину визначають на основі відомої залежності між цією величиною і величинами, що піддається прямим вимірюванням. Значення величини, знайдене вимірюванням, називають результатом вимірювання.

Із-за недосконалості вимірювальних приладів і органів почуттів людини, експеримент не дає істинного значення величини, що вимірюється, а лише її наближене значення. Під дійсним значенням технологічної величини розуміють її значення, знайдене експериментально, яке настільки близьке до істинного значення, що може бути використано замість нього.

Точність вимірювання визначається близькістю його результату до істинного значення величини, що вимірюється. Точність приладу визначається величиною наближення його показів до істинного значення шуканої величини. Похибка вимірювального приладу дорівнює найменшій поділці шкали, по якій можна проводити відлік, не сумніваючись в правильності результату. Похибка зменшується із збільшенням точності приладу. Не має сенсу старатися збільшити значення точності приладу при вимірюваннях. Для підвищення точності результатів експерименту необхідно провести декілька вимірювань технологічних величини в однакових умовах.

Оцінка точності вимірювань є частина будь-якого експерименту. Цю оцінку можна зробити, знайшовши похибку вимірювань. Похибка вимірювань характеризується відхиленням результатів вимірювань від істинного значення величини, що вимірюється.

Внаслідок вимірювань, а також при проведенні багатьох математичних операцій отримують наближені значення шуканих технологічних величин. При виконанні обчислень з ними можуть виникати додаткові похибки. Тому розглянемо ряд простих правил обчислень з наближеними значеннями, які дозволять зменшити об'єм обчислювальної роботи і виключити додаткові похибки.

Як відомо, будь-яке число записують за допомогою цифр. При записі наближеного числа потрібно враховувати, що цифри, що складають його, можуть бути вірними, сумнівними і невірними. Цифра вірна, якщо абсолютна

похибка числа менше однієї одиниці розряду цієї цифри (зліва від неї всі цифри будуть вірними). Сумнівною називають цифру, яка стоїть праворуч від вірної цифри, а цифри праворуч від сумної невірні. Їх необхідно відкинути не тільки в результаті, але і в початкових даних. Округляти число при цьому не треба. Похибки чисел, отриманих з вимірювань, визначаються на основі відомих методик. Коли похибка числа не вказана, то потрібно вважати, що абсолютна його похибка рівна половині одиниці розряду останньої цифри. Розряд старшої цифри похибки показує розряд сумної цифри в числі. Так, число $143,7 \pm 4,2$ потрібно записувати $143 \pm 4,2$, а цифру 7 необхідно відкинути як невірну.

Результати технологічних експериментів записують значимими цифрами. Числа представляють в показниковій формі. Наприклад, числа 0,000253 і 468000 записуються так: $2,53 \cdot 10^{-4}$ і $4,68 \cdot 10^5$. Подібний запис спрощує обчислення, особливо при логарифмуванні.

Завжди корисно робити необхідні округлення, щоб не було помилкового враження про більшу, ніж це є насправді, точність результату. Доцільно округляти тільки кінцевий результат. Щоб не допустити додаткової похибки при округленні, необхідно відкидати тільки невірні цифри.

Операції додавання і віднімання наближених чисел виконують як алгебраїчне додавання (тобто деякі з доданків можуть бути від'ємними числами). Доданки можуть бути записані і в показниковій формі. У останньому випадку показник степені повинен бути однаковим для всіх доданків. Після додавання сума округляється до старшого розряду сумної цифри доданків.

Наприклад, складемо числа $5,253 \cdot 10^4$; $1,70 \cdot 10^2$; $-3,47 \cdot 10^3$, останні цифри в яких сумнівні. $(525,3 + 1,7 - 34,7) \cdot 10^2 = 4,923 \cdot 10^4$. Тут трійка сумнівна цифра.

Множення або ділення краще виконувати з числами записаними в показниковій формі, ставлячи кому після першої цифри. Дії виконуються окремо з мантисами і порядками. Результат множення або ділення матиме стільки значимих цифр, скільки їх має менше з двох співмножників. Отже, початкові дані доцільно округлити до однієї кількості значимих цифр. Тут, так само як і при додаванні, можна залишити по одній додатковій цифрі, щоб уникнути додаткової похибки.

Наприклад, помножимо числа 3422 і 0,048, останні цифри в яких сумнівні:

$$3,422 \cdot 10^3 \cdot 4,8 \cdot 10^{-2} = 1,6 \cdot 10^2$$

Оскільки при множенні невірної цифри на вірну виходить невірна, а при множенні сумнівною на вірну сумнівна, то в цьому випадку цифра 6 внаслідок множення вже сумнівна, і доцільно виконати округлення до цієї цифри.

При діленні двох чисел також їх останні цифри сумнівні і тому розділивши, наприклад такі два числа як 64 і 0,372 отримаємо:

$$\frac{6,4 \cdot 10^1}{3,72 \cdot 10^{-1}} = 1,7 \cdot 10^2$$

В цьому випадку старшою сумнівною цифрою результату ділення є перша цифра праворуч від коми.

Підведення до ступеня є операцією множення однакових співмножників, кількість яких дорівнює показнику ступеня. Результат матиме кількість цифр таку саму, як і основа ступеня. Наприклад, $(2,8 \cdot 10^3)^2 = 7,8 \cdot 10^6$. Із збільшенням показника ступеня надійність останньої цифри результату зменшується. При знаходженні кореня із наближеного числа в результаті залишають таку ж само кількість значимих цифр, як і в підкореновому виразі. Наприклад, $\sqrt{6,29} = 2,51$.

При логарифмуванні наближеного числа мантиса логарифма повинна мати ту ж кількість значимих цифр, що і саме число. Знаходження числа по його логарифму, підкоряється тим же правилам.

6.2. Види похибок вимірювання

Похибки вимірювань викликаються різними причинами і їх прийнято поділяти на систематичні, випадкові і помилки.

Систематичною називають складову похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Систематичні похибки з'являються внаслідок несправності приладів, неточності методу вимірювання, якого-небудь упущення експериментатора, використання при обчисленні неточних даних. Як приклади систематичних похибок можна привести: зважування на вазі за допомогою неточних гирь, вимірювання величини струму неправильно відградуїтованим амперметром і т. п. При вимірюваннях необхідно зробити все можливе, щоб виключити систематичні похибки, оскільки вони можуть бути настільки великими, що сильно спотворять результати вимірювання. Часто такі похибки характеризуються постійним знаком, тобто або тільки збільшують, або тільки зменшують результати вимірів. Виявити систематичні похибки, а також усунути їх в багатьох випадках нелегко. Потрібний копіткий і ретельний аналіз методу вимірювання, суворі перевірки всіх вимірювальних приладів і безумовне виконання вироблених практикою правил проведення експерименту.

Якщо систематичні похибки викликані відомими причинами, то їх можна точно визначити, наприклад похибку, викликану температурним розширенням об'єкта. Подібні похибки усуваються внесенням поправок. Однак, якщо поправка набагато менша від похибки, що вноситься самим вимірювальним приладом, то вводити її не має сенсу, наприклад у випадку, коли шкала приладу така, що густину рідини можна виміряти з похибкою $0,1 \text{ г/см}^3$, а температурна поправка рівна $0,01 \text{ г/см}^3$. Рекомендується нехтувати

поправкою, якщо вона не перевищує 0,005 значення від середньої квадратичної похибки.

Причина систематичної похибки може бути відома, але невідоме її значення, наприклад похибка вимірювального приладу; Таку похибку виключити неможливо. Для точних приладів ціна поділки узгоджена з класом точності, тому не треба старатися на око оцінювати долю від поділки, а проводити виміри з точністю, що відповідає класу точності приладу.

Систематичні похибки виникають також при проведенні складних вимірювань. Про них експериментатор може не знати, хоч вони бувають дуже великими. Тому в цих випадках треба ретельно проаналізувати методику вимірювань. Такі похибки можна виявити, зокрема, провівши вимірювання шуканої величини іншим методом. Збіг результатів вимірювань обома методами служить певною гарантією відсутності систематичних похибок. Прикладом похибки цього типу є похибка вимірювання щільності матеріалу шляхом визначення об'єму і маси, якщо невідомо, що всередині матеріалу є порожнечі.

Нарешті, існують систематичні похибки, зумовлені властивостями об'єктів вимірювань, наприклад така похибка з'явиться, якщо виміряти один раз густину продукту цукрового виробництва не враховуючи якості сировини.

Щоб систематичну похибку перевести у випадкову, необхідно організувати вимірювання так, щоб чинник, який впливає на результат вимірювань, в кожному із них діяв по-різному. Цей спосіб називають рандомізацією. Так, густину продукту треба виміряти в різний час роботи заводу і взяти середнє значення. Якщо є підозра, що вимірювальний прилад вносить систематичну похибку, то вимірювання потрібно провести декількома приладами. Порівняння цих вимірювань дозволить перевести систематичну похибку у випадкову.

Випадковою називають складову похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Випадкові похибки викликаються як об'єктивними, так і суб'єктивними причинами, наприклад: освітленням приладів, їх розташуванням, зміною температури в процесі вимірювань, зміною напруження в електричній мережі, станом почуттів експериментатора, психологічними факторами, реакцією на спостереження і т. п. Такі похибки мають значення, які відрізняються, в окремих вимірюваннях, тобто їх значення різні навіть для вимірювань, зроблених в абсолютно однакових умовах. Оскільки причини, що приводять до випадкових похибок, не однакові в кожному експерименті і не можуть бути враховані, виключити такі похибки не можна, можна лише оцінити їх значення. Випадкові похибки визначаються по законах теорії помилок, основаної на теорії ймовірності.

Коли випадкова похибка більше похибки, що визначається точністю приладу, необхідно багато разів повторити одне і те ж вимірювання для зменшення її значення.

Похибку вимірювання, яка значно більша за ту що може бути при даних умовах, називають помилкою. Помилки виникають із-за неуважності експериментатора при виконанні замірів і записів дослідів, та інше.

Для визначення помилки необхідно провести вимірювання в інших умовах або повторити вимірювання через деякий час. Помилка повинна бути обов'язково виключена з результатів вимірювання по описаній нижче методиці.

Крім цих похибок існують і інші, які докладніше будуть розглянуті нижче. Абсолютною похибкою вимірювання вважають похибку, виражену в одиницях величини, що вимірюється. Відносна похибка вимірювання – відношення абсолютної похибки до істинного значення величини, що вимірюється. Складову похибку вимірювання, яка залежить від похибки використаних засобів вимірювання, називають інструментальною похибкою вимірювання.

6.2.1 Похибки рівно точних вимірювань

Вимірювання, за допомогою яких ми знаходимо значення величини безпосередньо з дослідних даних, називаються прямими. Наприклад, визначення густини розчину на віскозиметрі. Для знаходження випадкової похибки такі вимірювання слід провести декілька разів. *Результати таких вимірювань мають близькі похибки і називаються рівно точними.*

При проведенні n вимірів дослідних даних з однаковою точністю отримано ряд значень: x_1, x_2, \dots, x_n . Найбільш близьким до істинного значення x^* вимірюваної величини x є середнє арифметичне значення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6.1)$$

Слід рахувати, що середнє арифметичне значення є найбільш вірогідне значення вимірюваної величини. Середнє арифметичне значення часто називають просто середнім значенням.

Охарактеризуємо похибки вимірювань. Результати окремих вимірювань відрізняються від істинного значення. Абсолютні похибки i -го вимірювання

$$\Delta x_i = x^* - x_i \quad (6.2)$$

можуть бути позитивними і негативними. Додаючи похибки, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = n x^* - \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.3)$$

звідки

$$x^* = \bar{x} + \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}{n} \quad (6.4)$$

У цьому виразі другий доданок в правій частині рівняння із збільшенням n наближується до нуля і тому можна записати, що $x^* \approx \bar{x}$. Таким чином, \bar{x} можна назвати дійсним значенням.

На практиці істинне значення вимірюваної величини, як і абсолютну похибку вимірів визначити неможливо. Можливо лише визначити ймовірність того, що величина x^* знаходиться на деякому інтервалі біля його середньоарифметичного значення. Для оцінки абсолютної похибки окремого виміру використовують рівняння

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \quad (6.5)$$

Вона визначає точність даного виміру.

У зв'язку з тим що оцінку похибки ряду вимірювань не можна охарактеризувати простою сумою відхилень, оскільки вона дорівнює нулю, то беруть або суму абсолютних значень відхилень або суму квадратів відхилень. Відповідно до цього такі оцінки називають середньоарифметичною похибкою.

Середньоарифметична похибка

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\bar{x} - x_i|. \quad (6.6)$$

Вона визначає межі, в яких лежить більше ніж половина вимірювань. Отже, значення x^* з досить великою ймовірністю попадає в інтервал від $\bar{x} - \eta$ до $\bar{x} + \eta$. Результати вимірювань величини x можна записати у вигляді:

$$x^* = \bar{x} \pm \eta \quad (6.7)$$

Величина x визначена тим точніше, чим менше інтервал, в якому знаходиться істинне значення x^* .

При оцінці якості вимірювання необхідно порівнювати похибку з вимірним значенням, що дає більш наочне уявлення про точність вимірювань. Для цього вводиться поняття відносної похибки

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x}. \quad (6.8)$$

Відносну похибку як правила виражають в процентах.

Оскільки в більшості випадків технологічні величини мають розмірність, то і абсолютні похибки її мають, а відносні похибки розмірності не мають.

Наприклад, п'ять разів вимірювали температуру у технологічному апараті. Отримали наступні значення температури в $^{\circ}\text{C}$: 98,5; 98,2; 98,9; 98,0; 98,7. Знайдемо середнє значення температури і середньоарифметичну похибку.

Середньоарифметичне значення по вказаній формулі

$$\bar{t} = \frac{98,5 + 98,2 + 98,9 + 98,0 + 98,7}{5} = 98,5 \text{ } ^{\circ}\text{C}.$$

Похибки окремих вимірювань рівні:

$\Delta t_1=98,5-98,5=0,0$ °С, $\Delta t_2=98,5-98,2=0,3$ °С, $\Delta t_3=98,5-98,9=-0,4$ °С,
 $\Delta t_4=98,5-98,0=0,5$ °С, $\Delta t_5=98,5-98,7=-0,2$ °С.

Використовуючи визначене вище рівняння, знайдемо середньо-арифметичну похибку

$$\eta = \frac{0,0 + 0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,2}{5} = 0,3 \text{ °С.}$$

Таким чином,

$$t^* = 98,5 \pm 0,3 \text{ °С.}$$

При цьому відносна похибка

$$\delta = \frac{0,3}{98,5} 100\% = 0,305\% \approx 0,3\%.$$

Слід зазначити, що середньоарифметична похибка при добре виконаних вимірах близька до похибки приладу.

6.2.2. Розподіл випадкових значень вимірів

Якщо вимірювання величини x виконано багаторазово, то частоту появи значення x_i можна зобразити у вигляді графіка, що має вигляд ступінчастої кривої, гістограми (рис. 6.1), де y *число* вимірювань; $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ (i змінюється від $-n$ до $+n$). Із збільшенням числа вимірювань і зменшенням інтервалу Δx_i гістограма перетворюється в безперервну криву, що характеризує густину розподілу ймовірностей появи значення x_i на інтервалі Δx_i .

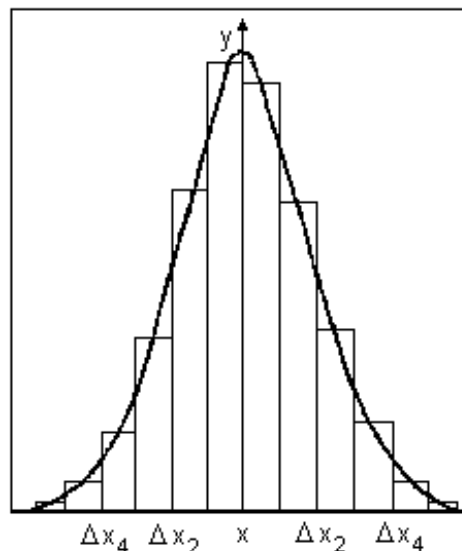


Рис. 6.1. Гістограма результатів вимірювань

Розподіл випадкових величин є сукупність всіх можливих значень випадкових величин і відповідних їм ймовірностей. Законом розподілу випадкової величини називають любую відповідність між значеннями випадкових величин і можливими значеннями їх ймовірностей. Найбільш загальною формою закону розподілу є функція розподілу $P(x)$. Густиною

розподілу ймовірностей випадкової величини є похідна від функції розподілу $p(x) = P'(x)$.

Ймовірність розподілу може визначатися різними законами розподілів. Однак часто ймовірність появи величини x_i на інтервалі $(x, x+dx)$ описується нормальним законом розподілу – законом Гаусса (рис. 6.2):

$$p(x_i) = \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\bar{x} - x_i)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6.9)$$

де σ^2 – дисперсія генеральної сукупності. Генеральною сукупністю називають всю множину можливих значень вимірювань x_i , або можливих значень похибок Δx_i .

Широке використання закону Гауса в теорії похибок пояснюється наступними причинами:

1) рівні по абсолютному значенню похибки зустрічаються однаково часто при великому числі вимірювань;

2) малі по абсолютному значенню похибки зустрічаються частіше, ніж великі, тобто ймовірність появи похибки тим менша, чим більше її абсолютне значення;

3) похибки вимірювань складають безперервний ряд значень.

Як показали експерименти там, де похибки не дуже великі, нормальний закон розподілу добре узгоджується з дослідними даними. За допомогою нормального закону можна знайти ймовірність появи похибки того чи іншого значення.

Крива розподілу Гауса характеризується двома параметрами: середнім значенням випадкової величини \bar{x} і дисперсією σ^2 .

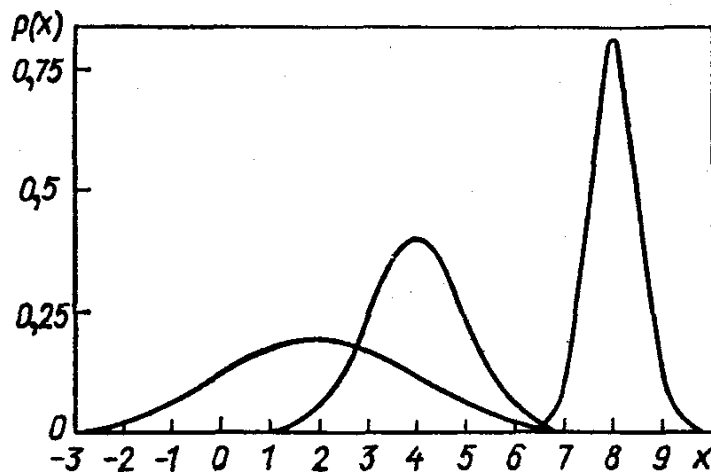


Рис.6.2. Нормальний розподіл для різних \bar{x} і σ

Середнє значення визначається абсцисою ($x=\bar{x}$) осі симетрії кривої розподілу, а дисперсія показує, як швидко зменшується ймовірність появи похибки із збільшенням її абсолютного значення. Крива $p(x)$ має максимальне значення при $x = \bar{x}$ $p(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. Отже, середнє значення є найбільш можливим значенням величини x . Дисперсія визначається

півшириною кривої розподілу $p(x_i)$, тобто відрізками, що з'єднують точки перегину цієї кривої ліворуч і праворуч від осі симетрії, так що вище за ці відрізки крива обернена опуклою стороною догори, а нижче неї опуклість гілок кривої звернена донизу. З теорії ймовірностей витікає, що $\sigma^2 = (x - \bar{x})^2$ тобто σ^2 є квадратом відхилення результатів окремих вимірювань від їх середнього арифметичного значення по всьому розподілу. Якщо при вимірюванні технологічної величини отримують тільки постійні значення $x = \bar{x}$, то $\sigma^2 = 0$. Але якщо значення випадкової величини x приймають значення, не рівні \bar{x} , то дисперсія її відрізняється від нуля і позитивна. Дисперсія, таким чином, є мірою флуктуації значень випадкової величини.

Міра розсіяння результатів окремих вимірювань x_i від середнього значення \bar{x} повинна вимірюватися в тих самих одиницях, що і значення величини, яке вимірюється. У зв'язку з цим як показник флуктуації результатів вимірювань набагато частіше використовують величину

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (6.10)$$

що називається середньоквадратичною похибкою. Вона є найважливішою характеристикою результатів вимірювань і залишається постійною при незмінності умов експерименту. Значення цієї величини визначає форму кривої розподілу $p(x_i)$. Оскільки при зміні σ площа під кривою, залишається постійною, але змінює свою форму, то із зменшенням σ крива розподілу витягується догори поблизу максимуму при $x = \bar{x}$, стискаючись в горизонтальному напрямі.

Так як найбільш можливе значення величини x , що вимірюється відповідає максимуму ймовірності $p(\Delta x)$ для мінімального значення показника міри при експоненті, то це означає, що максимум буде спостерігатися, якщо сума квадратів похибок мінімальна. Тому при досить великій кількості вимірювань $\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і $x^* = \bar{x}$.

Для нормального закону розподілу середньоквадратична похибка окремого вимірювання

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x^* - x_i)^2}{n-1}}, \quad (6.11)$$

а середньо квадратична похибка середнього значення

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x^* - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (6.12)$$

Середньоквадратична похибка більш точно характеризує похибку вимірювань, ніж середньоарифметична похибка, оскільки вона отримана із закону розподілу випадкових величин похибок. Крім того, безпосередній

зв'язок її з дисперсією, обчислення якої полегшується рядом теорем, робить середньоквадратичну похибку дуже зручним параметром.

Велике значення в теорії ймовірностей мають функції

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2 / 2) \quad (6.13)$$

і

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-t'^2 / 2) dt', \quad (6.14)$$

де $t = (\bar{x} - x) / \sigma$; $\Phi(t)$ – інтеграл ймовірності (або функція Лапласа), а також нормальна функція розподілу. За допомогою функцій $f(t)$ і $\Phi(t)$ обчислюється ймовірність того, що значення вимірної величини, розподіленої згідно із законом Гауса, попаде в інтервал $(\bar{x} - t\sigma, \bar{x} + t\sigma)$.

Поряд з розмірною похибкою використовують і відносну похибку без розмірів $\delta_\sigma = \sigma / \bar{x}$, яка, як і δ_x , виражається або в частках одиниці, або у відсотках.

Остаточний результат вимірювань записують у вигляді:

$$x^* = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}, \quad \delta_0 = \sigma_{\bar{x}} / \bar{x}. \quad (6.15)$$

На практиці неможливо виконати дуже багато вимірів, тому не можна побудувати нормальний розподіл, щоб точно визначити істинне значення x^* . У цьому випадку хорошим наближенням до істинного значення можна вважати \bar{x} , а досить точною оцінкою помилки вимірювань вибірково дисперсію S_n^2 , яка витікає з нормального закону розподілу, але відноситься до кінцевого числа вимірювань. Така назва величини S_n^2 , пояснюється тим, що з усієї множини можливих значень x_i вибирають (вимірюють) лише кінцеве число (n) значень величини x_i яке називається вибіркою, і яке характеризується вже вибірковою середнім значенням і вибірковою дисперсією.

Корінь квадратний з вибіркової дисперсії визначає середньоквадратичну похибку окремого вимірювання

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}, \quad (6.16)$$

а середньоквадратична похибка ряду вимірювань

$$S_{\bar{x}} = S_n / \sqrt{n}. \quad (6.17)$$

З останнього виразу видно, що, збільшуючи число вимірювань, можна зробити середньоквадратичну похибку як завгодно малою. Але при $n > 10$ помітної зміни середньоквадратичної похибки досягти важко, тому подальше збільшення числа вимірювань недоцільне. До того ж, неможливо досягти повного виключення систематичних похибок. А коли середньоквадратична похибка менша від систематичної, подальше збільшення числа вимірювань просто недоцільне.

6.2.3. Оцінка надійності вимірів

Отже, задача знаходження наближеного значення технологічної величини і її похибки вирішена. Тепер необхідно визначити надійність знайденого дійсного значення. Під надійністю вимірювань розуміють ймовірність попадання істинного значення в даний довірчий інтервал. Інтервал $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ в якому знаходиться із заданою ймовірністю істинне значення x^* , називають довірчим інтервалом.

Допустимо, що ймовірність відмінності результату вимірювань x від істинного значення x^* на величину, більшу ніж ε , дорівнює α ,

$$p(\bar{x} - \varepsilon < x^* < \bar{x} + \varepsilon) = \alpha \quad (6.18)$$

В теорії помилок звичайно під ε розуміють величину $tS_{\bar{x}}$. Тому

$$p(\bar{x} - tS_{\bar{x}} < x^* < \bar{x} + tS_{\bar{x}}) = \Phi(t), \quad (6.19)$$

де $\Phi(t)$ – інтеграл ймовірності.

Таким чином, щоб охарактеризувати істинне значення, потрібно знати як похибку, так і надійність. Якщо довірчий інтервал збільшується, то зростає надійність того, що істинне значення x^* попадає в даний інтервал. Висока ступінь надійності необхідна при відповідальних вимірюваннях. Це означає, що в такому випадку треба вибирати великий довірчий інтервал або вести вимірювання з великою точністю (тобто зменшити величину $S_{\bar{x}}$), що можна зробити, наприклад багаторазовим повторенням вимірювань. У переважній більшості експериментальних і технологічних задач великої надійності не треба і тому довірка ймовірність складає 0,90 – 0,95.

В попередніх розділах вважалось, що число вимірювань досить велике. На практиці у виробничих або лабораторних умовах число вимірювань майже завжди буває невеликим. Інколи, в наукових дослідженнях нерідко використовують результати двох-трьох вимірювань. До речі, точність визначення величини при виконанні лише одного виконаного ретельно виміру дорівнює точності вимірювального приладу. У цьому випадку величини S_n^2 і S_x^2 щонайкраще можуть визначити лише порядок величини дисперсії. Існує більш правильний метод для визначення ймовірності знаходження шуканого значення в заданому довірчому інтервалі, оснований на використанні кривої розподілу Стьюдента.

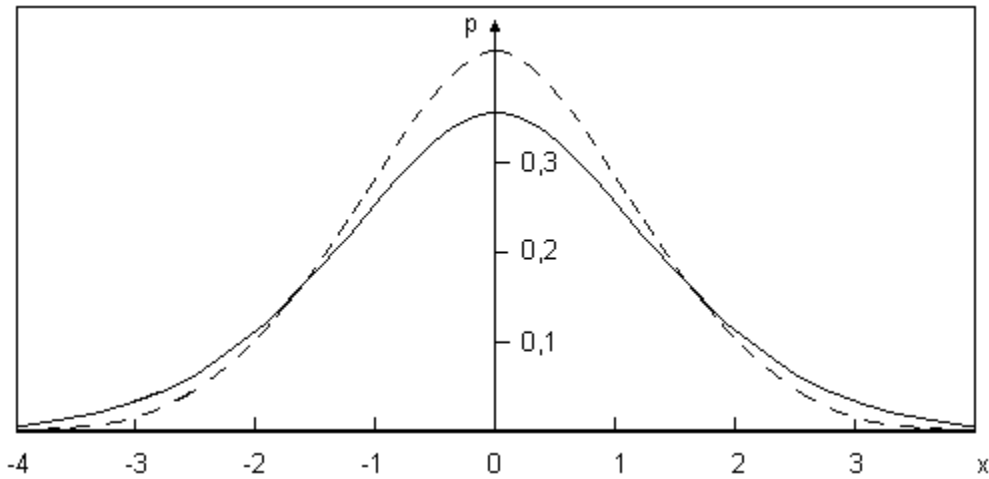


Рис. 6.3. Криві щільності ймовірності розподілу Стюдента при $n=3$
(—) і Гауса при $x=0$ і $\sigma=1$ (- - -)

Позначимо як $\pm\Delta x$ інтервал, на який може відхилитися середньоарифметичне значення \bar{x} від істинного значення x^* , тобто $\Delta x = x^* - \bar{x}$. Таким чином нам необхідно визначити значення

$$\Delta x = t_{\alpha} S_n / \sqrt{n} \quad (6.20)$$

Тоді

$$t_{\alpha} = \Delta x \sqrt{n} / S_n \quad (6.21)$$

де S_n визначається вище приведеною формулою. Ця величина підкоряється розподілу Стюдента. Розподіл Стюдента характерний тим, що не залежить від параметрів x^* і σ нормальної генеральної сукупності і дозволяє при невеликому числі вимірювань ($n < 20$) оцінити похибку $\Delta x = \bar{x} - x_i$ по заданій довірчій ймовірності α або по заданому значенню Δx знайти надійність вимірювань. Цей розподіл залежить тільки від змінної і числа ступенів свободи $l = n - 1$, де n – число вимірювань. Розподіл Стюдента справедливий при $n \geq 2$ і симетричний відносно $t_{\alpha} = 0$. Із зростанням числа вимірювань t_{α} – розподіл прагне до нормального розподілу (фактично при $n > 20$).

На рис.6.3 зображена крива розподілу Стюдента для $n=3$ і крива нормального розподілу для $\bar{x}=0$ і $\sigma=1$. Як видно з цього рисунка, даному довірчому інтервалу буде відповідати менша надійність (ймовірність великих відхилень вище, ніж при нормальному розподілі).

Більш широкий довірчий інтервал для оцінки середнього значення при використанні розподілу Стюдента свідчить про його перевагу, оскільки враховується, що ніякої довірчої інформації про σ^2 , крім тієї, яку дає вибірка, немає.

Довірчу ймовірність α при заданій похибці результатів вимірювань отримують за допомогою виразу

$$p(\bar{x} - t_{\alpha} S_n / \sqrt{n} < x^* < \bar{x} + t_{\alpha} S_n / \sqrt{n}) = \alpha \quad (6.22)$$

Величину t_α – називають критерієм Стюдента і його значення приведені в табл. 6.2 для значень надійності 0,8 – 0,99. Використовуючи приведені рівняння і табл. 6.2, можна вирішити і зворотну задачу: по заданій надійності α визначити допустиму похибку результату вимірювань.

Розподіл Стюдента також вказує на те, що з ймовірністю, як завгодно близькою до дійсної, при досить великому n середньоарифметичне значення \bar{x} буде як завгодно мало відрізнятись від істинного значення x^* .

Наприклад, було проведено п'ять вимірювань температури процесу. При цьому виявилось, що середнє значення параметра $\bar{x}=73,5$ °C і $S_k=0,72$. Знайдемо: довірчий інтервал для $\alpha=0,90$.

Для цього спочатку по таблиці 6.2 знаходимо, що для $\alpha=0,90$ і $n=5$ значення критерію Стюдента $t_\alpha=2,13$. Тоді $\Delta x= 2,13 \cdot 0,72/5=0,31$ °C.

6.3. Кореляція між параметрами дослідів

Щоб визначити математичну залежність між параметрами моделі по дослідним табличним даним слід в першу чергу оцінити тісноту зв'язку між ними, перевірити гіпотезу кореляції змінних, які досліджуються, виявити існування лінійного або нелінійного зв'язку.

Таблиця 6.1

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Тіснота зв'язку між двома параметрами визначається коефіцієнтом парної кореляції r_{xy} . При невеликій виборці даних вимірів x_i і y_i розмірністю n (табл. 6.1) коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\delta_x \delta_y}, \quad (6.23)$$

Якщо ж n має велике значення, то використовується інша формула для обчислення парної кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\delta_x \delta_y}, \quad (6.24)$$

де \bar{x} , \bar{y} , $\bar{x} \bar{y}$ – середньоарифметичні значення x_i , y_i і добутку x_i на y_i ; δ_x , δ_y – середньо-квадратичні похибки по x і y .

Коефіцієнт кореляції приймає значення від -1 до $+1$. Якщо $|r_{xy}| = 0$, то x і y некорельовані величини. При $|r_{xy}| = 1$ між x і y існує точна лінійна функціональна залежність виду $y = a_0 + a_1 x$. Некорельовані величини x і y можуть бути і незалежними і залежними, але в останньому випадку зв'язок між ними матиме нелінійний характер.

Щоб виявити, що лінійна залежність між x і y не існує треба перевірити виконання нерівності:

$$-t_{\alpha} \leq \frac{r_{xy} \sqrt{n}}{1 - r_{xy}^2} \leq t_{\alpha} \quad (6.25)$$

де t_{α} – критерій Ст'юдента при $k = \infty$, α – рівень значущості, який вказує на долю хибних дослідів. При значенні $\alpha = 0,01$ значення $t_{\alpha} = 2,576$, а при значенні $\alpha = 0,05$ значення $t_{\alpha} = 1,96$.

Якщо нерівність (6.25) виконується то у $(1 - \alpha)100$ відсотків випадків кореляційний зв'язок відсутній. У цьому випадку зв'язок між x і y шукаємо в нелінійній формі.

Для табличних даних, де значення параметра y залежить від декількох параметрів x і залежність має вигляд $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, для визначення виду залежності слід шукати множинний коефіцієнт кореляції:

$$R_{j,1,2,\dots,m} = \sqrt{1 - \frac{|q_m|}{q_{ij}}}, \quad (6.26)$$

де: $|q_m|$ – визначник кореляційної матриці, складений з виборочних парних коефіцієнтів кореляції; q_{ij} алгебраїчне доповнення до елемента r_{ij} , m – кількість параметрів x_j .

Коли залежність між x і y лінійна, або близька до лінійної, $|r_{xy}| \approx 1$, то за допомогою коефіцієнта кореляції можна легко знайти коефіцієнти лінійної залежності $y = a_0 + a_1x$. Тут:

$$a_0 = \bar{y} - r_{xy} \frac{\delta_y}{\delta_x} \bar{x}; \quad a_1 = r_{xy} \frac{\delta_y}{\delta_x} \quad (6.27)$$

Якщо вона нелінійна, то слід по виду кривої, побудованої по табличних даних, сформулювати гіпотезу про форму рівняння. Для цього використовуються багато різних залежностей, які часто зустрічаються на практиці і широко використовуються при виборі рівнянь.

Статистичний аналіз використовується також для порівняння різних виборок табличних експериментальних даних, вибору кращої моделі рівняння для опису табличних даних з декількох, оцінки адекватності моделі експериментальним даним та ін.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під вимірюванням технологічної величини?
2. Що таке точність вимірювання ?
3. Які цифри при записі наближеного числа є вірним, сумнівними і невірними?
4. Які є види похибок?
5. Що треба робити, якщо випадкова похибка більша за похибку, яка визначається точністю вимірювального приладу?

6. Причини появи помилок при виконанні вимірювань?
7. Яка відміна між абсолютною і відносною похибкою?
8. Чому дорівнює середньоарифметична похибка?
9. Що визначає закон розподілу випадкових величин ?
10. Які причини пояснюють широке використання нормального закону розподілу випадкових величин, закону Гауса?
11. Які параметри характеризують розподіл Гауса?
12. Чому дорівнює середньоквадратична похибка середнього значення ?
13. Що таке довірчий інтервал ?
14. Яка різниця між розподілом Стюдента і Гауса?
15. Як знайти довірчий інтервал використовуючи коефіцієнт Стюдента?
16. Що визначає коефіцієнт парної кореляції?
17. Коли між параметрами існує лінійна залежність?

Таблиця 6.2

Коефіцієнти Стюдента t_{α}

n	α				
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7
3	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
4	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
6	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
7	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50
9	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
12	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
14	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
16	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
18	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
20	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
30	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
35	1,31	1,69	2,04	2,45	2,73
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
45	1,30	1,68	2,02	2,41	2,69
50	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,67
70	1,30	1,67	1,99	2,38	2,66
80	1,30	1,66	1,99	2,37	2,65
90	1,29	1,66	1,99	2,37	2,64
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
150	1,29	1,66	1,98	2,35	2,62
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,61
300	1,29	1,65	1,97	2,34	2,60
400	1,29	1,65	1,97	2,34	2,59
500	1,29	1,65	1,96	2,33	2,59
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

РОЗДІЛ 7 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

7.1. Побудова математичних моделей по експериментальних даних

Задачі, які вирішуються у межах АСК ТП (автоматична система керування технологічним процесом), дозволяють цілеспрямовано впливати на виробничий процес згідно з обраними критеріями. Під час формування керуючих впливів раніш за все необхідно визначити мету, математичну модель та алгоритм керування. Математична модель дозволяє завбачити поведінку об'єкта та на основі прогнозу визначити керуючий вплив на об'єкт згідно з обраною метою.

Математичні моделі для більшості об'єктів АСК ТП будуються за експериментальними даними, отриманими в результаті спостережень за об'єктами в режимі нормального функціонування або при впливі на них різних збурень.

Перш ніж приступити до постановки задачі ідентифікації, сформулюємо задачу керування. Для цієї цілі побудуємо параметричну схему об'єкта (див. рис.7.1).

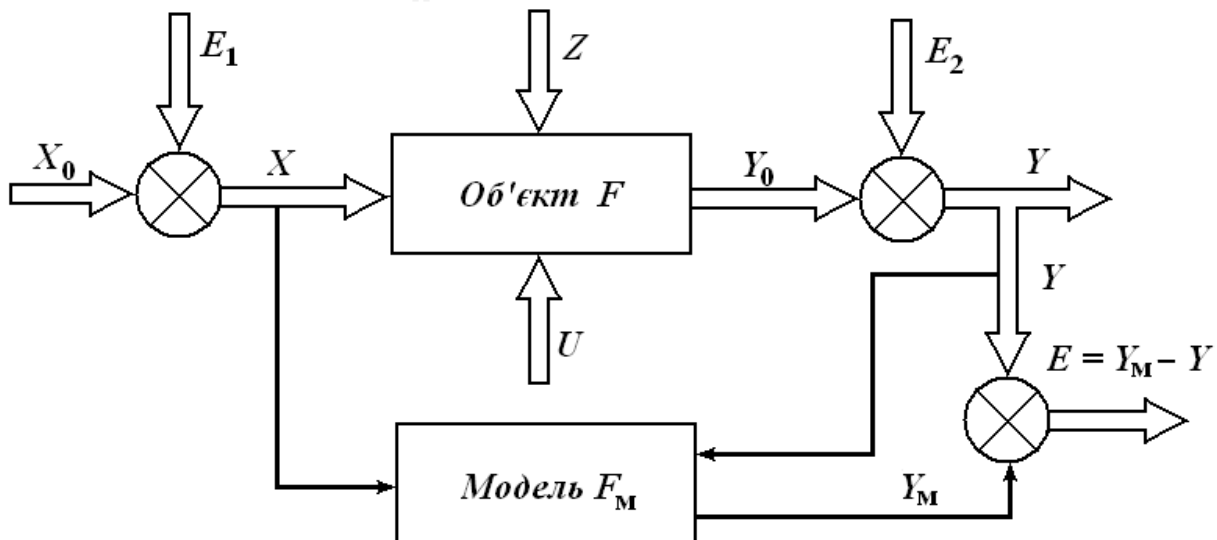


Рис. 7.1. Параметрична схема об'єкта

Як правило, технологічний процес характеризується такими параметрами:

1. X – вектор вхідних регулюючих параметрів,

$$X = \{x_i\}, \quad i = 1, \dots, p; \quad X_0 + E_1 = X.$$

До даного вектора можуть відноситися такі компоненти, як положення установок регуляторів, положення заслінок, що регулюють потік компонентів та ін. Виходячи з можливості фізичної реалізації можна записати $x_{i \min} < x_i < x_{i \max}$;

2. Z – вектор вхідних параметрів, що контролюються, але не регулюються,

$$Z = \{z_l\}, \quad l = 1, \dots, k; \quad z_{l_{\min}} < z_l < z_{l_{\max}}.$$

До цієї групи параметрів відносяться параметри, що характеризують якість та кількість вхідних компонентів;

3. Y – вектор вихідних параметрів об'єкта,

$$Y = \{y_j\}, \quad j = 1, \dots, q; \quad Y_0 + E_2 = Y.$$

Компонентами вектора можуть бути техніко-економічні показники, якісні та кількісні характеристики об'єкта;

4. U – вектор вхідних параметрів, що не контролюються і не регулюються.

$$U = \{u_\mu\}, \quad \mu = 1, \dots, s;$$

Параметри характеризують дію збурюючих факторів, таких як присутність випадкових домішок, каталізаторів, старіння устаткування і ін.;

5. E_1, E_2 – вектори похибок вимірювання відповідно до вхідних X_0 та вихідних Y_0 параметрів об'єкта.

Задача керування АСК ТП полягає в наступному: згідно з ситуацією, що визначається координатами векторів Z, X, E_1, E_2 знайти такі значення параметрів $X(t)$, з урахуванням обмежень, при яких параметри вектора $Y(t)$ приймають екстремальні значення. Суть ідентифікації перебуває у знайденні оператора F_m моделі, рівного оператору об'єкта, тобто $F_m = F$. Оператор моделі є функцією структури та параметрів

$$F_m = f[X(t), B(t)], \quad (7.1)$$

де $f(X(t))$ – структура апроксимуючої функції, $B(t)$ – її параметри.

Близькість операторів визначається за реакцією об'єкта та моделі на ту саму дію $X(t)$. Такою реакцією є $Y(t)$ і $Y_m(t)$. Тоді $Y_m(t) = f(X(t), B(t))$. Близькість $Y(t)$ і $Y_m(t)$ оцінюється функцією втрат

$$W = \int_0^t \rho[Y(t), Y_m(t)] dt \quad (7.2)$$

Це скалярна функція, яка володіє властивістю невід'ємності для будь-яких $Y(t)$ та $Y_m(t)$, тобто $W > 0$, дорівнює 0 при $Y(t) = Y_m(t)$, неперервна та випукла вниз за обома аргументами.

З урахуванням (7.1) перепишемо (7.2) у вигляді

$$W = \int_0^t \rho[Y(t), f(X(t), B(t))] dt \quad (7.3)$$

Згідно з (7.1) задача ідентифікації складається у пошуку таких $f(t)$ та $B(t)$, які б приводили (7.3) до мінімуму.

Таким чином, задача ідентифікації зводиться до задачі мінімізації. Для простоти викладення у (7.3) X, E_1, E_2 опущені. На першому етапі розробки системи ідентифікації повинна бути визначена структура моделі $f(t)$

на підставі апіорної інформації. За відсутністю такої інформації використовується апостеріорна інформація, отримана на підставі експериментально-статистичних даних. Параметри моделі B при вибраній структурі моделі також визначаються на підставі експериментально-статичних даних Y та X .

Вид структури моделі значною мірою залежить від $B(t)$ і $X(t)$. Так, найважливішою характеристикою структур є лінійність або нелінійність їх відносно B та X .

Параметри моделі залежать від експериментальних даних, що можуть бути отримані при подачі на вхід об'єкта будь-яких збурень або в режимі нормального його функціонування. Це, передусім виявляється в кількості інформації, що міститься в експериментальних даних про фізико-хімічні властивості об'єкта. Якщо дані не містять вірогідної інформації про об'єкт, то, природно, модель не буде описувати його істотні сторони. Структура моделі, параметри, характеристики вхідних сигналів і експериментальні дані взаємозалежні.

7.2. Послідовність процесу експериментальної ідентифікації

Різноманітність об'єктів дослідження систем породило різноманітність методів ідентифікації.

На рис. 7.2 зображена збільшена структурна схема ідентифікації, виходячи з якої можна запропонувати таку послідовність процесу ідентифікації:

- отримання експериментальних даних у режимі подачі пробних збурень або у режимі нормального функціонування об'єкта;
- оцінка імовірнісних характеристик;
- визначення структури моделі;
- оцінювання параметрів моделі згідно з обраним критерієм ідентифікації;
- оцінка придатності використання моделі для цілей керування;
- адаптація структури та параметрів моделі.

Ідентифікація моделі є досить складною процедурою з багатьма етапами і включає в себе рішення великої кількості задач.

Початковим етапом, від якого залежить успіх на всіх наступних, є планування і проведення на об'єкті експериментальних робіт. Оскільки точність ідентифікаційної моделі не перевищує точності експериментальних даних, до організації експерименту висуваються жорсткі вимоги. Крім того, отримана модель адекватна тільки у межах варіювання параметрів. Слід відзначити, що методологічним питанням організації проведення експериментальних робіт на діючих об'єктах не завжди приділяється досить уваги. Це часто є основною причиною побудови "невдалих" моделей. Тому під час організації робіт по збору даних для побудови динамічних і статичних моделей необхідно також найретельніше вивчити технологічний об'єкт, правильно визначити точки виміру даних, оцінити похибки контрольно-

вимірювальної апаратури, правильно врахувати динамічні властивості об'єкта, провести вибір параметрів, що контролюються, визначити тривалість часу зняття даних, інтервал дискретизації. Далі одержати попередні дані та по ним побудувати модель, яка дозволить проаналізувати вплив похибки вимірювання, кількість параметрів, введених у модель і ін. Подібний аналіз дозволить уточнити попередні характеристики та оцінити нові значення інтервалу зняття даних і їх кількість. Процес отримання вхідних і вихідних даних являє собою ітераційну процедуру.

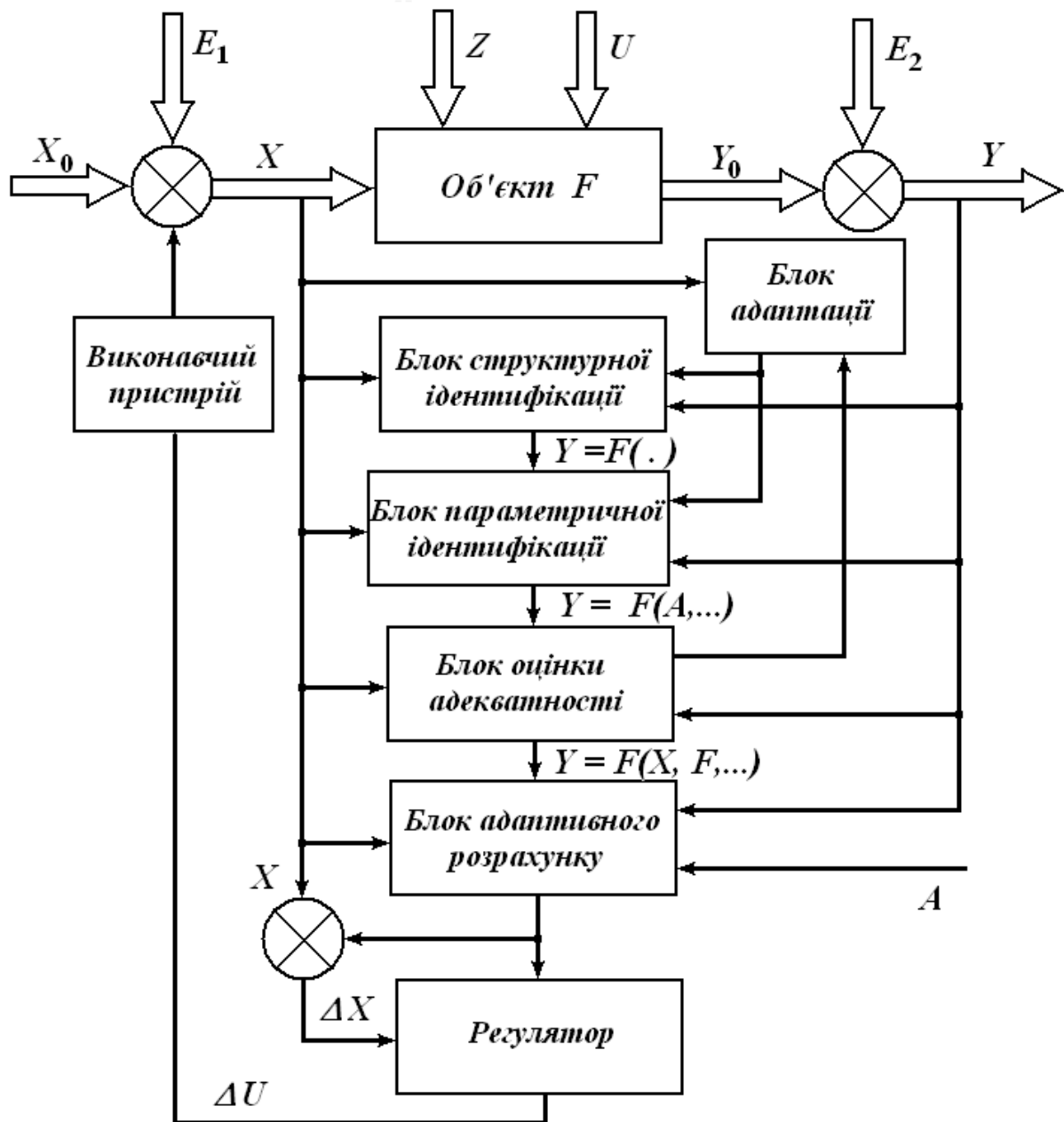


Рис. 7.2. Структурна схема ідентифікації

Під час зміни статичних характеристик об'єкта крок виміру даних корегується за адаптивним алгоритмом. Наступним дуже важливим етапом синтезу системи ідентифікації є статистичний аналіз ретроспективних даних. Цей етап дозволяє визначити клас об'єкта керування, його характеристики,

обґрунтовано підійти до вибору методу побудови математичної моделі об'єкта.

Використання статистичного аналізу пов'язане з тим, що на реальні технологічні процеси, як правило, діють різноманітні фактори, значення контрольованих параметрів, що вимірюються з деякою похибкою. Внаслідок цього контрольовані параметри носять випадковий характер, що і зумовлює використання експериментально-статистичного підходу. Етап статистичного аналізу припускає з'ясування таких питань:

- 1) визначення аномальних вимірів;
- 2) перевірка випадковості вибірових вхідних і вихідних параметрів, а також вектора помилок моделі;
- 3) перевірка стаціонарності, ергодичності;
- 4) визначення вигляду закону розподілу;
- 5) визначення оцінок статистичних характеристик;
- 6) оцінка характеру статистичного зв'язку між вхідними та вихідними змінними;
- 7) перевірка дотримання передумов використання методів побудови моделей.

Проведемо короткий аналіз методів рішення поставлених задач. Найбільш простий спосіб виявлення аномальних вимірювань засновується на правилі "трьох сигм". Проте він вимагає наявності нормального закону розподілення випадкових величин. У зв'язку з цим найкращим є критерій Ірвінга, який не прив'язується до розподілення.

Перевірка випадковості вибірових даних проводиться за критерієм про конкретний вигляд розподілення випадкових величин, тобто він є непараметричним.

Наступним етапом статистичного аналізу є виявлення закону розподілення. При припущенні про нормальність закону розподілення використовуються критерії згоди, засновані на розрахунку статистик, що являються мірою розбіжності емпіричного та теоретичного розподілень. До таких критеріїв відносяться критерії Пірсона, Колмогорова, Крамера, Мізеса, Смірнова, Шапіро-Уїлкса.

Визначення оцінок основних статистичних характеристик зводиться до розрахунку середнього значення квадрата випадкового процесу щільності розподілення, автокореляційної функції, спектральної щільності, взаємної кореляційної функції та взаємної спектральної щільності.

Далі визначається характер статичного зв'язку між вхідними та вихідними змінними. У результаті рішення даної задачі дослідник може обґрунтовано підійти до вибору класу апроксимуючих функцій та включенню у модель найбільш інформативних змінних. Для оцінки характеру статичного зв'язку використовується апарат дисперсійних функцій.

Наступним етапом синтезу системи ідентифікації є рішення задачі структурної та параметричної ідентифікації. Структурна ідентифікація укладається у виборі системи апроксимуючих функцій. Для статички частіше інших використовується апроксимація поліномами, для динаміки –

апроксимація системою ортогональних (експоненціальних, тригонометричних і ін.) функцій. За обраною системою апроксимуючих функцій задача структурної ідентифікації зведена до вибору інформативних змінних (членів рівняння, які істотно впливають) або їх функцій, тобто використання під час синтезу моделей змінних x_j ; $j = 1, \dots, p$, де $p < m$, m – вихідна множина змінних. Тут як x_j можуть бути використані детерміновані функції $x_j = f(z_j)$ від змінних, що спостерігаються z_j .

Задача вибору інформативних змінних може бути вирішена за допомогою статистичних критеріїв, алгоритмів регресійного аналізу, класифікації, факторного аналізу та ін., вибір яких для рішення конкретної задачі залежить від результатів статистичного аналізу даних. Далі вирішується задача оцінки параметрів моделі. Отримана таким чином модель перевіряється на адекватність процесу, що досліджується.

У теперішній час питанням адекватності приділяється велика увага. Формалізованою та найбільш часто використовуваною процедурою є перевірка за F -критерієм, у якій оцінюється залишкова дисперсія моделі та порівнюється з повною сумою квадратів $Y^T Y$, де Y – вектор вихідної змінної. Очевидно недоліком такої перевірки є припущення про незалежність відхилень від моделі. Найбільш ясну картину дає аналіз залишків $(Y - XB)$, де

$X(n^*)$ – матриця незалежних змінних, а B – вектор оцінених коефіцієнтів. За графіком залишків можна судити про характер моделі. Рекомендованим виходом з даної ситуації є використання при порівнянні не табличних значень F – розподіленням, а величин, у декілька раз їх переважаючих.

Непогані результати за оцінками адекватності можна одержати на основі аналізу результатів дослідження моделі на ідентичність з реальним процесом на дотримання апріорних припущень (порівняння моделей, отриманих для різних вхідних амплітуд, порівняння моделей для різних наборів даних, порівняння моделей з усуненням дрейфу та без усунення дрейфу, з завадами і без них, незалежність залишків).

Якщо кінцева мета моделі – керування, то найбільш важливою оцінкою є величина обробки керуючого впливу алгоритмом керування при визначеному змінненні сигналу на вході.

Якщо точність моделі (адекватність) є задовільною, то вважається, що модель може бути використана при керуванні. Проте, оскільки у реальних ситуаціях є тимчасовий дрейф характеристик процесу та вихідні дані можуть систематично поновлюватись. У систему введений блок адаптованого підстроювання параметрів та структури моделі. Блок адаптації, як і попередні, реалізований блоками вибору методу і здійснення корекції, оскільки властивості існуючих алгоритмів адаптації також залежать від характеристик вихідних даних. У системі можуть використовуватися алгоритми, засновані на ідеї стохастичної апроксимації та розвиваються вони, як правило, вибором параметрів релаксації, які впливають на швидкість збіжності алгоритмів. Практично гідними та рекомендованими є процедури з одним або багатьма кроками.

Постійно відновлювана модель перевіряється на адекватність та використовується при керуванні. Значення керуючих параметрів отримують рішенням задачі статичної та динамічної оптимізації з обмеженнями, де синтезована модель використовується як цільова функція.

7.3 Планування експерименту при ідентифікації

Для побудови математичної моделі технологічного об'єкта необхідна інформація, що може бути отримана в режимі його нормальної роботи або при подачі на об'єкт тестових впливів різного виду. Планування експерименту припускає активне втручання в процес і можливість вибору в кожному досвіді тих рівнів зміни вхідних змінних, які становлять інтерес. Тому такий експеримент називається активним. Об'єкт, що дає можливість проведення активного експерименту, називається керованим.

Планування експерименту – це процес вибору числа й умов здійснення випробувань, необхідних і достатніх для рішення поставленого завдання з необхідною точністю. При цьому істотно наступне:

- прагнення до мінімізації загального числа дослідів;
- одночасне варіювання параметрів, визначальний процес по спеціальних правилах-алгоритмах;
- використання математичного апарата, який формалізує дію експериментатора;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтоване рішення після кожної серії експериментів.

Одним з найпростіших методів планування експерименту є метод Бокса – Уілсона. Він дозволяє одержати статичні математичні моделі процесів при використанні факторного планування, регресійного аналізу й руху по градієнті.

Експеримент, проведений з метою рішення завдань оптимізації, називається екстремальним. Завдання є екстремальною, якщо вона полягає в пошуку екстремуму деякої функції. Будемо називати цю функцію параметром оптимізації. У науковій літературі використаються й інші назви цієї функції: критерій оптимізації, цільова функція й ін. Як приклад можна назвати завдання по мінімізації дисперсії випадкової величини при виборі оптимальних налаштувань регуляторів системи автоматичного керування.

Планування екстремального експерименту – це метод вибору кількості й умов проведення випробувань, обов'язкових для відшукування оптимальних умов, тобто для рішення поставленого завдання.

Результати експерименту використаються тут, по-перше, для одержання математичної моделі об'єкта керування, тобто ідентифікації, і, по-друге, для пошуку оптимальних умов функціонування об'єкта. Одним зі шляхів пошуку оптимальних умов планування екстремального експерименту є метод Бокса-Уілсона або метод крутого сходження.

Таким чином, планування екстремального експерименту є окремий випадок завдання його планування, це метод вибору мінімальної кількості дослідів, необхідних для відшукування оптимальних умов.

Для опису об'єкта дослідження будемо використати математичну модель у вигляді рівняння

$$X = f(u_1, u_2, \dots, u_k). \quad (7.4)$$

Функція f для планування експерименту називається функцією відгуку. При постановці завдання оптимізації функція відгуку може відігравати роль параметра оптимізації.

Входи об'єкта дослідження u_1, u_2, \dots, u_k називаються факторами. Кожен фактор може приймати деяке число різних значень, названих рівнями. Сполучення заданих рівнів всіх факторів визначає можливий стан об'єкта дослідження, сукупність – всіх різних можливих станів – складність об'єкта дослідження, і загальне число можливих досліджень. Якщо для всіх k факторів число їхніх рівнів однаково й дорівнює p , число різних станів об'єкта дорівнює p^k . Таким чином, математична модель встановлює зв'язок функції відгуку X з факторами u_1, u_2, \dots, u_k .

При плануванні експерименту включають всі суттєві фактори, які можуть впливати на процес, однак, якщо їхнє число більше 15, то необхідно відкинути несуттєві фактори. До факторів пред'являються вимоги по керованості й однозначності. Керованість фактором – це можливість підтримувати його постійним або міняти по заданій програмі протягом випробування. У цьому й складається особливість активного експерименту. До сукупності факторів пред'являються вимоги по сумісності й відсутності лінійної кореляції.

Після того як будуть визначені всі параметри оптимізації й фактори, необхідно вибрати модель

$$X = F(u_1, u_2, \dots, u_k), \quad (7.5)$$

тобто визначити саму функцію й записати її рівняння. Тоді залишається спланувати й провести експеримент для оцінки чисельних значень коефіцієнтів цього рівняння.

На першому етапі планування експерименту можна вибрати алгебраїчний поліном першого ступеня – лінійну модель. При рішенні завдання оптимізації потрібно знати напрямок градієнта, тобто напрямок, у якому значення параметра оптимізації поліпшується швидше, ніж у будь-якому іншому напрямку. Така модель дозволяє уникнути повного перебору станів об'єкта й тим самим зменшити кількість випробувань для відшукування оптимуму. Процес пошуку оптимуму ґрунтується на кроковому принципі:

- проводяться серії випробувань;
- по їхніх результатах будується математичка модель, що використовується для оцінки градієнта;
- ставляться нові випробування тільки в цьому напрямку.

Цей циклічний процес закінчується при влученні в близьку до оптимуму, майже стаціонарну область.

Для вибору конкретної моделі необхідно задовольнити вимогам адекватності й простоти. Під адекватністю розуміється здатність моделі передбачати результати експерименту в деякій області з потрібною точністю.

Найбільш простими моделями вважаються алгебраїчні поліноми. Оскільки поліном лінійний щодо невідомих коефіцієнтів, то це спрощує обробку спостережень. Ступінь полінома звичайно послідовно підвищують, поки не буде знайдена адекватна модель.

Перш ніж приступитися до планування експериментів, необхідно вибрати локальну область факторного простору. Цей етап у плануванні експерименту є неформальним і пов'язаний з ретельним аналізом апріорної інформації про досліджуваний об'єкт. Тут повинні бути враховані всі принципи обмеження варіювання факторів.

Найкращим умовам, певним з аналізу апріорної інформації, відповідає комбінація рівнів факторів, що є багатомірною точкою у факторному просторі, її можна розглядати як вихідну точку для побудови плану експерименту. Ця точка називається основним або нульовим рівнем. Побудова плану експерименту зводиться до вибору експериментальних точок, симетричних щодо нульового рівня.

Інтервалом варіювання факторів називається деяке число (своє для кожного фактору), додавання якого до нульового рівня дає верхній, а віднімання – нижній рівень фактору. Для спрощення запису умов експерименту масштаби варіюються так, щоб верхній рівень відповідав +1, нижній –1, а основний – нулю. Наприклад для значення і-го фактору:

$$u_i = \frac{\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i0}}{\Delta u_i}, \quad (7.6)$$

де u_i, \tilde{u}_i – кодоване й натуральне значення і-го фактору; \tilde{u}_{i0} – натуральне значення основного рівня; Δu_i – інтервал варіювання.

Експеримент, у якому реалізуються всі можливі сполучення рівнів факторів, називається повним факторним експериментом. Якщо число рівнів кожного фактору дорівнює двом, маємо повний факторний експеримент типу 2^k .

Матриця планування повного факторного експерименту для двох факторів наведена в табл. 7.1. Матриця повного факторного експерименту для трьох факторів і двох рівнів варіювання (табл. 7.2) містить 8 дослідів.

Таблиця 7.1

Матриця планування повного факторного експерименту для двох факторів

№ дослідів	u_1	u_2	x
1	-1	-1	x_1
2	-1	+1	x_2
3	+1	-1	x_3
4	+1	+1	x_4

Матриця планування повного факторного експерименту для трьох факторів і двох рівнів варіювання

№ досліду	u_1	u_2	u_3	x
1	-1	-1	-1	x1
2	+1	-1	-1	x2
3	-1	+1	-1	x3
4	+1	+1	-1	x4
5	-1	-1	+1	x5
6	+1	-1	+1	x6
7	-1	+1	+1	x7
8	+1	+1	+1	x8

Геометричне зображення повного факторного експерименту може бути представлено у вигляді куба в тривимірному просторі. Якщо число факторів велике, план повного факторного експерименту може бути отриманий із плану з їхнім меншим числом для всіх рівнів варіювання факторів, що не ввійшли в цей план.

Планування експерименту виконується для того, щоб одержати модель, що володіє деякими оптимальними властивостями. Це значить, що оцінки коефіцієнтів моделі повинні бути найкращими а точність передбачення параметрів оптимізації не повинна залежати від напрямку у факторному просторі.

Повний факторний експеримент включає:

- симетричність щодо центра експерименту, а сума елементів вектору-стовпця кожного фактору дорівнює нулю;

$$\sum_{j=1}^N u_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (7.7)$$

де i – номер фактору; N – число випробувань.

- умову нормування – сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює числу випробувань;

$$\sum_{j=1}^N u_j^2 = N; \quad (7.8)$$

- ортогональність матриці планування, тому що сума добутків будь-яких двох векторів-стовпців матриці дорівнює нулю;

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N u_{ji} u_{ki} = 0, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, k; \quad (7.9)$$

- рототабельність плану, тому що точки в матриці планування підбираються так, що точність передбачень значень параметра оптимізації однакова на рівних відстанях від центра експерименту й не залежить від напрямку.

У випадку, коли ефект одного фактору залежить від рівня, на якому перебуває інший, говорять про наявність ефекту взаємодії двох факторів. Для його кількісної оцінки одержують стовпець добутків цих факторів при збереженні колишньої кількості випробувань і поводяться з ним як з вектором-стовпцем будь-якого фактору.

Однак з повного факторного експерименту не можна витягти інформацію про квадратичні члени, тому що вектори-стовпці для квадратичних членів збігаються один з одним зі стовпців u_k .

Кількість досліджень у повному факторному експерименті значно перевершує число обумовлених коефіцієнтів лінійної моделі, тобто такий план має велику надмірність випробувань. Їх можна скоротити за рахунок несуттєвої інформації, одержуваної при побудові лінійних моделей, але при цьому, бажано зберегти оптимальні властивості матриці планування. Такий план називається дрібним факторним експериментом.

Напишемо ще раз матрицю планування повного факторного експерименту (табл. 7.3). Користуючись таким планом - методом найменших квадратів, можна обчислити чотири коефіцієнти моделі у вигляді неповного квадратного многочлена:

$$X = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_{12} u_1 u_2 \quad (7.10)$$

Якщо є підстави вважати, що модель лінійна, можна використати останній вектор-стовпець для нового фактору u_3 :

$$X = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$$

Таблиця 7.3

Матриця планування повного факторного експерименту $2k$ для $k = 2$

№ досліджу	u_0	u_1	u_2	(u_3) $u_1 \cdot u_2$	x
1	+1	-1	-1	+1	x_1
2	+1	-1	+1	-1	x_2
3	+1	+1	-1	-1	x_3
4	+1	+1	+1	+1	x_4

Тепер замість восьми випробувань для вивчення трьох факторів в експерименті можна поставити чотири, при цьому матриця планування не втрачає своїх оптимальних властивостей – ортогональності й рототабельності.

Поставивши чотири випробування для оцінки впливу трьох факторів, ми скористалися половиною повного факторного експерименту 2^3 або його напівреплікою 2^{3-1} . Для позначення дрібних реплік, у яких p лінійних ефектів були прирівняні до ефектів взаємодії, застосовувалася символіка $2k$ -

p. Так, напіврепліка від 23 була записана у вигляді, а чверть репліка від 25 – у вигляді 25-2.

Використання дрібних реплік при плануванні активного експерименту дозволяє різко знизити кількість випробувань для визначення коефіцієнтів математичної моделі технологічного процесу. Зокрема, при аналізі впливу 15 технологічних факторів з'ясувалося, що число дослідів можна скоротити з 32768 до 16, тобто в 2048 разів.

Математична модель технологічного процесу, отримана методом активного планування експерименту, перевіряється на адекватність і значимість її коефіцієнтів β_i . Дисперсія адекватності моделі

$$S_{AD} = \frac{\sum_{i=1}^N (x - x_i)^2}{f}, \quad (7.11)$$

де $(x - x_i)$ – похибка моделі в i -му випробуванні; N – число випробувань; $f = N - (k + 1)$ – число ступенів волі; k – число факторів.

Знаючи дисперсію відтворюваності досліджень S_x , отримаємо критерій значимості Фішера

$$F = S_{AD} / S_x, \quad (7.12)$$

за яким визначається адекватність моделі технологічному процесу. Після того як експеримент поставлений, шукані коефіцієнти моделі одержують по методу найменших квадратів

На закінчення розглянемо використання отриманої моделі для оптимізації функції відгуку.

Адекватна лінійна модель має вигляд полінома першого ступеня. Коефіцієнти полінома є частковими похідними функції відгуку по відповідним змінним. Вектор, компонентами якого є часткові похідні деякої функції f , називається градієнтом.

Змінюючи незалежні змінні пропорційно коефіцієнтам регресії, поступово переходимо до градієнта функції відгуку до оптимуму. Процес руху до майже стаціонарної області називається крутим сходженням. При цьому незалежні змінні виходять шляхом множення коефіцієнтів регресії на інтервали варіювання по кожному факторі й послідовному наближенні до основного рівня факторів. Про ефективність руху по градієнту можна судити по параметру оптимізації.

7.4 Ідентифікація за допомогою регресійних методів

Методи ідентифікації, засновані на регресійних процедурах з використанням методу найменших квадратів, можуть бути застосовні як до лінійних, так і до нелінійних процесів і полегшують проведення ідентифікації по декількох входах одночасно.

Завдяки своїм широким можливостям різні регресійні процедури успішно використовуються в інженерній практиці для ідентифікації процесів,

однак їхнє застосування до ідентифікації багатомірних процесів стало можливим тільки з розвитком і впровадженням швидкодіючих комп'ютерів.

Якщо виконуються виміри для регресійної ідентифікації в процесі нормального функціонування системи в реальному масштабі часу, параметри процесу, що підлягають ідентифікації, приймаються стаціонарними або квазістаціонарними. Період вимірювання повинен становити не менш nT

де T – інтервал виміру; n – число параметрів, що підлягають ідентифікації.

Спочатку розглянемо лінійне статичне завдання з одним входом й одним виходом. У багатьох експериментальних роботах потрібно досліджувати, як одна зміна впливає на іншу зміну. Іноді дві змінні зв'язані точним лінійним рівнянням. Наприклад, якщо опір R простого ланцюга підтримується постійним, то струм I , що протікає, міняється лінійно при зміні напруги U відповідно до закону Ома $I = U/R$. Якби закон Ома не був відомий, то можна було б знайти емпіричну залежність, вимірюючи U і змінюючи I при фіксованому R . За цим даними будується графік залежності I від U , що являє собою більш-менш пряму лінію, яка проходить через початок координат.

Залежно від ступеня похибки вимірів, отримані експериментально точки не потрапляють на лінію, а будуть розкидані навколо її випадковим образом. Іноді лінійна залежність не точна (навіть без обліку похибки), але вона може мати деякий зміст. Нехай, наприклад, розглядається ріст і маса дорослих чоловіків. Якщо нанести на графік пари чисел ріст – маса, то зображення звичайно називають діаграмою розсіювання або точковою діаграмою.

Геометричне місце точок середніх величин однієї змінної при зміні іншої називають регресійною кривою, а функціональний зв'язок цих змінних – рівнянням регресії.

У багатьох ситуаціях для узагальнення спостережуваної залежності однієї змінної від іншої може бути прийнята лінійна залежність

$$x = b_0 + b_1 \cdot x \dots \quad (7.13)$$

Варто помітити, що лінійність моделі тут розуміється по параметрах b_i . Значення найвищого ступеня незалежної змінної u у моделі називається порядком моделі. Наприклад, рівняння:

$$x = b_0 + b_1 \cdot u + b_2 \cdot u^2, \quad (7.14)$$

є регресійною моделлю другого порядку по u і лінійною по b_i .

Тепер покажемо, як можна отримати рівняння (7.13) методом найменших квадратів, коли є експериментальні дані r спостережень u_i, x_i якщо $i = 1, \dots, r$.

Складемо суму квадратів відхилень експериментально отриманих значень вихідної величини x_i від лінії регресії:

$$S = \sum_{i=1}^r (x_i - b_0 - b_1 u)^2 \quad (7.15)$$

Будемо вибирати значення оцінок b_0 , b_1 , так щоб мінімізувати суму S . Визначимо b_0 , b_1 диференціюванням рівняння (7.15) по b_0 , b_1 і прирівнюємо часткові похідні до нуля

$$\begin{aligned}\frac{dS}{db_0} &= -2 \sum_{i=1}^r (x_i - b_0 - b_0 \cdot u_i) = 0 \\ \frac{dS}{db_1} &= -2 \sum_{i=1}^r u_i \cdot (x_i - b_0 - b_0 \cdot u_i) = 0,\end{aligned}\quad (7.16)$$

тоді маємо

$$\begin{aligned}b_0 \cdot r + b_1 \cdot \sum_{i=1}^r u_i &= \sum_{i=1}^r x_i \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^r u_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^r u_i^2 &= \sum_{i=1}^r u_i \cdot x_i\end{aligned}\quad (7.17)$$

Ці рівняння називаються нормальними, їхнє рішення відносно b_0 , b_1 і дає шукані коефіцієнти регресії.

Розглянемо матричний підхід до лінійної регресії. Застосування матриць дає багато переваг. Як тільки завдання записується й вирішується в матричній формі, її рішення можна використати для будь-якого регресійного завдання незалежно від того, скільки членів утримуються в рівнянні регресії.

Введемо наступні позначення:

\bar{X} – вектор спостережень; U – матриця незалежних змінних; \bar{b} – вектор параметрів, що підлягають оцінюванню.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & u_r \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad (7.18)$$

З огляду на те, що

$$U^T \cdot U = \begin{bmatrix} r & \sum_{i=1}^r u_i \\ \sum_{i=1}^r u_i & \sum_{i=1}^r u_i^2 \end{bmatrix}, \quad (7.19)$$

$$U^T \cdot \bar{X} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r x_i \\ \sum_{i=1}^r u_i \cdot x_i \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

нормальне рівняння можна записати як

$$U^T \cdot U \cdot \bar{b} = U^T \cdot \bar{X}. \quad (7.21)$$

Вирішуючи це матричне рівняння щодо вектору оцінок, одержуємо

$$\bar{b} = [U^T \cdot U]^{-1} U^T \cdot \bar{X} \quad (7.22)$$

де

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \bar{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

У цьому рівнянні кожен рядок має точно такий же вигляд, як й у рівняннях для системи з одним виходом. Отже, для будь-якого i -го виходу можна записати

$$x_i = \bar{b}_i^T \cdot \bar{U}, \quad (7.33)$$

де \bar{b}_i^T – i -й рядок матриці b , $\bar{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im}]$.

Введемо (подібно процесу з одним виходом) вектор r вимірів величини x_i і матрицю незалежних змінних u

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1r} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \dots \\ u_r^T \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

Тоді найкраща (у розумінні регресії по методу найменших квадратів) оцінка вектору \bar{b}_i може бути отримана з наступного матричного рівняння:

$$\bar{b}_i = (U^T U)^{-1} U^T \bar{X}_i. \quad (7.35)$$

Отже, всі $n \times m$ коефіцієнтів b_{ij} матриці b можуть бути отримані в результаті рішення n раз нормальних рівнянь. Але тому, що матриця U є однаковою, то немає необхідності n раз обертати квадратну матрицю $U^T U$. З цією метою сформуємо матрицю вихідних елементів X розміром $r \times n$, стовпцями якої є r вимірів n вихідних змінних

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Тоді матриця

$$b = \left((U^T U)^{-1} U^T X \right)^T \quad (7.37)$$

При цьому потрібно згорнути матрицю $(U^T U)$ тільки один раз.

Помітимо, що ідентифікація регресійними методами можлива тільки тоді, коли існує матриця $(U^T U)^{-1}$, а, отже, матриця U повинна бути неособливою, крім того, число вимірів r повинне бути більше, ніж число незалежних змінних $r \geq m$. Якщо $r = m$, в оцінці b шум вимірів не буде згладжений. Тому для адекватної ідентифікації потрібно $m + 1$ вимірів.

При ідентифікації системи з m входами й n виходами також необхідно виконувати умову $r \geq m + 1$, оскільки при визначенні по всіх входах використовується та сама матриця вимірів U .

Розглянемо застосування регресійного методу для ідентифікації лінійної динамічної системи, що у дискретній формі в просторі станів записується наступним рекурентним співвідношенням:

$$\bar{X}_{k+1} = A \cdot \bar{X}_k + B \cdot \bar{U}_k, \quad (7.38)$$

де \bar{X} – вектор стану системи; \bar{U} – вектор керування.

Необхідно оцінити матриці A і B по r вимірах векторів $\bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}, \bar{U}_k$, мінімізуючи суму квадратів похибок,

$$S = (\bar{X}_{k+1} - A \cdot \bar{X}_k - B \cdot \bar{U}_k)^T \cdot (\bar{X}_{k+1} - A \cdot \bar{X}_k - B \cdot \bar{U}_k). \quad (7.39)$$

Застосуємо в якості незалежних змінні вектори \bar{X}_k, \bar{U}_k , а в якості залежних – вектор \bar{X}_{k+1} . Тоді для того, щоб скористатися матричною формою найменших квадратів (5.6) складемо наступні вектори й матрицю:

$$\bar{X} = \bar{X}_{k+1}; \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \dots \\ \bar{U}_k \end{bmatrix}; \quad b = [A:B]. \quad (7.40)$$

Представимо матрицю вимірів вихідної величини X , рядками якої є r вимірів вектору \bar{X}_{k+1} .

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}_{k+1}^T(1) \\ \bar{X}_{k+1}^T(2) \\ \vdots \\ \bar{X}_{k+1}^T(r) \end{bmatrix}. \quad (7.41)$$

Складемо матрицю вимірюваних значень незалежних величин \bar{X}_k і з r рядків, які є значеннями векторів \bar{X}_k^T і \bar{U}_k^T

$$U = \begin{bmatrix} \bar{X}_{k(1)}^T & \dots & \bar{U}_{k(1)}^T \\ \bar{X}_{k(2)}^T & \dots & \bar{U}_{k(2)}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_{k(r)}^T & \dots & \bar{U}_{k(r)}^T \end{bmatrix}. \quad (7.42)$$

Тоді для оцінки методом найменших квадратів матриць A, B , що є блоками матриці B , маємо

$$[A:B] = \left((U^T U)^{-1} U^T X \right)^T, \quad (7.43)$$

де матриці U, X складені з r вимірних значень векторів $\bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}, \bar{U}_k$.

Для ідентифікації динамічної системи необхідно мати r вимірів векторів $\bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}, \bar{U}_k$, причому для згладжування похибок вимірів число вимірів r повинне бути більше кількості незалежних змінних у схемі

регресійної ідентифікації. З огляду на це, розмірність вектору незалежних змінних \bar{U} складений з вектору станів \bar{X}_k і вектору керування \bar{U}_k приймаємо рівній сумі розмірностей зазначених векторів. Наприклад, якщо порядок системи дорівнює n (при цьому розмір вектору стану також дорівнює n), а вектор керування має розмір m , то необхідне число вимірів $r \geq n + m + 1$.

Відмітимо, що ідентифікація матриць A , B можлива лише в тому випадку, якщо вимір всіх компонентів вектору стану є доступним (вектор керування \bar{U} звичайно є доступним для вимірювання).

Контрольні запитання

1. Якими параметрами і змінними характеризується модельований технологічний процес з точки зору керування?
2. В чому полягає задача вибору керування автоматичної системи керування технологічним процесом?
3. До мінімізації якого параметра зводиться задача ідентифікації?
4. Яка послідовність процесу ідентифікації об'єкта?
5. Які питання ідентифікації з'ясовуються на етапі статистичного аналізу технологічного процесу?
6. Як виявляються хибні вимірювання на основі правилі "трьох сигм"?
7. Визначення яких оцінок основних статистичних характеристик об'єкта необхідно виконати при ідентифікації об'єкта керування?
8. В чому різниця задач структурної і параметричної ідентифікації при синтезі системи ідентифікації?
9. Який експеримент називається активним?
10. Які переваги експерименту виконаного за планом?
11. В чому полягає ротатабельність плану експерименту?
12. Чому дорівнює відношення дисперсії адекватності до дисперсії відтворення і як це відношення використовується для оцінки отриманої моделі?
13. В чому ідея регресійної ідентифікації? Яку роль в цьому грає метод найменших квадратів?
14. Як вирішуються задачі регресії матричним способом?

РОЗДІЛ 8

ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

8.1. Вступ до планування експерименту

Явища і технологічні процеси, які проходять у сільськогосподарському виробництві, багатогранні і складні, ціна обладнання висока і це змушує дослідників уважно продумувати план наступних експериментів, оптимізувати експеримент.

Ефективність експериментів у великій мірі залежить від методів їх проведення. Експерименти поділяють на пасивні і активні. Пасивні експерименти проводять традиційним методом, коли ставиться велика серія дослідів з послідовною зміною значень кожного параметра. До таких експериментів відноситься також збирання початкового статистичного матеріалу при нормальній роботі виробничого обладнання. Математичну модель в такому випадку отримують в результаті обробки методами статистики. Методи математичної статистики дозволяють оптимізувати процедуру обробки і аналізу інформації. Активний експеримент, з використанням методів планування, дозволяє також оптимізувати і етап постановки експерименту, коли інформації про механізм технологічного процесу мало і він не добре зрозумілий.

Розробка методів планування експерименту пов'язана з роботами англійського статистика Р.Фішера. Головна мета планування експерименту по методу Р.Фішера складається в роздільному оцінюванні ефектів в багатофакторній ситуації. Пошук оптимальних умов проведення технологічних процесів в екстремальних умовах пов'язано з роботами американських вчених Бокса і Уілсона. В нашій країні розвиток ідей пов'язаних з плануванням експерименту опирається на роботи В.В.Налімова та його школи.

Оптимальний експеримент зменшує час проведення дослідів і витрачених грошей, збільшує надійність і достовірність результатів. Планування експерименту тісно зв'язано з побудовою на його базі математичної моделі об'єкта.

Результат експерименту на складному технологічному об'єкті, де багато входних незалежних параметрів, є величина випадкова. Через те для обробки і аналізу експериментальних даних використовують методи математичної статистики. Рівняння регресії, яке отримують на основі експерименту, має вигляд поліному:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} x_j^2 + \sum_{\substack{i,u,j=1 \\ i \neq j \neq u}}^k b_{uij} x_i x_j x_u + \dots, \quad (8.1)$$

де b_0 – вільний член рівняння регресії; b_j – лінійні ефекти, $j = 1, 2, \dots, k$; b_{jj} – ефекти парної взаємодії; b_{uij} – ефекти трійної взаємодії, x_j – фактори плану експерименту, y – поверхня відгуку.

Поліноміальні моделі справедливі тільки для об'єкту, на якому проводиться експеримент. Вони широко використовуються для розв'язання задач оптимізації і управління процесами сільськогосподарських і харчових виробництв.

Планування експерименту дозволяє змінювати одночасно всі фактори і отримувати кількісні оцінки основних ефектів і ефектів взаємодії. Ці ефекти визначаються з меншою похибкою, чим при традиційних методах досліджень. Це дозволяє значно підвищити ефективність досліджень.

8.2. Повний факторний експеримент першого порядку

При плануванні досліджень по плану *повного факторного експерименту* (ПФЕ) реалізуються всі можливі комбінації факторів на всіх вибраних для дослідження рівнях. Необхідна кількість дослідів N при ПФЕ визначається за формулою:

$$N = n^k, \quad (8.2)$$

де n – кількість рівнів; k – кількість факторів.

Якщо експерименти проводяться тільки на двох рівнях, при двох значеннях факторів і при цьому в процесі експерименту виконують всі можливі комбінації із k факторів, то постановка дослідів по такому плану називається повним факторним експериментом виду 2^k . *Двохрівний план експерименту* дає змогу отримати лінійну регресійну модель з парними зв'язками:

$$Y_p = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \dots + b_{k-1,k} \cdot x_{k-1} \cdot x_k \quad (8.3)$$

При кількості факторів більше чотирьох значно збільшується кількість дослідів, що приводить до збільшення витрат часу і коштів на експеримент. При ПФЕ 2^6 потрібно виконати 64 досліди, а при 2^7 вже 128.

Проте достатньо точні коефіцієнти регресії можна отримати зменшенням кількості дослідів у два, чотири, вісім і більше разів. Таке зменшення дослідів назвали *дробовим факторним експериментом* (ДФЕ). При позначенні ДФЕ вказують на кількість факторів і дрібність репліки дослідів – 2^{k-d} . Тут k – кількість факторів, а d – дорівнює 1 при половині дослідів, 2 – при чверті дослідів, 3 – восьмій частині дослідів і т. д.

Докладно розглянути постановку ДФЕ для різних видів дробових реплік можна ознайомившись з матеріалами книги, де автори: Статюха Г.О., Складаний Д.М., Бондаренко О.С. [14].

Рівні факторів являють собою границю області, яка досліджується по даному технологічному параметру.

Наприклад, вивчається вплив на коефіцієнт коагуляції білку на попередній дефекації ($y \cdot 10^3$) трьох факторів: температури (z_1) в діапазоні 60 – 90 °С, лужності (z_2) 0.2 – 0.4 %СаО, і тривалості процесу 6 – 16 хв. Для любого фактора знаходимо нульову точку:

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (8.3)$$

і інтервал варіювання:

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2}, \quad (8.4)$$

Точка з координатами (z_1^0, \dots, z_k^0) називається *центром плану*. Від натуральних значень змінних z_1, \dots, z_k перейдемо до нових безрозмірних x_1, \dots, x_k шляхом лінійних перетворень:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (8.5)$$

Для координат x_1, \dots, x_k верхній рівень дорівнює +1, нижній рівень -1, координати центру плану дорівнюють нулю і співпадають з початком координат. В нашому прикладі $k = 3$. Кількість можливих комбінацій N з трьох факторів на двох рівнях дорівнює $N = 2^k = 2^3 = 8$. Натуральні і безрозмірні значення змінних представлені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1.

Натуральні і безрозмірні значення змінних

Фактори	Температура, °С		Лужність, %СаО		Час, хв..	
	z_1	x_1	z_2	x_2	z_3	x_3
Нижній рівень	60	-1	0,2	-1	6	-1
Нульовий рівень	75	0	0,3	0	11	0
Верхній рівень	90	+1	0,4	+1	16	+1
Інтервал варіювання	15	1	0,1	1	5	1

План проведення експериментів відобразимо у вигляді таблиці 8.2.

Таблиця 8.2.

План проведення експериментів

Номер досліду	Фактори в натуральній формі			Фактори в безрозмірній формі			Параметри змінної стану		
	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_s
1	90	0,4	16	1	1	1	4,80	4,88	4,840
2	90	0,4	6	1	1	-1	4,65	4,59	4,620
3	90	0,2	16	1	-1	1	3,14	3,26	3,200
4	90	0,2	6	1	-1	-1	4,10	4,19	4,145
5	60	0,4	16	-1	1	1	3,52	3,57	3,545
6	60	0,4	6	-1	1	-1	3,72	3,78	3,750
7	60	0,2	16	-1	-1	1	2,10	2,21	2,155
8	60	0,2	6	-1	-1	-1	2,55	2,46	2,505

Представлений в таблиці план в безрозмірній формі геометрично може бути представлений у вигляді восьми вершин куба.

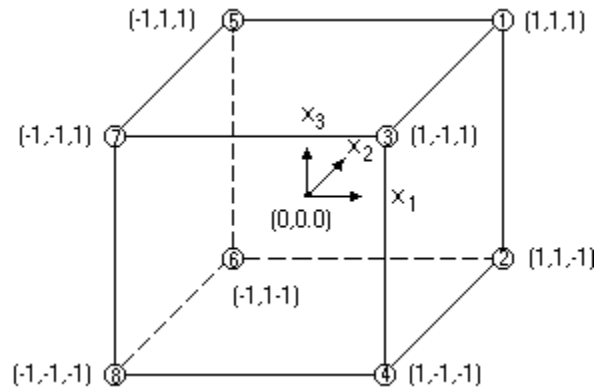


Рис. 8.1. Повний факторний експеримент 2^3

Введемо в план стовпчик так званої фіктивної змінної $x_0 = 1$. З цим стовпчиком матриця планування має наступні властивості, представлені в формулах (8.6). Тут k – число незалежних факторів, N – число дослідів в матриці планування. Перша властивість (б) – рівність нулю скалярних добуток всіх вектор-стовпчиків – називається *властивістю ортогональності* матриці планування. Ця властивість значно зменшує складності, пов'язані з розрахунком коефіцієнтів рівняння регресії, так як матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь $(X^T X)$ стає діагональною і її діагональні елементи дорівнюють числу дослідів в матриці планування N .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji} &= 0; \quad u \neq j; \quad u, j = 0, 1, \dots, k; \\ \sum_{i=1}^N x_{ji} &= 0; \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad j \neq 0; \\ \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 &= N; \quad j = 0, 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (8.6)$$

8.3. Оброблення ПФЕ першого порядку

Коефіцієнти рівняння регресії по методу найменших квадратів визначаються за формулою:

$$B = [b_0, b_1, b_2, b_3] = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (8.7)$$

Відповідно до цього любий коефіцієнт регресії b_j визначається скалярним добутком стовпчика середньоарифметичних значень y_s на

відповідний стовпчик x_j , діленням на кількість дослідів в матриці планування N:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i \quad (8.8)$$

Наприклад по даних табл. 3 отримаємо значення коефіцієнта b_1 :

$$b_1 = \frac{1 \cdot 4,84 + 1 \cdot 4,62 + 1 \cdot 3,2 + 1 \cdot 4,145 + (-1) \cdot 3,545 + (-1) \cdot 3,75 + (-1) \cdot 2,155 + (-1) \cdot 2,505}{8} = 0,60625$$

Відповідно отримаємо інші коефіцієнти $b_0 = 3,595$; $b_2 = 0,5937$; $b_3 = -0,16$. Запишемо повне рівняння регресії з коефіцієнтами взаємодії, яке отримаємо по даних ПФЕ першого порядку:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (8.9)$$

Для знаходження коефіцієнтів b_{12} , b_{13} , b_{23} – ефектів парної взаємодії і коефіцієнта b_{123} – ефекту потрійної взаємодії розширимо матрицю планування факторів у безрозмірній формі до виду:

Таблиця 8.3.

Матриця планування факторів у безрозмірній формі

Номер дослідів	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y_s
1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,840
2	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	4,620
3	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	3,200
4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	4,145
5	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	3,545
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	3,750
7	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	2,155
8	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	2,505

Ефекти взаємодії визначаються за формулою:

$$b_{ju} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} y_i, \quad (8.10)$$

Відповідно значення: $b_{12} = -0,065$; $b_{13} = -0,0212$; $b_{23} = 0,1637$; $b_{123} = 0,1275$.

Коефіцієнти рівняння регресії (9) визначаються з однаковою точністю:

$$s_{b_j} = \sqrt{\frac{S_{gid}^2}{N}} \quad (8.11)$$

Маючи середні значення змінної стану y_s , розрахуємо квадрати похибок дослідів (дисперсії), де $M = 2$ кількість повторних дослідів:

$$Su_i^2 = \sum_{j=1}^M (y_{ij} - y_{s_i})^2 / (M - 1), \quad \text{для } i = 1, \dots, N \quad (8.12)$$

Отримаємо:

Таблиця 8.4.

Квадрати похибок дослідів (дисперсії)

№ досліду	1	2	3	4	5	6	7	8
Середнє ys_i	4,84	4,62	3,2	4,145	3,545	3,75	2,155	2,505
$Su_i^2 \cdot 10^4$	16	9	36	20,3	6,2	9	30,2	20,2

$$\text{Сума всіх дисперсій } ZSu = \sum_{i=1}^N Su_i^2 = 0,0147$$

Перевіримо однорідність дослідних даних по критерію Кохрена. Розраховане значення критерію обчислюється за формулою:

$$Gp = \frac{\max Su_i^2}{ZSu} = \frac{0,00302}{0,0147} = 0,245$$

а табличне визначаємо з урахуванням ступенів волі $f_1 = M - 1 = 1$ і $f_2 = N = 8$ і рівня значущості $\alpha = 0,05$ по таблиці $Gm = 0,68$. Так як $Gp < Gm$, то можна зробити висновок, що дослідні дані однорідні.

Визначимо середню дисперсію всіх дослідів, або дисперсію, яка називається дисперсією відтворення:

$$s_{\text{від}}^2 = Zsu/N = 0,0147/8 = 0,00184,$$

тоді точність обчислення коефіцієнтів рівняння дорівнює:

$$s_{b_j} = \sqrt{\frac{s_{\text{від}}^2}{N}} = \sqrt{\frac{0,00184}{8}} = 0,01516$$

Якщо повторні досліді не виконуються, то проводяться M паралельних дослідів в центрі плану u_u^0 і знаходиться їх середнє значення ys^0 . В цьому випадку дисперсія дослідів (відтворення) визначається за формулою:

$$s_{\text{від}}^2 = \sum_{u=1}^M (y_u^0 - ys^0)^2 / (M - 1) \quad (8.13)$$

Перевіримо значимість коефіцієнтів регресії. Для цього визначимо інтервал надійності: $\Delta b = T_{Cm} \cdot s_{b_j}$, де T_{Cm} - табличне значення критерію Ст'юдента, визначене при $\alpha = 0,05$ і рівні значущості $f_\delta = N \cdot (M - 1) = 8$, і яке дорівнює $T_{Cm} = 2,306$. Інтервал надійності дорівнює:

$$\Delta b = 2,306 \cdot 0,01516 = 0,03495$$

Так як $|b_j| > |\Delta b|$ для всіх i -тих коефіцієнтів регресії, то це вказує на їх значимість, за винятком коефіцієнта b_{13} . В іншому випадку визначають розраховані значення критеріїв Ст'юдента для кожного коефіцієнта регресії і порівнюють їх з табличним:

$$Tp_{cm} = \frac{|b_j|}{s_{b_j}} \quad (8.14)$$

Таким чином рівняння регресії має вигляд:
 $yp = 3,595 + 0,606x_1 + 0,594x_2 - 0,16x_3 - 0,065x_1x_2 + 0,164x_2x_3 + 0,1275x_1x_2x_3$

Перевіримо адекватність отриманого рівняння по критерію Фішера. Розрахований критерій Фішера визначається рівнянням:

$$F_p = \frac{s_{ad}^2}{s_{eid}^2}, \quad (8.15)$$

де: $s_{ad}^2 = \frac{M}{N-L} \sum_{i=1}^N (y_i - yp_i)^2 = 0,00722$ - дисперсія адекватності, L - число значимих коефіцієнтів у рівнянні регресії рівне 7. Тоді $F_p = 0,00722/0,00184 = 3,932$. Табличне значення критерію Фішера для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і $f_{ad} = N - L = 1$ і $f_{eid} = N \cdot (M - 1) = 8$ дорівнює $F_m = 5,3$. Тому можна зробити висновок, що отримане рівняння адекватне дослідним даним і його можна використовувати в інженерній практиці.

8.4. Плани другого порядку

Якщо лінійні моделі не дають змоги знайти оптимум, детально вивчити поверхню відгуку можна використавши нелінійну модель в якій враховані парні зв'язки і квадратні ефекти. Таку модель можна отримати за допомогою факторного експерименту другого порядку. Найбільш поширені плани другого порядку це композиційні ортогональні і рототабельні. Плани другого порядку дають змогу отримати математичну модель з квадратними членами, тобто модель має лінійну частину, парні зв'язки і також враховує парні квадратні ефекти.

$$Y_p = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \dots + b_{k-1,k} \cdot x_{k-1} \cdot x_k + \dots + b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2 + \dots + b_{kk} \cdot x_k^2 \quad (8.16)$$

Таке рівняння не можна отримати по старому плану, так як умова ортогональності в стовпчиках, коли $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ не виконується $\sum_{i=1}^N x_i^2 \neq 0$, бо $x_i^2 = 1$.

Плани другого порядку вимагають проведення більшого числа дослідів, ніж плани другого порядку. Для отримання коефіцієнтів квадратного поліному необхідно провести досліди на трьох рівнях. Для того, що не ставити ПФЕ по трьохрівневому плану і кількість дослідів не збільшувати до 3^k , а це дає при чотирьох факторах загальну кількість дослідів $N = 81$, при п'яти дослідах $N = 243$, Бокс і Уілсон рекомендували доповнити

досліди двохранівневого плану додатковими дослідями в $2k$ зіркових точках і повторними дослідями N_0 разів в центрі плану (рис 8.2). Похибка і дисперсія дослідів підраховується по повторних дослідях в центрі плану. Кількість дослідів, які необхідно провести досліднику тоді визначається по формулі:

$$N = 2^k + 2 \cdot k + N_0 \quad (8.17)$$

де k – кількість факторів; N_0 – кількість дослідів в центрі плану.

Таким чином число різних дослідів виконаних для k факторів показано в таблиці 8.5.

Таблиця 8.5.

Число різних дослідів виконаних для k факторів

Кількість факторів, k	2	3	4	5	6
Кількість дослідів, N	9	15	25	42	76
Кількість дослідів в центрі плану, N_0 (для ротатабельних планів)	5	6	7	10	15

Перевагою даного підходу є можливість використати всі 2^k дослідів по плану першого порядку, і лише доповнити новими в зіркових точках і в центрі плану.

Такі плани називаються композиційними.

Композиційні плани не забезпечують властивості ортогональності матриці плану, тобто

$$x^T \cdot x \neq 0 \quad (8.18)$$

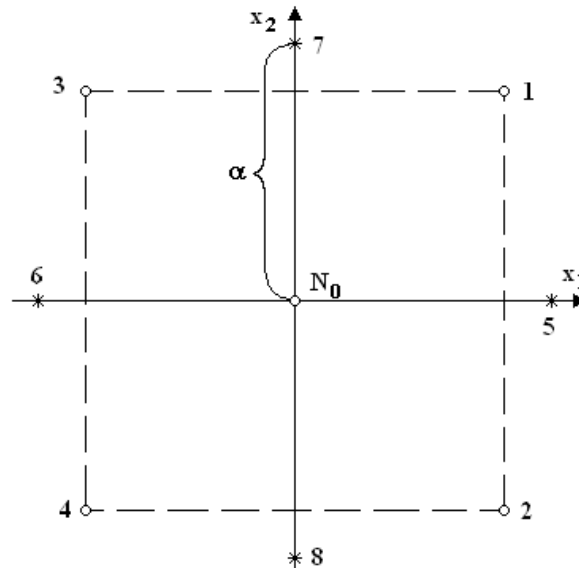


Рис. 8.2. Зображення двофакторного композиційного плану другого порядку

Складемо композиційний план на два фактори.

Таблиця 8.6.

Двохфакторний композиційний план

Досліди	План						Змінна стану, y_i
	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	x_1^2	x_2^2	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
6	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9

Композиційні плани отримують властивість ортогональності через вибір відповідного зіркового плеча α . Вибір зіркового плеча розраховується в залежності від кількості факторів і кількості дослідів в центрі плану (див. табл. 8.7.). В таблиці $2 \cdot 5^*$ означає напіврепліку ПФЕ на 5 факторів.

Таблиця 8.7.

Вибір зіркового плеча

Кількість дослідів в центрі плану N_0	Кількість факторів, k			
	2	3	4	5^*
1	1,000	1,215	1,414	1,547
2	1,077	1,285	1,471	1,606
3	1,148	1,353	1,546	1,664
4	1,214	1,414	1,606	1,718
5	1,267	1,471	1,664	1,772

Розрахунок коефіцієнтів регресії по композиційному ортогональному плану обчислюється завдяки ортогональності у відповідності з формулами:

$$b'_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (8.19)$$

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N x_{ji}^2} \quad (8.20)$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N (x_{ui} x_{ji})^2} \quad (8.21)$$

$$b_{jj} = \frac{\sum_{i=1}^N x'_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N (x'_j)^2} \quad (8.22)$$

$$b_0 = b_0' - b_{11}^{-2} x_1^2 - \dots - b_{kk}^{-2} x_k^2 \quad (8.23)$$

$$\text{де: } x'_j = x_j^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^2, \quad a x_j^{-2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 \quad (8.24)$$

Вибір плеча α зіркових точок і кількість нульових точок залежить також і від критерію оптимальності. В інженерній практиці використовують крім композиційних ортогональних і рототабельні плани другого порядку.

8.5. Рототабельні плани другого порядку

Дослідження ортогональних планів другого порядку, показали, що прийнятий критерій оптимальності плану має суттєвий недолік, внаслідок різних оцінок дисперсій коефіцієнтів регресії. Бокс і Хантер запропонували рахувати оптимальним плануванням другого порядку рототабельне планування при якому інформація, яка зберігається в рівнянні регресії, рівномірно розташовується по сфері. Це полегшує подальшу оптимізацію об'єкта дослідження.

Побудова рототабельних планів другого порядку складна математична задача, з виведення формул для розв'язання якої можна ознайомитись, наприклад, в книгах про які повідомлялось вище.

Після перетворень рівняння для знаходження коефіцієнтів регресії можна записати так:

$$b_0 = a_1 \sum_{i=1}^N y_i - a_2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i ; \quad (8.25)$$

$$b_j = a_3 \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i ; j = 1, 2, \dots, k ; \quad (8.26)$$

$$b_{qj} = a_4 \sum_{i=1}^N x_{qi} x_{ji} y_i ; u \neq j ; j, q = 1, 2, \dots, k ; \quad (8.27)$$

$$b_{jj} = a_5 \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i + a_6 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i - a_7 \sum_{i=1}^N y_i . \quad (8.28)$$

Дисперсії для визначення значущості коефіцієнтів регресії знаходяться за формулами:

$$s_{b_0}^2 = a_1 s_{\text{від}}^2; \quad s_{b_j}^2 = a_3 s_{\text{від}}^2; \quad s_{b_{qj}}^2 = a_4 s_{\text{від}}^2; \quad s_{b_{jj}}^2 = (a_5 + a_6) s_{\text{від}}^2. \quad (8.29)$$

Значення констант, які розраховані для ротатабельного планування і входять до виразів (8.25) – (8.29) для $k \leq 6$ наведені в табл.8.8.

Таблиця 8.8.

Значення констант, які розраховані для ротатабельного планування для $k \leq$

Число факторів, k	Число дослідів, N	N_0	Зіркове плече, α	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	13	5	1,412	0,200	0,1000	0,1250	0,2500	0,1251	0,0187	0,1000
3	20	6	1,682	1,682	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0568
4	31	7	2,000	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5^{-1}	32	6	2,000	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341
5	52	10	2,378	0,0988	0,0191	0,0231	0,0312	0,0156	0,0015	0,0191
6^{-1}	53	9	2,378	0,1108	0,0187	0,0231	0,0312	0,0156	0,0012	0,0187
6	91	15	2,828	0,0725	0,0098	0,0125	0,0156	0,0078	0,0005	0,0098

При виконанні ротатабельних планів відпадає необхідність постановки додаткових паралельних дослідів для оцінки дисперсії відтворення. Дисперсію дослідів, або дисперсію відтворення знаходимо за даними дослідів в центрі плану:

$$s_{\text{від}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{N_0 - 1}; \quad \bar{y}^0 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} y_u^0}{N_0}. \quad (8.30)$$

Число ступенів волі дисперсії відтворення дорівнює $f_{\text{від}} = N_0 - 1$. Залишкову дисперсію визначаємо по формулі:

$$s_{\text{зал}}^2 = \frac{1}{N - L} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{p_i})^2 \quad (8.31)$$

де: L – число значимих коефіцієнтів у рівнянні регресії, а число ступенів волі залишкової дисперсії $f_{\text{зал}} = N - L$.

Дисперсію адекватності знаходимо із співвідношення:

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{s_{\text{зал}}^2 f_{\text{зал}} - s_{\text{від}}^2 f_{\text{від}}}{f_{\text{ад}}}, \quad (8.32)$$

де $f_{\text{ад}} = f_{\text{зал}} - f_{\text{від}}$ – число ступенів волі дисперсії адекватності.

Адекватність рівняння регресії перевіряємо за допомогою розрахованого критерію Фішера по рівнянню (8.15).

Контрольні запитання

1. Коли виконується активний, а коли пасивний експеримент?
2. Що таке повний факторний експеримент, експеримент з дрібною реплікою?
3. Коли вибирається дворівневий план експерименту і як вибираються рівні факторів ?
4. Для чого потрібна рандомизація дослідів?
5. Як визначається помилка дослідів?
6. Що таке інтервал надійності і яке він має відношення до коефіцієнтів моделі?
7. Як визначається дисперсія адекватності моделі?
8. На що вказує рівень значущості дослідних даних?
9. Які переваги дає планування експерименту перед експериментом, проведеним без плану?
10. Що вимагає умова ортогональності плану?
11. Яка перевага розташування табельного плану перед композиційним?
12. Коли рівняння регресії адекватне дослідним даним?

РОЗДІЛ 9 ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПІСЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

9.1. Аналіз отриманого рівняння регресії по результатах ПФЕ першого порядку

В результаті проведення ПФЕ першого порядку ми отримуємо лінійне рівняння регресії з парними зв'язками.

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k b_{uj} x_u x_j \quad (9.1)$$

Виконаємо аналіз отриманого рівняння. Коефіцієнти, які враховують лінійні ефекти моделі і знаходяться біля відповідних факторів b_j , є частинними похідними функції по відповідних змінних і геометрично представляють тангенс кута нахилу гіперплощини функції до відповідної осі фактора. Чим більший коефіцієнт, тим більший вплив фактора x_i на y – параметр змінної стану. В задачах оптимізації цей параметр може бути також критерієм оптимальності.

Тому на першому етапі можна порівняти значення коефіцієнтів між собою і оцінити, який із факторів більш, а який менш впливовий. Знак коефіцієнта вказує на дію фактора – плюсовий знак приводить до зростання параметра стану із збільшенням фактора і навпаки. Порівняйте, чи насправді так це відбувається фактично, чи ні. Слід врахувати ті обставини, що проведення ПФЕ виконується в багатофакторному просторі.

Далі необхідно проаналізувати вплив на параметр стану взаємодії факторів, коефіцієнтів b_{uj} . При додатних значеннях коефіцієнтів, коли ми вирішуємо задачу оптимізації на мінімум, $y \rightarrow \min$, то безрозмірні значення параметрів повинні бути такими: $x_1 = +1$; $x_2 = -1$, або навпаки: $x_1 = -1$; $x_2 = +1$. Якщо ми шукаємо максимальне значення параметра стану (критерію оптимальності), $y \rightarrow \max$, то безрозмірні значення параметрів повинні мати однакові знаки: $x_1 = +1$; $x_2 = +1$, або навпаки: $x_1 = -1$; $x_2 = -1$. При від'ємних значеннях коефіцієнтів парної взаємодії вплив факторів матиме протилежний характер. Якщо при аналізі різних коефіцієнтів взаємодії виникають протиріччя, то треба ігнорувати менший вплив фактора.

Вплив не значимих коефіцієнтів на параметр стану не аналізується.

9.2. Прийняття рішень в залежності від адекватності рівняння і значимості коефіцієнтів

Після проведення експерименту і відповідних розрахунків приймають рішення про подальші дослідження. Подальші дослідження залежать від багатьох факторів і в першу чергу від того адекватним отримали рівняння регресії, чи ні. Якщо рівняння по критерію Фішера визначили адекватним

дослідним даним, то тоді рішення про наступний експеримент буде залежати від кількості значимих коефіцієнтів рівняння, а також від того де, по відношенню до виконаного плану ПФЕ, знаходиться область оптимуму. На рис. 9.1. показані варіанти прийняття рішень в залежності від вказаних факторів при адекватній моделі регресії, отриманої від проведеного ПФЕ.

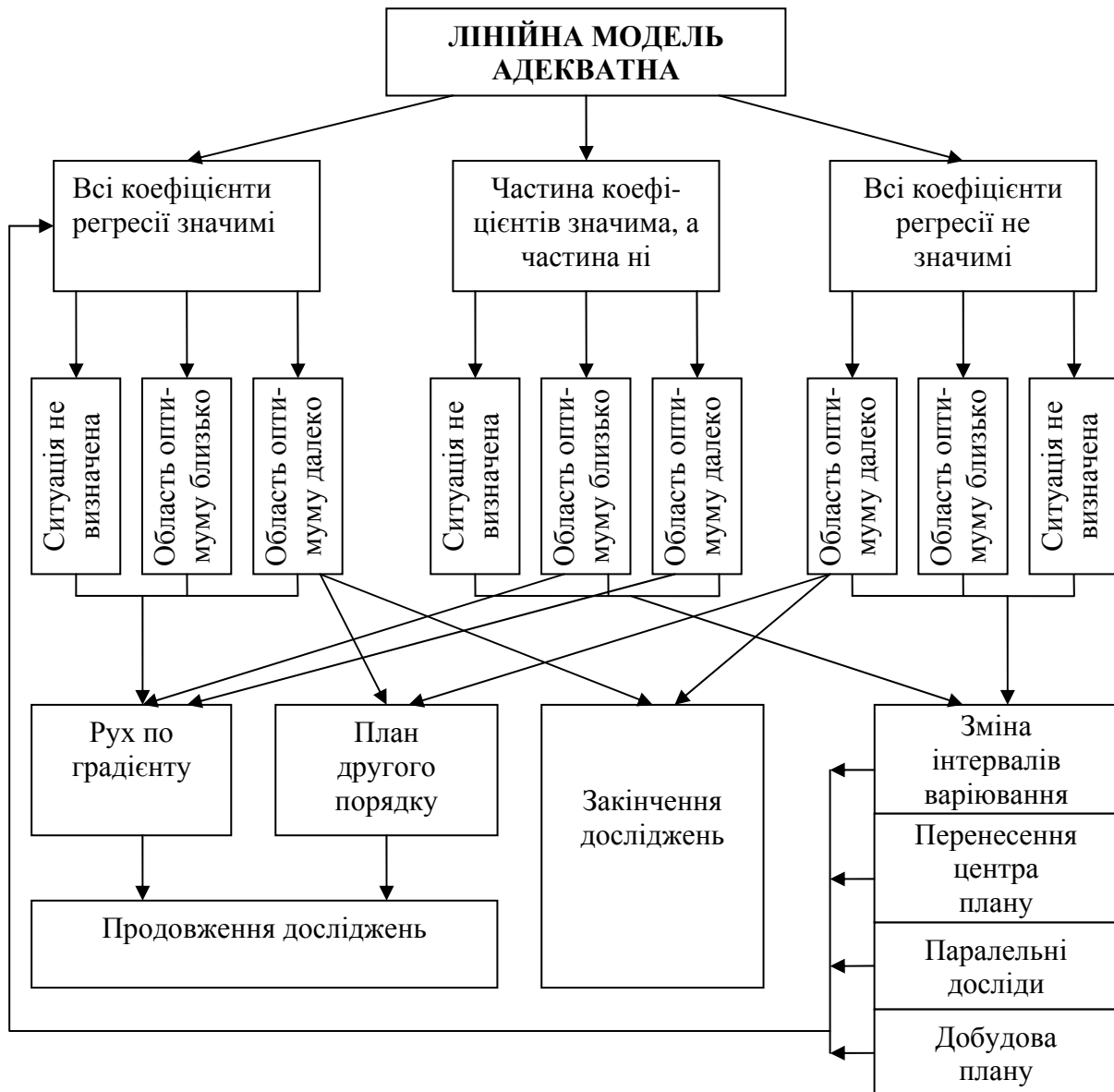


Рис. 9.1. Варіанти прийняття рішень при визначенні оптимальних умов за допомогою адекватної лінійної моделі

При аналізі значимості коефіцієнтів регресії необхідно в'яснити причину незначимості частини коефіцієнтів. Такими причинами можуть бути:

- невдало вибраний інтервал варіювання, який, як правило, необхідно збільшити;
- невдало вибрані фактори дослідів, які мало впливають на параметр стану, що може бути критерієм оптимальності при вирішенні оптимізаційної задачі. Такі параметри необхідно відсіювати;

- велика помилка дослідів, яка компенсується за рахунок збільшення кількості паралельних дослідів або добудови плану.

Аналіз області оптимуму виконується в залежності від інформованості і досвіду науковця. Якщо приблизно відомі границі оптимальної зони і вони підтверджуються дослідом, що виконані за планом, то подальші досліді можуть виконуватись при перенесенні центру наступного плану експерименту в очікувану оптимальну зону і зменшення інтервалу варіювання.

Якщо частина коефіцієнтів не значима, то можливий вибір одного із рішень, які дозволяють отримати значимі коефіцієнти регресії, це: зміна інтервалів варіювання, перенесення центра плану, паралельні досліді, відсіювання не значимих факторів, добудова плану.

Якщо дослідження, що виконані за планом першого порядку, не дають змоги визначити оптимальну зону, то на допомогу може прийти рух до оптимуму по градієнту, або проведення додаткових дослідів по плану другого порядку. План другого порядку за рахунок квадратних членів рівняння вкаже на оптимальну точку в розв'язку задачі.

Помилка експерименту може бути зменшена за рахунок збільшення кількості повторних дослідів, що небажано, або за рахунок зміни методики проведення експерименту.

Приклад аналізу рівняння регресії

При проведенні двох факторного експерименту, де x_1 – концентрація розчину, x_2 – значення рН, а y , параметр стану – вихід продукції у %, отримано лінійне рівняння регресії:

$$y = 88 - 2x_1 - 4,5x_2, \quad (9.2)$$

максимальне значення якого необхідно знайти. Дисперсія коефіцієнтів регресії складає $\sigma_{bj} = 0,3$, що вказує на значимість коефіцієнтів.

Встановлено, що при значенні $x_1 = +1$ і $x_2 = +1$ $y = 88 - 2 - 4,5 = 81,5$ а при значенні $x_1 = -1$ і $x_2 = -1$ $y = 88 + 2 + 4,5 = 94,5$. Це означає, що зменшення факторів діє позитивно при $y \rightarrow \max$, і тому фактори для знаходження максимального виходу продукту повинні бути мінімальними.

Варіанти подальшого розвитку досліджень:

а) *Закінчити дослідження.* Такий хід треба визнати неправильним, бо вихід продукту можливо збільшити ще на 2 – 3 %.

б) *Так як оптимум 100% близько, виконати рух по градієнту.* Цей варіант хороший, так як вимагає лише проведення 2 – 4 додаткових дослідів.

в) *Виконати дослідження по плану другого порядку.* Цей варіант проведення досліджень дозволить знайти оптимальні значення параметрів (факторів експерименту), але вимагають виконання не менше 5 додаткових дослідів.

Якщо лінійна модель регресії неадекватна, то це означає, що не можна апроксимувати поверхню відгуку повністю. Причиною того, що розрахований критерій Фішера більший за табличний може бути значимість

одного або декількох ефектів взаємодії, якщо їх можна поррахувати. Рішеннями, які приймаються у цьому випадку, можуть бути розрахунки ефектів взаємодії. Це можливо в тому випадку коли виконувалась не дрібна репліка, а ПФЕ. Варіанти прийняття рішень при неадекватній лінійній моделі регресії в задачі визначення оптимальних умов показані на рис. 9.2



Рис. 9.2. Варіанти прийняття рішень в задачі визначення оптимальних умов при лінійній неадекватній моделі регресії

Таким чином, якщо лінійна модель неадекватна, то, якщо область оптимуму знаходиться близько, тоді дослідження або закінчуються, або реалізується план другого порядку. Прийняття таких рішень, як зміна інтервалів варіювання, перенесення центра плану, добудова плану, рух по градієнту використовується при будь-якому положенні оптимуму. Можливі також дії по включенню в модель ефектів взаємодії факторів і рух за допомогою неповного поліному другого порядку, а також оцінка квадратичних ефектів для отримання інформації про кривизну поверхні відгуку перед рухом по градієнту.

При проведенні експерименту не для задачі оптимізації, а для отримання рівняння регресії, при отриманні адекватної моделі дослідження закінчуються. Якщо ж модель визнана неадекватною, то в модель включають ефекти взаємодії. Якщо ж і це не допомагає, то добудовують план експерименту, змінюють інтервали варіювання з метою отримання адекватності рівняння моделі.

9.3. Круте сходження по поверхні відгуку

9.3.1. Оптимізація градієнтним методом

У градієнтному методі рух до точки мінімуму виконується по ітераційній процедурі і проходить вздовж напрямку антиградієнту для чого використовуються частинні похідні від цільової функції по параметрах оптимізації, градієнт цільової функції. Параметрами оптимізації при використанні рівняння регресії, отриманої за допомогою ПФЕ, будуть фактори плану. Цільовою функцією в задачі оптимізації буде параметр відгуку, вирахований за допомогою отриманого рівняння регресії, і в залежності від виду відгуку спрямований до свого максимального або мінімального значення. Обмеженнями на параметри оптимізації будуть верхні і нижні рівні факторів, які в кодованому виді приймають значення +1 і -1.

Нагадаємо, що градієнтом скалярної функції $F(X)$ в точці $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають вектор виду:

$$F'(X) = \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(X)}{\partial x_n} \right), \quad (9.3)$$

що позначається $\nabla F(X)$ або $\text{grad } F(X)$.

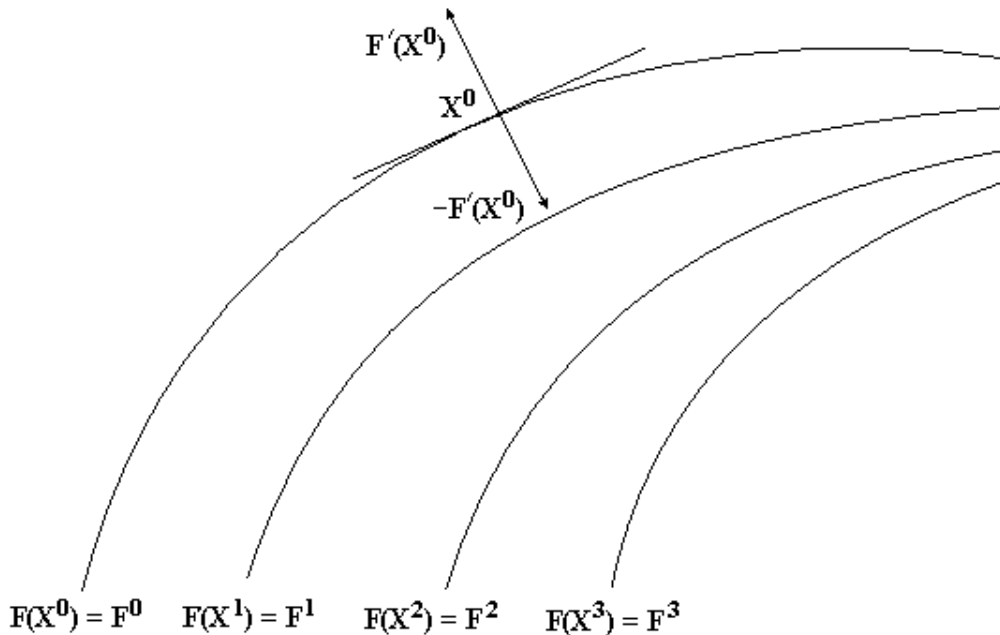


Рис. 9.3. Напрямок руху до оптимуму при використанні градієнтного методу

Цей вектор перпендикулярний до площини проведеної через k -ту точку X^k і дотичної до поверхні рівня цільової функції $F(X)$, що проходить через точку X^k .

Вектор градієнт направлений в напрямку зростання функції. Антиградієнт, протилежний градієнту, $-F'(X^k)$ направлений в напрямку зменшення цільової функції (рис.9.3).

В точці мінімуму градієнт функції дорівнює нулю.

$$\text{Якщо } X^{k+1} = X^k + h^k \cdot \nabla F(X), \quad (9.4)$$

то враховуючи антиградієнт, при пошуку мінімального значення цільової функції, отримуємо:

$$X^{k+1} = X^k - h^k \cdot F'(X^k), \quad (9.5)$$

де h^k – крок зміни параметра оптимізації в k -й точці пошуку $h^k > 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер ітерації точок розрахунків.
($F^0 > F^1 > F^2 > F^3$)

В координатній, параметричній, формі (9.3) запишемо так:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - h^k \cdot \frac{\partial F(X^k)}{\partial x_i}, \quad (9.6)$$

де i – номер параметра оптимізації, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Градієнтні методи відрізняють вибором кроку h^k , від якого залежить виконання умови $F(X^{k+1}) < F(X^k)$. (9.7)

Стратегія зміни довжини кроку в градієнтному методі дуже важлива, оскільки на кожній ітерації розрахунків обчислюються похідні цільової функції, розрахунок яких пов'язаний з обчисленням значень самої цільової функції. Якщо розмір кроку надто малий, то рух до оптимуму буде довгим із значним збільшенням кількості ітерацій. Якщо ж крок вибраний занадто великим, то пошуки можуть також ускладнитись „перескакуванням” через оптимальну точку.

Таким чином для лінійної моделі складовими градієнту є частинні похідні функції відгуку по параметрах оптимізації, або факторах, оцінками яких є коефіцієнти регресії.

Змінюючи незалежні змінні пропорційно величині коефіцієнтів регресії, ми будемо рухатись в напрямку градієнту функції відгуку по самому крутому шляху. Через те процедура руху до оптимальної зони називається **крутим сходженням**.

9.3.2. Розрахунок крутого сходження

Круте сходження виконується за допомогою руху по градієнту. Розглянемо вибір напрямку руху з використанням одного із факторів. Коефіцієнти регресії дорівнюють тангенсу кута β (див. рис. 9.4) між лінією регресії і віссю даного фактору. Якщо його помножити на інтервал варіювання – катет ОА трикутника ОАВ, то отримуємо значення протилежного катета АВ, який і дає значення координати точки, яка лежить на градієнті. Так як фактори незалежні один від одного, то можна

розраховувати рух до оптимуму по всіх факторах паралельно, використовуючи коефіцієнти лінійних ефектів і відповідні їм інтервали.

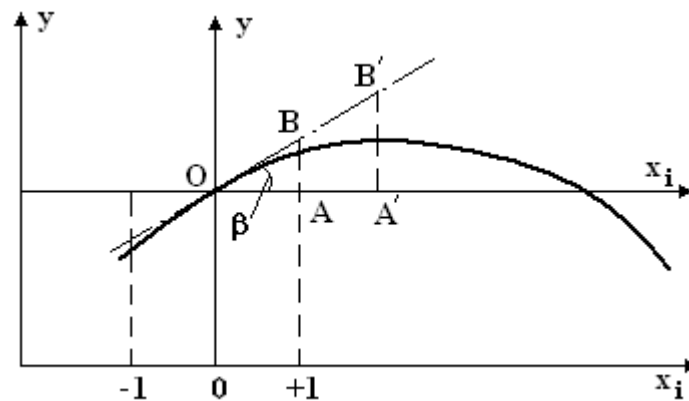


Рис. 9.4. Розрахунок координат точок в напрямку градієнту

Початок руху, як правило вибирають з нульової точки плану. Крок з яким рухаються в напрямку оптимуму вибрати складніше. Невеликий крок вимагає значного числа дослідів на шляху до оптимальної точки, великий крок може призвести до перескакування оптимуму.

Приклад руху в напрямку крутого сходження

Розглянемо двохпараметричне лінійне рівняння регресії $y = 88 - 2x_1 - 4,5x_2$, де фактори x_1 – концентрація розчину, x_2 – значення рН, а y , параметр стану – вихід продукції в %. Фактори плану мають натуральні і кодовані характеристики наведені в табл.9.1.

Таблиця 9.1

Фактори плану

Рівні параметрів	Концентрація, x_1		рН, x_2	
	x_{H1}	x_1	x_{H2}	x_2
Верхній	2,0	+1	8,0	+1
Основний(x_i^0)	1,5	0	7,0	0
Нижній	1,0	-1	6,0	-1
Інтервал варіювання	0,5	1	1,0	1

Використовуючи дані таблиці перерахуємо рівняння до натурального виду:

$$88 - 2 \cdot \left(\frac{x_{H1} - 1}{2 - 1} - 1 \right) - 4,5 \cdot \left(\frac{x_{H2} - 6}{8 - 6} - 1 \right) = 110 - 2 \cdot x_{H1} - 2,25 \cdot x_{H2}$$

Для розрахунку руху до оптимуму в напрямку крутого сходження порахуємо відрізки АВ для обох факторів.

$$AB_{x1} = b_1 \cdot I_1 = (-2) \cdot 0,5 = -1,0$$

$$AB_{x2} = b_2 \cdot I_2 = (-4,5) \cdot 1,0 = -4,5$$

Порахуємо координати точки до якої будемо рухатися починаючи з центру плану. Для цього до натуральних значень координат центру плану додамо отримані відрізки АВ.

$$x_1^* = x_1^0 + AB_{x1} = 1,5 - 1 = 0,5$$

$$x_2^* = x_2^0 + AB_{x2} = 7,0 - 4,5 = 2,5$$

В цій точці ми отримаємо нереальне значення у:

$110 - 2 \cdot 0,5 - 2,25 \cdot 2,5 = 103,4$ % виходу продукту, що вказує на велике значення АВ, (див рис. 9.5).

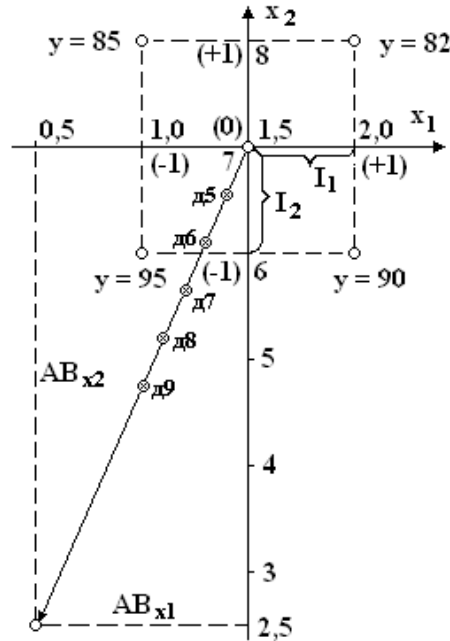


Рис.9.5.Приклад графічного розв'язання задачі крутого сходження

Для вирішення задачі зменшимо значення катета АВ в десять разів:

$$AB_{x1}^* = AB_{x1}/10 = (-1)/10 = -0,1;$$

$$AB_{x2}^* = AB_{x2}/10 = (-4,5)/10 = -0,45$$

Тоді, починаючи з нульової точки, де $x_1^0 = 1,5$; $x_2^0 = 7,0$ почнемо прибавляти значення AB_{x1}^* і AB_{x2}^* , поки не отримаємо таблицю додаткових дослідів, до тих чотирьох, які були виконані в основному плані (табл. 9.2), також підставляючи дані в отримане рівняння з натуральними х-ми побачимо очікувані, прогнозовані, значення параметра стану.

Таблица 9.2.

Таблиця додаткових дослідів

№ дослідів	$x1_i$	$x2_i$	y_i
5	1,4	6,55	92,463
6	1,3	6,1	93,675
7	1,2	5,65	94,887
8	1,1	5,2	96,1
9	1,0	4,75	97,313
10	0,9	4,3	98,525

Як показують досліди значення виходу буде збільшуватися і на десятому досліді, шостому додатковому, очікуємо, що виросте до 98,5%. Реально вихід продукту буде зростати до певної межі, оптимального значення, а далі почне зменшуватись. Таким чином буде виконана оптимізація в напрямку крутого сходження. Так само оптимізація може бути проведена на лінійних регресіях з трьома, чотирма і більшою кількістю параметрів.

9.4. Приклад розв'язання задачі з рухом до оптимуму по градієнту

Умова задачі

Збірник соку має форму закритого циліндра з конічним дном (рис.9.6). Його об'єм V і поверхню F можна виразити через радіус і висоту циліндричної частини R , h_2 , висоту конічної частини h_1 .

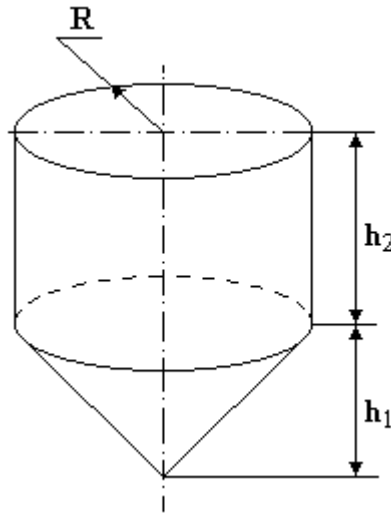


Рис. 9.6. Збірник соку

$$V = \pi R^2 h_2 + \frac{\pi R^2 h_1}{3} \quad (9.8)$$

$$F = \pi R^2 + 2\pi R h_2 + \pi R h_1 \quad (9.9)$$

Знайдемо значення h_2 із формули (9.8) і підставимо до формули (9.9):

$$h_2 = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{h_1}{3} \quad (9.10)$$

$$F = \pi R^2 + \frac{2V}{R} + \frac{\pi R h_1}{3} \quad (9.11)$$

9.4.1. Алгоритм розв'язання задачі оптимізації розмірів збірника соку

Цільовою функцією задачі оптимізації буде мінімізація поверхні збірника:

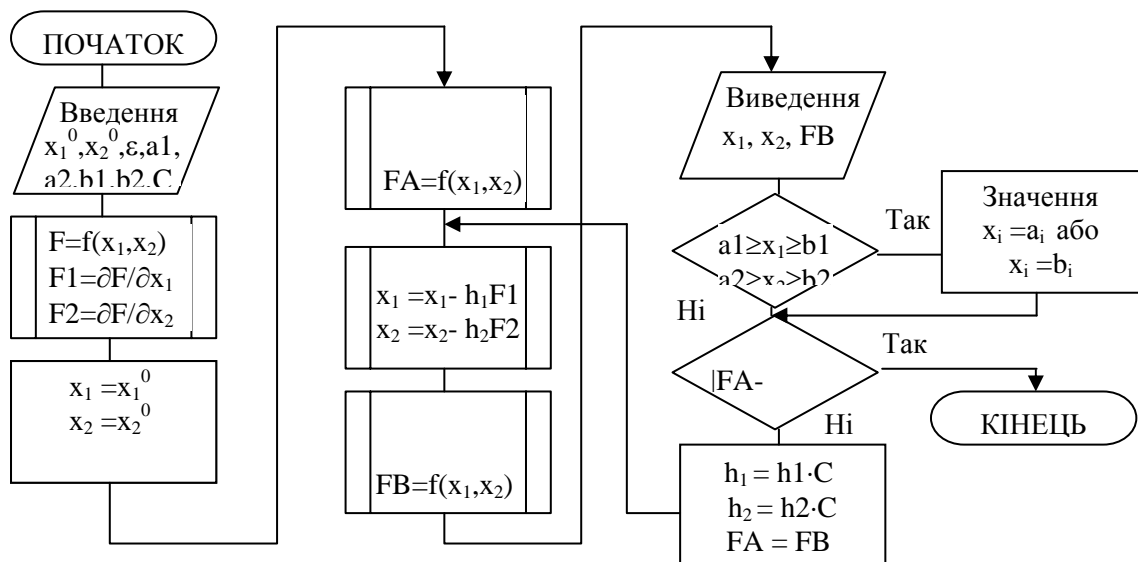


Рис. 9.7. Схема алгоритму визначення оптимального значення цільової функції двопараметричної моделі градієнтним методом

$$F = \pi x_1^2 + \frac{2V}{x_1} + \frac{\pi x_1 x_2}{3} \rightarrow \min, \quad (9.12)$$

де x_1, x_2 – параметри оптимізації, радіус циліндричної частини ємкості R і висота конічної частини h_1 , V – об’єм ємкості 20 м^3 .

Обмеження на параметри оптимізації будуть такими: $1,2 \leq x_1 \leq 2,2$; $0,4 \leq x_2 \leq 1,2$.

Після цього необхідно в середовищі MathCad побудувати лінії рівня цільової функції. Приклад програми побудови вказаний на рис 9.8. Для побудови ліній рівня значення n можна вибрати рівним 20.

На третьому етапі виконання лабораторної роботи оптимальне значення значення цільової функції і шлях до нього слід визначити градієнтним методом використавши алгоритм на рис 9.7. або виконавши розрахунки проміжних точок в середовищі MathCad. При цьому за початкове значення параметрів оптимізації треба взяти середину поля допустимих значень цільової функції, а початкові значення h_i вибираються як $1/5 \div 1/10$ діапазону зміни кожного i -го параметра.

Оброблення результатів розрахунків і їх аналіз

З використанням пакета програм Machcad слід побудувати лінії рівня цільової функції в полі допустимих значень параметрів оптимізації (рис.9.9).

Для побудови ліній рівня напишемо ряд рівнянь у середовищі Machcad, в яких x_1, x_2 – параметри оптимізації; $f(x_1, x_2)$ – цільова функція; $z_{i,j}$ – масив значень цільової функції (рис.9.8).

На лінії рівня слід нанести результати руху цільової функції до оптимума, отримані при розв’язанні задачі оптимізації графічним методом (рис 9.9 – 9.10).

Оптимальне значення пораховане методом сіток по програмі має значення для параметрів оптимізації: x_1 – радіус циліндричної частини ємкості, $R = 1,83$ м, x_2 - висота конічної частини, $h_1 = 0,4$ м, а для цільової функції F , поверхні ємкості $F = 33,14$ м².

```

a1 := 1.2      b1 := 2.2      a2 := 0.4      b2 := 1.2      n := 20      V := 20

h1 := (b1 - a1) / n      h2 := (b2 - a2) / n

i := 0..n      j := 0..n      f(x1,x2) := pi * x1^2 + (2 * V) / x1 + (pi * x2 * x2) / 3

x1_i := a1 + i * h1      x2_j := a2 + j * h2

z_i,j := f(x1_i, x2_j)

```

Рис. 9.8. Розрахунок ліній рівня цільової функції в MathCad

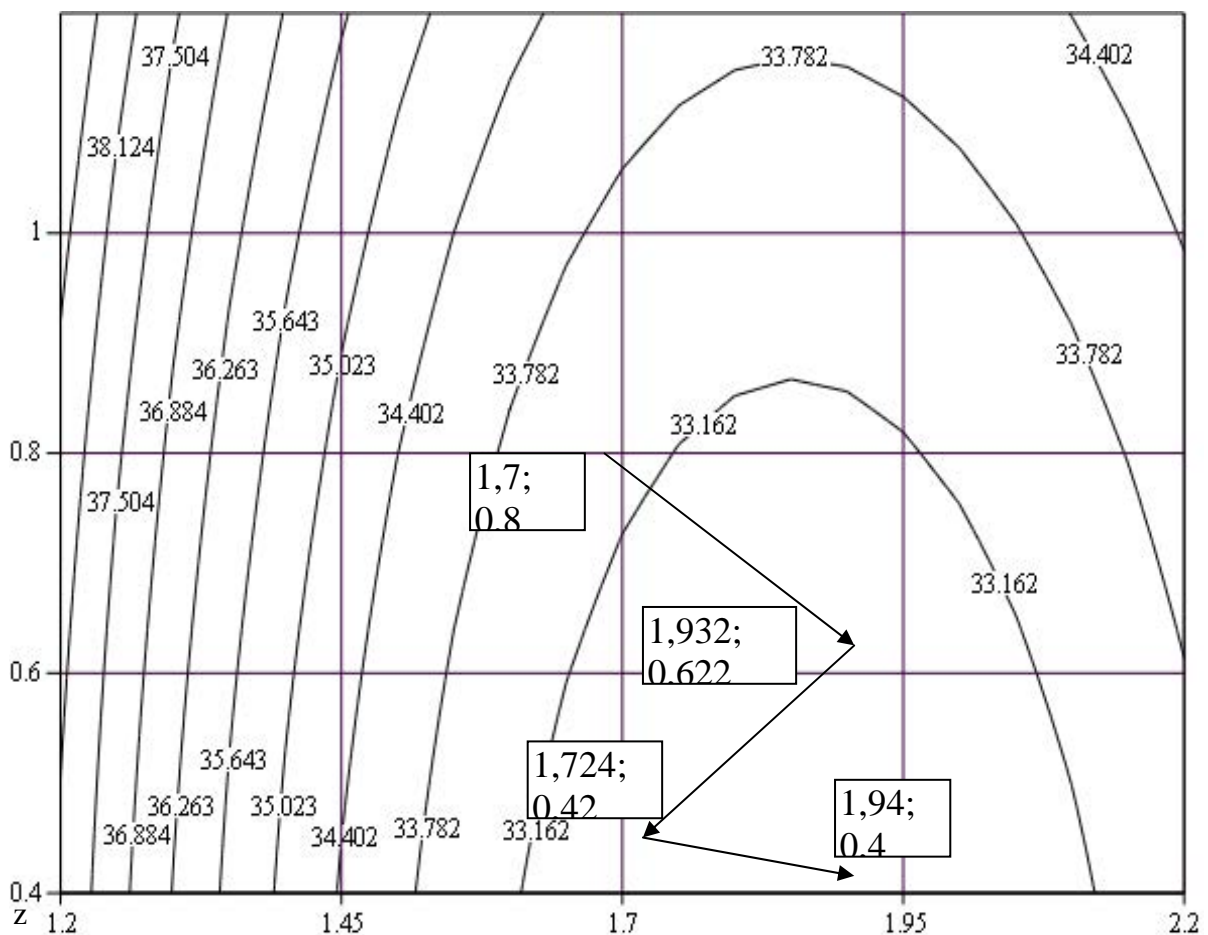


Рис. 9.9. Лінії рівня цільової функції, мінімізації поверхні збірника

Побудова ліній руху до оптимуму показує, що з наближенням до оптимуму слід зменшувати крок зміни параметрів оптимізації h_1 і h_2 .

Цільова функція наведеного прикладу має вигляд:

$$F(x_1, x_2) := \pi \cdot x_1^2 + \frac{40}{x_1} + \frac{\pi \cdot x_1 \cdot x_2}{3}$$

За початкову точку вибираємо середину поля допустимих значень функції:

$$x_{10} := 1.7 \quad x_{20} := 0.8 \quad \text{тоді:} \quad F(x_{10}, x_{20}) = 34.033$$

Задані кроками зміни параметрів оптимізації:

$$h_1 := 0.1 \quad h_2 := 0.1$$

Знайдемо градієнт руху до оптимуму - це частинні похідні від цільової функції по x_1 і x_2 . Вони беруться за допомогою команд меню: Symbolics - Variable - Differentiate.

$$\alpha_1(x_1, x_2) := 2 \cdot \pi \cdot x_1 - \frac{40}{x_1^2} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x_2 \quad \alpha_2(x_1, x_2) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x_1$$

Тоді наступні значення параметрів оптимізації і цільової функції буде:

$$x_{11} := x_{10} - h_1 \cdot \alpha_1(x_{10}, x_{20}) \quad x_{21} := x_{20} - h_2 \cdot \alpha_2(x_{10}, x_{20})$$

$$x_{11} = 1.932 \quad x_{21} = 0.622 \quad F(x_{11}, x_{21}) = 33.689$$

Зробимо другий крок в напрямку зменшення цільової функції:

$$x_{12} := x_{11} - h_1 \cdot \alpha_1(x_{11}, x_{21}) \quad x_{22} := x_{21} - h_2 \cdot \alpha_2(x_{11}, x_{21})$$

$$x_{12} = 1.724 \quad x_{22} = 0.42 \quad F(x_{12}, x_{22}) = 33.296$$

Зробимо третій крок в оптимальному напрямку

$$x_{13} := x_{12} - h_1 \cdot \alpha_1(x_{12}, x_{22}) \quad x_{23} := x_{22} - h_2 \cdot \alpha_2(x_{12}, x_{22})$$

$$x_{13} = 1.942 \quad x_{23} = 0.239$$

Так як точка вийшла за межі поля допустимих значень, повернемо її на границю поля і тоді:

$$F(x_{13}, 0.4) = 33.259$$

Подальші обчислення проводяться аналогічно до досягнення мінімального значення цільової функції із зменшенням кроку без виходу за межі поля допустимих значень

Рис. 9.10. Приклад руху до оптимуму градієнтним методом в середовищі MathCad

Контрольні запитання

1. Які приймаються рішення по продовженню експерименту, якщо ПФЕ першого порядку дає неадекватне рівняння регресії?
2. Що означає адекватність рівняння регресії?
3. Що таке інтервали варіювання і як їх потрібно змінювати?
4. Чому рух по градієнту називається «крутим сходженням»?
5. Скільки потрібно зробити дослідів в напрямку крутого сходження, щоб досягти мети дослідження?
6. Яка формула використовується для переведення кодованих значень параметрів в рівнянні регресії на натуральні ?
7. Що називається градієнтом і для чого потрібний антиградієнт?
8. Як поміняти а алгоритмі градієнтного методу рух до мінімуму на рух до максимуму?

РОЗДІЛ 10

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ ПО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНИМ МОДЕЛЯМ

10.1. Поняття про оптимізацію

Основною метою досліджень і розробки любого технологічного процесу або системи, системи управління є визначення найкращих (оптимальних) умов їх дії. Оптимізація – це процедура знаходження найкращих умов проведення процесу в апараті або процесів в технологічній системі.

В кінці кінців успішне вирішення задачі оптимізації призводить до створення більш ефективних режимів проведення процесів, а відповідно до поліпшення економічних і екологічних показників виробництва.

Оптимізація базується на створених математичних моделях об'єктів або систем управління. Оптимізація можлива тільки тоді, коли існує декілька або безліч рішень задачі, серед яких можна вибрати найкраще. Щоб вибрати таке краще рішення необхідно користуватися якимось ефективним критерієм оцінки рішення. Цей критерій витікає з мети оптимізації. Від того як правильно визначена така мета залежить можливість вирішення поставленої задачі.

Типовою помилкою невірно визначеного критерію оптимальності є знаходження декількох величин одночасно. Наприклад, коли при оптимізації роботи пташника ставиться задача отримати максимальний вихід яєць при мінімальних витратах кормів. Мінімальні витрати кормів на виробництві рівні нулю, а при цьому яєць ми отримати не зможемо взагалі, та й курей втратимо.

Вибір оптимального рішення з необмеженої кількості можливих рішень не можна виконати без використання числових методів оптимізації. Числові методи оптимізації різко зменшують кількість перевірених можливих варіантів рішень. Активне використання числових методів оптимізації вимагає певних знань з теорії матриць, лінійного програмування, диференційного обчислення і математичного аналізу.

Розмірність практичних оптимізаційних задач досить велика і навіть при використанні алгоритмів оптимізаційних методів при їх вирішенні не можна обійтись без персонального комп'ютера. Тому при рішенні задач оптимізації слід також звернути увагу на алгоритмізацію методів оптимізації для їх вирішення на комп'ютері або за допомогою спеціальних математичних пакетів програм, наприклад, Mathcad, MATLAB.

Послідовність вирішення задачі оптимізації можна представити у вигляді блок-схеми (рис. 10.1), де спочатку створюється математична модель об'єкту оптимізації (процесу, апарату або системи управління), далі робиться постановка задачі оптимізації, потім вибирається метод оптимізації, складається алгоритм і програма рішення. Якщо оптимальне рішення не може бути отримане, то виконується коригування одного із попередніх етапів.

Для вирішення оптимізаційної задачі, виходячи з алгоритму, аспірант повинен мати знання у прикладній області, з математики, вміти програмувати і користуватися пакетами прикладних програм з методами оптимізації.

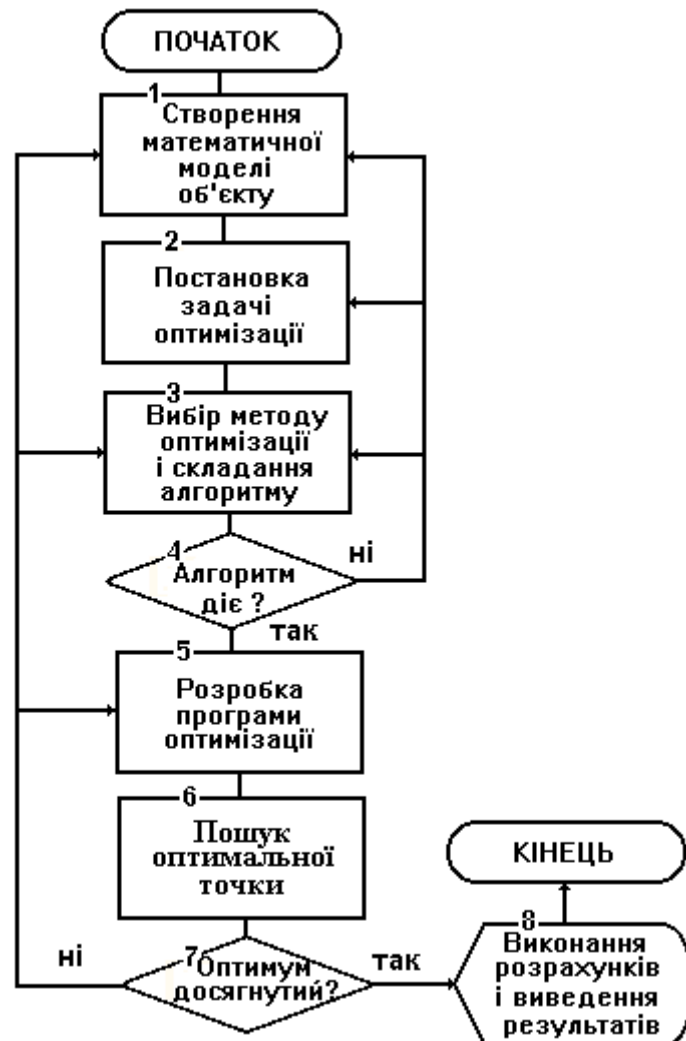


Рис.10.1 Схема алгоритму послідовності вирішення задачі оптимізації

10.2. Постановка задачі оптимізації

Із прикладів використання задач оптимізації видно що опис постановки задачі оптимізації повинен включати такі елементи:

- перелік параметрів оптимізації

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (10.1)$$

- критерій оптимальності або цільова функція

$$F = \min_{x \in D} F(x), \quad (10.2)$$

- обмеження на параметри оптимізації, які контролюються областю допустимих значень параметрів оптимізації – D , сформованої різними видами обмежень, що накладені на параметри оптимізації.

Такі обмеження бувають у вигляді рівностей, нерівностей і двохсторонні:

$$\begin{aligned}h_i(x) &= 0 & i = 1, \dots, k \\g_i(x) &\geq 0 & i = 1, \dots, j \\a_i &\leq x_i \leq b_i & i = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{10.3}$$

Критерій оптимальності ще називають цільовою функцією. Частіше критерієм оптимальності називають функцію, що залежить від вихідних параметрів, а цільовою функцією називають залежність від вхідних параметрів і параметрів керування.

Критерій оптимальності або цільова функція

Важливим моментом задачі оптимізації є вибір критерію для оцінки процесу чи системи, який витікає з мети оптимізації. Дуже часто в інженерній задачі використовують економічний критерій. Це може бути:

- продуктивність (В), (випуск одиниць продукції / час);
- об'єм капітальних затрат (S_K), (грв);
- експлуатаційні затрати (S_e), (грн/час);

Іншими критеріями можуть бути якісні показники продукції.

Не залежно від виду критерію він повинен бути виражений у числовій формі і найкращим варіантом є максимальне або мінімальне його значення.

Слід також зауважити, що критерій в оптимізаційній задачі може бути тільки один. Якщо в задачі існує декілька критеріїв, то з них або – вибирається один, а на інші накладаються обмеження, або - всі вони зводяться до одного мультикритерія, за якимось принципом.

Критерій оптимальності повинен мати числове значення для його оцінки.

В деяких задачах оптимізації, наприклад задачах лінійного програмування, критерій оптимальності називають цільовою функцією.

Параметри оптимізації

В постановці задачі оптимізації важливим також є виділення незалежних змінних, які адекватно описують процеси або технологічні системи, що оптимізуються. Крім незалежних змінних існують змінні, значення яких залежить від, незалежних змінних, різних збурень і управляючих дій. Серед незалежних змінних вибираються критерій оптимальності і такі змінні, які активно впливають на роботу системи, яку оптимізуємо, і які називаються параметрами оптимізації. Дуже часто на параметри оптимізації накладають обмеження, які витікають з особливостей технологічного процесу чи системи або конструкції апарату.

При використанні незалежних змінних слід не втрачати таких, які суттєво впливають на критерій оптимальності, інакше рішення буде не оптимальним. Так, при оптимізації конструкторської розробки випарного апарату для томат-пасты по об'єму капітальних затрат слід використати такі

постійні змінні – конструктивні параметри, як: діаметр апарату, висота нагрівальної камери, діаметр і кількість нагрівальних трубок, якість металу та інше. Якщо ж оптимізується діючий випарний апарат по продуктивності, то постійними змінними будуть температура пари в нагрівальній камері, витрати сировини, яка поступає, розрідження у апараті та інші.

Не слід використовувати як параметри оптимізації такі постійні змінні, які несуттєво впливають на критерій оптимальності. Їх використання тільки “перевантажує” задачу і збільшує час на її вирішення.

10.3. Деякі властивості критерію оптимальності

Чутливість критерію оптимальності

Про деякі вимоги до критерію оптимальності повідомлялось раніше. Це те, що критерій оптимальності повинен мати кількісне значення і бути єдиним в задачі.

Крім того є ще вимоги до виду функції критерію оптимальності. Вона повинна монотонно змінюватися в залежності від параметрів оптимізації. В деяких випадках при значних змінах параметра оптимізації критерій оптимальності буде змінюватись на незначну величину (рис. 10.2). Такий критерій оптимальності нечутливий до зміни параметра, що може привести до складностей при визначенні його оптимального значення.

Зміна параметра оптимізації на значну величину

$$\Delta x = |x_{opt}^{(1)} - x_{opt}^{(2)}|, \quad (10.4)$$

призводить до зміни критерію оптимальності в межах похибки

$$\Delta F = |F_{opt}^{(1)} - F_{opt}^{(2)}| \leq \varepsilon \quad (10.5)$$

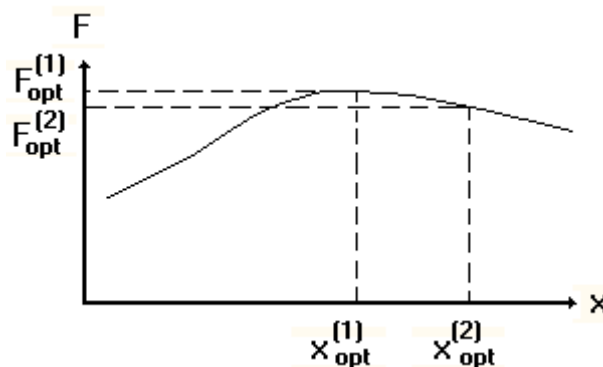


Рис.10.2. Нечутливість критерію оптимальності

Критерій оптимальності може мати яскраво виражений екстремум (рис. 10.3). В такому випадку при незначній зміні параметра оптимізації

$$\Delta x = |x_{opt}^{(1)} - x_{opt}^{(2)}| \leq \varepsilon, \quad (10.6)$$

критерій оптимальності змінюється на велике значення

$$\Delta F = |F_{opt}^{(1)} - F_{opt}^{(2)}| \quad (10.7)$$

Підтримка і знаходження оптимальних умов стає складною проблемою із-за високої чутливості значення екстремуму критерію оптимальності до зміни параметрів оптимізації задачі. У першому випадку, при нечутливій цільовій функції у оптимальній зоні, пошук оптимуму слід закінчувати з урахуванням довжини кроку зміни параметрів оптимізації або кількості повторних точок пошуку (циклів). У другому випадку, при надмірно чутливій цільовій функції, пошук оптимальної точки закінчується з урахуванням значення цільової функції.

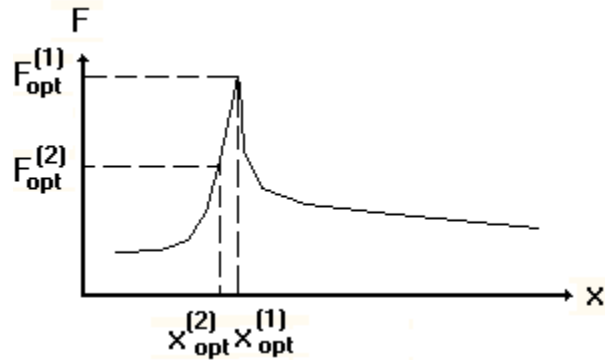


Рис. 10.3. Надмірна чутливість критерію оптимальності в екстремальній точці

Критерій оптимальності з багатьма екстремумами

Інша складність виникає, коли функція залежності критерію оптимальності від параметрів оптимізації має декілька екстремумів і точок розриву (рис. 10.4).

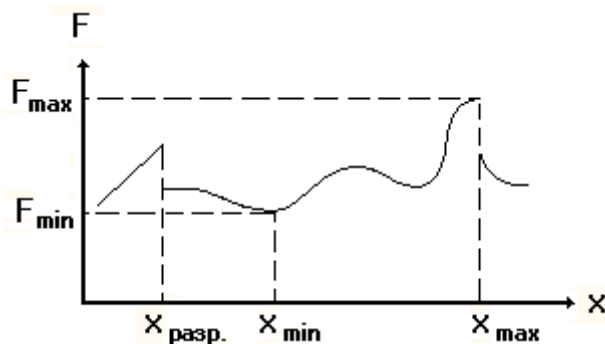


Рис. 10.4. Багато екстремальна задача оптимізації

В цьому випадку задача має декілька локальних значень екстремумів серед яких необхідно знайти глобальний екстремум – оптимальне значення критерію оптимальності. Складність пошуку оптимального значення збільшується із-за наявності точок розриву, особливо коли розрив знаходиться в оптимальній точці.

Найкращі умови пошуку оптимального значення будуть, коли функція критерію оптимальності унімодальна, має один екстремум і не має точок розриву в області допустимих значень.

10.4. Задачі багатокритеріальної оптимізації

Методи рішення задач багатокритеріальної оптимізації

Багатокритеріальними називають задачі оптимізації, в яких є декілька цільових функцій (критеріїв оптимальності). В цих задачах необхідно отримати розв'язок, який в певній мірі є найкращим для всієї сукупності цільових функцій.

Окремі цільові функції в задачах багатокритеріальної оптимізації називаються локальними критеріями або локальними оцінками альтернатив. Такі задачі ще називають задачами векторної оптимізації. Це пов'язано з тим, що глобальний критерій можна представити у вигляді вектору, елементами якого є значення локальних критеріїв.

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)) \rightarrow \min, X \in D \quad (10.8)$$

де $f_i(X)$ – локальний критерій, $i = 1, 2, \dots, n$, $i \geq 2$, D – допустима множина рішень задачі оптимізації.

При цьому задачі однокритеріальної оптимізації називаються задачами скалярної оптимізації.

Задачу багатокритеріальної оптимізації можна сформулювати так:

$$\begin{cases} f_1(X) \rightarrow \min, X \in D; \\ f_2(X) \rightarrow \min, X \in D; \\ \dots \dots \\ f_n(X) \rightarrow \min, X \in D; \end{cases} \quad (10.9)$$

Тут локальні цільові функції рухаються до мінімуму, при тому, що керована змінна X належить до деякої множини D . Якщо необхідно якийсь локальний критерій направити до максимуму, то необхідно відповідну цільову функцію помножити на -1 і тоді задача максимізації стане задачею пошуку мінімуму.

Для кожної допустимої множини Y можна побудувати її відображення у вигляді можливих значень локальних критеріїв.

Розглянемо задачу двокритеріальної оптимізації з локальними критеріями f_1 і f_2 . (рис. 10.5).

На рисунку відображені множини значень Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . В множині значень Y_1 є точка A в якій критерії f_1 і f_2 мають мінімальні значення. Ця точка буде рішенням задачі двокритеріальної оптимізації. Для множини Y_2 такої точки немає, але є відрізок BC з наступною властивістю. На цьому відрізку можна знайти таку точку, яка по одному з критеріїв буде кращою і не гіршою іншої точки по другому критерію. Для множини Y_3 таку властивість має дуга DF . Люба точка цієї дуги краща за іншу точку множини Y_3 , проте кожна з точок буде кращою по одному і гіршою по іншому критерію.

Ефективність рішень по Парето вимагає, щоб хоча б для одного із локальних критеріїв $f_j(X^*) \leq f_j(X)$ строга нерівність була замінена на нестрогу, а для решти:

$$X \in D, X \neq X^*, f_j(X^*) < f_j(X) \quad (10.11)$$

Ефективність рішень по Смейлу використовує нестрогі нерівності для всіх локальних критеріїв:

$$X \in D, X \neq X^*, f_j(X^*) \leq f_j(X) \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n \quad (10.12)$$

В поняттях строгих ефективних рішень ефективність по Смейлу є підмножиною ефективності рішень по Парето, а підмножина ефективності рішень по Парето є підмножиною ефективності рішень по Слейтеру.

$$Sm(X) \subset P(X) \subset S(X) \quad (10.13)$$

Принцип Парето – це економічний термін розроблений вченим Вілфредо Парето, який описує такий стан системи при якому значення кожного окремого критерію, який описує цей стан, не може бути покращено без погіршення становища інших елементів. Тобто відповідно до критерію Парето (критерію зростання суспільного добробуту), рух до оптимуму можливий лише при такому розподілі ресурсів, що збільшує добробут принаймні однієї людини, не завдаючи шкоди нікому іншому.

Аналіз методу показав, що його можна використовувати і для аналізу фізичних процесів, наприклад теплопровідності при русі газу або рідини у просторі, так як це в економічних задачах досліджується міграція економічних параметрів, наприклад рухаються назустріч додана вартість секторів економіки і доходи трудових ресурсів.

Для того щоб зробити векторні задачі скалярними найбільш часто використовують такі методи згортання локальних критеріїв до одного глобального як адитивні функції, мультиплікативні функції і метод мінімізації максимального значення.

У **першому випадку** при адитивних функціях для згортання вектору локальних критеріїв до глобального скаляра використовують вираз такого виду:

$$F(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j f_j(X)}{S_j} \quad (10.14)$$

Тут наведена зважена сума локальних критеріїв з ваговим коефіцієнтом λ_j поділених на нормований коефіцієнт S_j . Нормований коефіцієнт переводить значення локального критерію з розмірної форми до певного діапазону безрозмірної форми для співставлення різного виду локальних критеріїв, які мають різну фізичну природу і розмірності. Перетворення локальних критеріїв в безрозмірною форму може виконуватись за допомогою різного виду алгоритмів. За нормовані коефіцієнти приймають значення проектних параметрів, які є найкращими, або мінімальні значення локальних критеріїв, які можуть бути в області допустимих значень. В результаті ділення на нормований коефіцієнт критерій стає безрозмірним.

Вагові коефіцієнти λ_j відображають відносний вклад локальних критеріїв в глобальний. Як правило сума вагових коефіцієнтів біля локальних критеріїв дорівнює 1.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (10.15)$$

Мультиплікативна функція найбільш часто має такий вигляд:

$$F(X) = 1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_j \cdot f_j(X)}{s_j} \right) \quad (10.16)$$

хоча можуть використовуватись і інші види функцій, наприклад така, як функція узгоджених добутків, де ваговий коефіцієнт є ступенем локального критерія оптимальності:

$$F(X) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(X)}{s_j} \right)^{\lambda_j} \quad (10.17)$$

До переваг мультиплікативних функцій можна віднести наступне:

- Не обов'язково нормувати локальні критерії.
- Практично завжди визначається одне оптимальне рішення.
- Недоліки можуть бути такими:
- Труднощі у визначенні вагових коефіцієнтів.
- Перемножування локальних критеріїв, що мають різні розмірності (без нормування).
- Взаємна компенсація при множенні значень локальних критеріїв.

Мінімізація максимального значення може використовувати функцію виду, яка задовольняє таку умову:

$$X^* = \arg \min_{X \in D} \left\{ \max_j \left[\frac{\lambda_j \cdot f_j(X)}{s_j} \right] \right\} \quad (10.18)$$

При виборі мультиплікативних функцій повинна виконуватись умова нормування:

$$\frac{\lambda_j \cdot f_j}{s_j} \leq 1 \quad (10.19)$$

Адитивні функції забезпечують отримання ефективних по Парето рішень. Вибір конкретного елемента множини Парето відповідає набору вагових коефіцієнтів λ_j . Значення вагових коефіцієнтів по Парето можуть вибиратися з урахуванням цінних (економічних) факторів або експертним методом.

При виборі методу скаляризації, зведення локальних критеріїв до одного глобального, можна користуватися такими правилами:

- Адитивні функції для створення глобального критерія краще вибирати, коли ми маємо абсолютні значення локальних критеріїв.
- Мультиплікативні функції вибираються тоді, коли суттєвим є зміна абсолютних значень локальних критеріїв оптимальності при варіюванні керованих змінних.
- Метод мінімізація максимального значення краще вибирати, коли необхідно досягти рівності нормованих значень суперечливих локальних критеріїв.

Згортання локальних критеріїв до одного глобального

Люба складна технологічна система характеризується багатьма критеріями. Через те в загальному вигляді є багатокритеріальна задача оптимізації з векторним критерієм оптимальності $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x))$, яка має s складових, локальних критеріїв. Розв'язати задачу так, щоб виконались всі критерії оптимальності неможливо, через те що вони суперечливі. Через те шукається компроміс між критеріями. Часто для цього користуються рішеннями Парето, по якому знаходять таку оптимальну точку, в якій всі критерії мають задовільний характер і ні одного не можна поліпшити не погіршивши решту. Для оцінки критеріїв в рішенні задачі таким методом приходиться запрошувати експертів. Наприклад тільки експерт може вирішити питання: що краще купити в лабораторію: автоматичний аналізатор, який вимірює десять показників продуктів цукро і коштує сто тисяч гривен, чи простий аналізатор, який вимірює два показники, і коштує 5 тисяч гривен.

Кращим варіантом є привести задачу до одного, скалярного, критерію оптимальності. Це не складно зробити, коли один із критеріїв вважається самим важливим. Наприклад, продуктивність апарату. В цьому випадку оптимізація виконується по цьому головному критерію. На решта критеріїв накладаються обмеження. Наприклад на ціну апарату, якість продукту. Ці обмеження також вибираються суб'єктивно, часто після декількох спроб оптимізації.

Інший шлях рішення багатокритеріальної задачі оптимізації при наявності сумірних критеріїв – це зведення їх до однієї цільової функції, одного критерію оптимальності, за допомогою метода зважених сум:

$$F(x) = \sum_{k=1}^s \lambda_k f_k(x) \rightarrow \max, \quad (10.20)$$

де λ_k – ваговий коефіцієнт, який $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1$. В цьому випадку вагові коефіцієнти також вибираються суб'єктивно.

Інший варіант приведення до однієї цільової функції є метод з використанням узагальненої функції бажаності запропонованої Е.Харінгтоном, яка може описуватись рівнянням узгоджених добутків:

$$F(x) = \prod_{k=1}^s f_k(x)^{\lambda_k} \rightarrow \max, \quad (10.21)$$

або

$$F(x) = \sqrt[s]{\prod_{k=1}^s f_k(x)} \rightarrow \max. \quad (10.22)$$

Перевагою цього метода є те, що високого значення узагальненої цільової функції можна досягти при високих значеннях всіх окремих критеріїв оптимальності. Звичайно, що тут ні одне значення кожного окремого критерію не може дорівнювати нулю. Узагальнена функція

бажаності має такі властивості, як безперервність, монотонність і гладкість. Вимоги до вагових коефіцієнтів залишаються такими ж, як і у попереднього метода.

Якщо відомі ідеальні характеристики окремих критеріїв оптимальності :

$$F^* = (f_1^*, f_2^* \dots, f_s^*), \quad (10.23)$$

то можна визначити функцію віддалі до ідеального значення r і тоді задача приведення до одного критерію оптимальності перетвориться на задачу цільового програмування:

$$r(F^*, F(x)) = \sum_{i=1}^s c_i (f_i^* - f_i(x))^2, \quad (10.24)$$

в якій також виникають складнощі з визначенням значень коефіцієнтів c_i .

Приведення локальних критеріїв оптимальності до безрозмірної форми

Використання вище описаних методів вимагає приведення окремих критеріїв оптимальності до сумісності між собою, до однієї розмірності, або до одного числового діапазону зміни критеріїв. Такі перетворення натуральних значень критеріїв $f_i(x)$ в безрозмірні або сумісні $f'_i(x)$ виконуються за допомогою методів інтерполяції, або більш складними методами.

Приведемо значення критерію $f(x)$, яке змінюється в діапазоні $f(x)_{\min}$, $f(x)_{\max}$, до діапазону 0,01 – 0,99 методом лінійної інтерполяції (рис. 10.6).

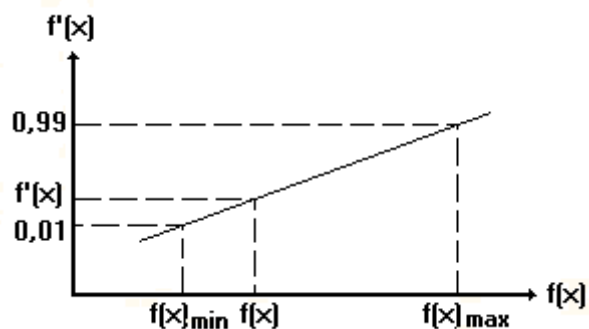


Рис. 10.6. Використання методу лінійної інтерполяції для перетворення критеріїв оптимальності

Нове значення окремого критерію оптимальності буде дорівнювати:

$$f'(x) = 0,01 + \frac{f(x) - f(x)_{\min}}{f(x)_{\max} - f(x)_{\min}} \cdot 0,98. \quad (10.25)$$

В методі Харінгтона використання узагальненої функції бажаності вимагає перетворення окремого критерію оптимальності в сумісний критерій за допомогою функції бажаності:

$$f_i'(x) = \exp[-\exp(-y_i)], \quad (10.26)$$

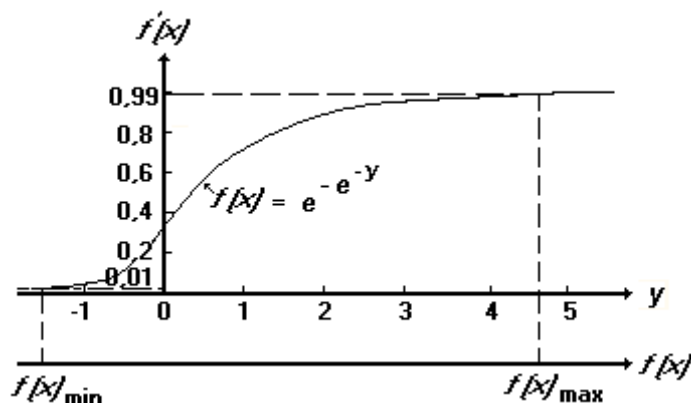


Рис. 10.7. Використання функції бажаності для перетворення критеріїв оптимальності

де $y_i = \varphi[f_i(x)]$ – проміжний безрозмірний параметр, який ми отримуємо із значення окремого натурального значення критерію оптимальності за допомогою лінійної або нелінійної моделі при наявності обмежень накладених на кожний окремий критерій оптимальності (рис.10.7):

$$f_i(x)_{\min} \leq f_i(x) \leq f_i(x)_{\max}. \quad (10.27)$$

Нові значення окремих критеріїв, отриманих за функцією бажаності, будуть змінюватись від 0,01 до 0,99 із-за нечутливості їх значень, коли б вони наближались до 0 або 1.

Приклад постановки задачі оптимізації для багатокритеріальної задачі розглянуто в задачі самостійної роботи.

10.5. Постановка задачі багато параметричної оптимізації

Вивчення методів рішення оптимізаційних задач з декількома змінними основане на матеріалах одновимірних методів. Проте такі задачі, які мають два і більше параметрів, значно складніші за одно параметричні. Ця складність зростає, коли задачі безумовної оптимізації стають задачами умовної оптимізації, тобто появляються обмеження на параметри оптимізації. Трудність в рішенні таких задач зростає, коли серед обмежень на параметри оптимізації є нелінійні обмеження.

Особливо ускладнює рішення багато параметричних нелінійних задач наявність локальних екстремумів, серед яких необхідно знайти глобальний, - це, так звані, багато екстремальні задачі. Тому проблема вибору числового методу рішення цього класу задач досить складна і вимагає розуміння як математичного апарату методів рішення оптимізаційних задач, так і знання технологічних аспектів задачі, яку вирішуємо.

При вирішенні задачі нелінійної багато параметричної оптимізації постановкою задачі оптимізації передбачається необхідність знаходження мінімуму цільової функції:

$$f(X) \rightarrow \min, \quad X \in D \quad (10.28)$$

де X - вектор параметрів оптимізації $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ з розмірністю N , підмножини D ; D – область допустимих значень параметрів; $f(X)$ – нелінійна скалярна функція визначена підмножиною X , яка має кінцеве значення.

При рішенні задач умовної оптимізації вводяться обмеження на параметри оптимізації типу нерівностей і рівностей:

$$\begin{aligned} g_i(X) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K; \\ h_i(X) &= 0, \quad i = K+1, \dots, M, \end{aligned} \quad (10.29)$$

де, як правило, обмеження нерівності $g_i(X)$ при $i = 1, 2, \dots, K$ показують технічні характеристики процесу або технологічної структури, а обмеження рівності $h_i(X)$ при $i = K+1, \dots, M$ відображають технологічні і фізичні закони, які використовуються в моделі.

Для рішення задач з обмеженнями розроблені лише алгоритми локальної оптимізації, знаходження локальних мінімумів. Алгоритми глобальної оптимізації для багато екстремальних задач розроблені лише для простих обмежень з прямокутною допустимою областю: $D = \{X: a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, N\}$. При використанні методів умовної локальної оптимізації з обмеженнями вибір напрямку спуску визначається не тільки зменшенням значення цільової функції, але і обмеженнями. Крок руху вибирається таким чином, щоб зменшуючи значення цільової функції, не вийти з області допустимих значень.

На практиці визначити, багато екстремальна задача чи ні дуже важко. Факт наявності багатьох екстремумів визначається в процесі рішення задачі, коли, шукаючи оптимум з декількох початкових точок, знаходять декілька екстремумів.

Нелінійна цільова функція може бути випуклою і невивуклою, диференційованою і такою, для якої похідна не існує. Краще мати справу з випуклою функцією, бо тоді задача має один екстремум, і з диференційованою, бо вирішується більш простими методами. Якщо цільова функція диференційована, то з курсу математичного аналізу відомо, що оптимум може бути в точках розриву функції $f(X)$, або її градієнта $\nabla f(X)$.

При рішенні задач багато параметричної оптимізації використовують деякі визначення.

Нормою вектору параметрів оптимізації X називається довжина вектора, яка визначається відстанню від початку координат багатовимірному простору до точки X , і рахується за однією з формул:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{або} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{або} \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (10.30)$$

Необхідними умовами наявності локального мінімуму в точці X^* є виконання рівності $\nabla f(X^*) = 0$, і умови додатної напіввизначеності матриці $\nabla^2 f(X^*)$. Тут $\nabla f(X)$ вектор, градієнт, перших частинних похідних функції $f(X)$:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_N} \right), \quad (10.31)$$

а $\nabla^2 f(X)$ матриця других частинних похідних, гессіан, функції $f(X)$:

$$\nabla^2 f(X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_N \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_N^2} \end{vmatrix} \quad (10.32)$$

Значення матриці других частинних похідних визначається по рівняннях курсу лінійної алгебри.

Приклад визначення екстремуму аналітично

Розглянемо функцію $f(X) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$. Необхідно визначити чи є екстремум (мінімум) у точці $X^* = [0, 0]$.

Визначимо градієнт, перших частинних похідних функції $f(X^*)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 4x_2^3 - 10x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 12x_1x_2^2 - 10x_1 + 2x_2,$$

тоді $\nabla f(X^*) = [0, 0]$. У цьому випадку точка X^* називається стаціонарною. Знайдемо матрицю других частинних похідних функції $f(X^*)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 24x_1x_2 + 2 = +2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 12x_2^2 - 10 = -10.$$

$$\text{Відповідно } \nabla^2 f(X^*) = \begin{bmatrix} +4 & -10 \\ -10 & +2 \end{bmatrix}.$$

Матриця $\nabla^2 f(X)$ є невизначеною і тому точка X^* не оптимальна точка, а сідловидна.

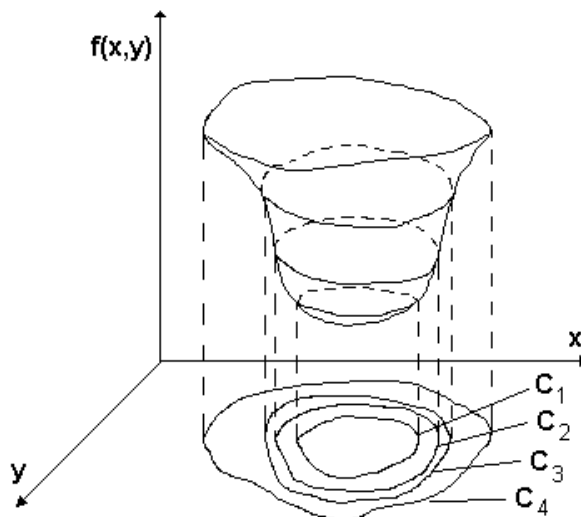


Рис. 10.8. Зображення ліній постійного рівня на площині x, y

Графічне зображення цільової функції двох змінних

Багато параметричну задачу оптимізації зручно розглядати з двома параметрами x і y . Ці параметри разом з цільовою функцією створюють тривимірний простір, що має координати x , y , f . Зміна значень цільової функції $f(x,y)$ буде деякою поверхнею. Задачею оптимізації буде знаходження найнижчої точки цієї поверхні. (рис. 10.8).

Можна перетнути цю поверхню паралельними площинами, які відповідають деяким постійним значенням цільової функції $f(x,y)=C_1$, $f(x,y)=C_2$, $f(x,y)=C_3$ і т. д. Причому відстань між цими площинами може бути постійна $C_{i+1} - C_i = \text{const}$. Зробимо проєкцію ліній перетину площинами C поверхні цільової функції на площину параметрів оптимізації x і y . Отримані проєкції називаються **лініями постійного рівня** цільової функції $f(x,y)$. Отриманий рисунок подібний до топографічного зображення рельєфу місцевості і по ньому видно де знаходяться екстремальні точки рішення задачі. В залежності від виду ліній рівня рельєфи проєкції цільової функції на площину параметрів оптимізації поділяються на котловинний, яристовий і неупорядкований.

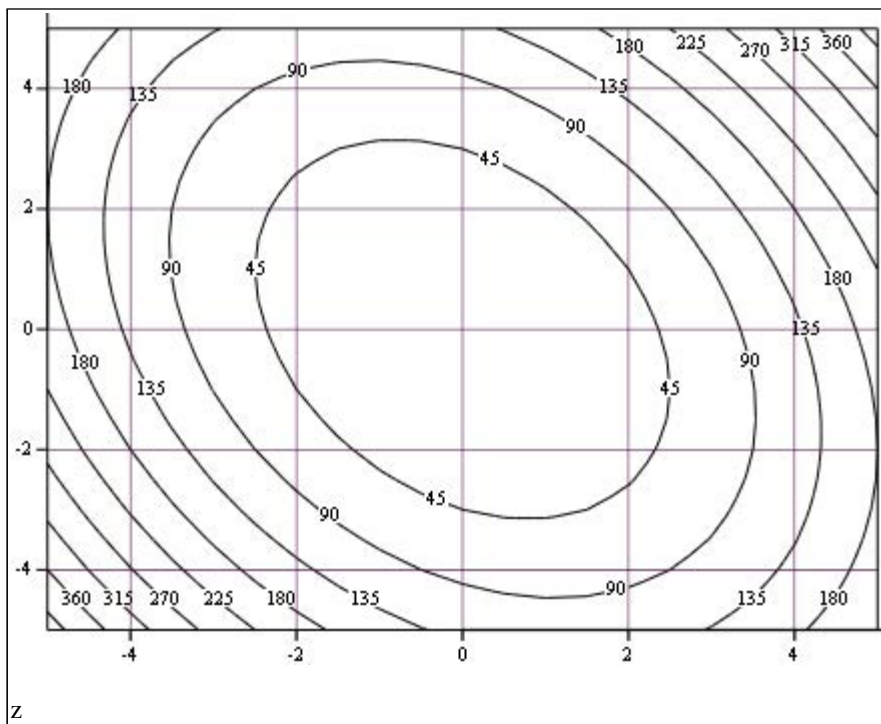


Рис.10.9. Цільова функція з рельєфом котловинного виду

Лінії рівня у **рельєфів котловинного** виду мають еліпсоїдальну форму. Дивись рисунок 10.8. для функції $f(x,y)= 8x^2 + 4xy + 5y^2$. У функцій, які мають такий тип рельєфу, при наближенні до екстремальної точки суттєві зміни параметрів оптимізації не дають помітних змін цільової функції. Пошук оптимуму у функцій такого виду виконується без складнощів.

Якщо при побудові ліній рівня одна координата, параметр оптимізації, значно більша за іншу, або, якщо цільова функція не диференціюється, то тоді рельєф ліній набуває **яристого виду**. При обчисленні мінімальних значень для функцій, які мають такий вид рельєфу, виникають великі складнощі. На рис. 10.10. показана типова траєкторія руху методом найскорішого спуску до оптимуму функції, що має яристий рельєф.

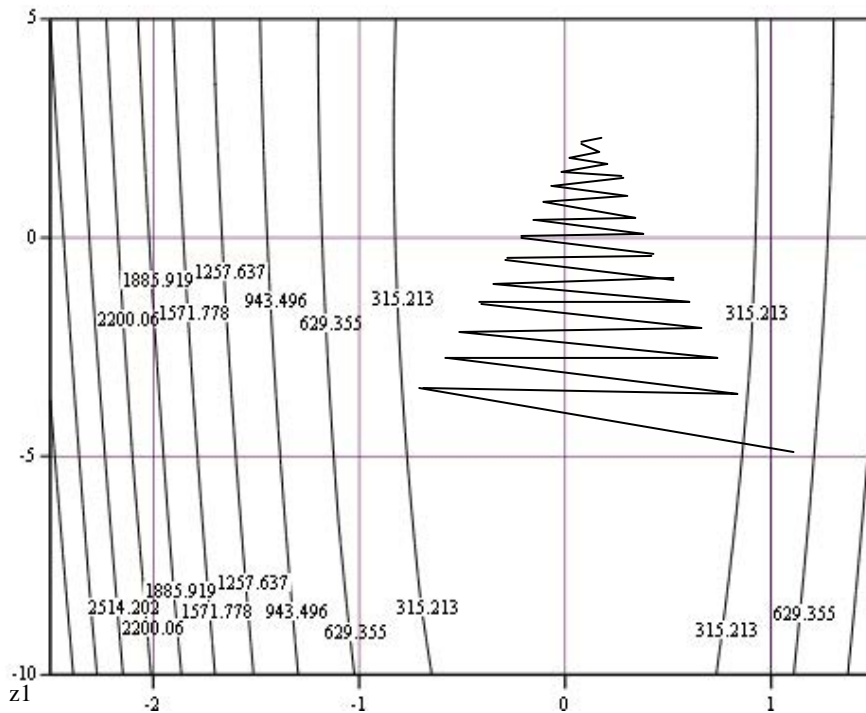


Рис. 10.10. Цільова функція з рельєфом яристого виду

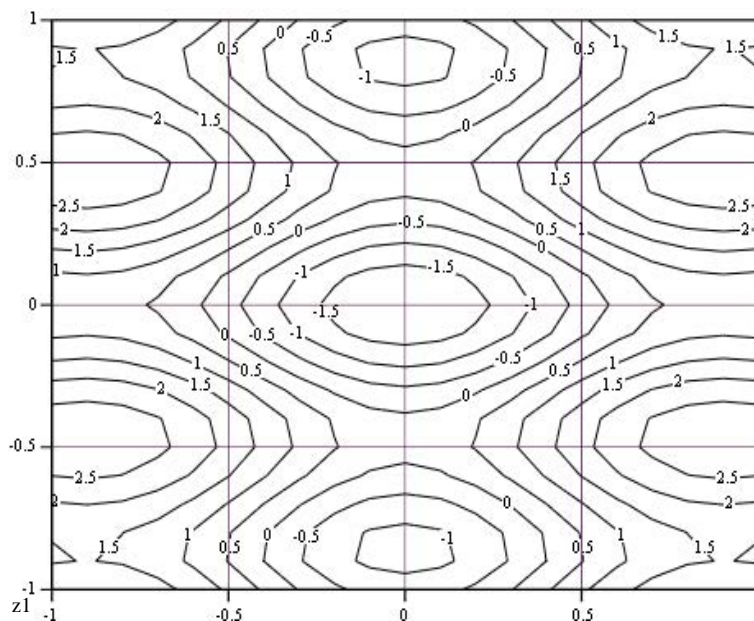


Рис. 10.11. Цільова функція з рельєфом неупорядкованого виду

Рівняння що відображене лініями рівня на рис. 10.10. має вигляд:
 $f(x,y)=10(0,3y - x^2)^2 + (1 - 20x)^2$.

При наявності багатьох мінімумів, максимумів і сідловин рельєф функції має **неупорядкований вид**. Наприклад для функції $f(x,y)= x^2 + y^2 - \cos(4x) - \cos(7y)$ (рис. 10.11.). Для функцій такого виду, як правило, можна знайти тільки локальний екстремум.

10.6.Точність, ефективність обчислень і методи рішення задач оптимізації функції декількох змінних

Успішне вирішення задачі залежить від вибраної точності обчислень. Для різного класу задач точність вибирається по різному. Задачі, які мають один екстремум і диференційовану цільову функцію можуть вирішуватись з високою точністю. Багато екстремальні задачі з великою кількістю параметрів вирішуються, як правило, наближено.

Точність визначається різними методами. Один з них полягає в обчисленні відстані від знайденої оптимальної точки X_k до справжньої точки оптимуму X^* по рівнянню $\Delta X = \| X_k - X^* \|$. Це в тому випадку, коли цільова функція в оптимальній зоні нечутлива або малочутлива.

В іншому визначається різниця значень цільової функції у цих точках $\Delta f = f(X_k) - f(X^*)$. Якщо цільова функція окіл оптимуму змінюється мало, то використовують міру похибки ΔX . Для багато екстремальних задач використовують міру похибки Δf .

При знаходженні оптимуму по заданому методу оптимізації з використанням заданої точності порівнюють значення цільової функції в двох сусідніх точках пошуку X_k і X_{k+1} , якщо значення заданої точності абсолютне число $|f(X_k) - f(X_{k+1})| < \varepsilon$. Якщо задана точність має відносне значення, то оцінка точності виконується за такою формулою:

$$\frac{|f(X_k) - f(X_{k+1})|}{1 + |f(X_k)|} < \varepsilon . \quad (10.33)$$

У випадку нечутливої цільової функції оцінкою є норма вектору поточної точки пошуку, відносно попередньої точки: $\| X_k - X_{k+1} \| < \varepsilon$.

Ефективність використаного методу оптимізації найчастіше оцінюється кількістю прорахунків значень цільової функції або часом затраченим на вирішення задачі на ПК. Для оцінки методів використовуються тестові задачі. Так для методів, які знаходять локальний екстремум, використовують тестові задачі з рельєфом яристого виду. Для пошуку глобального екстремуму використовують тестові задачі з рельєфом неупорядкованого виду.

Числові методи рішення багато параметричних нелінійних задач оптимізації зводяться до побудови траєкторії руху до точки оптимуму. В залежності від рельєфу і виду цільової функції методи рішення можна поділити на:

- *методи прямого пошуку*, які основані на обчисленні тільки значень цільової функції. До таких методів відносяться методи: сіток, по координатного спуску і випадкового пошуку;
- *градієнтні методи*, в яких використовуються точні значення перших похідних цільової функції $f(X)$;
- *методи другого порядку*, в яких поряд з першими похідними використовуються також і другі похідні функції $F(X)$.

Вказані методи можна використовувати не тільки для задач пошуку мінімуму цільової функції, а також і при пошуку максимального їх значення заміною цільової функції $F(X)$ на $-F(X)$.

Контрольні запитання

1. Що таке оптимізація і коли вона можлива?
2. Чому при розв'язанні задач оптимізації не можна обійтись без використання персональних комп'ютерів?
3. Що є основою при розв'язанні задач оптимізації?
4. Які компоненти входять в постановку задачі оптимізації?
5. Які є види цільової функції і основні її властивості?
6. Основні вимоги до критерію оптимальності або цільової функції?
7. Методи рішення багатокритеріальних задач?
8. Які є методи переведення натуральних значень локальних критеріїв оптимізації в безрозмірні?
9. Які переваги методу Харінгтона в приведенні локальних критеріїв оптимізації до безрозмірної форми?
10. Навіщо потрібні інтервали бажаності в методі Харінгтона?
11. Коли зростає складність розв'язання багато параметричних оптимізаційних задач?
12. Яка постановка задачі багато параметричної оптимізації?
13. Що таке норма вектора параметрів оптимізації?
14. Як з'являються лінії постійного рівня?
15. Які є рельєфи ліній постійного рівня?
16. Як визначається точність розв'язання задачі з багатьма параметрами?
17. Які відомі методи розв'язання багато параметричних задач?
18. Особливості розв'язання задачі оптимізації градієнтним методом?

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ

Лабораторна робота 1

на тему: «Знаходження квадратичної математичної моделі по даних двох параметричного пасивного експерименту в середовищі MatCad»

Мета роботи: За допомогою пакету MathCad методом найменших квадратів по даних результатів пасивного експерименту навчитись отримувати квадратичну математичну модель об'єкту моделювання, оцінювати похибку моделі, будувати двохпараметричні графіки і виконувати пошук оптимального параметру моделі методом сіток.

1.1. Теоретична частина

Завданням роботи є оптимізація попередньої дефекації за рахунок вибору значення рН дифузійного соку.

В даному завданні метою роботи є визначення оптимального значення рН дифузійного соку і його чистоти для забезпечення мінімального вмісту РКД у соку попередньої дефекації.

Дані були отримані на кафедрі технології цукристих речовин в лабораторних умовах на пробах дифузійного соку різної чистоти, який обробляли вапном проводячи прогресивну попередню дефекацію, додавання до соку 0,1; 0,2; 0,3; 0,35; 0,4 % СаО. Загальний вміст РКД визначали методом Харіна. Результати досліджень зведені в таблицю.

Чистота соку	Номери дослідів Параметри дослідів	1	2	3	4	5
79,4	Значення рН	6,3	7,6	8,4	8,9	9,8
	Вміст РКД,%	4,0	3,0	2,6	2,3	2,7
85,0	Значення рН	6,0	6,9	7,5	9,2	9,9
	Вміст РКД,%	3,4	2,9	2,6	2,1	3,1
88,4	Значення рН	7,0	8,5	9,0	9,5	10
	Вміст РКД,%	3,6	3,1	2,7	2,9	3,5
88,6	Значення рН	7,0	8,5	9,1	9,6	10
	Вміст РКД,%	4,1	3,0	2,7	2,9	3,5

1.2. Постановка задачі оптимізації

вказуються параметри оптимальності, діапазони їх змін і характеризується цільова функція.

Для даного завдання:

а. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – значення рН дифузійного соку; x_2 – чистота дифузійного соку, %.

б. Цільовою функцією є технологічний критерій оптимізації $F(X)$, – вміст РКД у соку з попередньої defeкації:

$$F(X) \rightarrow \min ,$$

в. Обмеження на параметри оптимізації такі: $6 \leq x_1 \leq 10$; одиниць рН; $79,4 \leq x_2 \leq 88,6$, %.

1.3.Розроблення математичної моделі

Використовується метод найменших квадратів. В даній роботі треба знайти рівняння залежності вмісту РКД від значення рН і чистоти дифузійного соку. Рівняння отримати у вигляді квадратного двох параметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2$$

Для рівняння знайти середньоквадратичну похибку і побудувати графіки рівняння з приведенням точок дослідних даних. Рисунки графіків підписувати послідовно: Рис. 1., Рис. 2. , з назвою графіка.

Наведемо подібний приклад:

$$N := 19 \qquad i := 0..N$$

$$R := (0.15 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0.15 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0.15 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0.15 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 3)^T$$

$$\tau := (5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30 \ 30)^T$$

$$G := (50 \ 54 \ 59 \ 62 \ 64 \ 52 \ 55 \ 61 \ 64 \ 65 \ 55 \ 58 \ 62 \ 64 \ 65 \ 58 \ 61 \ 64 \ 66 \ 67)^T$$

$$A := \begin{bmatrix} N+1 & \sum R & \sum \tau & \sum R_i \cdot \tau_i & \sum R^2 & \sum \tau^2 \\ \sum R & \sum R^2 & \sum R_i \cdot \tau_i & \sum (R_i)^2 \cdot \tau_i & \sum R^3 & \sum R_i \cdot (\tau_i)^2 \\ \sum \tau & \sum R_i \cdot \tau_i & \sum \tau^2 & \sum R_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum (R_i)^2 \cdot \tau_i & \sum \tau^3 \\ \sum R_i \cdot \tau_i & \sum (R_i)^2 \cdot \tau_i & \sum R_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum (R_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 & \sum (R_i)^3 \cdot \tau_i & \sum R_i \cdot (\tau_i)^3 \\ \sum R^2 & \sum R^3 & \sum (R_i)^2 \cdot \tau_i & \sum (R_i)^3 \cdot \tau_i & \sum R^4 & \sum (R_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 \\ \sum \tau^2 & \sum R_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum \tau^3 & \sum R_i \cdot (\tau_i)^3 & \sum (R_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 & \sum \tau^4 \end{bmatrix}$$

$$a := A^{-1} \cdot C$$

$$F1(x1, x2) := a_0 + a_1 \cdot x1 + a_2 \cdot x2 + a_3 \cdot x1 \cdot x2 + a_4 \cdot x1^2 + a_5 \cdot x2^2$$

$$SKP1 := \sqrt{\sum_{i=0}^N \frac{(G_i - F1(R_i, \tau_i))^2}{N}} \quad SKP1 = 0.733$$

$$C := \begin{bmatrix} \sum G \\ \sum G_i \cdot R_i \\ \sum G_i \cdot \tau_i \\ \sum G_i \cdot R_i \cdot \tau_i \\ \sum G_i \cdot (R_i)^2 \\ \sum G_i \cdot (\tau_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 47.66524 \\ 11.2151 \\ 0.29875 \\ -0.07414 \\ -1.95492 \\ 0.00013 \end{pmatrix}$$

$$f05(x) := F1(0.5, x) \quad f2(x) := F1(2, x) \quad f3(x) := F1(3, x)$$

$$fm(x) := F1(0.15, x) \quad f1(x) := F1(1, x)$$

$$j := 0..3 \quad \tau1_j := \tau_{0+5j} \quad gm_j := G_{0+5j}$$

$$g05_j := G_{1+5j} \quad g1_j := G_{2+5j} \quad g2_j := G_{3+5j} \quad g3_j := G_{4+5j}$$

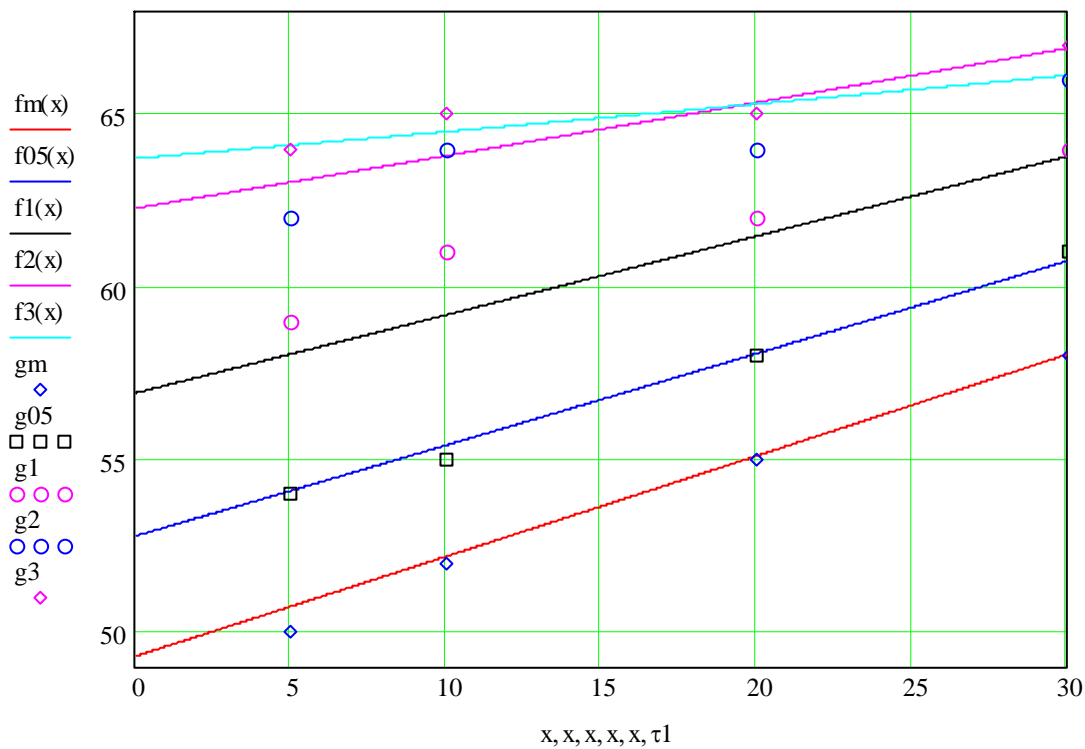


Рис. 1. Залежність вмісту цукрози в соку від часу екстракції при значеннях розміру частинок буряків 0,15; 0,5; 1; 2; 3 см.

1.4. Оптимізація результатів моделювання

Знаходяться оптимальні значення рН і чистоти соку по технологічному (мінімальний вміст РКД) критерію оптимальності. При пошуку максимуму в програмі знак < змінюється на знак >.

Для цього задається діапазон зміни параметрів оптимізації і кількість розрахункових точок критерію, формується масив значень параметрів і розраховується за знайденою формулою розраховане значення вмісту РКД. Це може виглядати так:

$$a1 := 6 \quad b1 := 10 \quad a2 := 79.4 \quad b2 := 88.6 \quad nn := 20 \quad i1 := 0..nn \quad j1 := 0..nn$$

$$h1 := \frac{b1 - a1}{nn} \quad h2 := \frac{b2 - a2}{nn} \quad p1_{i1} := a1 + h1 \cdot i1 \quad p2_{j1} := a2 + h2 \cdot j1$$

$$Y1_{i1,j1} := F1(p1_{i1}, p2_{j1})$$

Дані масиву технологічного критерію оптимальності виводяться на друк і по них малюється графік ліній постійного рівня. Мінімальне значення критерію (вмісту РКД) вказує на оптимальну величину параметрів оптимізації.

З масиву даних знаходяться оптимальні значення параметрів оптимізації за допомогою програми OPT2. Параметром програми F і є наша цільова функція. По результат роботи пишеться висновок

<pre> OPT2(F, n, a1, a2, h1, h2) := MA ← F_{0,0} im ← 0 jm ← 0 for i1 ∈ 0..n-1 for j1 ∈ 0..n-1 if F_{i1,j1} < MA MA ← F_{i1,j1} im ← i1 jm ← j1 x1m ← a1 + h1 · (im) x2m ← a2 + h2 · (jm) z₀ ← MA z₁ ← x1m z₂ ← x2m z </pre>	<p>Програма знаходження мінімального значення критерія оптимальності (вмісту РКД) з двовимірного масиву</p>
--	---

$$OPT2(Y1, N, a1, a2, h1, h2) = \begin{pmatrix} 2.108 \\ 8.8 \\ 83.08 \end{pmatrix}$$

Висновок:

Оптимальне (мінімальне значення редукованих речовин в соку дорівнює 2.108 % при значенні рН = 8,8 і чистоті соку 83%.

1.5. Варіанти індивідуальних завдань

Завдання до першої роботи брати із першої частини завдань лабораторної роботи №2. Результати роботи №1 використовуються у лабораторній роботі №2 як перша частина роботи по створенню моделі. В лабораторній роботі №2 оптимізація виконується по узагальненому критерію з використанням перетворень методом Харінгтона.

В якості індивідуального завдання в даній роботі можуть бути використані також дослідні дані двох параметричного пасивного експерименту виконаного аспірантом.

Лабораторна робота 2

на тему: «Оптимізація результатів досліджень з використанням багатокритеріальної цільової функції»

Мета роботи: Вивчити методику створення математичної моделі технологічного процесу по результатах проведених досліджень і проведення його оптимізації по узагальненому критерію для багатокритеріальної задачі з використанням пакету MathCad.

2.1. Завдання по роботі:

По матеріалах завдання розробити математичну модель для оцінки роботи технологічного процесу по узагальненому критерію, який складається з трьох, чотирьох локальних критеріїв. Привести за допомогою методу Харрінгтона локальні критерії до безрозмірної форми і оптимізувати ОК методом сіток з використанням пакету MathCad з побудовою ліній рівня узагальненого критерію і знаходженням оптимальної точки.

2.2. Приклад виконання роботи

Завдання в прикладі виконане на тему: „Оптимізація процесу перероблення бою і хвостиків цукрових буряків з електрообробленням”.

В даному прикладі метою роботи є визначення оптимальної температури і тривалості електричного оброблення при переробці бою і хвостиків цукрових буряків по узагальненому критерію.

При переробці бою і хвостиків цукрових буряків отримують мезгу розміром 2 – 7 мм, яку далі обробляють на електроімпульсному пристрої. Температура процесу і час оброблення суттєво впливають на якість і вихід цукру з буряків.

Дослідженням встановлено вплив температури і часу електрооброблення на характеристики соку (див. табл.2.1.).

Таблиця 2.1.

Вплив температури і часу електрооброблення на характеристики соку

Час електрооброблення, с.	0	1	2	3	5	
Температура обробки, °С	Вихід соку з мезги, %					
40	50	54	59	62	64	
50	52	55	61	64	65	
60	55	58	62	64	65	
70	58	61	64	66	67	
	Чистота соку, %					
40	80,9	81,4	81,7	81,9	81,8	
50	81,1	81,5	81,8	82,0	81,9	
60	81,5	81,7	81,9	82,2	82,1	
70	81,4	81,5	81,7	81,8	81,9	

Для даного завдання:

1. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – температура процесу, °C, x_2 – час електричного оброблення, с.

2. Цільовою функцією є узагальнений критерій оптимізації $F(X)$, який враховує максимальний вихід соку з обробленої мезги f_1 , максимальну чистоту соку f_2 і мінімізує теплові затрати f_3 . Враховуючи більшу важливість двох перших факторів вагові коефіцієнти вибрані так:

$$F(X) = f_1^{0,4} f_2^{0,4} f_3^{0,2} \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

Рівні значущості, при переведенні факторів в безрозмірну форму методикою Харінгтона, вибираємо самі.

3. Обмеження на параметри оптимізації такі: $40 \leq x_1 \leq 70$, °C ; $0 \leq x_2 \leq 5$, с.

При розробленні математичної моделі використовується метод найменших квадратів. В даній роботі треба знайти рівняння залежності зменшення чистоти і виходу соку від температури і тривалості оброблення. Рівняння отримати у вигляді квадратного двох параметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2 \quad (2.2)$$

Для рівняння знаходять середньоквадратичну похибку і будують графіки рівняння з приведенням точок дослідних даних. Наведемо приклад з використанням MathCad:

$$N := 19 \quad i := 0..N$$

$$T := (40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 40 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 60 \ 60 \ 60 \ 60 \ 60 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70 \ 70)^T$$

$$\tau := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5)^T$$

$$G := (50 \ 54 \ 59 \ 62 \ 64 \ 52 \ 55 \ 61 \ 64 \ 65 \ 55 \ 58 \ 62 \ 64 \ 65 \ 58 \ 61 \ 64 \ 66 \ 67)^T$$

$$A := \begin{bmatrix} N+1 & \sum T & \sum \tau & \sum_i T_i \cdot \tau_i & \sum T^2 & \sum \tau^2 \\ \sum T & \sum T^2 & \sum_i T_i \cdot \tau_i & \sum_i (T_i)^2 \cdot \tau_i & \sum T^3 & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^2 \\ \sum \tau & \sum_i T_i \cdot \tau_i & \sum \tau^2 & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum_i (T_i)^2 \cdot \tau_i & \sum \tau^3 \\ \sum_i T_i \cdot \tau_i & \sum_i (T_i)^2 \cdot \tau_i & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum_i (T_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 & \sum_i (T_i)^3 \cdot \tau_i & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^3 \\ \sum T^2 & \sum T^3 & \sum_i (T_i)^2 \cdot \tau_i & \sum_i (T_i)^3 \cdot \tau_i & \sum T^4 & \sum_i (T_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 \\ \sum \tau^2 & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^2 & \sum \tau^3 & \sum_i T_i \cdot (\tau_i)^3 & \sum_i (T_i)^2 \cdot (\tau_i)^2 & \sum \tau^4 \end{bmatrix}$$

$$a := A^{-1} \cdot C$$

$$F1(x1, x2) := a_0 + a_1 \cdot x1 + a_2 \cdot x2 + a_3 \cdot x1 \cdot x2 + a_4 \cdot x1^2 + a_5 \cdot x2^2$$

$$SKP1 := \sqrt{\sum_{i=0}^N \frac{(G_i - F1(T_i, \tau_i))^2}{N}} \quad SKP1 = 0.629$$

$$C := \begin{bmatrix} \sum G \\ \sum G_i \cdot T_i \\ \sum G_i \cdot \tau_i \\ \sum G_i \cdot T_i \cdot \tau_i \\ \sum G_i \cdot (T_i)^2 \\ \sum G_i \cdot (\tau_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 44.84529 \\ 0.04014 \\ 7.09988 \\ -0.03824 \\ 0.002 \\ -0.51859 \end{pmatrix}$$

$f40(x) := F1(40, x)$ $f50(x) := F1(50, x)$
 $f60(x) := F1(60, x)$ $f70(x) := F1(70, x)$
 $j := 0..4$ $\tau_{1j} := \tau_j$ $g40_j := G_j$
 $g50_j := G_{j+5}$ $g60_j := G_{j+10}$ $g70_j := G_{j+15}$

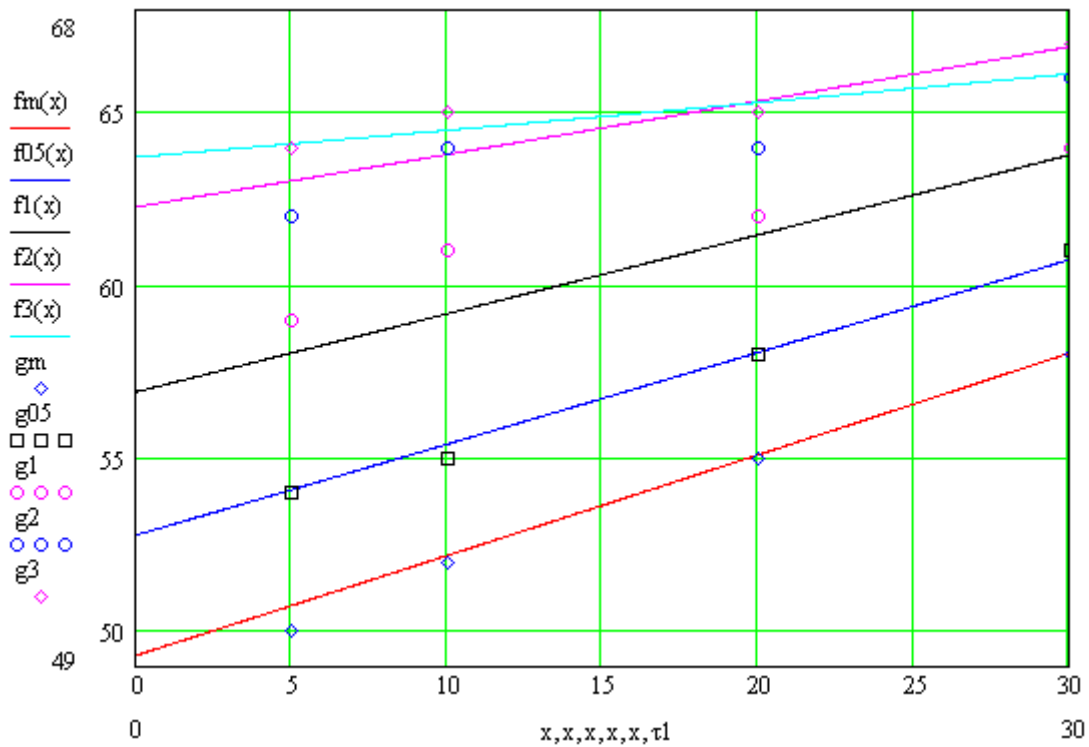


Рис.2.1. Залежність вмісту цукрози в соку від часу екстракції при значеннях розміру частинок буряків 0,15; 0,5; 1; 2; 3 см

Для перевірки рівняння отримують середньоквадратичну похибку і будують рисунок графіків при постійних значеннях одного із параметрів.

Далі знаходяться оптимальні значення температури і часу електрооброблення по узагальненому критерію оптимальності.

Для цього задається діапазон зміни параметру оптимізації $a1 - b1$, $a2 - b2$ і кількість розрахункових точок критерію nn , формується масив значень параметрів і розраховуються за знайденими формулами натуральні значення локальних критеріїв оптимальності. Це може виглядати так:

$$a1 := 40 \quad b1 := 70 \quad a2 := 0 \quad b2 := 5 \quad nn := 20 \quad i1 := 0..nn \quad j1 := 0..nn$$

$$h1 := \frac{b1 - a1}{nn} \quad h2 := \frac{b2 - a2}{nn}$$

$$p1_{i1} := a1 + h1 \cdot i1 \quad p2_{j1} := a2 + h2 \cdot j1$$

$$Y1_{i1,j1} := F1(p1_{i1}, p2_{j1}) \quad Y2_{i1,j1} := F2(p1_{i1}, p2_{j1})$$

Потім за допомогою програми, що приведена нижче, за допомогою методу Харінгтона знаходяться масиви безрозмірних значень локальних критеріїв оптимальності, які і використовуються при обчисленні масиву значень узагальненого критерію оптимальності:

$$ff1_{i1,j1} := \text{HAR}(\text{IBG}, D, Y1_{i1,j1}, 1)$$

$$Ff_{i1,j1} := (ff1_{i1,j1})^{0.4} \cdot (ff2_{i1,j1})^{0.4} \cdot (ff3_{i1,j1})^{0.2}$$

В програмі Харінгтона HAR параметри FN і D – це вектори інтервалів бажаностей натурального локального критерію і безрозмірного $(0,01; 0,2; 0,37; 0,63; 0,8; 0,99)$, fn – масив натуральних значень локального

```

OPT2(F,n,a1,a2,h1,h2) :=
  MA ← F0,0
  im ← 0
  jm ← 0
  for i1 ∈ 0..n-1
    for j1 ∈ 0..n-1
      if Fi1,j1 > MA
        MA ← Fi1,j1
        im ← i1
        jm ← j1
  x1m ← a1 + h1 · (im)
  x2m ← a2 + h2 · (jm)
  z0 ← MA
  z1 ← x1m
  z2 ← x2m
  z

```

критерію і z – лічильник, який вказує на зменшення (0), чи збільшення (1) вектора FN .

Дані масиву узагальненого критерію оптимальності виводяться на друк і по них малюється графік ліній постійного рівня. Максимальне значення критерію вказує на оптимальну величину параметрів оптимізації.

З масиву даних знаходяться оптимальні значення параметрів оптимізації за допомогою програми OPT2 . Параметром програми F і є наша цільова функція. По результат роботи пишеться висновок.

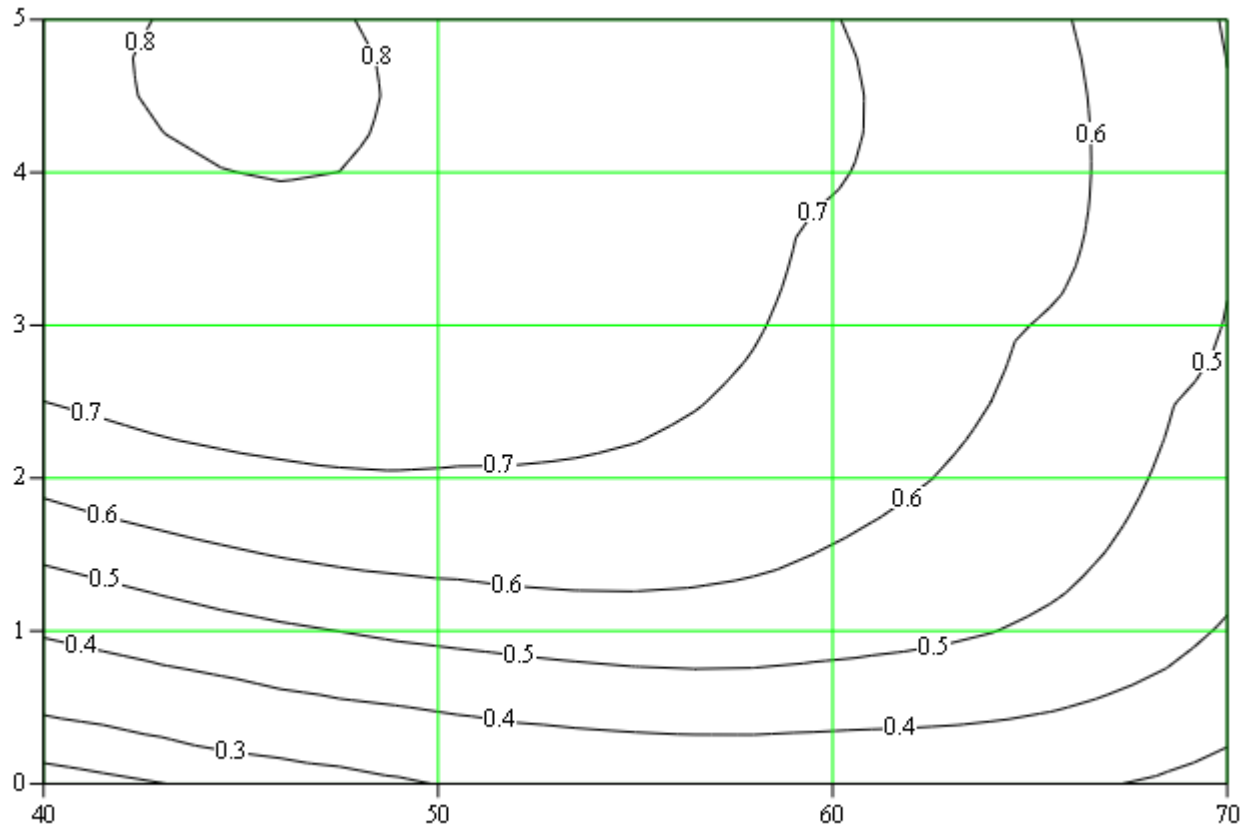
Програма переведення локальних критеріїв оптимізації в безрозмірну форму методом Харінгтона має вид:

```

HAR(FN,D,fn,z) := FP ← -ln(-ln(D))
                  if z = 1
                    if fn < FN0
                      fb ← D0
                      break
                    if fn > FN5
                      fb ← D5
                      break
                    for i ∈ 0, 1.. 5
                      if fn = FNi
                        fb ← Di
                        break
                      if fn < FNi+1
                        fp ← FPi +  $\frac{(fn - FN_i) \cdot (FP_{i+1} - FP_i)}{FN_{i+1} - FN_i}$ 
                        fb ← e-e-fp
                        break
                    otherwise
                      if fn > FN0
                        fb ← D0
                        break
                      if fn < FN5
                        fb ← D5
                        break
                      for i ∈ 0, 1.. 5
                        if fn = FNi
                          fb ← Di
                          break
                        if fn > FNi+1
                          fp ← FPi +  $\frac{(fn - FN_i) \cdot (FP_{i+1} - FP_i)}{FN_{i+1} - FN_i}$ 
                          fb ← e-e-fp
                          break
                  fb

```

Приклад оформлення графіку ліній рівня узагальненої цільової функції:



Ff

Рис. 2.2. Лінії рівня узагальненого критерію оптимальності в координатах температури і часу електрооброблення мезги.

2.3. Варіанти індивідуальних завдань

Завдання до варіанту 1

для виконання лабораторної роботи 2 на тему: „Оптимізація втрат цукрози при екстрагуванні цукрози з бурякової стружки”

Теоретична частина

В даному завданні метою роботи є визначення оптимальної відкачки при екстрагуванні і оптимального вмісту сухих речовин жому при його пресуванні по узагальненому критерію оптимальності з урахуванням втрат цукрози.

Пресування жому з поверненням жомопресової води на дифузію дійсно зменшує втрати цукрози в жомі, але одночасно з жомопресовою водою у сік поступають нецукри, які практично повністю переходять у мелясу, збільшуючи її вихід і кількість в ній цукру. Тому при підрахунках втрат цукру їх треба рахувати сумарно: і в пресованому жомі і додаткові, за рахунок нецукрів жомопресової води, в мелясі.

Дані по втратах цукрози наведені в таблиці (див. табл. 2.2)

Дані по втратах цукрози

Відкачка дифузійного соку, % до м. б..	105	110	115	122	
Вміст СР в пресованому жомі, %.	Втрати цукрози в пресованому жомі, % до м.б.				
14	0,43	0,33	0,28	0,16	
18	0,31	0,25	0,2	0,12	
22	0,25	0,19	0,16	0,09	
	Втрати цукрози в мелясі за рахунок нецукрів жомопресової соди, % до м.б.				
14	0,28	0,23	0,22	0,21	
18	0,36	0,32	0,29	0,27	
22	0,42	0,37	0,35	0,31	

Постановка задачі оптимізації

Для даного завдання:

1. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – відкачка дифузійного соку, % до м. б.; x_2 – вміст СР пресованого жому, %.

2. Цільовою функцією є узагальнений критерій оптимізації $F(X)$, який враховує мінімальні втрати цукрози в пресованому жомі f_1 , мінімальні додаткові втрати цукрози в мелясі за рахунок не цукрів жомопресової води f_2 і мінімізує затрати на пресування жому (вміст СР жому) f_3 і затрати на випарювання додаткової води (відкачка) f_4 . Вагові коефіцієнти вибрані рівними:

$$F(X) = f_1^{0,25} f_2^{0,25} f_3^{0,25} f_4^{0,25} \rightarrow \max ,$$

Рівні значущості, при переведенні факторів в безрозмірну форму методикою Харрінгтона, вибираємо самі.

3. Обмеження на параметри оптимізації такі: $105 \leq x_1 \leq 122$, % до м.б.; $14 \leq x_2 \leq 22$, %.

Розроблення математичної моделі

Використовується метод найменших квадратів. В даній роботі треба знайти рівняння залежності втрат цукрози в жомі і мелясі від відкачки і вмісту СР пресованого жому. Рівняння отримати у вигляді квадратного двохпараметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2$$

Для рівняння знайти середньоквадратичну похибку і побудувати графіки рівняння з приведенням точок дослідних даних. Рисунки графіків підписувати послідовно: Рис. 1., Рис. 2. з назвою графіка.

Подібний приклад наведено вище.

Оптимізація по узагальненому критерію з використанням метода Харінгтона

Знаходимо оптимальні значення розміру частинок і часу екстрагування по узагальненому критерію оптимальності.

Для цього задається діапазон зміни параметру оптимізації і кількість розрахункових точок критерію, формується масив значень параметрів і розраховуються за знайденими формулами натуральні значення локальних критеріїв оптимальності. Приклади програм оптимізації і Харінгтона наведені вище.

Завдання до варіанту 2

для виконання лабораторної роботи 2 на тему: „Оптимізація режимів пресування жому з урахуванням впливу рН жомопресової води на процес”

Теоретична частина

В даному завданні метою роботи є визначення оптимального значення рН живильної води і режимів пресування жому, енергії пресування з метою досягнення максимального значення вмісту сухих речовин пресованого жому по узагальненому критерію оптимальності.

Пресування жому на пресах А4-ПВЖ-Б забезпечує збільшення ступеню віджимання жому із збільшенням навантаження на прес і зменшенням значення рН жомопресової води, що показано в табл.2.3. В свою чергу існує пропорційна залежність між значеннями рН живильної і жомопресової води (див. табл. 2.4). Зменшення рН живильної і відповідно жомопресової води приводить до збільшення витрат сірчистого газу, яким підкислюють воду. Також не потрібне і суттєве збільшення затрат енергії на пресування. Необхідно знайти оптимальні параметри процесу, який забезпечить оптимальне пресування жому.

Таблиця 2.3

Пресування жому на пресах А4-ПВЖ-Б із збільшенням навантаження на прес і зменшенням значення рН жомопресової води

Значення рН жомопресової води	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	
Режим пресування жому, кВт	Вміст сухих речовин у пресованому жомі, %					
20	17,75	17,25	16,75	16,25	15,75	
23	18,75	18,5	18,2	17,75	17,25	
30	20,8	20,5	19,75	19,5	19,0	
37	22,25	21,75	21,25	20,75	20,0	
47	24,25	23,75	23,5	23,0	22,5	

Таблиця 2.4

Пропорційна залежність між значеннями рН живильної і жомопресової води

рН живильної води	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
рН жомопресової води	5,8	6,2	6,4	6,5	6,55	6,7	6,75	6,8	6,9	7,1	7	7,2

Постановка задачі оптимізації

Для даного завдання:

1. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – значення рН живильної води; x_2 – режим (потужність) пресування, кВт.

2. Цільовою функцією є узагальнений критерій оптимізації $F(X)$, який враховує максимальне значення вмісту СР пресованого жому, % f_1 , мінімальні затрати на підкислення живильної води, коли рН води досить високе f_2 і мінімальні енергетичні затрати на пресування жому f_3 . Вагові коефіцієнти враховують важливість локальних критеріїв оптимальності:

$$F(X) = f_1^{0,5} f_2^{0,2} f_3^{0,3} \rightarrow \max ,$$

Рівні значущості, при переведенні факторів в безрозмірну форму методикою Харрінгтона, вибираємо самостійно.

3. Обмеження на параметри оптимізації такі: $3 \leq x_1 \leq 8,5$, од. рН; $20 \leq x_2 \leq 47$, кВт.

Розроблення математичної моделі

Використовується метод найменших квадратів. В даній роботі треба знайти рівняння залежності вмісту сухих речовин у пресованому жомі від значення рН жомопресової води і затраченої потужності на пресування жому. Рівняння отримати у вигляді квадратного двохпараметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2$$

Для рівняння знайти середньоквадратичну похибку і побудувати графіки рівняння з приведенням точок дослідних даних. Рисунки графіків підписувати послідовно: Рис. 1., Рис. 2. з назвою графіка.

Подібний приклад наведено вище.

Залежність між значеннями рН жомопресової і рН живильної води отримуємо тим же методом у вигляді квадратичного поліному.

Оптимізація по узагальненому критерію з використанням метода Харрінгтона

Тут знаходяться оптимальні значення рН живильної води і потужності пресування по узагальненому критерію оптимальності.

Для цього задається діапазон зміни параметрів оптимізації і кількість розрахункових точок критерію, формується масив значень параметрів і розраховуються за знайденими формулами натуральні значення локальних критеріїв оптимальності. При цьому спочатку знаходимо значення рН жомопресової води, а потім вміст СР в пресованому жомі. Приклади програм оптимізації і Харрінгтона наведені вище.

Завдання до варіанту 3

для виконання лабораторної роботи 2 на тему: „Розрахунок тривалості і температури проведення удосконаленого прогресивного попереднього вапнування (ППВ)”

Теоретична частина

З метою підвищення ефективності попереднього вапнування запропонований спосіб проведення ППВ з циркуляцією соку у його межах та одночасним вапнуванням і карбонізацією у циркуляційному контурі. Серед факторів, від яких залежить якість попередньо вапнованого соку, визначальну роль відіграють температура та тривалість процесу, які були вибрані параметрами оптимізації. Були отримані залежності коефіцієнту фільтрування (с/см^2), швидкості осадження осаду в соку після ППВ за перші 5 хв. (см/хв), вміст білків (%) та забарвленість попередньо вапнованого соку (од. оп. густини) від вибраних параметрів (див. табл. 2.5 і 2.6).

Таблиця 2.5

Залежності коефіцієнту фільтрування (с/см^2), швидкості осадження осаду в соку після ППВ

Тривалість, хв. Температура, °C	Коефіцієнт фільтрування				Швидкість осадження осаду			
	5	10	15	20	5	10	15	20
50	8,8	8,6	8,4	8,2	2,7	3,1	3,5	3,7
60	8,0	7,8	7,6	7,4	2,8	3,2	3,7	3,9
70	7,6	7,4	7,2	7,1	3,0	3,3	3,9	4,08
85	7,0	6,8	6,6	6,4	3,5	3,9	4,02	4,2

Таблиця 2.6

Залежності вмісту білків (%) та забарвленості попередньо вапнованого соку (од. оп. густини) від вибраних параметрів

Тривалість, хв. Температура, °C	Вміст білків в ППВ соку				Забарвленість соку							
	5	10	15	20	5	10	15	20				
50	0,0420	0,0398	0,0347	0,0325	563,3	582,4	601,4	615				
60	0,0378	0,0342	0,0298	0,0269	620,5	631	658,5	676,8				
70	0,0307	0,0292	0,0278	0,0247	635,3	646,2	673,9	827,3				
85	0,0235	0,0217	0,0208	0,0195	685,8	706	856,8	1143				

Постановка задачі оптимізації

Для даного завдання:

1. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – тривалість процесу, хв; x_2 – температура процесу ППВ, °C.

2. Цільовою функцією є узагальнений критерій оптимізації $F(X)$, який враховує максимальне значення фільтраційного коефіцієнту, f_1 , мінімальні швидкість осадження f_2 , вміст білків f_3 і забарвленість попередньо вапнованого соку f_4 . Вагові коефіцієнти враховують важливість локальних критеріїв оптимальності:

$$F(X) = f_1^{0,3} f_2^{0,2} f_3^{0,2} f_4^{0,3} \rightarrow \max,$$

Рівні значущості, при переведенні факторів в безрозмірну форму методикою Харрінгтона, вибираємо самі.

3. Обмеження на параметри оптимізації такі: $5 \leq x_1 \leq 20$, хв; $50 \leq x_2 \leq 85$, °С.

Розроблення математичної моделі

В даній роботі треба знайти чотири рівняння залежності приведених параметрів попередньо вапнованого соку від значення тривалості і температури процесу ППВ. Для цього використовується метод найменших квадратів. Рівняння треба отримати у вигляді квадратного двох параметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2$$

Для рівняння знайти середньоквадратичну похибку і побудувати графіки ліній рівня отриманих рівнянь. Рисунки графіків підписувати послідовно: Рис. 1., Рис. 2. з назвою графіка.

Подібний приклад наведено вище.

Оптимізація по узагальненому критерію з використанням метода Харрінгтона

Тут знаходяться оптимальні значення тривалості і температури процесу ППВ по узагальненому критерію оптимальності.

Для цього задається діапазон зміни параметрів оптимізації і кількість розрахункових точок критерію, формується масив значень параметрів і розраховуються за знайденими формулами натуральні значення локальних критеріїв оптимальності. При цьому спочатку знаходимо значення тривалості, а потім температури процесу ППВ. Приклади програм оптимізації і Харрінгтона наведені вище.

Потім за допомогою програми, що є в мережі класу, за допомогою методу Харрінгтона знаходяться масиви безрозмірних значень локальних критеріїв оптимальності, які і використовуються при обчисленні масиву значень узагальненого критерію оптимальності.

Завдання до варіанту 4

для виконання лабораторної роботи 2 на тему: „**Оптимізація обезбарвлення клеровки вапном**”

Теоретична частина

В даному завданні метою роботи є визначення оптимальних витрат вапна, що додається до клеровки для її обезбарвлення, і часу вапнування клеровки по узагальненому критерію.

Для додаткового обезбарвлення клеровки можна використовувати вапняне молоко.

В дослідженні на кафедрі цукру встановлено, вплив витрат СаО і тривалості дефекації клеровки на ефект її обезбарвлення (див. табл.2.7).

Таблиця 2.7

Вплив витрат СаО і тривалості дефекації клеровки на ефект її обезбарвлення

Витрати СаО, % до м.б.	0,2	0,4	0,6	0,8
Час дефекації, хв.	Ефект обезбарвлення клеровки, %			
2	7,5	10	17,5	14
4	14	19	32	27
6	20	29	43,5	37,5
8	27,5	34	39	34,5
10	31	37,5	34,5	30

Постановка задачі оптимізації

Для даного завдання:

1. Параметрами оптимізації (X) є: x_1 – витрати вапна на дефекацію клеровки, % до м.б.; x_2 – час дефекації, хв.

2. Цільовою функцією є узагальнений критерій оптимізації $F(X)$, який враховує максимальний ефект обезбарвлення клеровки f_1 і мінімізує витрати вапна на обезбарвлення f_2 і затрати на оброблення клеровки (час процесу) f_3 . Враховуючи більшу важливість першого фактору вагові коефіцієнти вибрані так:

$$F(X) = f_1^{0,5} f_2^{0,25} f_3^{0,25} \rightarrow \max ,$$

Рівні значущості, при переведенні факторів в безрозмірну форму методикою Харрінгтона, вибираємо самі.

3. Обмеження на параметри оптимізації такі: $0,2 \leq x_1 \leq 0,8$; % до м.б. ; $2 \leq x_2 \leq 10$, хв.

Розроблення математичної моделі

В даній роботі треба знайти рівняння залежності ефекту обезбарвлення клеровки від витрат вапна і тривалості оброблення. Для цього використовується метод найменших квадратів. Рівняння треба отримати у вигляді квадратного двох параметричного поліному:

$$f(X) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \cdot x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2$$

Для рівняння знайти середньоквадратичну похибку і побудувати графіки рівняння з приведенням точок дослідних даних. Рисунки графіків підписувати послідовно: Рис. 1., Рис. 2. ... з назвою графіка.

Подібний приклад наведено вище.

Оптимізація по узагальненому критерію з використанням метода Харінгтона

Тут знаходяться оптимальні значення розміру частинок і часу екстрагування по узагальненому критерію оптимальності.

Для цього задається діапазон зміни параметру оптимізації і кількість розрахункових точок критерію, формується масив значень параметрів і розраховуються за знайденими формулами натуральні значення локальних критеріїв оптимальності. Дивись приклад вище.

Потім за допомогою програми, що приведена вище, за допомогою методики Харінгтона знаходяться масиви безрозмірних значень локальних критеріїв оптимальності, які і використовуються при обчисленні масиву значень узагальненого критерію оптимальності:

Дані масиву узагальненого критерію оптимальності виводяться на друк і по них малюється графік ліній постійного рівня. Максимальне значення критерію вказує на оптимальну величину параметрів оптимізації.

З масиву даних знаходяться оптимальні значення параметрів оптимізації за допомогою програми OPT2. Параметром програми F і є наша цільова функція. По результат роботи пишеться висновок.

Лабораторна робота 3

на тему: «Моделювання динамічного режиму двох ємнісного повітряного ресивера з використанням MathCad»

Мета роботи: Створити динамічну математичну модель двох ємнісного повітряного ресивера і отримати перехідну криву зміни приросту тиску в другій ємності ресивера від часу.

3.1. Теоретичні дані

Двох ємнісний повітряний ресивер схематично зображений на рисунку 3.1.

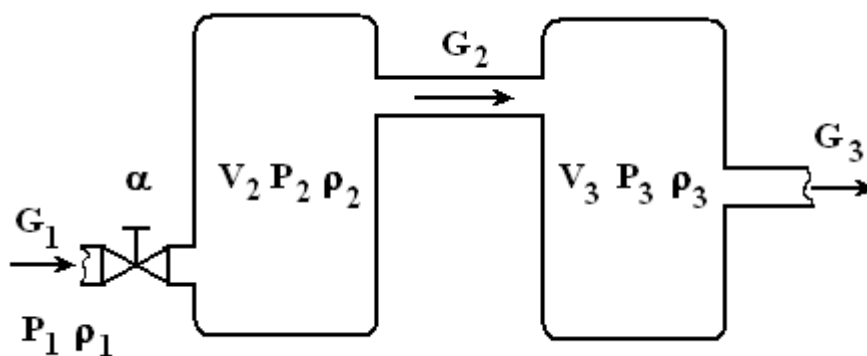


Рис. 3.1. Схема двох ємнісного повітряного ресивера

Складемо матеріальні баланси кожної із секцій ресивера в статичному режимі

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= 0 \\ G_2 - G_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Витрати G_1 і можна виразити через залежності відповідних значень тиску, ступеню відкриття клапану на вході, коефіцієнтів витрат Kv_1 , Kv_2 та значень щільності газу

$$\begin{aligned} G_1 &= Kv_1 \alpha \sqrt{(P_1 - P_2) \cdot \rho_1}, \\ G_2 &= Kv_2 \sqrt{(P_2 - P_3) \cdot \rho_2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кожна із ємностей має властивість акумулювати масу повітря, де приріст маси у відповідній ємності рівний

$$\Delta G_2 = V_2 \frac{d\rho_2}{d\tau}; \quad \Delta G_3 = V_3 \frac{d\rho_3}{d\tau}. \quad (3.3)$$

Підставляючи отримані рівняння в баланс мас і враховуючи динаміку процесу отримаємо:

$$\begin{aligned}
V_2 \frac{d\rho_2}{d\tau} &= K v_1 \alpha \sqrt{(P_1 - P_2) \cdot \rho_1} - K v_2 \sqrt{(P_2 - P_3) \cdot \rho_2} \\
V_3 \frac{d\rho_3}{d\tau} &= K v_2 \sqrt{(P_2 - P_3) \cdot \rho_2} - G_3
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Змінними в даній динамічній моделі об'єкта є P_3 , G_3 і α , враховуючи, що із зміною P_3 буде змінюватися і P_2 , а також і щільності повітря ρ_2 , ρ_3 , то змінними будуть: P_3 , P_2 , ρ_2 , ρ_3 , G_3 , α .

3.2. Розрахунки параметрів моделі:

Введемо такі дані: витрати повітря на вході, кг/год. $G_1 = 100$; тиск на вході до об'єкту і секціях ресивера, атмосферний тиск, Н/см² $P_1 = 98,1$; $P_2 = 49,3$; $P_3 = 19,61$; $P_0 = 9,81$; об'єми секцій, м³; $V_2 = 3$; $V_3 = 5$; ступінь відкриття клапану на вхідному потоці $\alpha = 0,5$; щільність повітря при атмосферному тиску, кг/м³, $\rho_0 = 1,3$.

З рівнянь (5.2) враховуючи, що $G_1 = G_2$, знайдемо значення коефіцієнтів витрат, (см/год)[(кг м³)/Н], $K v_1 = 7,57$; $K v_2 = 6,56$.

Порахуємо щільність повітря на вході в ресивер і його секціях, яка обернено пропорційна до абсолютного значення тиску $P a_1 = P_0 + P_1$

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{P a_1}{P_0}
\tag{3.5}$$

Відповідно отримаємо, кг/м³, $\rho_1 = 14,3$; $\rho_2 = 7,83$; $\rho_3 = 3,9$;

Вихідним, керованим параметром даного об'єкту є тиск на виході P_3 . Він є залежністю від ступеню відкриття клапану на вході α і витрат повітря на виході G_3 .

$$P_3(\tau) = f(\alpha(\tau), G_3(\tau))$$

Розкладемо попередні диференціальні рівняння в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned}
V_2 \frac{d\Delta\rho_2(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{K v_1 \alpha \sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{(P_1 - P_2)}} + \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{(P_2 - P_3)}} \right) \Delta P_2(\tau) + \frac{K v_2 \sqrt{P_2 - P_3}}{2\sqrt{\rho_2}} \cdot \Delta\rho_2(\tau) = \\
= K v_1 \sqrt{(P_1 - P_2) \rho_1} \cdot \Delta\alpha + \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{(P_2 - P_3)}} \cdot \Delta P_3(\tau) \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

$$V_3 \frac{d\Delta\rho_3(\tau)}{d\tau} + \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{(P_2 - P_3)}} \Delta P_3(\tau) = \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{P_2 - P_3}} \cdot \Delta P_2(\tau) + \frac{K v_2 \sqrt{P_2 - P_3}}{2\sqrt{\rho_2}} \cdot \Delta\rho_2(\tau) - \Delta G_3(\tau).
\tag{3.7}$$

Вважаємо, що теплообмін з навколишнім середовищем дуже хороший, а перепад тисків невеликий, і тому приймаємо ізотермічний закон розширення газу $PV = RT$, з якого витікає що $\Delta\rho = \lambda \cdot \Delta P$, де $\lambda = M/(RT)$.

Порахуємо значення $\lambda = \rho_2 / (P_2 + P_0) = 0,133$; (кг см²)/(Н м³).

Позначимо:

$$B = \frac{K v_1 \alpha \sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{(P_1 - P_2)}} + \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{(P_2 - P_3)}} + \frac{K v_2 \lambda \sqrt{P_2 - P_3}}{2\sqrt{\rho_2}}.$$

$$\begin{aligned}
D &= K v_1 \sqrt{(P_1 - P_2) \rho_1} \\
C &= \frac{K v_2 \sqrt{\rho_2}}{2 \sqrt{(P_2 - P_3)}} \\
E &= C + \frac{K v_2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{P_2 - P_3}}{2 \sqrt{\rho_2}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Після підрахунку значень коефіцієнтів і встановлення їх розмірності отримаємо: $B = 3,555$; $C = 1,684$; $E = 2,53$ (см² кг)/(год. Н), $D = 200$ (кг/год).

Після підстановки отримаємо:

$$\begin{aligned}
V_2 \lambda \cdot \frac{d\Delta P_2(\tau)}{d\tau} + B \cdot \Delta P_2(\tau) &= D \cdot \Delta \alpha(\tau) + C \cdot \Delta P_3(\tau), \\
V_3 \lambda \cdot \frac{d\Delta P_3(\tau)}{d\tau} + C \cdot \Delta P_3(\tau) &= E \cdot \Delta P_2(\tau) - \Delta G_3(\tau)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

З другого рівняння вилучаємо $\Delta P_3(\tau)$ і підставляємо в перше рівняння. Після підстановки виразу, а також підстановки диференціалу виразу і множення на E отримаємо:

$$V_2 V_3 \lambda^2 \cdot \frac{d^2 \Delta P_3(\tau)}{d\tau^2} + (C + B V_3 \lambda) \cdot \frac{d\Delta P_3(\tau)}{d\tau} + C(B - E) \cdot \Delta P_3(\tau) = E D \cdot \Delta \alpha(\tau) - B \Delta G_3(\tau) - \frac{d\Delta G_3(\tau)}{d\tau}$$

Розділивши всі коефіцієнти біля складових рівняння на $C(B - E)$ і позначивши коефіцієнти, як

$$T_0 = \frac{V_2 V_3 \lambda^2}{C(B - E)}; \quad T_1 = \frac{C + B V_3 \lambda}{C(B - E)}; \quad T_2 = \frac{E D}{C(B - E)}; \quad T_3 = \frac{B}{C(B - E)}; \quad T_4 = \frac{1}{C(B - E)};$$

отримаємо:

$$T_0 \cdot \frac{d^2 \Delta P_3(\tau)}{d\tau^2} + T_1 \cdot \frac{d\Delta P_3(\tau)}{d\tau} + \Delta P_3(\tau) = T_2 \cdot \Delta \alpha(\tau) - T_3 \cdot \Delta G_3(\tau) - T_4 \cdot \frac{d\Delta G_3(\tau)}{d\tau} \tag{3.10}$$

Підрахуємо значення коефіцієнтів і їх розмірності $T_0 = 0,15266$ год²; $T_1 = 1,79497$ год; $T_2 = 293,246$ Н/см²; $T_3 = 2,06$ (год Н)/(см² кг); $T_4 = 0,5795$ (год² Н)/(см² кг), і тоді рівняння (2.10) матиме вигляд:

$$0,1527 \cdot \frac{d^2 \Delta P_3(\tau)}{d\tau^2} + 1,795 \cdot \frac{d\Delta P_3(\tau)}{d\tau} + \Delta P_3(\tau) = 293,246 \cdot \Delta \alpha(\tau) - 2,06 \cdot \Delta G_3(\tau) - 0,5795 \cdot \frac{d\Delta G_3(\tau)}{d\tau}$$

Це рівняння відображає залежність $P_3(\tau) = f(\alpha(\tau), G_3(\tau))$ і розв'язок його розглянемо як суму вільної і вимушеної складових:

$$\Delta P_3(\tau) = \Delta P_{3Вил}(\tau) + \Delta P_{3Вим}(\tau) \tag{3.11}$$

Початкові умови приймемо нульовими: $\Delta P_3(0) = 0$; $\left(\frac{d\Delta P_3}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0$, а

керуючий вплив визначимо рівним $\Delta \alpha = 0,01$. Вплив збурення $\Delta G_3(\tau)$ та його похідну приймаємо нульовими. Характеристичне рівняння диференціального рівняння зміни тиску в другій ємності має вигляд:

$$0.1527q^2 + 1.795q + 1 = 0 \quad (3.12)$$

Знайдемо корені рівняння: $q_1 = -0.5863$; $q_2 = -11.169$. Тоді вільна складова розв'язку, де C_1, C_2 – константи інтегрування, матиме вигляд:

$$\Delta P_{3Вил}(\tau) = C_1 e^{-0.5863\tau} + C_2 e^{-11.169\tau}$$

Враховуючи, що $\Delta\alpha(\tau)$ не залежить від часу, знайдемо вимушену складову розв'язку.

$$\Delta P_{3Вим}(\tau) = T_2 \cdot \Delta\alpha(\tau) \quad (3.13)$$

Відповідно $\Delta P_{3Вим}(\tau) = 2,932 \text{ Н/см}^2$. Для знаходження констант інтегрування C_1, C_2 складемо систему рівнянь з урахуванням початкових умов і значення похідної від $\Delta P_3(\tau)$.

$$\frac{d\Delta P_3(\tau)}{d\tau} = -0.5863 \cdot C_1 e^{-0.5863\tau} - 11.169 \cdot C_2 e^{-11.169\tau} \quad (3.14)$$

Сформуємо систему рівнянь при початкових нульових умовах:

$$\begin{cases} \Delta P_3(0) = 2.932 + C_1 + C_2, \\ \left(\frac{d\Delta P_3}{d\tau}\right)_{\tau=0} = -0.5863 \cdot C_1 - 11.169 \cdot C_2 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} C_1 + C_2 = -2.932 \\ -0.5863 \cdot C_1 - 11.169 \cdot C_2 = 0 \end{cases}$ отримаємо

$C_1 = -3.094$; $C_2 = 0,1624 \text{ Н/см}^2$. і таким чином остаточно сформуємо рівняння.

$$\Delta P_3(\tau) = 2.932 - 3.094 e^{-0.5863\tau} + 0.1624 e^{-11.169\tau}$$

Використовуючи рівняння будемо графік зміни приросту тиску в другій ємності ресивера

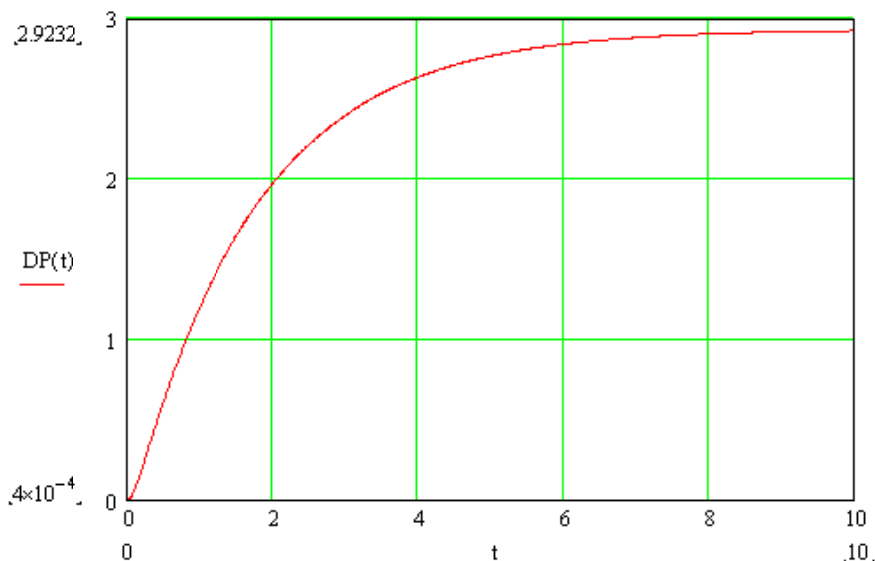


Рис. 3.2. Графік залежності приросту тиску в другій ємності ресивера від часу

3.3. Послідовність розрахунків в середовищі MathCad

Розрахунок двох ємнісного ресивера

Вхідні дані:

$$G1 := 100 \quad P1 := 98.1 \quad P2 := 49.3 \quad P3 := 19.61 \quad P0 := 9.81$$

$$\alpha := 0.5 \quad V2 := 3 \quad V3 := 5 \quad \rho0 := 1.3$$

$$\rho1 := \rho0 \cdot \frac{P0 + P1}{P0} \quad \rho1 = 14.3 \quad \rho2 := \rho0 \cdot \frac{P0 + P2}{P0} \quad \rho2 = 7.83313$$

$$\rho3 := \rho0 \cdot \frac{P0 + P3}{P0} \quad \rho3 = 3.89867$$

$$Kv1 := \frac{G1}{\alpha \cdot \sqrt{(P1 - P2) \cdot \rho1}} \quad Kv1 = 7.57098 \quad Kv2 := \frac{G1}{\sqrt{(P2 - P3) \cdot \rho2}} \quad Kv2 = 6.55733$$

$$\lambda := \frac{\rho2}{P0 + P2} \quad \lambda = 0.13252$$

$$B := \frac{Kv1 \cdot \alpha \cdot \sqrt{\rho1}}{2 \cdot \sqrt{P1 - P2}} + \frac{Kv2 \cdot \sqrt{\rho2}}{2 \cdot \sqrt{P2 - P3}} + \frac{Kv2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{(P2 - P3)}}{2 \cdot \sqrt{\rho2}} \quad B = 3.55454$$

$$D := Kv1 \cdot \sqrt{(P1 - P2) \cdot \rho1} \quad D = 200$$

$$C := \frac{Kv2 \cdot \sqrt{\rho2}}{2 \cdot \sqrt{(P2 - P3)}} \quad C = 1.68407$$

$$E := C + \frac{Kv2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{(P2 - P3)}}{2 \cdot \sqrt{\rho2}} \quad E = 2.52995$$

$$T0 := \frac{\lambda^2 \cdot V2 \cdot V3}{C \cdot (B - E)} \quad T0 = 0.15266 \quad T1 := \frac{C + B \cdot V2 \cdot \lambda}{C \cdot (B - E)} \quad T1 = 1.79497$$

$$T2 := \frac{E \cdot D}{C \cdot (B - E)} \quad T2 = 293.24581 \quad T3 := \frac{B}{C \cdot (B - E)} \quad T3 = 2.06003$$

$$T4 := \frac{1}{C \cdot (B - E)} \quad T4 = 0.57955$$

Корені характеристичного рівняння

$$0.1527q^2 + 1.795q + 1 \quad \begin{pmatrix} -11.168724707423368717 \\ -0.58635060364408380477 \end{pmatrix}$$

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5863 & -11.169 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} -2.932 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C1 := A1^{-1} \cdot B1 \quad C1 = \begin{pmatrix} -3.09444 \\ 0.16244 \end{pmatrix}$$

$$DP(t) := 2.932 - 3.094 \cdot e^{-0.5863t} + 0.1624 \cdot e^{-11.169t}$$

3.4. Питання для самоперевірки

1. Чому математична модель одного ресивера є об'єктом із зосередженими параметрами?
2. Від чого залежать витрати повітря на вході і виході із ресивера?
3. Як рахується щільність повітря в ресивері?
4. Як розв'язується диференціальне рівняння другого порядку по зміні тиску на виході двох ємнісного повітряного ресивера?
5. Що можна визначити із графіка залежності приросту тиску на виході ресивера від часу як об'єкта керування

3.5. Варіанти завдань до лабораторної роботи (табл. 3.1)

Таблиця 3.1.

Варіанти завдань до лабораторної роботи

№ вар.	Тиск повітря на вході, P_1 Н/см ²	Тиск повітря в 1-й ємності, P_2 Н/см ²	Тиск повітря в 2-й ємності, P_3 Н/см ²	Витрати повітря $G_1=G_2=G_3$ кг/год	Об'єм першої ємності, V_2 , м ³	Об'єм другої ємності, V_3 , м ³	Ступінь відкриття клапану, α
1	102	50	19	102	3,5	5,5	0,4
2	96	48	17	98	4	5	0,55
3	94	52	16	96	4,2	5,3	0,46
4	100	46	18	100	3,2	6	0,52
5	104	51	20	95	3,8	5,4	0,48
6	106	54	21	105	4,1	5,8	0,5
7	98	49	20	101	3,5	5,5	0,43
8	105	52	22	99	4	5	0,59
9	103	48	20	103	4,2	5,3	0,54
10	99	47	18	110	3,2	6	0,45

Лабораторна робота 4

на тему: «Моделювання і розрахунок перехідних процесів в електричній схемі пристрою з використанням MathCad»

Мета роботи: На основі розрахунків струмів і напруги в електричних колах схеми навчитися створювати математичну модель електричної схеми і на основі неї розрахувати графіки перехідних процесів в часі стуму в котушці індуктивності і напруги на конденсаторі.

4.1. Теоретичні дані

Електричний пристрій працює у двох режимах. Перехід від першого режиму до другого виконується замиканням рубильника. Принципова електрична схема пристрою зображена на рис. 4.1. Чисельні значення параметрів схеми наступні $e(t) = E = 120$ В; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 50$ Ом; $L_2 = 2$ Гн; $C_3 = 150$ мкФ. Треба визначити $i_2(t)$ та $u_C(t)$.

Розв'язання задачі умовно складається з двох частин. В першій частині розраховуються струми та напруги, які існували в електричному колі в момент часу до комутації і струми та напруги, які виникли в першу мить після комутації.

Математична модель перехідного процесу ґрунтується на двох законах комутації в електричних колах, фізична суть, яких формалізована в законах збереження магнітної енергії в котушці індуктивності та електричної енергії в конденсаторі про неможливість її миттєвої зміни.

За першим законом комутації струм $i_L(0_-)$, який тече крізь індуктивність безпосередньо до комутації (0_-) дорівнює струму $i_L(0_+)$, який тече крізь ту саму індуктивність безпосередньо після комутації (0_+).

За другим законом комутації напруга $u_C(0_-)$, на конденсаторі безпосередньо до комутації дорівнює напрузі $u_C(0_+)$, на тому самому конденсаторі безпосередньо після комутації.

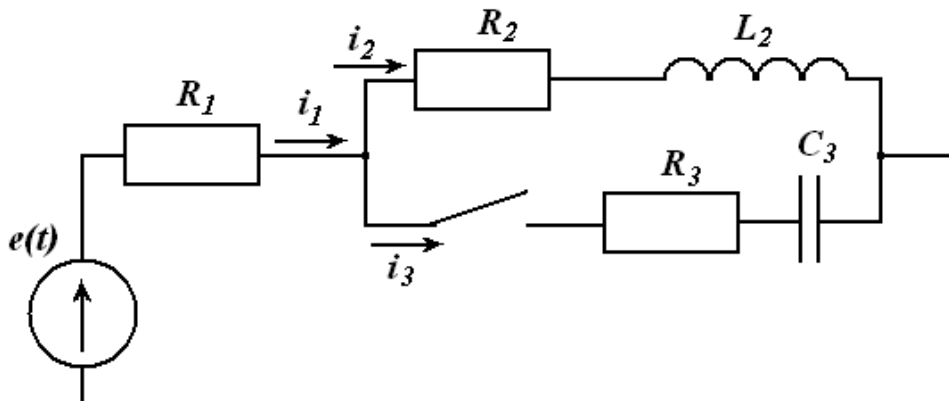


Рис. 4.1 . Принципова електрична схема пристрою

4.2. Розрахунки струму та напруги до і після комутації

В першій частині завдання для подальших розрахунків використовуємо статичну математичну модель кіл постійного струму відому, як закон Ома.

Визначимо струм $i_1(0_-)$ та $i_2(0_-)$ до замикання рубильника

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{50 + 10} = 2 \text{ A}.$$

Знайдемо *примушені* струми і напругу на конденсаторі після замикання рубильника

$$i_{1np} = i_{2np} = 2 \text{ A}.$$

Постійний струм через конденсатор не тече, тому

$$i_{3np} = 0 \text{ A}$$

Від постійного струму на індуктивності немає падіння напруги, отже,

$$u_{L_2np} = 0 \text{ B}$$

Примушена напруга на конденсаторі дорівнює падінню напруги на опорі R_2 від струму i_{2np}

$$u_{Cnp} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ B}.$$

За першим законом комутації

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 2 \text{ A}.$$

Але

$$i_2(0_+) = i_{2np}(0_+) + i_{2в}(0_+),$$

де $i_{2в}(0_+)$ – вільний струм після комутації, звідки

$$i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2np}(0_+) = 2 - 2 = 0,$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+)$$

або

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+). \quad (4.1)$$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого кола, утвореного першою й третьою гілками

$$i_1(0_+)R_1 + i_3(0_+)R_3 + u_C(0_+) = E. \quad (4.2)$$

Оскільки

$$u_C(0_+) = 0,$$

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+),$$

То із (5.7) і (5.8) отримаємо

$$\text{-----} i_3(0_+) = \frac{E - 2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{120 - 2 \cdot 50}{50 + 50} = 0,2 \text{ A}.$$

Знайдемо $i_{3в}(0_+)$

$$i_{3в}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3np}(0_+) = 0,2 - 0 = 0,2 \text{ A}.$$

Для визначення $u_{L6}(0_+)$ складемо рівняння для вільних складових по контурі, утвореному першою й другою гілками

$$i_{16}(0_+)R_1 + i_{26}(0_+)R_2 + u_{L6}(0_+) = 0,$$

звідки

$$u_{L6}(0_+) = -i_{16}(0_+)R_1 - i_{26}(0_+)R_2 = -0,2 \cdot 50 + 0 = -10 \text{ В}.$$

Але

$$u_{L6} = L_2 \frac{di_{26}}{dt}.$$

Отже,

$$\left(\frac{di_{26}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{u_{L6}(0_+)}{L_2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ А/с}.$$

Вільну складову напруга на конденсаторі при $t = 0$, знайдемо за другим законом комутації

$$u_C(0_-) = u_C(0_+),$$

$$u_C(0_+) = u_{Cnp}(0_+) + u_{C6}(0_+),$$

$$0 = 20 + u_{C6}(0_+),$$

звідси

$$u_{C6}(0_+) = -20 \text{ В}.$$

Визначимо швидкість зміни вільної складової напруги на конденсаторі при $t = 0_+$.

Із цією метою скористаємося тим, що

$$i_{36} = C_3 \frac{du_{C6}}{dt}.$$

Отже,

$$\left(\frac{du_{C6}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{i_{36}(0_+)}{C_3} = \frac{0,2}{150 \cdot 10^{-6}} = 1333 \text{ В/с}.$$

4.3. Знаходження математичної динамічної моделі електричної схеми

Перейдемо до розв'язання *другої частини завдання* і складемо характеристичне рівняння для кола, зображеного на рис. 1.

Для цього складемо систему диференційних рівнянь за першим та другим законом Кірхгофа

$$i_{16} - i_{26} - i_{36} = 0,$$

$$R_1 i_{16} + R_2 i_{26} + L_2 \frac{di_{26}}{dt} + 0 = 0,$$

$$R_1 i_{16} + 0 + R_3 i_{36} + \frac{1}{C_3} \int i_{36} dt = 0.$$

Проведемо систему диференційних рівнянь до алгебраїчного виду і отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 i_{1e} - i_{2e} - i_{3e} &= 0, \\
 R_1 i_{1e} + (R_2 + pL_2) i_{2e} + 0 &= 0, \\
 R_1 i_{1e} + 0 + (R_3 + \frac{1}{pC_3}) i_{3e} &= 0.
 \end{aligned}$$

матриця коефіцієнтів яких

$$\begin{array}{ccc}
 1 & -1 & -1 \\
 R_1 & R_2 + pL_2 & 0 \\
 R_1 & 0 & R_3 + \frac{1}{pC_3}
 \end{array}$$

Визначник системи алгебраїчних рівнянь, який дорівнює 0 і є характеристичним рівнянням

$$p^2 L_2 C_3 (R_1 + R_3) + p [C_3 (R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L_2] + R_1 + R_2 = 0, (9.3)$$

Після підстановки даних отримаємо

$$0,03p^2 + 2,525p + 60 = 0.$$

Розв'язок в MatCad дає два комплексних спряжених корені

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -42.1 + j \cdot 15.2 \text{ сек}^{-1}, \\
 p_2 &= -42.1 - j \cdot 15.2 \text{ сек}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Тому вільна складова повинна бути взята в такому вигляді

$$Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu),$$

де $\delta = 42,1$; $\omega_0 = 15,2$.

Величини A та ν визначимо за значеннями вільної складової і її першої похідної при $t = 0_+$.

За даними з першої частини завдання

$$\begin{aligned}
 i_{2np} &= 2 \text{ A}; & u_{Cnp} &= 20 \text{ B}; \\
 i_{2e}(0_+) &= 0; & u_{Ce}(0_+) &= -20 \text{ B}; \\
 i'_{2e}(0_+) &= -5 \text{ A/c}; & u'_{Ce}(0_+) &= 1333 \text{ B/c}.
 \end{aligned}$$

Функція $Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu)$ при $t = 0$ дорівнює $A \cdot \sin \nu$. Похідна функції $Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu)$ дорівнює

$$-A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + Ae^{-\delta t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \nu).$$

Значення цієї похідної при $t = 0$ дорівнює

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 \cos \nu.$$

Знайдемо значення A і ν для вільної складової струму i_2 .

Складемо два рівняння

$$i_{2e}(0_+) = 0 \quad A \sin \nu = 0$$

$$i'_{2e}(0_+) = -5 \quad -\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = -5$$

Спільне розв'язання їх дає при $\delta = 42,1$; $\omega_0 = 15,2$.

$$\nu = 0, A = -0,328.$$

Отже,

$$i_2 = i_{2np} + i_{2e} = 2 - 0,328e^{-42,1t} \sin 15,2t.$$

4.4. Побудова графіків перехідних функцій струму і напруги

На рис. 4.2 показано графік залежності $i_2 = f(t)$.

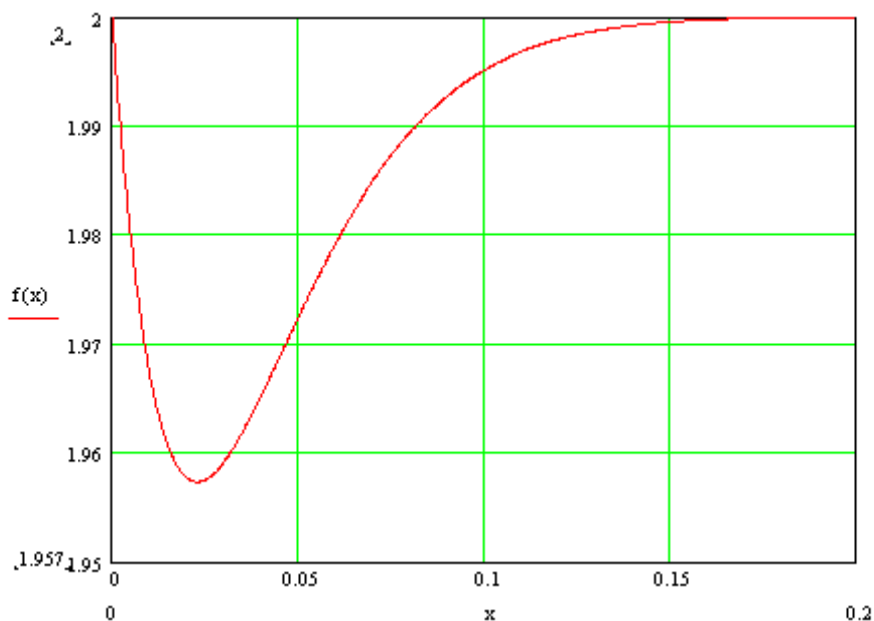


Рис. 4.2 Графік залежності струму в другій гілці від часу $i_2 = f(t)$

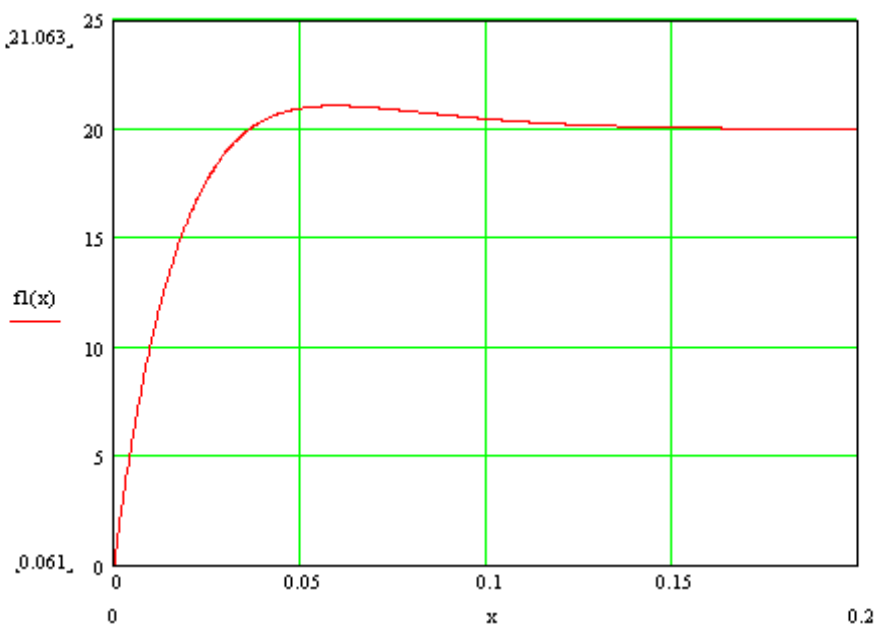


Рис. 4.3 Графік залежності напруги на конденсаторі $u_C = f(t)$

Знайдемо A і ν для вільної складової напруги u_C

$$u_{C_6}(0_+) = -20, \quad A \sin \nu = -20, ,$$

$$u'_{C_6}(0_+) = 1333, \quad -\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = 1333,$$

Звідси

$$x1 := 0 \quad x2 := 0$$

Given

$$x1 \cdot \sin(x2) = -20$$

$$-42.1 \cdot x1 \cdot \sin(x2) + 15.2 \cdot x1 \cdot \cos(x2) = 1333$$

R2 := Find(x1, x2)

$$R2 = \begin{pmatrix} 37.993 \\ -0.554 \end{pmatrix}$$

$$A = 37,9; \quad \nu = -0,554 \quad (-31^\circ 52')$$

Таким чином

$$u_C = u_{Cnp} + u_{C_6} = 20 + 37.9e^{-42.1t} \sin(15.2t - 0.554) \text{ В}$$

На рис. 9.3 показано графік залежності $u_C = f(t)$.

4.5. Питання для самоперевірки

1. Чому дорівнює струм, який тече крізь індуктивність безпосередньо після комутації за першим законом комутації?
2. Чому дорівнює напруга, на конденсаторі безпосередньо після комутації за другим законом комутації?
3. Як ми можемо використати в математичній моделі електричної схеми закон Ома для статичної моделі електричного кола постійного струму?
4. Що означають примушені струм і напруга?
5. Складіть балансове рівняння для першої і другої гілки електричної схеми задачі по другому закону Кірхгофа?
6. Як ми знаходимо характеристичне рівняння по системі диференційних рівнянь динаміки моделі електричної схеми?

4.6. Варіанти завдань до лабораторної роботи

Таблиця 4.1.

Варіанти завдань до лабораторної роботи

№ Вар.	E, В.	R ₁ , Ом	R ₂ , Ом	R ₃ , Ом	L ₂ , Гн	C ₃ , мкФ
1.	140	40	15	45	1,5	200
2.	100	55	20	60	2,5	230
3.	150	45	12	55	2,2	180
4.	120	35	25	65	2,7	160
5.	110	50	16	50	2,4	190
6.	160	58	18	53	1,7	170
7.	155	47	22	48	2,4	210
8.	130	40	10	57	1,9	140
9.	170	45	15	55	2,0	130
10.	120	48	18	46	1,6	145

Лабораторна робота 5

на тему: «Постановка плану експерименту другого порядку і оброблення результатів досліджень з використанням пакету MathCad»

Мета роботи: Вивчити методику створення планів експериментів другого порядку і навчитись отримувати математичні моделі по результатах планування з їх оцінкою з використанням пакету MathCad.

5.1. Теоретична частина

Якщо лінійні моделі не дають змоги знайти оптимум, детально вивчити поверхню відгуку можна використавши нелінійну модель в якій враховані парні зв'язки і квадратні ефекти. Таку модель можна отримати за допомогою факторного експерименту другого порядку. Найбільш поширені плани другого порядку це композиційні ортогональні і рототабельні. Плани другого порядку дають змогу отримати математичну модель з квадратними членами, тобто модель має лінійну частину, парні зв'язки і також враховує парні квадратні ефекти.

$$Y_p = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \dots + b_{k-1,k} \cdot x_{k-1} \cdot x_k + \dots + b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2 + \dots + b_{kk} \cdot x_k^2 \quad (5.1)$$

Таке рівняння не можна отримати по старому плану, так як умова ортогональності в стовпчиках, коли $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ не виконується $\sum_{i=1}^N x_i^2 \neq 0$, бо $x_i^2 = 1$.

Плани другого порядку вимагають проведення більшого числа дослідів, ніж плани другого порядку. Для отримання коефіцієнтів квадратного поліному необхідно провести досліди на трьох рівнях. Для того, що не ставити ПФЕ по трирівневому плану і кількість дослідів не збільшувати до 3^k , а це дає при чотирьох факторах загальну кількість дослідів $N = 81$, при п'яти дослідах $N = 243$, Бокс і Уїлсон рекомендували доповнити досліди дворівневого плану додатковими дослідями в $2k$ зіркових точках і повторними дослідями N_0 разів в центрі плану (рис 5.1). Похибка і дисперсія дослідів підраховується по повторних дослідях в центрі плану. Кількість дослідів, які необхідно провести досліднику тоді визначається по формулі:

$$N = 2^k + 2 \cdot k + N_0 \quad (5.2)$$

де k – кількість факторів; N_0 – кількість дослідів в центрі плану.

Таким чином число різних дослідів виконаних для k факторів показано в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1.

Число різних дослідів виконаних для k факторів

Кількість факторів, k	2	3	4	5	6
Кількість дослідів, N	9	15	25	42	76
Кількість дослідів в центрі плану, N_0 (для рототабельних планів)	5	6	7	10	15

Перевагою даного підходу є можливість використати всі 2^k дослідів по плану першого порядку, і лише доповнити новими в зіркових точках і в центрі плану.

Такі плани називаються композиційними.

Композиційні плани не забезпечують властивості ортогональності матриці плану, тобто

$$x^T \cdot x \neq 0 \quad (5.3)$$

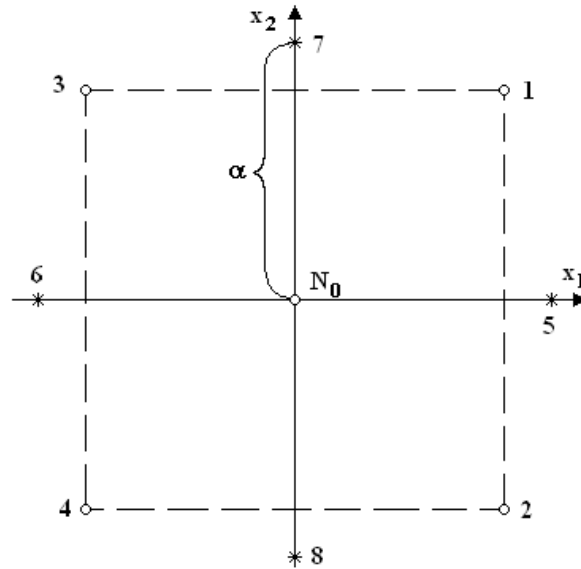


Рис. 5.1. Зображення двофакторного композиційного плану другого порядку

Складемо композиційний план на два фактори (табл. 5.2).

Таблица 5.2.

Композиційний план

Досліди	План						Змінна стану, y_i
	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	x_1^2	x_2^2	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
6	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9

Композиційні плани отримують властивість ортогональності через вибір відповідного зіркового плеча α . Вибір зіркового плеча розраховується в залежності від кількості факторів і кількості дослідів в центрі плану (див. табл. 5.3.). В таблиці 2 5^* означає напіврепліку ПФЕ на 5 факторів.

Таблиця 5.3.

Вибір зіркового плеча в залежності від кількості факторів і кількості дослідів в центрі плану

Кількість дослідів в центрі плану N_0	Кількість факторів, k			
	2	3	4	5*
1	1,000	1,215	1,414	1,547
2	1,077	1,285	1,471	1,606
3	1,148	1,353	1,546	1,664
4	1,214	1,414	1,606	1,718
5	1,267	1,471	1,664	1,772

Розрахунок коефіцієнтів регресії по композиційному ортогональному плану обчислюється завдяки ортогональності у відповідності з формулами:

$$b'_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (5.4)$$

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N x_{ji}^2} \quad (5.5)$$

$$b_{uj} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N (x_{ui} x_{ji})^2} \quad (5.6)$$

$$b_{jj} = \frac{\sum_{i=1}^N x'_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^N (x'_j)^2} \quad (5.7)$$

$$b_0 = b'_0 - b_{11} x_1^{-2} - \dots - b_{kk} x_k^{-2} \quad (5.8)$$

$$\text{де: } x'_j = x_j^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^2, \quad a x_j^{-2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 \quad (5.9)$$

Вибір плеча α зіркових точок і кількість нульових точок залежить також і від критерію оптимальності. В інженерній практиці використовують крім композиційних ортогональних і рототабельні плани другого порядку.

Рототабельні плани другого порядку

Дослідження ортогональних планів другого порядку, показали, що прийнятий критерій оптимальності плану має суттєвий недолік, внаслідок різних оцінок дисперсій коефіцієнтів регресії. Бокс і Хантер запропонували

рахувати оптимальним плануванням другого порядку рототабельне планування при якому інформація, яка зберігається в рівнянні регресії, рівномірно розташовується по сфері. Це полегшує подальшу оптимізацію об'єкта дослідження.

Побудова рототабельних планів другого порядку складна математична задача, з виведення формул для розв'язання якої можна ознайомитись в книгах.

Після перетворень рівняння для знаходження коефіцієнтів регресії можна записати так:

$$b_0 = a_1 \sum_{i=1}^N y_i - a_2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i ; \quad (5.10)$$

$$b_j = a_3 \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i ; j = 1, 2, \dots, k ; \quad (5.11)$$

$$b_{qj} = a_4 \sum_{i=1}^N x_{qi} x_{ji} y_i ; u \neq j ; j, q = 1, 2, \dots, k ; \quad (5.12)$$

$$b_{jj} = a_5 \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i + a_6 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 y_i - a_7 \sum_{i=1}^N y_i . \quad (5.13)$$

Дисперсії для визначення значущості коефіцієнтів регресії знаходяться за формулами:

$$s_{b_0}^2 = a_1 s_{\text{від}}^2 ; \quad s_{b_j}^2 = a_3 s_{\text{від}}^2 ; \quad s_{b_{qj}}^2 = a_4 s_{\text{від}}^2 ; \quad s_{b_{jj}}^2 = (a_5 + a_6) s_{\text{від}}^2 . \quad (5.14)$$

Значення констант, які розраховані для рототабельного планування і входять до виразів (5.10) – (5.14) для $k \leq 6$ наведені в табл.5.4.

Таблиця 5.4.

Значення констант, які розраховані для рототабельного планування для $k \leq 6$

Число факторів, k	Число дослідів, N	N ₀	Зіркове плече, α	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
2	13	5	1,412	0,200	0,1000	0,1250	0,2500	0,1251	0,0187	0,1000
3	20	6	1,682	1,682	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0568
4	31	7	2,000	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5 ⁻¹	32	6	2,000	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341
5	52	10	2,378	0,0988	0,0191	0,0231	0,0312	0,0156	0,0015	0,0191
6 ⁻¹	53	9	2,378	0,1108	0,0187	0,0231	0,0312	0,0156	0,0012	0,0187
6	91	15	2,828	0,0725	0,0098	0,0125	0,0156	0,0078	0,0005	0,0098

При виконанні рототабельних планів відпадає необхідність постановки додаткових паралельних дослідів для оцінки дисперсії відтворення. Дисперсію дослідів, або дисперсію відтворення знаходимо за даними дослідів в центрі плану:

$$s_{\text{вiд}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{N_0 - 1}; \quad \bar{y}_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N_0} y_u^0}{N_0}. \quad (5.15)$$

Число ступенів волі дисперсії відтворення дорівнює $f_{\text{вiд}} = N_0 - 1$. Залишкову дисперсію визначають по формулі:

$$s_{\text{зал}}^2 = \frac{1}{N - L} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{p_i})^2 \quad (5.16)$$

де: L – число значимих коефіцієнтів у рівнянні регресії, а число ступенів волі залишкової дисперсії $f_{\text{зал}} = N - L$.

Дисперсію адекватності знаходимо із співвідношення:

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{s_{\text{зал}}^2 f_{\text{зал}} - s_{\text{вiд}}^2 f_{\text{вiд}}}{f_{\text{ад}}}, \quad (5.17)$$

де $f_{\text{ад}} = f_{\text{зал}} - f_{\text{вiд}}$ – число ступенів волі дисперсії адекватності.

Адекватність рівняння регресії перевіряємо за допомогою розрахованого критерію Фішера по рівнянню:

$$F_p = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_{\text{вiд}}^2}. \quad (5.18)$$

Табличне значення критерію Фішера F_m для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і ступенів волі $f_{\text{ад}}$ і $f_{\text{вiд}}$ знаходимо з таблиці.

5.2. Обробка даних ПФЕ 2 порядку в середовищі MathCad

Досліджувався процес розкладання (ферментації) крохмалю, в залежності від трьох факторів: – температури, °С; x_2 – витрат ферменту, од. акт./г СР крохмалю; x_3 – часу процесу ферментації, хв.

Нижній (-1) і верхній (+1) рівні факторів були такі: для x_1 – 65, 85 °С; для x_2 – 2, 3 од. акт./г СР крохмалю; для x_3 – 30, 90 хв.

Для проведення досліджень був розроблений і виконаний рототабельний план експерименту 2-го порядку. Результати експерименту з зірковим плечем $\alpha = 1.682$, 6-ма дослідями нульового плану і допоміжні коефіцієнти для розрахунку коефіцієнтів поліному моделі представлені нижче. Передбачено, що індексація масивів починається з 1.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 x := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1.682 & 0 & 0 \\ 1.682 & 0 & 0 \\ 0 & -1.682 & 0 \\ 0 & 1.682 & 0 \\ 0 & 0 & -1.682 \\ 0 & 0 & 1.682 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 y := \begin{pmatrix} 68 \\ 36.90 \\ 74.74 \\ 42.03 \\ 93.84 \\ 73.3 \\ 99.5 \\ 75.36 \\ 80.0 \\ 32.85 \\ 87.9 \\ 96 \\ 46.86 \\ 97 \\ 99.5 \\ 98.5 \\ 99.4 \\ 98.4 \\ 99.4 \\ 98.3 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 K := 3 \quad N := 20 \quad n0 := 6 \quad \text{ORIGIN} := 1 \\
 i := 1..N \quad j := 1..K \\
 \text{Дані для розрахунку коефіцієнтів} \\
 \text{регресії} \\
 a1 := 0.166338 \\
 a2 := 0.056791 \\
 a3 := 0.073224 \\
 a4 := 0.125 \\
 a5 := 0.0625 \\
 a6 := 0.006889 \\
 a7 := 0.056791
 \end{array}$$

Далі з використанням змінних $a1 - a7$ по формулах (5.10) – (5.14) знаходяться коефіцієнти поліноміального рівняння (5.1):

$$\begin{aligned}
 b0 &:= a1 \cdot \sum_i y_i - a2 \cdot \left[\sum_i (x_{i,1})^2 \cdot y_i + \sum_i (x_{i,2})^2 \cdot y_i + \sum_i (x_{i,3})^2 \cdot y_i \right] \\
 b1 &:= a3 \cdot \sum_i x_{i,1} \cdot y_i & b2 &:= a3 \cdot \sum_i x_{i,2} \cdot y_i & b3 &:= a3 \cdot \sum_i x_{i,3} \cdot y_i \\
 b0 &= 98.94511 & b1 &= -13.7512 & b2 &= 2.43208 & b3 &= 14.98643 \\
 b12 &:= a4 \cdot \sum_i (x_{i,1} \cdot x_{i,2} \cdot y_i) & b13 &:= a4 \cdot \sum_i (x_{i,1} \cdot x_{i,3} \cdot y_i) & b23 &:= a4 \cdot \sum_i (x_{i,2} \cdot x_{i,3} \cdot y_i) \\
 q &:= a6 \cdot \left[\sum_i (x_{i,1})^2 \cdot y_i + \sum_i (x_{i,2})^2 \cdot y_i + \sum_i (x_{i,3})^2 \cdot y_i \right] - a7 \cdot \sum_i y_i \\
 b11 &:= a5 \cdot \sum_i (x_{i,1})^2 \cdot y_i + q & b22 &:= a5 \cdot \sum_i (x_{i,2})^2 \cdot y_i + q & b33 &:= a5 \cdot \sum_i (x_{i,3})^2 \cdot y_i + q \\
 b12 &= -0.65125 & b13 &= 2.39125 & b23 &= -0.51875 \\
 b11 &= -15.3192 & b22 &= -2.75612 & b33 &= -9.836
 \end{aligned}$$

Розраховані значення можна знайти по рівнянню (набирати в один ряд).

$$y_{pi} := b0 + b1 \cdot x_{i,1} + b2 \cdot x_{i,2} + b3 \cdot x_{i,3} + b12 \cdot x_{i,1} \cdot x_{i,2} + b13 \cdot x_{i,1} \cdot x_{i,3} + b23 \cdot x_{i,2} \cdot x_{i,3} + b11 \cdot (x_{i,1})^2 +$$

$$b22 \cdot (x_{i,2})^2 + b33 \cdot (x_{i,3})^2$$

Далі знаходимо дисперсії – відтворення, залишкову і адекватності (рівняння 5.15 - 5.17) і критерій адекватності Фішера (5.18).

$y0s := \frac{\sum_{i=15}^{20} y_i}{n0}$ <p style="text-align: center;">$y0s = 98.91667$</p> $\delta_{bid} := \frac{\sum_{i=15}^{20} (y_i - y0s)^2}{n0 - 1}$ <p style="text-align: center;">$\delta_{bid} = 0.325667$</p> $\delta_{oct} := \frac{\sum (y - y_p)^2}{N - L}$ <p style="text-align: center;">$\delta_{oct} = 0.94771$</p> $\delta_{ad} := \frac{foct \cdot \delta_{oct} - fbid \cdot \delta_{bid}}{fad}$ <p style="text-align: center;">$\delta_{ad} = 1.56974$</p> $F_p := \frac{\delta_{ad}}{\delta_{bid}}$ <p style="text-align: center;">$F_p = 4.82009$</p>	$L := 10$ $fbid := n0 - 1$ $fbid = 5$ $foct := N - L$ $foct = 10$ $fad := foct - fbid$ $fad = 5$ $Ft = 5.1$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px;">$y_{pi} =$</th> <th style="padding: 2px;">$y_i =$</th> <th style="padding: 2px;">$y_{pi} - y_i =$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 2px;">68.58773</td><td style="padding: 2px;">68</td><td style="padding: 2px;">0.58773</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">37.60534</td><td style="padding: 2px;">36.9</td><td style="padding: 2px;">0.70534</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">75.79188</td><td style="padding: 2px;">74.74</td><td style="padding: 2px;">1.05188</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">42.20449</td><td style="padding: 2px;">42.03</td><td style="padding: 2px;">0.17449</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">94.81558</td><td style="padding: 2px;">93.84</td><td style="padding: 2px;">0.97558</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">73.39819</td><td style="padding: 2px;">73.3</td><td style="padding: 2px;">0.09819</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">99.94473</td><td style="padding: 2px;">99.5</td><td style="padding: 2px;">0.44473</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">75.92234</td><td style="padding: 2px;">75.36</td><td style="padding: 2px;">0.56234</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">78.73471</td><td style="padding: 2px;">80</td><td style="padding: 2px;">1.26529</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">32.47568</td><td style="padding: 2px;">32.85</td><td style="padding: 2px;">0.37432</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">87.05695</td><td style="padding: 2px;">87.9</td><td style="padding: 2px;">0.84305</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">95.23845</td><td style="padding: 2px;">96</td><td style="padding: 2px;">0.76155</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">45.91067</td><td style="padding: 2px;">46.86</td><td style="padding: 2px;">0.94933</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">96.325</td><td style="padding: 2px;">97</td><td style="padding: 2px;">0.675</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">99.5</td><td style="padding: 2px;">0.55489</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">98.5</td><td style="padding: 2px;">0.44511</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">99.4</td><td style="padding: 2px;">0.45489</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">98.4</td><td style="padding: 2px;">0.54511</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">99.4</td><td style="padding: 2px;">0.45489</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">98.94511</td><td style="padding: 2px;">98.3</td><td style="padding: 2px;">0.64511</td></tr> </tbody> </table>	$y_{pi} =$	$y_i =$	$ y_{pi} - y_i =$	68.58773	68	0.58773	37.60534	36.9	0.70534	75.79188	74.74	1.05188	42.20449	42.03	0.17449	94.81558	93.84	0.97558	73.39819	73.3	0.09819	99.94473	99.5	0.44473	75.92234	75.36	0.56234	78.73471	80	1.26529	32.47568	32.85	0.37432	87.05695	87.9	0.84305	95.23845	96	0.76155	45.91067	46.86	0.94933	96.325	97	0.675	98.94511	99.5	0.55489	98.94511	98.5	0.44511	98.94511	99.4	0.45489	98.94511	98.4	0.54511	98.94511	99.4	0.45489	98.94511	98.3	0.64511
$y_{pi} =$	$y_i =$	$ y_{pi} - y_i =$																																																															
68.58773	68	0.58773																																																															
37.60534	36.9	0.70534																																																															
75.79188	74.74	1.05188																																																															
42.20449	42.03	0.17449																																																															
94.81558	93.84	0.97558																																																															
73.39819	73.3	0.09819																																																															
99.94473	99.5	0.44473																																																															
75.92234	75.36	0.56234																																																															
78.73471	80	1.26529																																																															
32.47568	32.85	0.37432																																																															
87.05695	87.9	0.84305																																																															
95.23845	96	0.76155																																																															
45.91067	46.86	0.94933																																																															
96.325	97	0.675																																																															
98.94511	99.5	0.55489																																																															
98.94511	98.5	0.44511																																																															
98.94511	99.4	0.45489																																																															
98.94511	98.4	0.54511																																																															
98.94511	99.4	0.45489																																																															
98.94511	98.3	0.64511																																																															

Рівняння адекватне дослідним даним, так як розрахований критерій Фішера $F_p = 4.82$ менший табличного $F_t = 5.1$.

Виконуємо перевірку значущості отриманих коефіцієнтів регресії з використанням критерія Стьюдента.

$$S_{b0} := \sqrt{a1 \cdot \delta bid} \quad S_{bj} := \sqrt{a3 \cdot \delta bid} \quad S_{buj} := \sqrt{a4 \cdot \delta bid} \quad S_{bjj} := \sqrt{(a5 + a6) \cdot \delta bid}$$

$$S_{b0} = 0.23275 \quad S_{bj} = 0.15442 \quad S_{buj} = 0.20176 \quad S_{bjj} = 0.15033$$

$$t_0 := \frac{|b_0|}{S_{b0}} \quad t_1 := \frac{|b_1|}{S_{bj}} \quad t_2 := \frac{|b_2|}{S_{bj}} \quad t_3 := \frac{|b_3|}{S_{bj}}$$

$$t_0 = 425.12039 \quad t_1 = 89.0486 \quad t_2 = 15.74939 \quad t_3 = 97.04757$$

$$t_{12} := \frac{|b_{12}|}{S_{buj}} \quad t_{13} := \frac{|b_{13}|}{S_{buj}} \quad t_{23} := \frac{|b_{23}|}{S_{buj}}$$

$$t_{12} = 3.2278 \quad t_{13} = 11.85177 \quad t_{23} = 2.57109$$

$$t_{11} := \frac{|b_{11}|}{S_{bjj}} \quad t_{22} := \frac{|b_{22}|}{S_{bjj}} \quad t_{33} := \frac{|b_{33}|}{S_{bjj}}$$

$$t_{11} = 101.90702 \quad t_{22} = 18.33438 \quad t_{33} = 65.43148$$

Табличне значення критерія Стьюдента при $f = 5$ і $\alpha = 0,05$ $t_{st} = 2,57$.
Всі коефіцієнти регресії значимі.

Зробимо перетворення коефіцієнтів рівняння, в якому фактори були кодовані до виду в якому фактори мають натуральні значення. Перетворення виконуємо з використанням методу лінійної інтерполяції, де в кодованій формі i – ті фактори змінюються від (-1) до (+1), а в натуральній від нижнього значення фактору, x_{in} , до верхнього, x_{ib} , значення по формулі:

$$x_k = \frac{2(x_n - x_{ib})}{x_{in}} - 1$$

$x_{1n} := 65$ $x_{1b} := 85$ 1-й фактор, температура, град С

$x_{2n} := 2$ $x_{2b} := 3$ 2-й фактор, витрати ферменту, од. акт./г. СР крохмалю

$x_{3n} := 30$ $x_{3b} := 90$ 3-й фактор, час, хв.

$b_0 = 98.94511$ $b_1 = -13.7512$ $b_2 = 2.43208$ $b_3 = 14.98643$ $b_{12} = -0.65125$ $b_{13} = 2.39125$

$b_{23} = -0.51875$ $b_{11} = -15.3192$ $b_{22} = -2.75612$ $b_{33} = -9.836$

В один рядок набираємо рівняння регресії з елементами інтерполяції

$$98.94511 - 13.7512 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] + 2.4321 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] + 14.9864 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] - 0.65125 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] + 2.39125 \cdot$$

$$\left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] - 0.51875 \cdot \left[\left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] \right] - 15.3192 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right]^2 - 2.7561 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right]^2 - 9.836 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right]^2$$

Він краще видно збільшеним.

$$\begin{aligned}
& 98.94511 - 13.7512 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] + 2.4321 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] + 14.9864 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] - \\
& -0.65125 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] + 2.39125 \cdot \left[\left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] \right] - 0.51875 \cdot \left[\left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] \right] - \\
& -0.51875 \cdot \left[\left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right] \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right] \right] - 15.3192 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_1 - 65)}{20} - 1 \right]^2 - 2.7561 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right]^2 - 9.836 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right]^2 - \\
& \quad -2.7561 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_2 - 2)}{1} - 1 \right]^2 - 9.836 \cdot \left[\frac{2 \cdot (x_3 - 30)}{60} - 1 \right]^2
\end{aligned}$$

Після спрощення в MathCad рівняння в натуральній формі має вид:

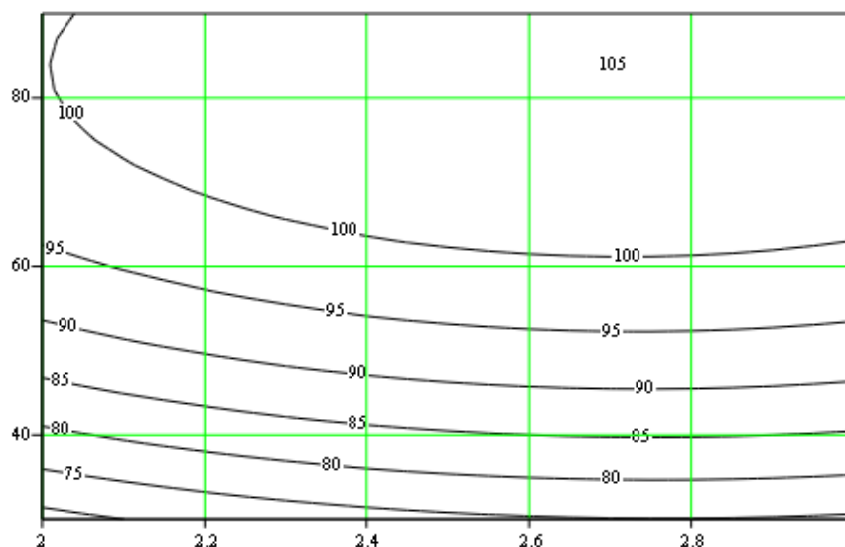
$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3) := & 1.299659 \cdot x_3 + 21.451 \cdot x_1 - 803.7463 + 71.83 \cdot x_2 - 3.4583 \cdot 10^{-2} \cdot x_2 \cdot \\
& \cdot x_3 + 7.9708 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 \cdot x_3 - .13025 \cdot x_1 \cdot x_2 - 1.0929 \cdot 10^{-2} \cdot x_3^2 - 11.0244 \cdot x_2^2 - .153192 \cdot x_1^2
\end{aligned}$$

Перевірка рівняння при нижніх і верхніх значеннях факторів показує, адекватність рівняння:

$$f_1(65, 2, 30) = 68.58415 \qquad f_1(85, 3, 90) = 75.91677 \qquad f_1(75, 2.5, 60) = 98.94062$$

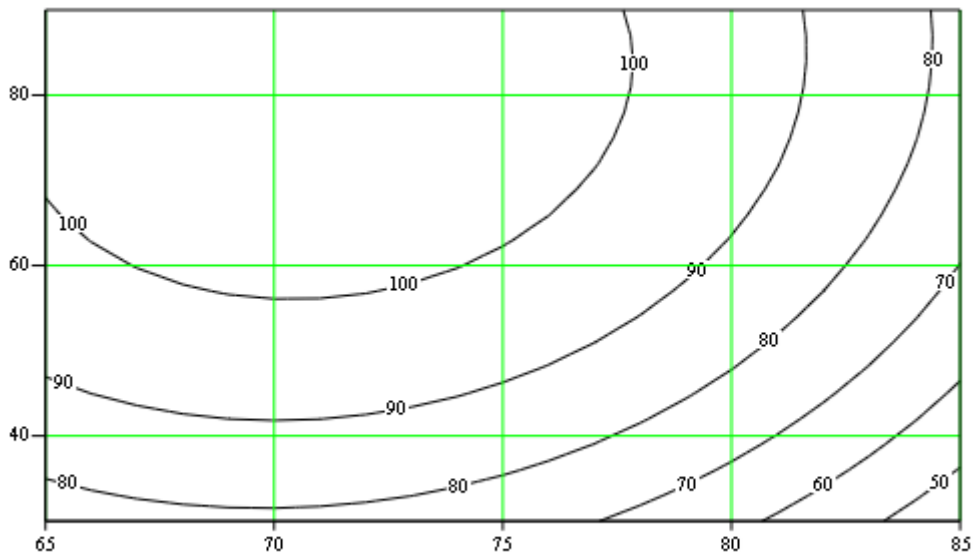
Далі будемо графіки результатів моделювання, для цього формуємо масиви зміни параметрів по x_1 , x_2 і x_3 при розбитті інтервалу зміни кожного параметру на $NN = 20$. Будемо двопараметричні графіки ліній рівня. Так як параметрів три, то третій параметри в кожному графіку беремо в центрі плану.

$$\begin{aligned}
NN &:= 20 & k &:= 1.. NN + 1 & r &:= 1.. NN + 1 & v &:= 1.. NN + 1 \\
h_1 &:= \frac{x_{1b} - x_{1n}}{NN} & h_2 &:= \frac{x_{2b} - x_{2n}}{NN} & h_3 &:= \frac{x_{3b} - x_{3n}}{NN} \\
x_{1k} &:= x_{1n} + (k - 1) \cdot h_1 & x_{2r} &:= x_{2n} + (r - 1) \cdot h_2 & x_{3v} &:= x_{3n} + (v - 1) \cdot h_3 \\
Z_{1r,v} &:= f_1(75, x_{2r}, x_{3v}) & Z_{2k,v} &:= f_1(x_{1k}, 2.5, x_{3v}) & Z_{3k,r} &:= f_1(x_{1k}, x_{2r}, 60)
\end{aligned}$$



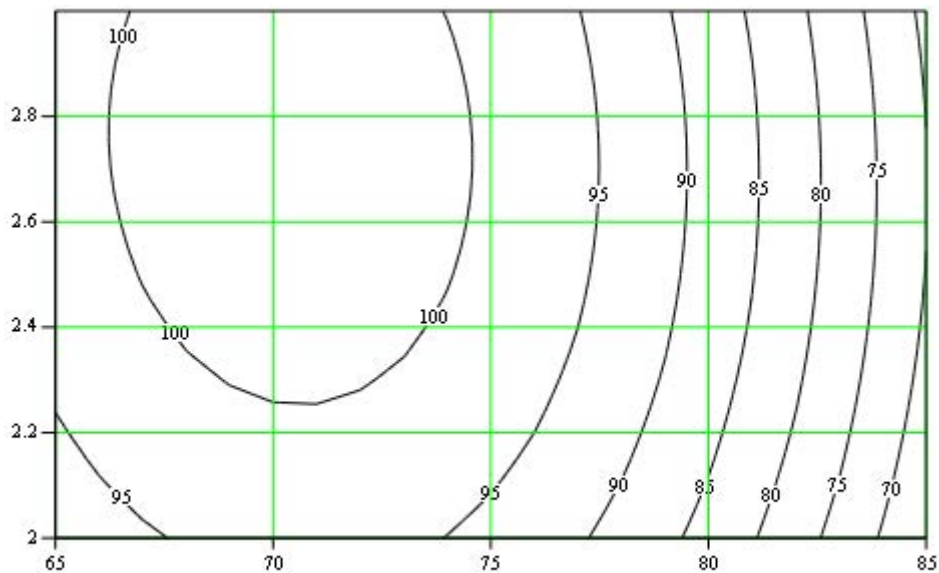
Z1

Рис. 5.2. Лінії рівня розкладу крохмалю, %, від витрат ферменту і часу розкладання при температурі 75 °С.



Z2

Рис. 5.3. Лінії рівня розкладу крохмалю, %, від температури і часу розкладання при витратах ферменту 2.5 од на 1 гр. СР крохмалю.



Z3

Рис. 5.4. Лінії рівня розкладу крохмалю, %, від температури і витрат ферменту при часі розкладання 60 хв.

Висновки:

Оброблені результати рототабельного плану 3-х факторного експерименту другого порядку і отримана математична модель регресії. Всі коефіцієнти моделі значимі, а рівняння по критерію Фішера адекватне дослідним даним. Побудовані графіки залежностей по рівнянню регресії. Результати вказують на можливість оптимізації процесу (знаходження максимуму розкладу крохмалю) по отриманій моделі.

5.3. Завдання по роботі:

А) Досліджувалось отримання пектину з бурякової стружки у % до маси СР, в залежності від трьох факторів: – рН суміші, од.; x_2 – температури, °С; x_3 – тривалості процесу, хв.

Нижній (-1) і верхній (+1) рівні факторів були такі: для x_1 – 1.321, 1.679 од.; для x_2 – 66.075, 83.985 °С од.; для x_3 – 64,175, 100.825 хв. Фактично обмеження в дослідах по параметрах були по зіркових плечах (- α) і (+ α) для x_1 – 1.2, 1.5; x_2 – 60, 90; x_3 – 50, 120.

Для проведення досліджень був розроблений і виконаний рототабельний план експерименту 2-го порядку. Результати експерименту з зірковим плечем $\alpha = 1.682$, 6-ма дослідями нульового плану і допоміжні коефіцієнти для розрахунку коефіцієнтів поліному моделі представлені нижче. Передбачено, що індексація масивів починається з 1. (ORIGIN := 1).

Знайти і оцінити регресію 3-х факторної моделі з використанням MathCad.

	$x := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1.682 & 0 & 0 \\ 1.682 & 0 & 0 \\ 0 & -1.682 & 0 \\ 0 & 1.682 & 0 \\ 0 & 0 & -1.682 \\ 0 & 0 & 1.682 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$y := \begin{pmatrix} 12.07 \\ 10.12 \\ 13.76 \\ 12.53 \\ 13.0 \\ 11.07 \\ 14.89 \\ 14.18 \\ 15.3 \\ 10.74 \\ 12.97 \\ 14.32 \\ 11.96 \\ 13.88 \\ 14.05 \\ 13.95 \\ 13.87 \\ 13.06 \\ 13.15 \\ 14.01 \end{pmatrix}$	<p>K := 3 N := 20 n0 := 6 ORIGIN := 1 i := 1..N j := 1..K</p> <p>Дані для розрахунку коефіцієнтів регресії</p> <p>a1 := 0.166338 a2 := 0.056791 a3 := 0.073224 a4 := 0.125 a5 := 0.0625 a6 := 0.006889 a7 := 0.056791</p>
--	---	---	--

Лабораторна робота 6

на тему: «Дослідження технологічних параметрів клімату на фермі ВРХ за допомогою математичної моделі з використанням пакетів MathCad і Simulink MATLAB»

Мета роботи: Ознайомитись з математичною моделлю об'єкту керування опалення і вентиляції на фермі великої рогатої худоби (ВРХ). За допомогою імітаційної моделі Simulink MATLAB дослідити даний об'єкт по каналах температури і вмісту вологи повітря в приміщенні ферми. Проміжні розрахунки і побудову графіків робити за допомогою ППП MathCad.

6.1. Теоретичні дані

6.1.1. Теплообмін в приміщенні ферми

Розглянемо типовий об'єкт керування (ТОК), тваринницьку ферму. Тваринницька ферма за інформаційною ємністю об'єкту відноситься до середніх ТОК. Серед параметрів регулювання в ньому найбільш важливими є температура в приміщенні і кількість шкідливих речовин і вологи у повітрі. Кількість шкідливих речовин в повітрі визначається об'ємом повітря, який поступає у приміщення і кількості тварин в ньому. Температура у приміщенні визначається втратами тепла в навколишнє середовище і затратами на підігрівання повітря до температури приміщення. Слід зауважити, що життєдіяльність біологічного об'єкту, тварин, приводить до виділення теплоти, яку слід враховувати при побудові моделі теплообміну в приміщенні ферми і до виділення вологи, і яку слід враховувати при обчисленні витрат повітря на вентиляцію, направлену на видалення вологи і вуглекислого газу з приміщення.

Приступимо до розроблення математичної моделі теплообміну в приміщенні ферми. В статичному режимі кількість тепла, яке поступає в приміщення з тваринами Q_t і додатковим нагріванням Q_d дорівнює кількості тепла, що втрачається на нагрівання вентиляційного повітря Q_v і втрати тепла в навколишнє середовище Q_w .

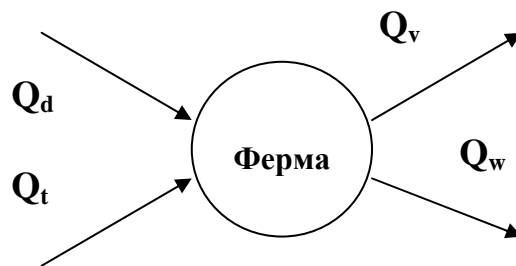


Рис. 6.1. Схема теплових потоків на тваринницькій фермі

$$Q_d + Q_t - Q_v - Q_w = 0 \quad (6.1)$$

В динамічному режимі, коли буде змінюватися температура у приміщенні t_p в залежності від збурень, наприклад зовнішнього чинника, температури навколишнього середовища t_z , в приміщенні буде змінюватись кількість тепла Q_p і рівняння (6.1) перетвориться в рівняння динаміки процесу:

$$\frac{dQ_p}{d\tau} = Q_d + Q_t - Q_v - Q_w. \quad (6.2)$$

В цьому рівнянні кількість тепла в приміщенні розраховується за формулою, Дж:

$$Q_p = V_p \rho_p C_p t_p. \quad (6.3)$$

Кількість тепла виділеного тваринами, Вт, дорівнює:

$$Q_t = nq. \quad (6.4)$$

Кількість тепла витраченого на нагрівання вентиляційного повітря, Вт:

$$Q_v = V_v \rho_p C_p (t_p - t_z). \quad (6.5)$$

Кількість тепла втраченого в навколишнє середовище, Вт:

$$Q_w = KF_p (t_p - t_z), \quad (6.6)$$

де: V_p – об'єм приміщення ферми, m^3 ; F_p – площа поверхні стін і стелі ферми, m^2 ; ρ_p – густина повітря, kg/m^3 ; C_p – теплоємність повітря, Дж/(кг град); K – середнє значення коефіцієнта теплопередачі стін і стелі приміщення ферми, Вт/(m^2 град); n – кількість тварин на фермі, шт.; q – середнє тепловиділення тварини, Дж, V_v – швидкість подавання вентиляційного повітря, m^3/c .

Швидкість подавання вентиляційного повітря необхідного для забезпечення допустимої концентрації шкідливих речовин у приміщенні ферми рахуємо виходячи з допустимого вмісту водяних парів у повітрі за формулою:

$$V_v = \frac{W_t}{(d_p - d_z) \rho_p}, \quad (6.7)$$

де: сумарна волога, яку виділяють всі тварини, $g/c W_t = \frac{nw \cdot 1000}{3600}$;

w – середня маса вологи, що виділяється однією твариною за годину, $kg/год$; d_p і d_z – вологовміст внутрішнього і зовнішнього, вентиляційного, повітря, g/kg сухого повітря.

Підставимо формули (6.3), (6.5) і (6.6) у формулу (6.2) і отримаємо:

$$\frac{d(V_p \rho_p C_p t_p)}{d\tau} = Q_d + Q_t - V_v \rho_p C_p (t_p - t_z) - KF_p (t_p - t_z). \quad (6.8)$$

Параметрична схема математичної моделі буде такою (рис 6.2.):

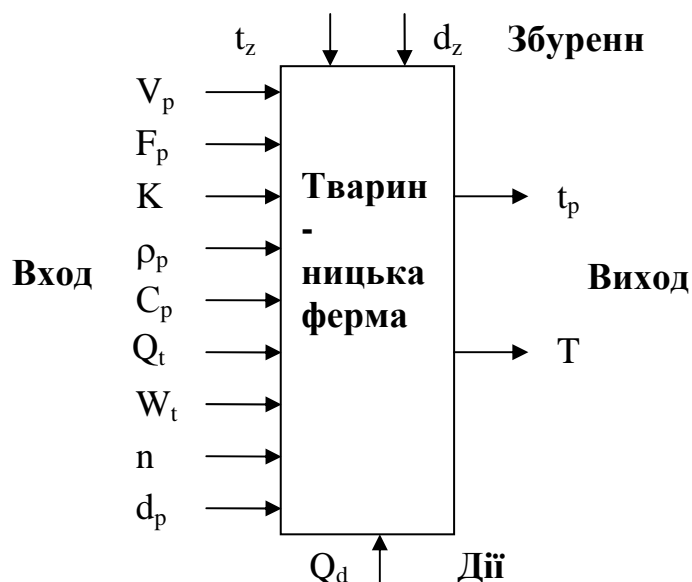


Рис. 6.2. Параметрична схема математичної моделі системи опалення на тваринницькій фермі

Після перетворення рівняння (6.8) прийме вигляд:

$$\frac{V_p \rho_p C_p}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)} \frac{dt_p}{d\tau} + t_p - \left(t_z + \frac{Q_d + Q_t}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)} \right) = 0, \quad (6.9)$$

Позначимо постійний час нагрівання ТОК, с:

$$T = \frac{V_p \rho_p C_p}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)}, \quad (6.10)$$

і усталену, при нульовій швидкості зміни температури повітря в приміщенні ферми, температуру повітря, град.:

$$t_y = t_z + \frac{Q_d + Q_t}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)}. \quad (6.11)$$

Тоді рівняння (6.9) запишемо:

$$T \frac{dt_p}{d\tau} + t_p - t_y = 0 \quad (6.12)$$

Постійна часу нагрівання T є важливим параметром ТОК тваринницької ферми. Вона представляє собою час, протягом якого у приміщенні ферми температура повітря досягнула усталеного значення без тепловіддачі в навколишнє середовище.

6.1.2. Обмін вологи в приміщенні ферми

Підтримання санітарно-гігієнічних норм повітряного середовища в тваринницькій фермі не можливі без організації загально обмінної

вентиляції. При створенні математичної моделі вентиляції на фермі почнемо із складання матеріального балансу вологи речовин у приміщенні ферми.

Важливим чинником цього є витрати повітря, які поступають в приміщення ферми для вентиляції. Цей параметр використовується не тільки по каналу регулювання температури, а й по каналу регулювання чистоти повітря в приміщенні. І тут він є параметром керування. Витрати повітря розраховуються в залежності від багатьох шкідливих факторів, які поступають у повітря: вологи, вуглекислого газу, метану та ін., але для регулювання вибирають той чинник, який дає найбільше значення повітрообміну. Таким параметром ми виберемо вологовміст повітря в приміщенні. Рівняння, яке описує баланс вологи в повітрі приміщення (див. рис. 6.3), має вигляд:

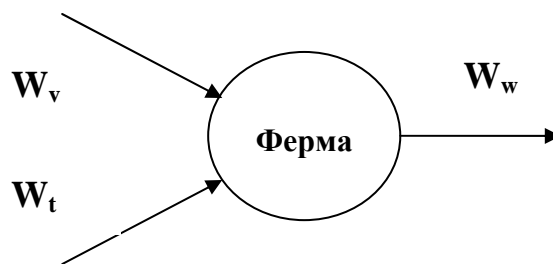


Рис. 6.3. Схема потоків вологи в повітрі на тваринницькій фермі

$$W_v + W_t - W_w = 0, \quad (6.13)$$

де W_v , W_t і W_w — відповідно маса вологи в припливному повітрі, виділена тваринами і видалена з приміщення з вентиляційним повітрям.

Враховуючи, що маса вологи в припливному повітрі, г/с, складе:

$$W_v = V_v \cdot d_z, \quad (6.14)$$

маса вологи виділеної тваринами, г/с, складе :

$$W_t = \frac{n \cdot w \cdot 1000}{3600}, \quad (6.15)$$

а маса вологи видаленої з приміщення, г/с, складе:

$$W_w = V_v \cdot d_p, \quad (6.16)$$

Волога в приміщенні в режимі статичності дорівнює:

$$W_p = V_p \cdot d_p, \quad (6.17)$$

В динамічному режимі кількість вологи в приміщенні буде змінюватись за рівнянням:

$$\frac{d(V_p d_p)}{d\tau} = V_v d_z + W_t - V_v d_p, \quad (6.18)$$

де: V_v , V_p — об'єм вентиляційного повітря, м³/с, поданого в приміщення за секунду і об'єм приміщення, м³; d_z , d_p — вологовміст повітря на вулиці і в приміщенні, г/кг сухого повітря; n — кількість тварин на фермі,

шт.; w – середня маса вологи, що виділяється однією твариною за годину, кг/год.

Після перетворення рівняння (6.13) отримаємо рівняння динаміки:

$$\frac{V_p}{V_v} \frac{d(d_p)}{d\tau} = d_z + \frac{W_t}{V_v} - d_p, \quad (6.19)$$

де постійна часу по каналу зміни вологи в приміщенні $T_w = V_p/V_v$.

Складемо параметричну схему математичної моделі, рис. 6.4.

Постійна часу зміни вологи в повітрі приміщення T_w буде дорівнювати часу необхідному для встановлення заданого значення вологовмісту в приміщенні, коли швидкість зміни вологи дорівнюватиме початковій. Цей параметр буде залежати від акумулюючої здатності ТОК, об'єму приміщення ферми.

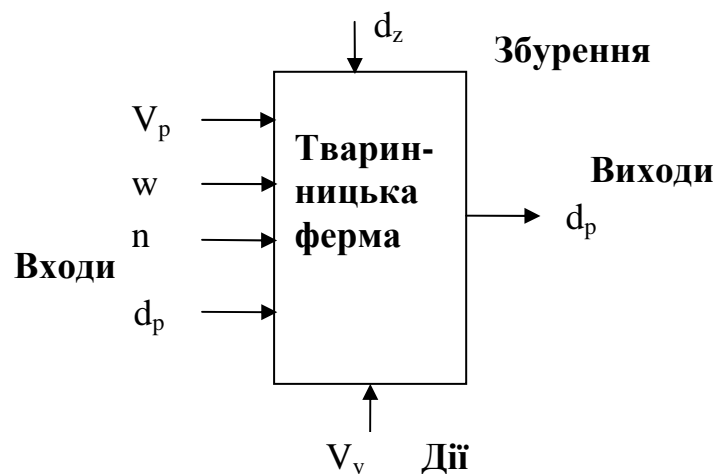


Рис. 6.4. Параметрична схема математичної моделі системи вентиляції на тваринницькій фермі

6.2. Приклад виконання роботи

6.2.1 Умова роботи

Розглянемо приклад виконання завдання. Технологічний об'єкт управління, ферма великої рогатої худоби має об'єм будівлі $V_p = 7200 \text{ м}^3$ з площею стін і стелі $F_p = 8100 \text{ м}^2$. Середнє значення коефіцієнта теплопередачі для них складає $K = 6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ град})$. На фермі утримується $n = 450$ корів. Середнє вологовиділення однієї тварини складе $w = 0,41 \text{ кг}/\text{год}$, а середнє тепловиділення $q = 210 \text{ Вт год}$.

Густина і теплоємність повітря $\rho_p = 1,293 \text{ кг}/\text{м}^3$ і $C_p = 1005 \text{ Дж}/(\text{кг град})$. Температура і вологовміст повітря в приміщенні має бути $t_p = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ і $d_p = 8,5 \text{ г}/\text{кг}$ сухого повітря, а температура і вологовміст зовнішнього повітря складає $t_z = -25 \text{ }^\circ\text{C}$ і $d_z = 2,5 \text{ г}/\text{кг}$.

Визначити потужність опалювального пристрою, необхідного для підтримання заданої температури в приміщенні, а також постійну часу нагрівання даного об'єкта, реальний час досягнення температури в

приміщенні, а також, на скільки збільшаться теплові затрати на нагрівання приміщення, якщо температура на вулиці зменшиться на 5 градусів.

Визначити потужність вентиляційного пристрою, необхідного для підтримання заданої вологості в приміщенні, а також постійну часу зміни вологи даного ТОК, реальний час досягнення заданого вологовмісту в приміщенні, і на скільки збільшаться витрати повітря на вентиляцію приміщення, якщо вміст вологи на вулиці зросте на 1 г/кг сухого повітря.

6.2.2. Порядок виконання розрахунків

За допомогою MathCad спочатку порахуємо продуктивність системи вентиляції (6.7). Сума виділення вологи всіх тварин за секунду складе, г/с:

$$W_t = \frac{nw \cdot 1000}{3600} = \frac{450 \cdot 0,41 \cdot 1000}{3600} = 51,25$$

а продуктивність системи вентиляції складе, м³/с:

$$V_v = \frac{W_t}{(d_p - d_z) \rho_p} = \frac{51,25}{(8,5 - 2,5) \cdot 1,293} = 6,61$$

Постійна часу нагрівання (6.10) буде рівною, с:

$$T_t = \frac{V_p \rho_p C_p}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)} = \frac{7200 \cdot 1,293 \cdot 1005}{6 \cdot 8100 + 6,61 \cdot 1,293 \cdot 1005} = 163,6$$

Сума тепловиділення всіх тварин (6.4) дорівнює, Вт:

$$Q_t = nq = 450 \cdot 210 = 94500$$

Кількість тепла витраченого на нагрівання вентиляційного повітря, Вт:

$$Q_v = V_v \rho_p C_p (t_p - t_z) = 6,61 \cdot 1,293 \cdot 1005 \cdot (15 - (-25)) = 343578 .$$

Коефіцієнт нагрівання, Вт/град:

$$K_v = V_v \rho_p C_p = 6,61 \cdot 1,293 \cdot 1005 = 8589,5$$

Для створення моделі в системі Simulink MATLAB приведемо рівняння (6.12) до виду Коші і запишемо у формі:

$$\frac{dt_p}{d\tau} = \frac{t_z}{T_t} + \frac{Q_d + Q_t}{(KF_p + K_v) \cdot T_t} - \frac{t_p}{T_t} \quad (6.20)$$

Орієнтовне значення постійної часу по каналу зміни вологи в приміщенні, с:

$$T_w = \frac{V_p}{V_v} = \frac{7200}{6,61} = 1089$$

6.2.3. Розроблення імітаційної моделі в Simulink

Створимо з математичної моделі імітаційну в середовищі Simulink MATLAB. Для цього використовуючи блоки *Constant*, з бібліотеки *Sources*,

куди введемо всі необхідні дані. Так як t_z – температура зовнішнього повітря і d_z – вологовміст зовнішнього повітря є збуренням моделі і далі може бути використана при моделюванні управління об'єктом введемо його за допомогою блоку **Step**. Враховуючи, що нам потрібно отримати $1/T$ – введемо і число 1. Далі використовуючи математичні блоки **Product** і **Sum** виконаємо операції між змінними правої частини рівняння (6.12). Значення температури повітря t_p і вологи в повітрі d_p в приміщенні беремо після блоків **Integrator**. Результат обчислення правих частин рівнянь по зміні температури і вологості повітря посилаємо на блок рішення диференційного рівняння **Integrator**.

Введемо попередньо обчислені і задані коефіцієнти у вхідні блоки. В блоках додавання і множення правильно вкажемо операції додавання і віднімання, множення і ділення. В блоці **Integrator** вкажемо, що початкове значення температури в приміщенні вводиться за допомогою зовнішньої команди **External**. Коли з'явиться додатковий вхід до нього приєднаємо блок **Constant**, в який і введемо початкову температуру в приміщенні наприклад 5 градусів і вмісту вологи 1 г/кг. сухого повітря.

Для виведення результатів використаємо блок осцилографа **Scope**. Проміжне значення обчислень можна вивести на блок **Display**. Так як розгінна крива ТОУ більша ніж 10 секунд, задамося часом моделювання. Для цього в параметрах моделювання **Simulation** → **Simulation Parameters** у вікні **Stop time** введемо число 5000 секунд. Якщо далі цього часу не вистачить для досягнення температурою усталеного значення, його слід збільшити. Такий самий час слід установити і на вкладці параметрів **General** блоку **Scope** у вікні команди **Time range**.

Враховуючи, що в значення постійної часу по параметру температури T_t входять витрати повітря на вентиляцію, значення цього параметру будемо не вводити, а рахувати, відповідно до формули (6.10), використовуючи блоки додавання **Sum** і множення **Product**. Значення цього параметра введемо за допомогою блоку **Display**.

В результаті отримаємо імітаційну схему моделі системи опалення і вентиляції на тваринницькій фермі (рис. 6.5).

Для запуску моделі клацнемо мишкою на кнопці запуску, або виконаємо команду **Start** меню **Simulation**.

Щоб побачити результат обчислень, двічі клацнемо на блоці **Scope** і побачимо вікно графіка цього блоку. Якщо масштаб виведення невірний, то клацнувши на кнопці меню **Autoscale**, автоматично встановимо масштаб осей. Розгінна крива температури автоматично не вийде на рівень 15 градусів, бо не має блоків, які автоматизують процес нагрівання. Для цього слід підібрати значення кількості тепла поданого на підігрівання приміщення Q_d , збільшуючи або зменшуючи його. Початкове значення можна взяти $1000 \div 2000$ кВт. Щоб подивитись як збільшуються втрати тепла при пониженні температури на вулиці, зменшимо завдання на температуру на 5 градусів і знову підберемо витрати тепла на нагрівання приміщення.

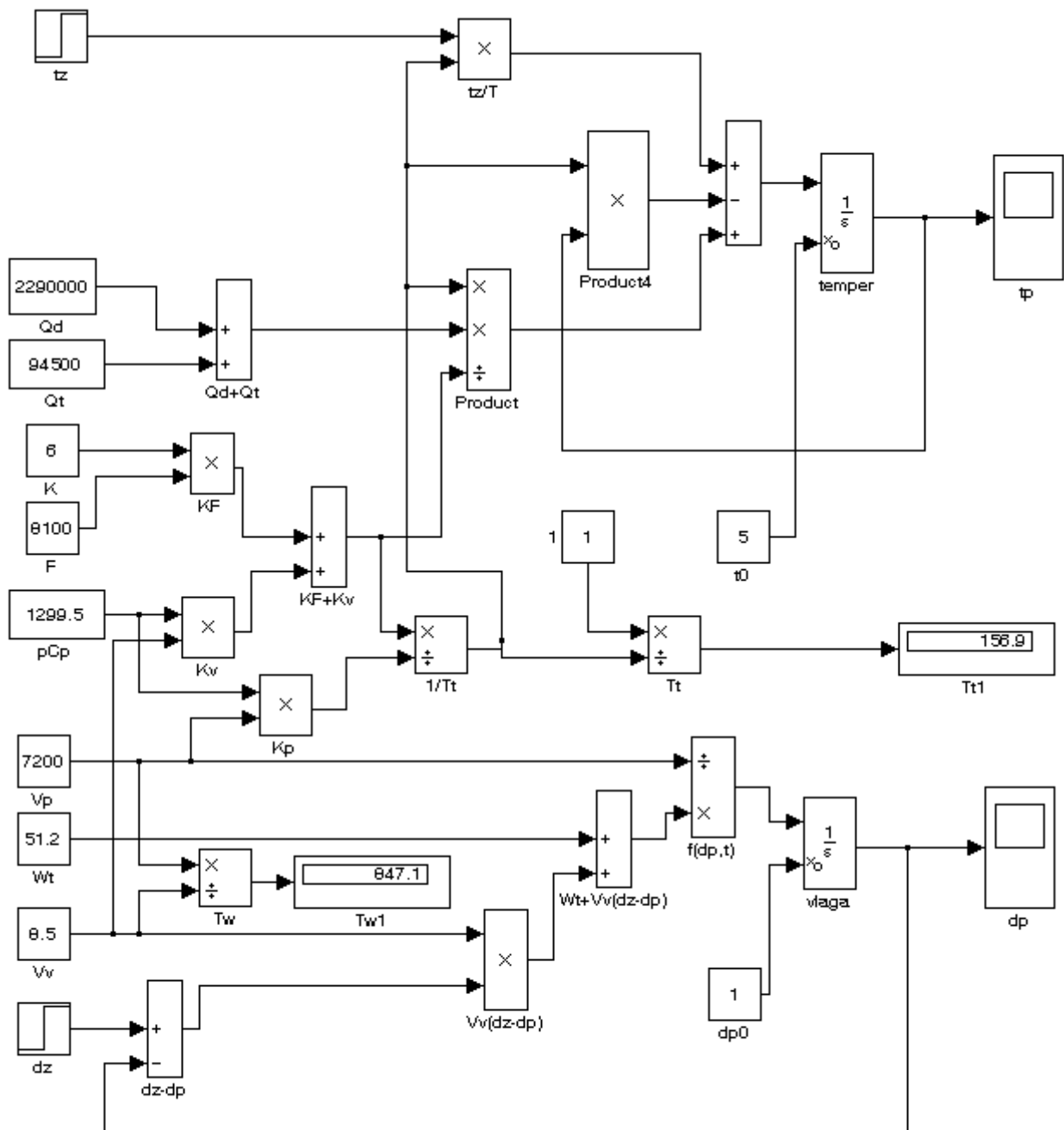


Рис. 6.6. Схема моделі теплообміну і вентиляції ТОК тваринницька ферма в блоках Simulink MATLAB

Щоб побачити результат обчислень, двічі клацнемо на блоці **Scope** і побачимо вікно графіка цього блоку. Якщо масштаб виведення невірний, то клацнувши на кнопки меню **Autoscale**, автоматично встановимо масштаб осей. Розгінна крива температури автоматично не вийде на рівень 15 градусів, бо не має блоків, які автоматизують процес нагрівання. Для цього слід підібрати значення кількості тепла поданого на підігрівання приміщення Q_d , збільшуючи або зменшуючи його. Початкове значення можна взяти $1000 \div 2000$ кВт. Щоб подивитись як збільшуються втрати тепла при пониженні температури на вулиці, зменшимо завдання на температуру на 5 градусів і знову підберемо витрати тепла на нагрівання приміщення.

Розгінна крива вологовмісту автоматично не вийде на рівень 8,5 г/кг сухого повітря, бо не має блоків, які автоматизують процес нагрівання. Для цього слід підібрати значення витрат повітря на вентиляцію поданого в приміщення V_p , збільшуючи або зменшуючи його. Початкове значення можна взяти $6 \div 10 \text{ м}^3/\text{с}$.

6.2.4.Результати моделювання:

Дослідження на даній моделі показали, що постійна часу нагрівання ТООУ складе $T = 163,6 \text{ с}$. Продуктивність системи вентиляції дорівнює $6,61 \text{ м}^3/\text{с}$, а витрати тепла на нагрівання вентиляційного повітря дорівнюють 344 кВт. Загальні витрати тепла, які потрібні для нагрівання приміщення до 15 градусів дорівнюють 2130 кВт. Реально система стабілізується за період 800 – 900 секунд. При пониженні зовнішньої температури повітря на 5 градусів з -25 до $-30 \text{ }^\circ\text{C}$ потрібно збільшити витрати тепла на 270 кВт до 2400 кВт.

Дослідження на даній моделі показали, що постійна часу по вологовмісту повітря ТООУ складе $T = 837,2 \text{ с}$. (див. показання на дисплеї). Продуктивність системи вентиляції дорівнює $8,55 \text{ м}^3/\text{с}$

Реально система стабілізується за період 4000 – 5000 секунд. При зміні вологовмісту зовнішнього повітря з 2,5 до 3,5 г/кг потрібно збільшити витрати повітря на $1,8 \text{ м}^3/\text{с}$., до $10,35 \text{ м}^3/\text{с}$.

Результати моделювання, розгінні криві показані на рис. 6.7. Ручне регулювання процесу треба спочатку робити по каналу вологовмісту, змінюючи витрати повітря на вентиляцію а потім по каналу температури, змінюючи витрати тепла на підігрівання приміщення.

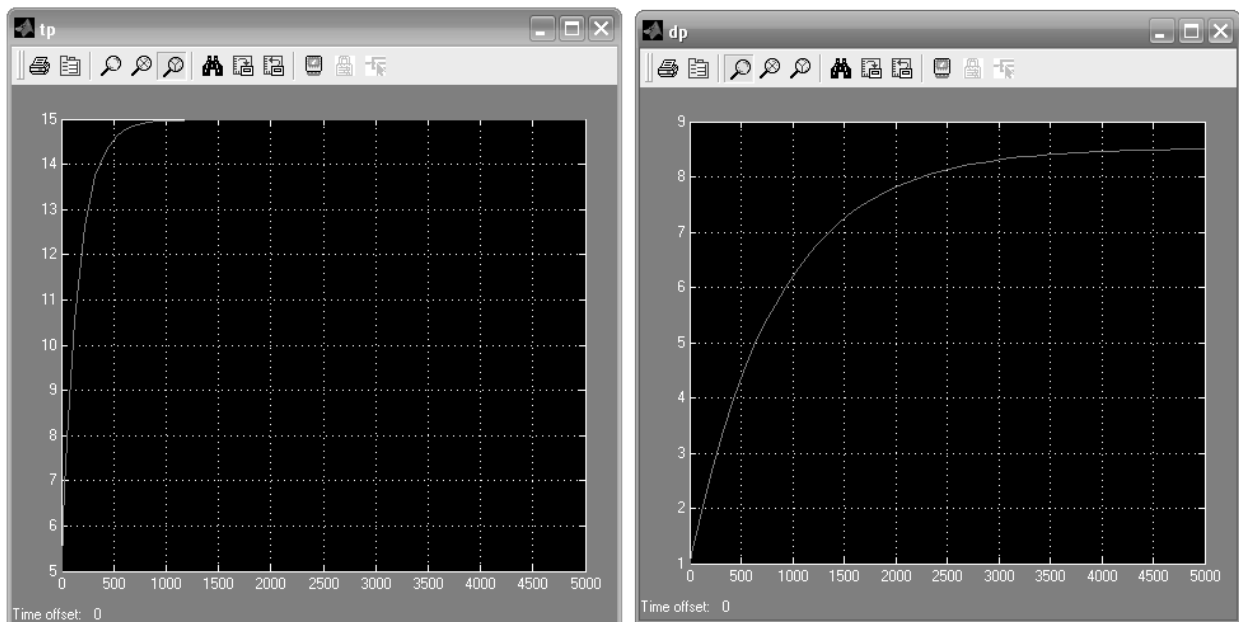


Рис. 6.7. Розгінна крива зміни температури і вологовмісту в приміщенні ТООУ, тваринницька ферма, яка отримана по даних спільної моделі Simulink

6.3. Питання для самоперевірки

1. З чого складається тепловий баланс в приміщенні пташника?
2. Особливості моделювання динаміки зміни тепла на біологічному об'єкті?
3. Що є постійною часу регулювання ферми по каналу температури?
4. Яку інформацію отримуємо з розгінної кривої температури повітря у пташнику?
5. Як виконується обігрівання повітря у пташниках?
6. Який вплив каналу управління вологовмістом на канал температури повітря в приміщенні пташника?
7. Як рахується баланс вологи в приміщенні пташника?
8. Чому постійна часу по каналу вологовмісту повітря менша за постійну часу температури повітря?
9. Чому потрібна вентиляція приміщення пташника?
10. Основні фактори збурення по каналах температури і вологовмісту повітря?

6.4. Варіанти завдань до лабораторної роботи (табл. 6.1)

Таблиця 6.1.

Варіанти завдань до лабораторної роботи

№ вар.	Кількість тварин на фермі, шт	Коефіцієнт теплопередачі, Вт/(м ² град)	Температура зовнішнього повітря, град. С	Вологість зовнішнього повітря, г/кг
1	400	4,8	-21	1,5
2	450	5,2	-17	3,0
3	410	8,4	-30	2,4
4	490	3,8	-24	1,7
5	550	6,3	-19	2,8
6	530	7,7	-29	1,9
7	470	5,6	-15	2,9
8	420	4,4	-23	2,0
9	430	5,0	-16	2,6
10	510	8,1	-22	2,1

Лабораторна робота 7

на тему: «Імітаційне моделювання метаногенеза в апаратах БГУ в середовищі Simulink MATLAB»

Мета роботи – ознайомитись з роботою типового об'єкта автоматизації біогазовою установкою. Навчитись створювати математичну і імітаційну моделі технологічного процесу виробництва біогазу з гною і посліду курей і тварин, провести дослідження на моделі цього об'єкту для створення системи керування ним, з використанням ППП Simulink MATLAB.

7.1. Технологічна частина

Аналіз існуючих біогазових технологій показав, що в Німеччині уже в даний час під вирощування енергетичних культур (ЕК) (переважно кукурудзи) для виробництва біогазу використовується більше 1 млн. га земель. При цьому виникає необхідність в подальшому дослідженні способів підвищення продуктивності БГУ та контролю інтенсивності росту мікробної популяції у зброджуваній біомасі.

При розкладі органічної сировини до біогазу можна виділити чотири головні стадії.

Перша – це гідроліз високомолекулярних органічних сполук, таких як вуглеводи, білки і жири, до стадії простих з'єднань. Ці полімери, такі як цукри, амінокислоти і жирні кислоти, можуть бути засвоєні мікроорганізмами для подальшого розкладу.

Друга і третя стадії мають назву ацито- і ацетогеноза. Під час ацитогеноза під дією анаеробних бактерій утворюються складні спирти і карбонові кислоти. При ацетогенозі ці речовини розкладаються до оцтової і мурашиної кислот а також метанолу з виділенням водню.

Під час *четвертої* стадії метаногенеза нарешті утворюється біогаз. Для його утворення використовуються особливі метаноутворюючі бактерії які з продуктів ацетогеноза утворюють вуглекислий газ і метан. Ця суміш називаються біогазом.

Одним із напрямків інтенсифікації процесів зброджування є деструкційна (кавітаційна) обробка, підігрівання і перемішування ЕК з оптимальною інтенсивністю завантаження субстрату, що забезпечує ефективне використання всього об'єму резервуару БГУ, виключає утворення «мертвих» зон, розшарування осаду, відкладання мінералізованого осаду та утворення кірки, а також сприяє вирівнюванню температурного поля та покращенню газоутворення. Процес інтенсифікації зброджування полягає в тому, що потік різних видів сировини у роторно-пульсаційному апараті БГУ подрібнюється до необхідного мікроскопічного рівня та гомогенізується. При цьому, в процесі обробки рвуться зв'язки довгих волокон (лігнін, целюлоза). Дисперсність збільшується так, що частинки значно зменшуються в розмірах. Тому штамам бактерій, які беруть участь в процесах утворення біогазу,

легше розкласти біогенні матеріали. У результаті вміст метану в біогазі збільшується до 70-75%.

Інший напрям збільшення виходу біогазу полягає у оптимальному дозуванні спеціальних домішок для різних видів сировини. Сумісне зброджування гнойових відходів з рослинною сировиною призводить до збільшення виходу метану, що обумовлено сумісною взаємодією різних видів субстратів. До переваг сумісного зброджування можна віднести:

- підтримання необхідної величини рН, що забезпечує нормальне протікання метаногенезу, за рахунок збільшення буферної ємності та можливості накопичення більшої кількості летких жирних кислот.
- зниження концентрації аміаку, яка буває при зброджуванні чистого гною за рахунок збільшення співвідношення вуглецю і азоту;
- збільшення виходу метану в наслідок оптимізації цього співвідношення за рахунок добавок рослинної сировини;
- збільшення виходу метану з одиниці об'єму біореактора.

Для оптимального дозування та перемішування субстратів і різних видів спеціальних домішок, що дозволяє значно збільшити вихід біогазу, використовується REDOX-сенсор, яким вимірюється швидкість зниження окисно-відновного потенціалу (ОВП) середовища.

7.2. Розробка математичної моделі метаногенеза

Математична модель метаногенеза основана на моделі росту популяції бактерій Моно з урахуванням процесу відмирання, що задається рівнянням Колпікова. Швидкість утворення біогазу задається прямо пропорційною концентрації бактерій.

Вважається, що концентрація бактерій за рахунок перемішування в апараті БГУ однорідна, а концентрація бактерій в субстраті, що надходить, майже нульова.

Модель працює для періодично діючого апарату при відносній швидкості надходження субстрату $p = 0$ і безперервно діючого апарату при $p > 0$.

Математична модель представлена системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_1 \cdot L}{a + L} - \frac{\mu_2 \cdot b}{b + L} - p \right) X \\ \frac{dL}{dt} = pL_0 - p \cdot L - \frac{\beta \cdot \mu_1 \cdot L}{a + L} X \\ \frac{dV}{dt} = \gamma \cdot X(t) \end{cases}, \quad (7.1)$$

з такими початковими умовами: $X(0) = X_0$, $L(0) = L_0$, $V(0) = V_0 = 0$,

де: X – концентрація бактерій, кг/м³;
 L – концентрація живильних речовин субстрату, яка усвоюється бактеріями, кг/м³;
 V – вихід біогазу, м³;
 μ_1 і μ_2 – максимально можливі відносні швидкості відповідно приросту і відмирання бактерій, дб⁻¹;
 β – безрозмірний коефіцієнт засвоєння субстрату;
 p – відносна швидкість надходження субстрату, дб⁻¹;
 γ – коефіцієнт швидкості перетворення живильних речовин субстрату в біогаз, м³/(дб. кг/м³);
 a і b – емпіричні коефіцієнти, м³/кг;
Для зручності можна позначити зміну об'єму газу на виході як швидкість виходу біогазу:

$$w = \frac{dV}{dt} = \gamma \cdot X \quad (7.2)$$

Відносна швидкість надходження субстрату може бути порахована формулою:

$$p = \frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (7.3)$$

де: Q – об'єм субстрату в метантенку (можливо, що рівний об'єму метантенку), м³;

dQ/dt – абсолютна швидкість надходження субстрату, м³/дб.

Значення коефіцієнтів моделі для мезофільного середовища при періодичному режимі роботи апарату (Королев С.А., Майков Д.В.) представлені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Значення коефіцієнтів моделі

№ п/п	Коефіцієнт	Надходження сировини		
		пташники	свиноферми	Ферми ВРХ
1	μ_1	0.821	0.484	0.359
2	μ_2	0.140	0.100	0.088
3	a	81.699	30.187	15.414
4	b	32.628	21.253	16.335
5	β	8.428	7.844	6.280
6	γ	0.847	0.751	0.658

7.3. Розробка імітаційної моделі і проведення досліджень

По рівняннях математичної моделі (7.1 – 7.3) створюємо динамічну імітаційну модель в середовищі Simulink MATLAB, дивись рис. 7.1. При

створенні імітаційної моделі замість третього диференціального рівняння системи рівнянь (7.1) використаємо рівняння для знаходження виходу газу w (7.2).

Для моделювання вибираємо такі дані. Час моделювання t беремо 30 діб, від 0 до 30. (Аспірантам час досліджень задано у варіанті завдання).

Початкові значення для концентрація живильних речовин субстрату беремо: $L_0 = 100 \text{ кг/м}^3$, а $X_0 = 1 \text{ кг/м}^3$, $V_0 = 0$. Інші дані беремо з таблиці 7.1 для посліду з пташника.

Для періодично діючого апарату беремо значення $p = 0,0$. Для безперервно діючого апарату вибираємо значення відносної швидкості надходження субстрату $p = 0,05; 0,1$ і $0,2$.

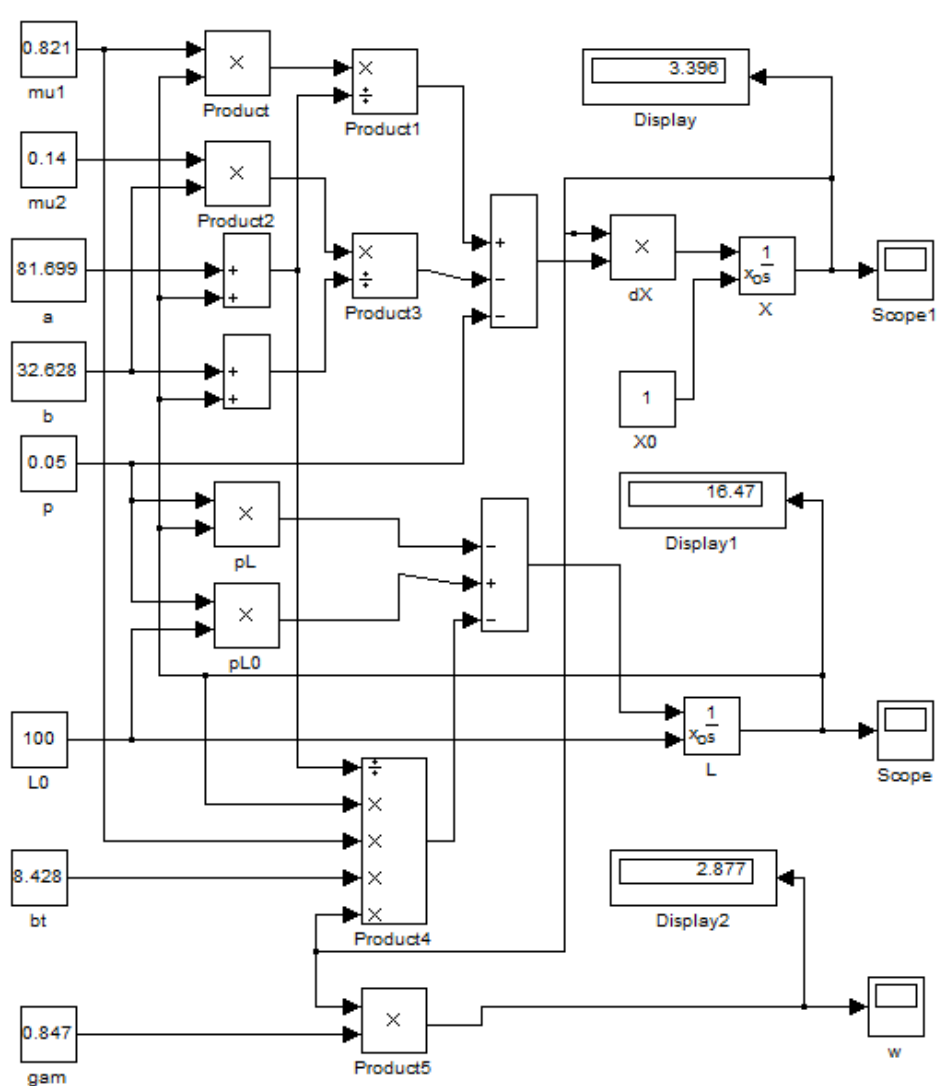


Рис. 7.1. Імітаційна модель метаногенеза на Simulink MATLAB

Будуємо імітаційну модель метаногенеза в БГУ. Верхня частина моделі (рис. 7.1) відображає розв'язок правої частини диференціального рівняння (7.1) по зміні концентрації бактерій в апараті X . Для цього з таблиці 4.1. вводимо дані коефіцієнтів μ_1 , μ_2 (μ_1 , μ_2 в моделі), a і b , а також відносну швидкість надходження субстрату – p . Початкове значення X (X_0),

щоб права частина диференціального рівняння не перетворювалась в 0, беремо рівним 1. Значення X визначене після інтегратора, виводиться на дисплей і осцилограф і передається в рівняння по визначенню концентрації живильних речовин субстрату, яка засвоюється бактеріями – L і вихід біогазу V (в моделі w). Нижче запрограмована права частина диференціального рівняння по розрахунку L . Тут вводиться з таблиці 4.1 безрозмірний коефіцієнт засвоєння субстрату β (в моделі bt). Інші коефіцієнти рівняння введені були раніше. Початкове значення концентрації живильних речовин субстрату L_0 , беремо по варіанту завдання. Ще нижче по формулі 4.2 рахуємо швидкість виходу біогазу w . Тут використовуємо з таблиці 4.1 коефіцієнт швидкості перетворення живильних речовин субстрату в біогаз γ (в моделі gam).

Проведемо дослідження процесу утворення метану з посліду пташника на протязі 30 діб роботи апарату БГУ при різних значеннях відносної швидкості надходження субстрату p .

Виведемо графіки зміни концентрації живильних речовин субстрату L (кг/м³) і швидкість виходу біогазу (м³/дб).

По даних графіків виходу біогазу w (рис. 7.2 – 7.5) з інтервалом 2 доби побудуємо таблиці виходу біогазу при 4-х значеннях p . Далі підрахуємо інтегральні, накопичувальні значення виходу біогазу протягом всього періоду по яких в MathCad побудуємо графіки (рис.4.6). При підрахунку інтегрального значення для кожної доби користуємося формулою:

$$W = \sum_{i=0}^{N/2-1} 2 \cdot w_i, \quad (7.4)$$

де N – кількість діб роботи БГУ, по варіанту, w_i – вихід біогазу по даних графіка з таблиці 7.3.

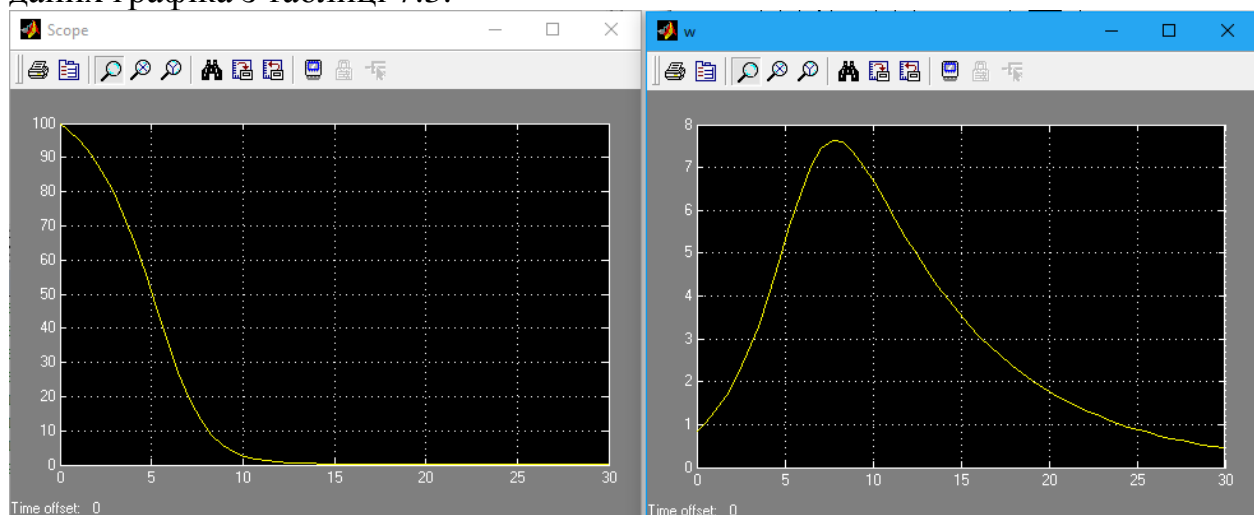


Рис. 7.2. Значення L і w для періодично діючого апарату при $p = 0$

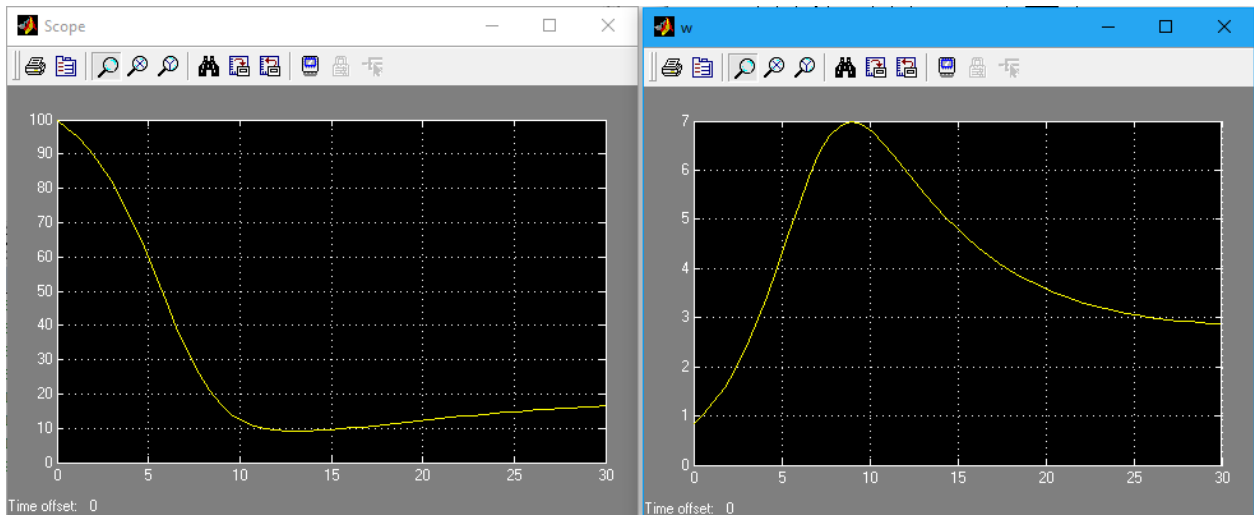


Рис. 7.3. Значення L і w для неперервно діючого апарату при $p = 0,05$

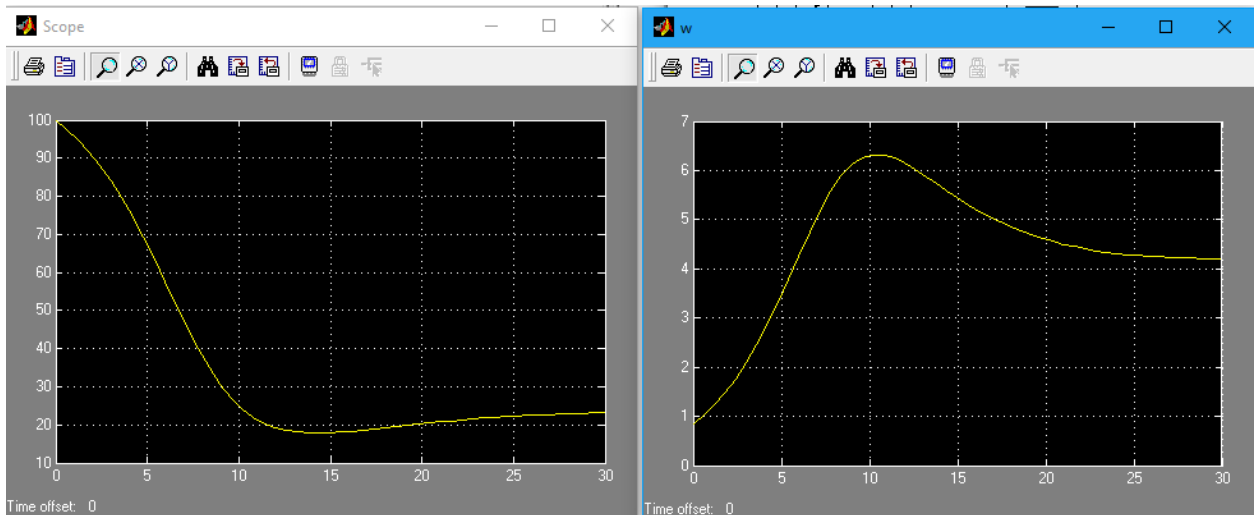


Рис. 7.4. Значення L і w для неперервно діючого апарату при $p = 0,1$

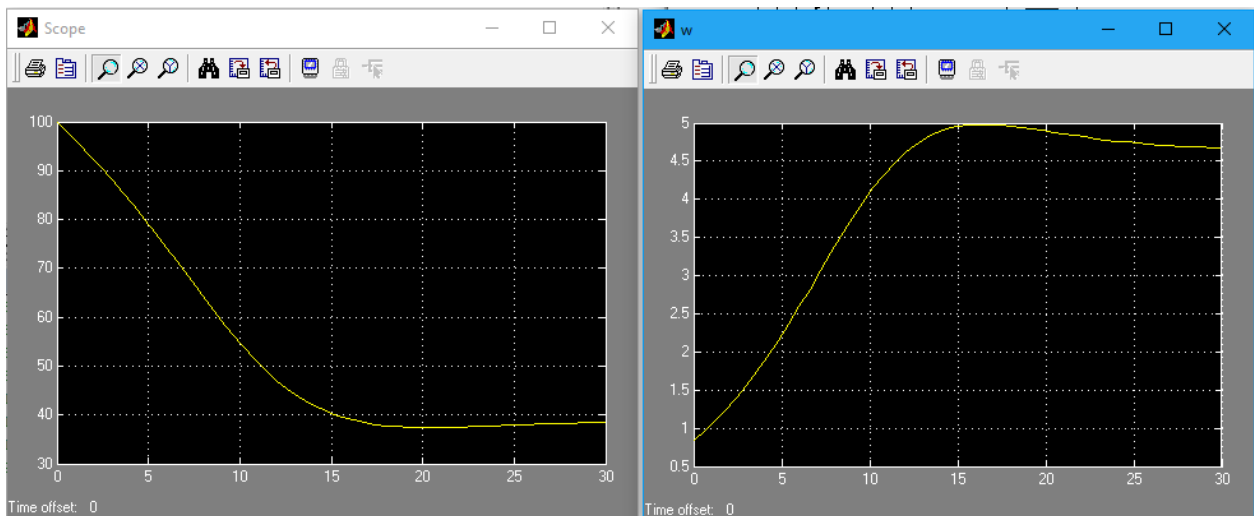


Рис. 7.5. Значення L і w для неперервно діючого апарату при $p = 0,2$

Таблиця 7.2.

Вихід біогазу при різних значеннях p по даних кривих w

p	Вихід біогазу на день досліді														
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
0	1	2,1	5,3	7,2	6,9	6,4	4,4	3,6	2,9	1,9	1,7	1,3	0,9	0,7	0,5
0,05	1	2,6	4,3	5,7	7	6,7	5,2	4,8	4,3	3,7	3,5	3,3	3,1	3	2,8
0,1	0,9	2	3,5	4,9	6,2	6,3	5,9	5,4	5,1	4,7	4,6	4,4	4,3	4,2	4,2
0,2	0,9	1,6	2,2	2,9	3,9	4,2	4,8	5	5	4,9	4,8	4,75	4,7	4,65	4,6

Таблиця 7.3

Інтегральний вихід біогазу при різних значеннях p

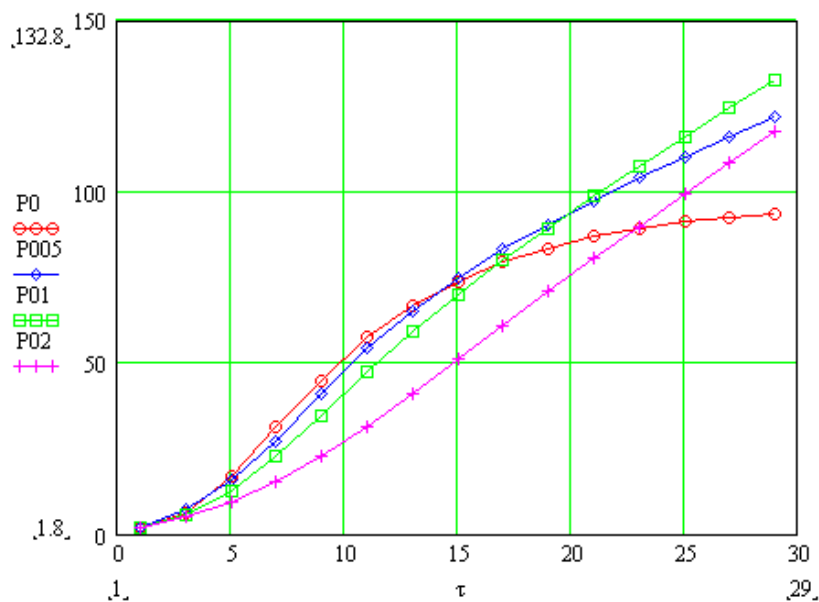
p	Вихід біогазу на день досліді														
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
0	2	6,2	16,8	31,2	45	57,8	66,6	73,8	79,6	83,4	86,8	89,4	91,2	92,6	93,6
0,05	2	7,2	15,8	27,2	41,2	54,6	65	74,6	83,2	90,4	97,4	104	110,2	116,2	121,8
0,1	1,8	5,8	12,8	22,6	34,6	47,2	59	69,8	80	89,4	98,6	107,4	116	124,4	132,8
0,2	1,8	5	9,4	15,2	23	31,4	41	51	61	70,8	80,4	89,9	99,3	108,6	117,8

Будуємо графіки інтегрального виходу біогазу при різних значеннях p з використанням ППП MathCad.

```

i := 0..14
tau := (1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29)^T
P0 := (2 6.2 16.8 31.2 45 57.8 66.6 73.8 79.6 83.4 86.8 89.4 91.2 92.6 93.6)^T
P005 := (2 7.2 15.8 27.2 41.2 54.6 65 74.6 83.2 90.4 97.4 104 110.2 116.2 121.8)^T
P01 := (1.8 5.8 12.8 22.6 34.6 47.2 59 69.8 80 89.4 98.6 107.4 116 124.4 132.8)^T
P02 := (1.8 5 9.4 15.2 23 31.4 41 51 61 70.8 80.4 89.9 99.3 108.6 117.8)^T

```

Рис. 7.6 Інтегральний вихід біогазу при різних значеннях p

Висновки:

На імітаційній моделі визначено, що за перші 30 діб роботи неперервно діючого апарату БГУ при збільшенні відносної швидкості надходження субстрату посліду з пташника від 0, до 0,2 інтегральне значення виходу газу має найбільше значення 132.8 м^3 при $p = 0,1$.

7.4 Варіанти індивідуальних завдань

№ вар.	Надходження сировини (табл. 4.1)	Початкова концентрація живильних речовин субстрату $L_0, \text{ кг/м}^3$	Початкова концентрація бактерій, $X_0, \text{ кг/м}^3$	Час дослідження, діб
1	з пташника	80	1,6	26
2	з пташника	90	1,5	28
3	з пташника	100	1,4	30
4	з пташника	110	1,3	32
5	з пташника	120	1,2	34
6	з пташника	130	1,1	26
7	з пташника	140	1,0	28
8	із свиноферми	150	0,9	30
9	із свиноферми	80	0,8	32
10	із свиноферми	90	1,7	34

Лабораторна робота 8

на тему: «Моделювання процесу приготування вологих кормів для свиней як об'єкта керування»

Мета роботи: На базі математичної моделі матеріальних балансів компонентів корму, маси сухих речовин і маси поживної складової корму розробити імітаційну модель об'єкту, дослідити вплив на нього зовнішніх збурень і отримати передатну функцію об'єкта керування по каналах поживності K , рівня в мішалці h і вмісту сухих речовин CP корму.

8.1. Теоретичні дані

Для забезпечення підтримання функцій організму тварин, їх швидкого росту необхідне використання збалансованих кормів. Це виконується за допомогою автоматизованих комплексів для приготування кормів і систем ефективною роздачі кормів. Оптимальний раціон для годівлі свиней повинен забезпечити максимальний рівень продуктивності тварин при мінімальній собівартості продукції. При цьому необхідно враховувати не тільки кількісні витрати корму, але також і якісні характеристики.

Промислова технологія виробництва свинини базується на використанні повнораціонних комбікормів, які можуть згодовуватись сухими (гранульовані і розсипні), у вигляді вологих мішанок (вологість 60 – 70 %) або рідкими (за співвідношенням комбікорму і води 1:3 за масою). Добову даванку комбікорму нормують відповідно до групи свиней і роздають два рази за добу.

Основою для приготування комбікорму є зерно, яке подрібнюється до часток розміром 0,9 – 1,2 мм. Разом із тим у невеликих господарствах і нині практикується концентратно-коренеплідний та концентратно-картопляний типи годівлі свиней.

Для автоматизації таких об'єктів розробляються їх математичні і імітаційні моделі на яких визначаються параметри і контури регулювання процесів змішування і транспортування корму.

При створенні математичної моделі системи приготування корму свиням необхідно врахувати масу корму, вміст сухих речовин корму і його енергетична цінність, при змішування подрібненого зерна і інших кормів різної якості у пристрої для підготовки і розбавлення корму.

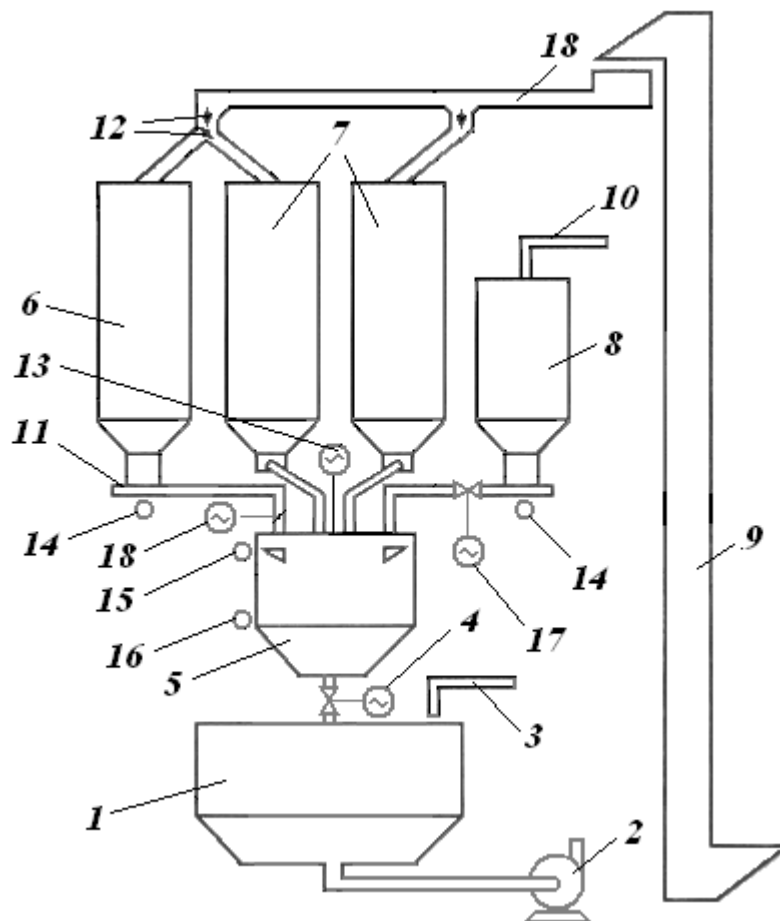


Рис.8.1. Технологічні лінії приймання, дозування і змішування кормів

Система складається (рис. 8.1) із бункеру комбікорму 6, бункерів додаткових кормів 7 із норією 9 і шнеком подачі кормів у бункери 18 і розподільними заслінками 12, шнеками подачі корму 11 в кормоприготувач 5, ємкості для води 8 із трубопроводом подачі води 10, мішалкою суміші у кормоприготувачі 13, накопичувальним збірником корму 1 із насосом для подачі корму у виробництво 2, а також трубопроводом поверненого корму 3.

Для регулювання рівня корму у ємкості, вмісту сухих речовин у корму, енергетичної цінності корму система обладнана тензодатчиками маси комбікорму і води в бункері і ємкості 14, датчиком рівня корму у кормоприготувачі 15, віскозіметром для вимірювання вмісту сухих речовин у кормі 16, а також виконавчими механізмами кранів води 17 і корму 4, заслінкою подачі комбікорму 18.

Розглянемо моделювання процесу підготовки корму для свиней у змішувальній ванні. При цьому в змішувач будуть поступати корми трьох видів і вода для розбавлення. Кожен вид корму буде характеризуватися масою G , кг, вмістом сухих речовин CP , частка до маси, і енергетичною цінністю в кормових одиницях на масу сухих речовин корму розрахованої через коефіцієнт кормової цінності K (рис.8.2).

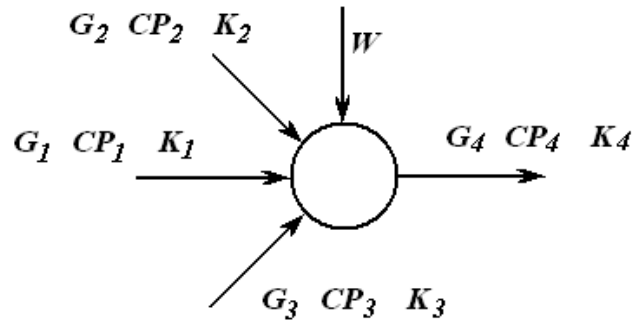


Рис.8.2. Схема матеріальних потоків в ванні для приготування корму

Маса сухих речовин буде рахуватися через вміст сухих речовин – $G_{CP} = G \cdot CP$, а енергетична цінність корму через коефіцієнт енергетичної цінності по відношенню до маси сухих речовин – $E = G \cdot CP \cdot K$.

На виході необхідно отримати корм із заданим вмістом сухих речовин CP_4 , і енергетичною цінністю K_4 . При цьому в змішувальній ванній слід підтримувати заданий рівень корму h .

Для моделювання процесу приготування рідких кормів складемо балансові рівняння по масах потоків, які поступають і виходять з ванної змішування, по масах сухих речовин і енергетичній цінності кормів:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\tau} &= \frac{1}{S \cdot \rho_4} (G_1 + G_2 + G_3 - G_4 - Wb) \\ \frac{dCP_4}{d\tau} &= \frac{1}{S \cdot h \cdot \rho_4} (G_1 \cdot CP_1 + G_2 \cdot CP_2 + G_3 \cdot CP_3 - G_4 \cdot CP_4) \\ \frac{dK_4}{d\tau} &= \frac{1}{S \cdot h \cdot \rho_4 \cdot CP_4} (G_1 \cdot CP_1 \cdot K_1 + G_2 \cdot CP_2 \cdot K_2 + G_3 \cdot CP_3 \cdot K_3 - G_4 \cdot CP_4 \cdot K_4) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Де: індекси 1, 2, 3 – це компоненти суміші, 4 – сама суміш на виході з мішалки; h – рівень суміші в мішалці, м; Wb – витрати води на створення суміші, кг/с; G_i – витрати компонент корму і самої суміші, кг/с; CP_i – вміст сухих речовин в частках до маси потоку; K_i – вміст кормових одиниць (поживності корму) в компонентах корму і суміші по відношенню до маси сухих речовин корму; ρ_i – густина компонент корму, кг/м³; S – площа поперечного перетину мішалки, м².

Для отримання рівнянь слід враховувати, що маса суміші в мішалці, кг, рівна:

$$G_m = S \cdot h \cdot \rho, \quad (8.2)$$

де S – площа поперечного перетину мішалки м².

Густина суміші, яка витікає з мішалки, кг/м³, можна поррахувати по формулі:

$$\rho_4 = \frac{G_1 \cdot \rho_1 + G_2 \cdot \rho_2 + G_3 \cdot \rho_3 + Wb \cdot 1000}{G_1 + G_2 + G_3 + Wb}, \quad (8.3)$$

Витік суміші у загальний збірник корму буде залежати від характеристик мішалки і ступеню випуску рідини через кран на виході мішалки a_c і буде рахуватися за формулою:

$$G_4 = a_c \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (8.4)$$

Таблиця 8.1

Характеристики фізичної якості і поживності деяких кормів для свиней

№ п/п	Подрібнений корм	Поживність, корм.од. на 1 кг СР	Вміст вологи, %	Щільність, кг/м ³
1	Ячмінь	1,3	12	600
2	Пшениця	1,41	13	850
3	Кукурудза	1,45	12,4	720
4	Овес	1,1	10	530
5	Горох	1,28	11	750
6	Соя	1,36	12,5	700
7	Кормові буряки	1,55	88	955
8	Цукрові буряки	1,6	75	930
9	Морква	1,1	87	960
10	Топінамбур	1,5	72	920
11	Гарбузи	0,9	88	970
12	Запарена картопля	1,3	78	960
13	Шрот соєвий	1,05	9	550
14	Меяса	1,4	50	1020
15	Борошно трав'яне	0,75	10,5	450
16	Рибне борошно	1,2	10	500
17	Шрот соняшниковий	11,5	8	470
18	Дріжджі пресовані	12,5	9	700

8.2. Приклад розв'язання задачі на моделі**Умова задачі**

Приготуємо корм на одну добу для $N = 1000$ свиней вагою 100 – 120 кг. Норми витрат на одну свиню складає $g = 3$ кг сухих речовин корму (див. табл.8.2.). Вміст сухих речовин корму, який ми будемо роздавати складає 60%, або в частках $СР = 0,6$. Це вологі мішанки, які насосом перекачуються в годівниці для свиней. Час приготування корму пів години, $t = 1800$ секунд.

Таблиця 8.2.

Витрати корму для однієї свині на день

Вага свині, кг	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120
Витрати корму g , кг	1,9	2,4	2,8	3,0

Продуктивність лінії для приготування корму буде дорівнювати:

$$G_4 = (N \cdot g) / (t \cdot СР) = (1000 \cdot 3) / (1800 \cdot 0,6) = 2,78 \text{ кг/с}$$

В якості компонент корму вибираємо такі подрібнені продукти як: пшениця, морква і рибне борошно. Характеристики продуктів вибираємо з

табл. 8.1. Так як процентний склад продуктів в кормі відповідно складає 67%, 25% і 8%, то витрати на змішувач пшениці буде 1,8625 кг/с, моркви 0,695 кг/с і рибного борошна 0,2224 кг/с.

По математичній моделі (8.1 – 8.4) розробляємо імітаційну модель в середовищі Simulink MATLAB (рис. 8.3).

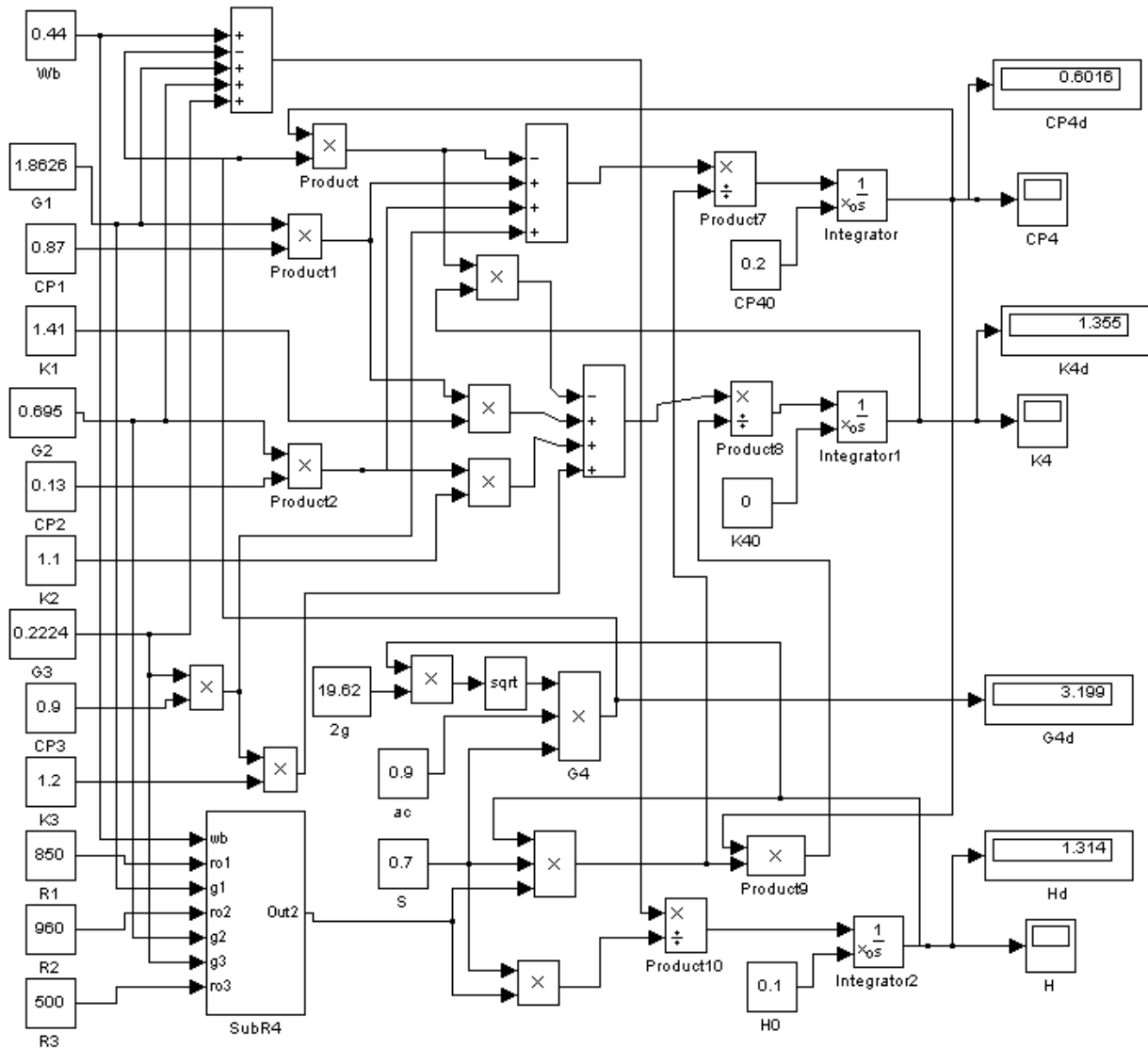


Рис. 8.3. Імітаційна модель приготування вологих кормів для свиней

Розрахунок густини суміші в мішалці(по формулі 8.3) виконується за допомогою підпрограми функції SubR4 (рис. 8.4).

В модель вводимо маси компонент корму і їх характеристики. Змінюючи витрати води Wb на вході моделі добиваємось, щоб вміст сухих речовин суміші досяг 60 %, $CP4 = 0,6$.

Результати перехідних процесів, динаміки зміни параметрів рівня в мішалці, вмісту сухих речовин і поживності суміші показані на рис. 8.5.

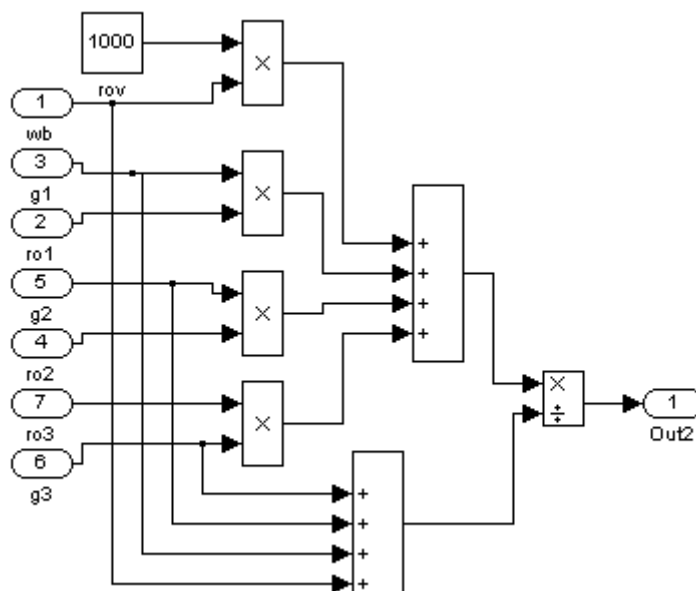


Рис. 8.4. Підпрограма розрахунку густини суміші SubR4.

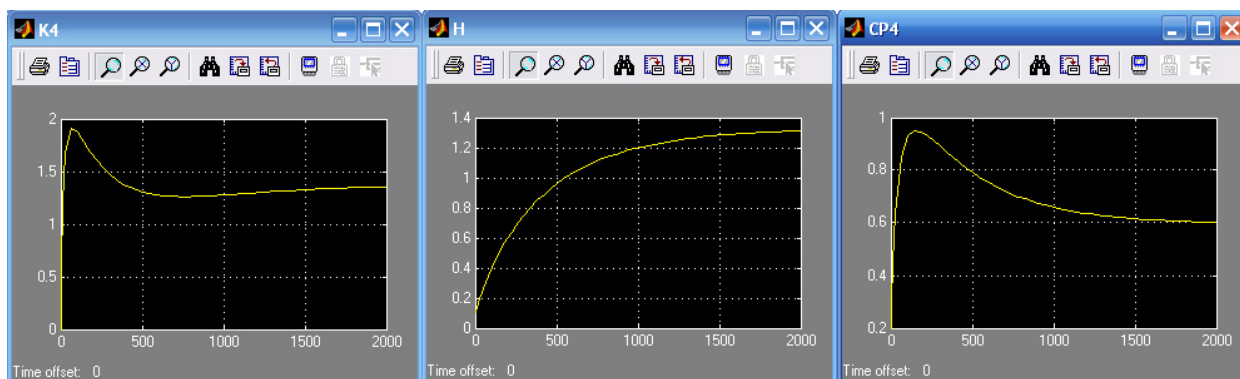


Рис. 8.5. Перехідні процеси поживності K, рівня в мішалці h і вмісту сухих речовин CP корму

Викладач задає параметри і зміну їх діапазону для проведення досліджень на моделі.

Виконаємо дослідження впливу зберігання моркви на характеристики корму. Нехай вміст сухих речовин моркви змінюється з 13% до 23%. Дослідження показали, що рівень в мішалці і вихід корму з апарату не змінюється. Вміст сухих речовин корму буде зростати, а поживність корму буде зменшуватись.

Графіки досліджених залежностей побудуємо в середовищі MathCad. (рис. 8.6).

$i := 0..5$

$CP2 := (13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 23)^T$

$CP4 := (0.602 \ 0.606 \ 0.61 \ 0.615 \ 0.619 \ 0.623)^T$

$K4 := (1.355 \ 1.353 \ 1.351 \ 1.349 \ 1.348 \ 1.346)^T$

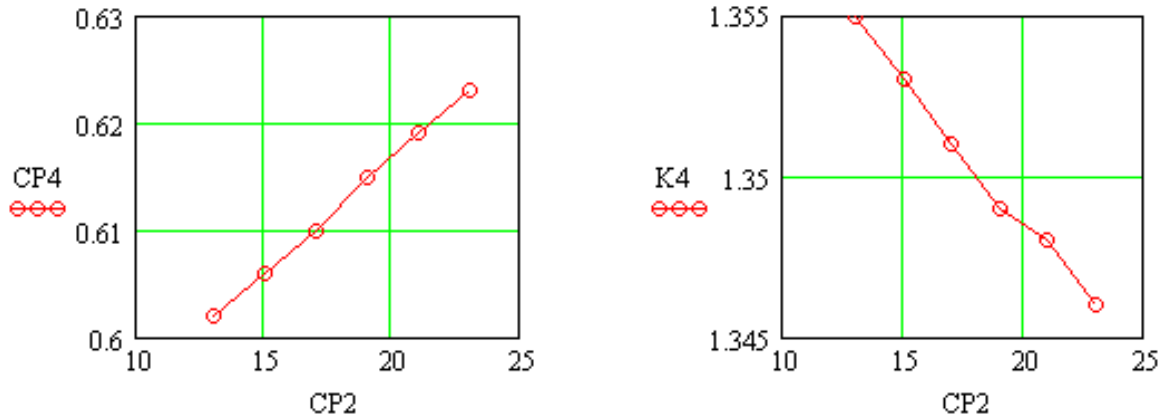


Рис. 8.6. Побудова графіків залежності вмісту сухих речовин і поживності корму після змішувача від вмісту сухих речовин у моркві.

8.3. Варіанти індивідуальних завдань (табл. 8.3)

Таблиця 8.3

Варіанти індивідуальних завдань

N вар.	Кількість свиней, шт.	Вага свиней, кг	Складові компоненти суміші	Склад компонент %	S, м ²	a _c
1	2100	40 – 60	1, 7, 13	70, 23, 7	1.1	0.9
2	1800	60 – 80	2, 8, 14	65, 24, 11	1	1
3	1600	80 – 100	3, 9, 15	69, 21, 10	1.05	0.8
4	1400	100 – 120	4, 10, 16	71, 20, 9	0.95	0.7
5	2200	40 – 60	5, 11, 17	64, 23, 13	1.15	0.95
6	2000	60 – 80	6, 12, 18	66, 21, 13	1.1	0.85
7	1700	80 – 100	1, 8, 15	68, 20, 12	1	0.75
8	1500	100 – 120	2, 9, 17	67, 21, 12	1.05	0.9
9	2050	40 – 60	3, 11, 18	70, 19, 11	0.95	1
10	1850	60 – 80	4, 7, 16	65, 25, 10	1.15	0.8

САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ

Самостійна роботи №1

на тему: **Вивчення додаткової бібліотеки Simulink Extras в середовищі Simulink MATLAB для реалізації одно параметричної системи регулювання.**

Мета самостійної роботи:

Вивчити блоки системи Simulink Extras і методи моделювання, які дозволяють моделювати і досліджувати систему автоматизації типового об'єкту сільськогосподарського виробництва на прикладі теплообміну в пташнику.

1.1. Теоретичні відомості

Структурна схема автоматичної системи регулювання (рис. 1.1) складається із передаточної функції об'єкту управління по керуючій дії $W_o(p)$, передаточної функції автоматичного керуючого пристрою $W_a(p)$, передаточної функції підсилювача з виконувальним механізмом $W_s(p)$, передаточної функції по каналу збурення $W_f(p)$. Вихідним параметром системи буде $y(\tau)$, вхідним параметром – $x(\tau)$, збуренням – $f(\tau)$, завданням на регулювання – $y_{зав}(\tau)$, а похибкою регулювання – $\Delta y(\tau)$.

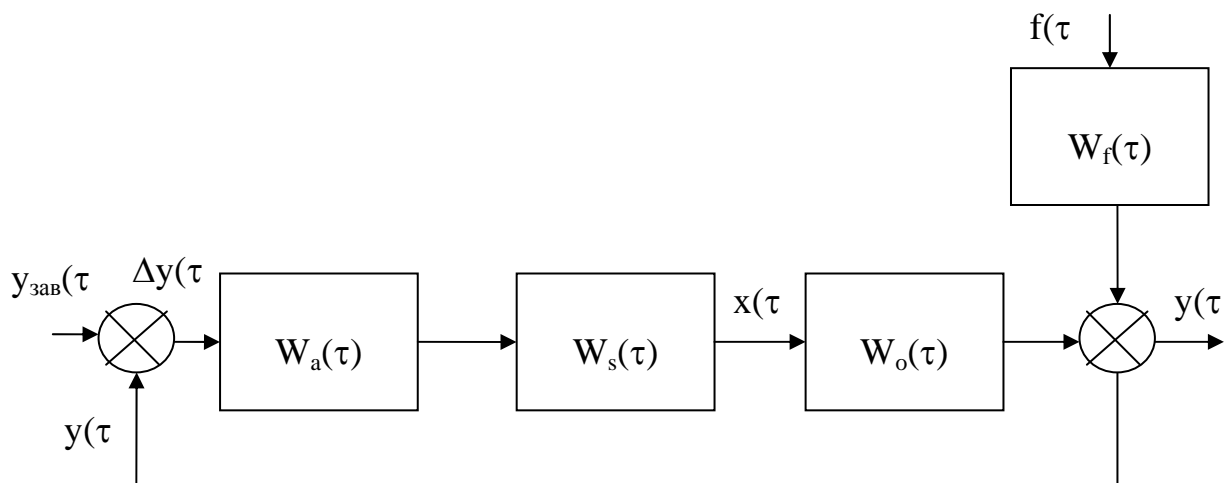


Рис. 1.1. Структурна схема автоматичної системи регулювання

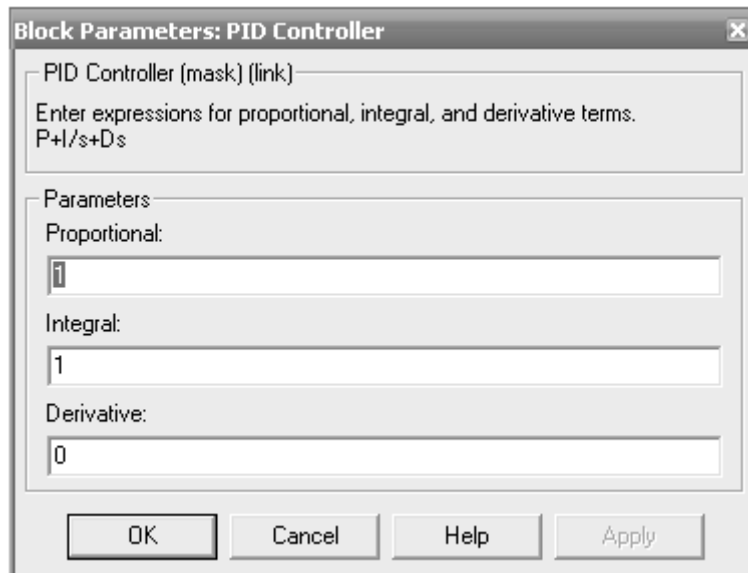


Рис. 1.2. Вікно параметрів блоку **PID controller**

В замкнутій системі регулювання значення

$$\Delta y(\tau) = y_{\text{зад}}(\tau) - y(\tau) \quad (1.1)$$

Значення вихідної величини можна порахувати з рівняння:

$$y(\tau) = W_a(\tau) \cdot W_s(\tau) \cdot W_o(\tau) [y_{\text{зад}}(\tau) - y(\tau)] - W_f(\tau) \cdot f(\tau) \quad (1.2)$$

Для реалізації системи регулювання в середовищі Simulink MATLAB скористаємось додатковою бібліотекою пакету **Simulink Extras**. В цій бібліотеці є набір додаткових лінійних блоків **Additional Linear**, де знаходяться два блоки PID-контролерів.

Блок PID-контролер (**PID controller**) – це універсальний блок, вихідний сигнал якого задається операторним виразом

$$OUT = P + I/s + Ds, \quad (1.3)$$

де P – вихідний сигнал, I – його інтеграл і D – його похідна. Параметр P (за замовчуванням 1) фактично задає компоненту вихідного сигналу, пропорційну вхідному сигналу, параметр I задає пропорційність інтегралу вхідному сигналу, і, в рещті, параметр D задає пропорційність похідної вхідного сигналу. Змінюючи параметри P , I і D , можна задавати різний вид вихідного сигналу, в тому числі і у вигляді інтегралу або похідної від вхідного. Для введення даних по параметрах ми можемо викликати вікно через команду меню **mask parameters** (рис. 1.2). Після приєднання блоку до моделі можна викликати інше вікно параметрів (рис. 1.3).

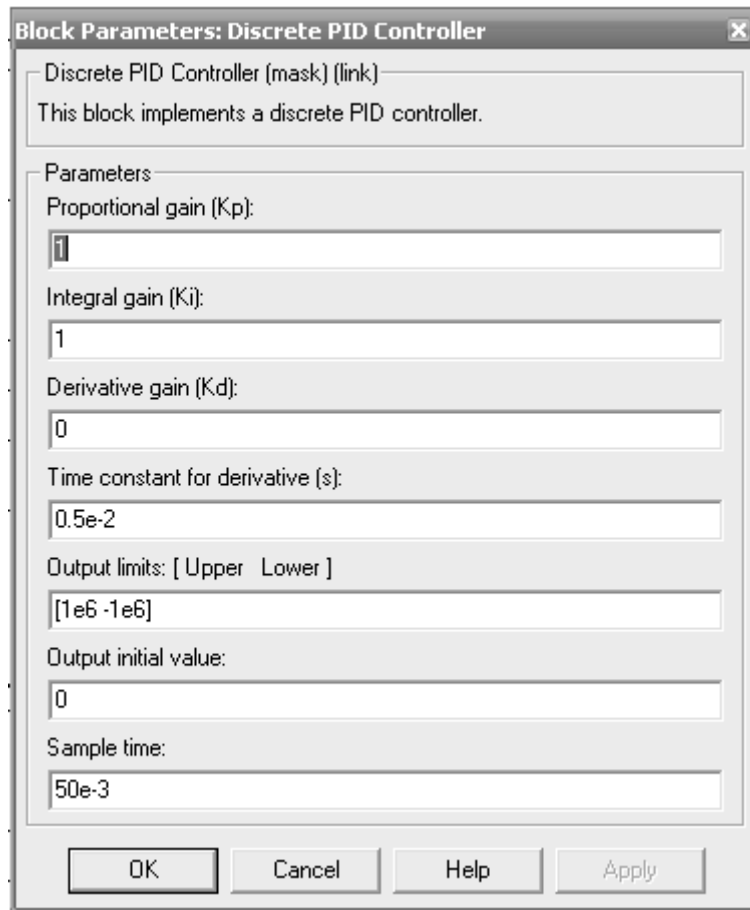


Рис. 1.3. Вікно параметрів вбудованого блоку *PID controller*

В цьому вікні крім коефіцієнтів пропорційної, інтегральної та диференційної складової регулятора задаються параметри часу регулювання і побудови кривої вхідного сигналу. Змінюючи завдання у вікні еталонного часу **Sample time** можна добитися прискорення побудови кривої результату оброблення сигналу регулятором.

Операції диференціювання виконуються даним PID регулятором досить грубо, тому у випадку активного використання диференційної складової регулятора краще використати інший блок регулювання *PID controller with Approximate Derivative* (PID-контролер з поліпшеним обчисленням похідної), який обчислює вихідний сигнал як:

$$\text{OUT} = \text{I} + \text{D} \cdot \text{s} / (\text{N} \cdot \text{s} + 1). \quad (1.4)$$

Тут за рахунок використання додаткового параметра N поліпшується обчислення похідної.

1.2. Математична модель теплообміну в пташнику

Птахоферма за інформаційною ємністю об'єкту відноситься до середніх ОК. Серед параметрів регулювання в ньому найбільш важливими є температура в приміщенні, кількість шкідливих речовин і вологи у повітрі. Кількість шкідливих речовин в повітрі визначається об'ємом повітря, який поступає у приміщення і кількості птахів в ньому. Температура у приміщенні

визначається втратами тепла в навколишнє середовище і затратами на підігрівання повітря до температури приміщення. Слід зауважити, що життєдіяльність біологічного об'єкту ТОК, птахів, приводить до виділення теплоти, яку слід враховувати при побудові моделі теплообміну в приміщенні ферми і до виділення вологи, і яку слід враховувати при обчисленні витрат повітря на загальнообмінну вентиляцію, направлену на видалення вологи і вуглекислого газу з приміщення.

Розробимо математичну модель теплообміну в приміщенні пташника. В статичному режимі кількість тепла, яке поступає в приміщення з птахами Q_t і додатковим нагріванням Q_d дорівнює кількості тепла, що втрачається на нагрівання вентиляційного повітря Q_v і втрати тепла в навколишнє середовище Q_w (рис. 1.4).

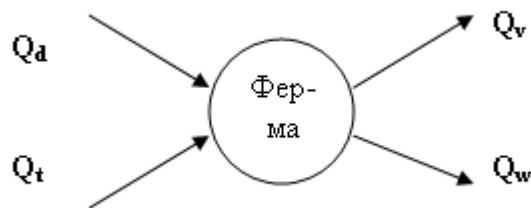


Рис. 1.4. Схема теплових потоків на фермі

$$Q_d + Q_t - Q_v - Q_w = 0 \quad (1.5)$$

В динамічному режимі, коли буде змінюватися температура у приміщенні t_p в залежності від збурень, наприклад зовнішнього чинника, температури навколишнього середовища t_z , в приміщенні буде змінюватись кількість енергії P_p і рівняння (1.5) перетвориться в рівняння динаміки процесу:

$$\frac{dP_p}{d\tau} = Q_d + Q_t - Q_v - Q_w \quad (1.6)$$

В цьому рівнянні кількість енергії в приміщенні розраховується за формулою, Дж:

$$P_p = V_p \rho_p C_p t_p \quad (1.7)$$

Кількість тепла виділеного птахами, Вт, дорівнює:

$$Q_t = nq \quad (1.8)$$

Кількість тепла витраченого на нагрівання вентиляційного повітря, Вт:

$$Q_v = V_v \rho_p C_p (t_p - t_z) \quad (1.9)$$

Кількість тепла втраченого в навколишнє середовище, Вт:

$$Q_w = KF_p (t_p - t_z) \quad (1.10)$$

де: V_p – об'єм приміщення птахоферми, м^3 ; F_p – площа поверхні стін і стелі ферми, м^2 ; ρ_p – густина повітря, $\text{кг}/\text{м}^3$; C_p – теплоємність повітря,

Дж/(кг град); K – середнє значення коефіцієнта теплопередачі стін і стелі приміщення ферми, Вт/(м² град); n – кількість птахів на фермі, шт.; q – середнє тепловиділення птахом, Дж, V_v – швидкість подавання вентиляційного повітря, м³/с.

Швидкість подавання вентиляційного повітря необхідного для забезпечення допустимої концентрації шкідливих речовин у приміщенні пташника рахуємо виходячи з допустимого вмісту водяних парів у повітрі за формулою:

$$V_v = \frac{W_t}{(d_p - d_z)\rho_p}, \quad (1.11)$$

де: сумарна волога, яку виділяють всі птахи, г/с $W_t = \frac{nw \cdot 1000}{3600}$;

w – середня маса вологи, що виділяється одним птахом за годину, кг/год; d_p і d_z – вологовміст внутрішнього і зовнішнього, вентиляційного, повітря, г/кг сухого повітря.

Підставимо формули (1.7), (1.8) і (1.10) у формулу (1.6) і отримаємо:

$$\frac{d(V_p \rho_p C_p t_p)}{d\tau} = Q_d + Q_t - V_v \rho_p C_p (t_p - t_z) - KF_p (t_p - t_z). \quad (1.12)$$

Після перетворення рівняння (1.12) прийме вигляд:

$$\frac{V_p \rho_p C_p}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)} \frac{dt_p}{d\tau} + t_p - \left(t_z + \frac{Q_d + Q_t}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)} \right) = 0, \quad (1.13)$$

Позначимо постійну часу нагрівання об'єкту, с:

$$T = \frac{V_p \rho_p C_p}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)}, \quad (1.14)$$

і усталену, при нульовій швидкості зміни температури повітря в приміщенні пташника, температуру повітря, град.:

$$t_y = t_z + \frac{Q_d + Q_t}{(KF_p + V_v \rho_p C_p)}. \quad (1.15)$$

Тоді рівняння (1.13) запишемо:

$$T \frac{dt_p}{d\tau} + t_p - t_y = 0 \quad (1.16)$$

З цього рівняння знаходиться передатна функція об'єкта по температурі. Постійна часу нагрівання T є важливим параметром ТОК ферми. Вона представляє собою час, протягом якого у приміщенні пташника температура повітря досягнула усталеного значення без тепловіддачі в навколишнє середовище. Регулювання такого об'єкта виконуємо по температурі повітря t_p за рахунок зміни кількості тепла від нагрівача Q_d .

1.3. Імітаційне моделювання регулювання температурного режиму в пташнику

Завдання роботи. Встановити ПІД регулятор на моделі опалення і вентиляції тваринницької ферми, рис. 1.6. Завдання для моделі брати по заданому варіанту. Задати коефіцієнти по каналах вхідного сигналу інтегрування і диференціювання вхідного сигналу відповідно: 1, 1, 0. Значення завдань для вхідних параметрів взяти для каналу температури – 15 градусів С, для каналу вологовмісту – 8,5 г/кг сухого повітря. Встановити збурення для каналу температури -5 градусів від заданого значення температури зовнішнього повітря і для каналу вологовмісту + 1г/кг сухого повітря від заданого значення вологовмісту зовнішнього повітря. Вивести на екран осцилографа криві зміни температури або вологовмісту в приміщенні – $y(\tau)$, похибки регулювання $\Delta y(\tau)$, значення вхідного параметру до підсилення $x(\tau)$ і на дисплей кінцеве значення витрат енергії або повітря після закінчення регулювання.

Характеристики об'єкта. Технологічний об'єкт керування, пташник має площу стін і стелі $F_p = 3750 \text{ м}^2$. Середнє значення коефіцієнта теплопередачі для них складає $K = 3,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ град})$. У пташнику утримується $n = 12400$ птахів середньою вагою $G_p = 1.82 \text{ кг}$. Середнє тепловиділення одного кг маси птаха $q = 7,91 \text{ Вт/кг}$.

Густина і теплоємність повітря $\rho_p = 1,293 \text{ кг/м}^3$ і $C_p = 1005 \text{ Дж}/(\text{кг град})$. Температура повітря в приміщенні складає $t_p = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ при відносній вологості у пташнику $\varphi = 60 \%$, так само, як і в роботі по дослідженню вентиляції пташника, і тому вологовміст повітря у пташнику беремо з попередніх розрахунків: $d_p = 8,88 \text{ г/кг}$ сухого повітря. Температура і вологовміст зовнішнього повітря складає $t_z = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ і $d_z = 2,1 \text{ г/кг}$ сухого повітря.

Імітаційна модель об'єкта на Simulink без регулятора

Використовуючи блоки **Constant**, введемо всі необхідні дані. Так як t_z – температура зовнішнього повітря є збуренням моделі і далі може бути використана при моделюванні керування об'єктом введемо його за допомогою блоку **Step**. Враховуючи, що нам потрібно отримати $1/T$ – введемо і число 1. Далі використовуючи математичні блоки **Product** і **Sum** виконаємо операції між змінними правої частини рівняння (1.12). Значення температури повітря t_p в приміщенні беремо після блоку **Integrator**. Результат обчислення правої частини рівняння посилаємо на блок рішення диференційного рівняння **Integrator**.

Введемо попередньо обчислені і задані коефіцієнти у вхідні блоки. В блоках додавання і множення правильно вкажемо операції додавання і віднімання, множення і ділення. В блоці **Integrator** вкажемо, що початкове значення температури в приміщенні вводиться за допомогою зовнішньої команди **External**. Коли з'явиться додатковий вхід до нього приєднаємо блок **Constant**, в який і введемо початкову температуру в приміщенні наприклад 5 градусів.

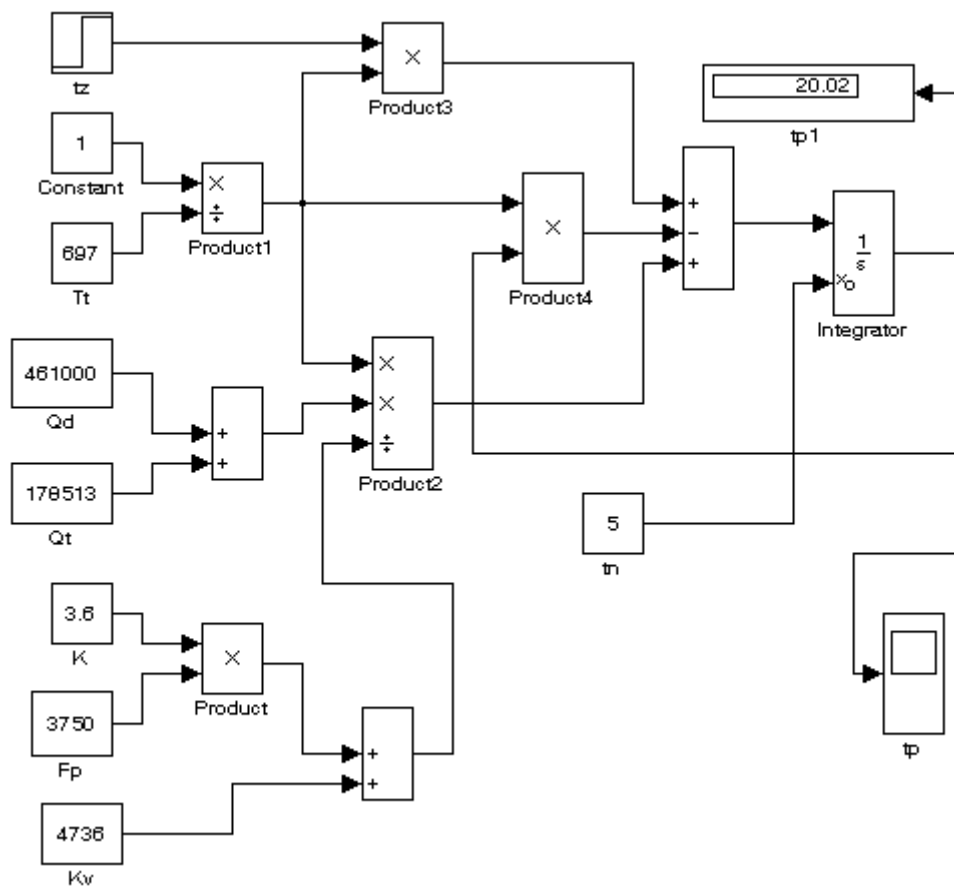


Рис. 1.5. Схема моделі опалення ТОК птахоферма в блоках Simulink MATLAB

Для виведення результатів використаємо блок осцилографа *Scope*. Проміжне значення обчислень можна вивести на блок *Display*. Так як розгінна крива ТОК більша ніж 10 секунд, задаємося часом моделювання. Для цього в параметрах моделювання **Simulation** → **Simulation Parameters** у вікні **Stop time** введемо число 2000 секунд. Якщо далі цього часу не вистачить для досягнення температурою усталеного значення, його слід збільшити. Такий самий час слід установити і на вкладці параметрів **General** блоку *Scope* у вікні команди **Time range**.

В результаті отримаємо блок-схему моделі системи опалення на тваринницькій фермі (рис. 1.5).

Для запуску моделі клацнемо мишкою на кнопці запуску, або виконаємо команду **Start** меню **Simulation**.

Щоб побачити результат обчислень, двічі клацнемо на блоці *Scope* і побачимо вікно графіка цього блоку. Якщо масштаб виведення невірний, то клацнувши на кнопці меню **Autoscale**, автоматично встановимо масштаб осей. Розгінна крива температури автоматично не вийде на рівень 15 градусів, бо не має блоків, які автоматизують процес нагрівання. Для цього слід підібрати значення кількості тепла поданого на підігрівання приміщення Q_d , збільшуючи або зменшуючи його. Початкове значення можна взяти $500 \div 1000$ кВт. В результаті отримаємо подібну криву (рис. 1.6).

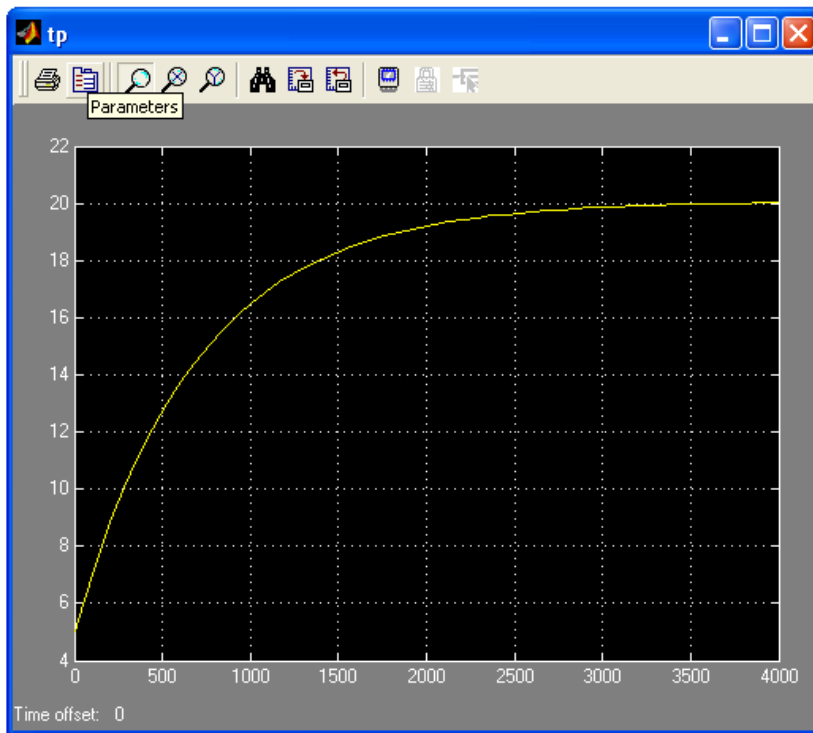


Рис. 1.6. Розгінна крива зміни температури в приміщенні ТОК, пташник, яка отримана по даних моделі Simulink

Імітаційна модель об'єкта на Simulink з регулятором

Добавимо до моделі об'єкту блок *PID controller* для виконання регулювання процесу, блок *Sum* для обчислення похибки регулювання $\Delta y(\tau)$, і блок *Gain* для підсилення вихідного сигналу. Також встановимо додатковий блок *Scope* для виведення сигналів похибки регулювання і вихідного параметру до підсилення. Для цього в параметрах блоку у вікні **Number of axes** потрібно вказати на 2 графіки. Для чіткого виведення всієї кривої виведених графіків потрібно зняти „галочку” в вікні обмежень на кількість розрахованих точок **Limit data points to last** вкладки даних **Data history**. В блоці регулятора необхідно виставити задані завдання коефіцієнтів регулювання. Також для прискорення динаміки процесу регулювання необхідно збільшити показник еталонного часу **Sample time**, наприклад, з $50 \cdot 10^{-6}$ до $50 \cdot 10^{-3}$. Важливим є встановлення завдання на підсилення сигналу, що виходить з регулятора. Коефіцієнт підсилення – це відношення зміни додаткової енергії на нагрівання приміщення до значення вихідного сигналу з регулятора. Щоб зменшити інерційність системи регулювання рекомендую розділити підігрівачі в приміщенні на підігрівачі постійного режиму роботи і регульовані. Коефіцієнт підсилення треба підібрати з урахуванням забезпечення максимальної швидкодії системи регулювання. Для отримання значення енергії, затраченої на додаткове нагрівання повітря в приміщенні, дисплей слід підключити до параметру регулювання $x(\tau)$. Треба також збільшити час моделювання, наприклад, для каналу температури до 3000 секунд, поки регулятор не врегулює вихідний параметр. В результаті ми

отримаємо блок-схему моделі для каналу температури, рис. 1.7. Результати моделювання перехідних процесів регулювання температури повітря на фермі показані на рис. 1.8.

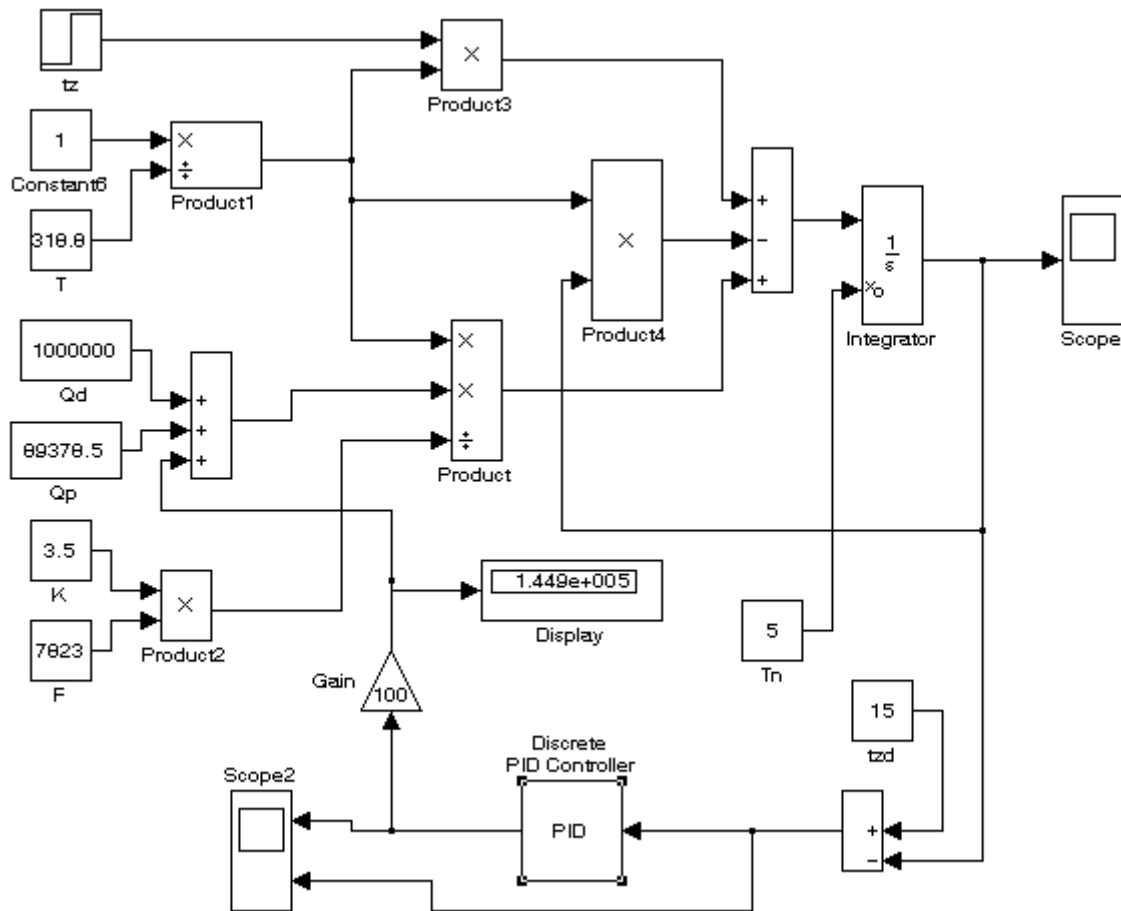


Рис. 1.7. Схема моделі регулювання системи опалення ТОУ тваринницька ферма в блоках Simulink MATLAB

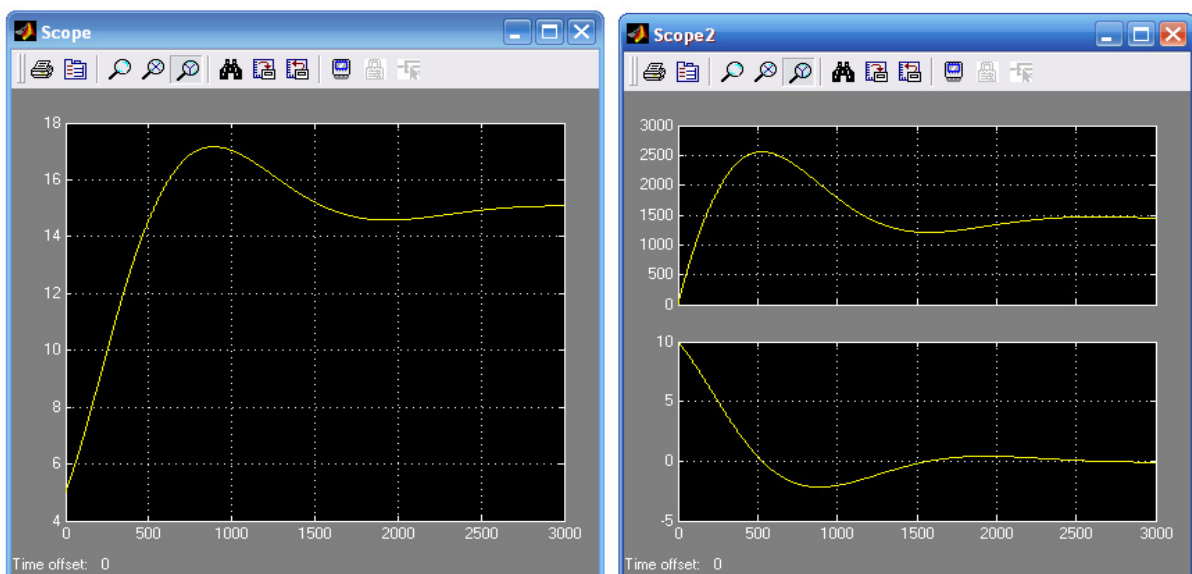


Рис.1.8. Графік перехідного процесу САР температури повітря ферми (Scope), вихідного параметру регулятора без підсилення і похибки регулювання по каналу температури (Scope2)

Висновки

Регулювання температури повітря в пташнику виконувалось до температури 15 град С. Час регулювання – 2900 с. Коливальність процесу – 2, перерегулювання 2,1 град С. (14 %).

1.3. Завдання до роботи

№ вар.	Площа стін і стелі пташника, м ²	Коефіцієнт теплопередачі, Вт/(м ² град)	Температура зовнішнього повітря, °С	Температура в пташнику, °С
1	4120	4,1	-21	17
2	3270	2,2	-17	20
3	2305	3,4	-20	18
4	7100	3,8	-24	21
5	5505	3,3	-19	16
6	2720	2,7	-19	19
7	3150	3,6	-15	16
8	4200	3,4	-23	20
9	2980	3,0	-16	18
10	6320	3,1	-22	17

№ вар.	Кількість птахів у пташнику, шт	Середня вага птаха, кг	Об'єм пташника, м ³	Вологість зовнішнього повітря, г/кг с.п.	Вологовміст у пташнику, %
1	10100	1,53	8300	1,5	62
2	8300	1,78	5250	2,0	65
3	5420	1,9	3240	2,4	60
4	15100	1,66	12300	1,7	66
5	12300	1,59	9345	2,8	68
6	6530	1,84	4920	1,9	60
7	8550	1,75	5860	2,1	63
8	9350	1,61	7310	2,0	69
9	7200	1,79	6100	2,6	65
10	14300	1,82	11550	2,1	64

Самостійна роботи №2

на тему: **Вивчення додаткової бібліотеки Simulink Extras в середовищі Simulink MATLAB для реалізації двох параметричної системи регулювання.**

Мета самостійної роботи:

Вивчити блоки системи Simulink Extras і методи моделювання, які дозволяють моделювати і досліджувати систему автоматизації типового об'єкту сільськогосподарського виробництва на прикладі підготовки живильного розчину для теплиці.

2.1. Теоретичні відомості

Структурна схема автоматичної системи регулювання (рис. 2.1) складається із передаточної функції об'єкту управління по керуючій дії $W_o(p)$, передаточної функції автоматичного керуючого пристрою $W_a(p)$, передаточної функції підсилювача з виконувальним механізмом $W_s(p)$, передаточної функції по каналу збурення $W_f(p)$. Вихідним параметром системи буде $y(\tau)$, вхідним параметром – $x(\tau)$, збуренням – $f(\tau)$, завданням на регулювання – $y_{зав}(\tau)$, а похибкою регулювання – $\Delta y(\tau)$.

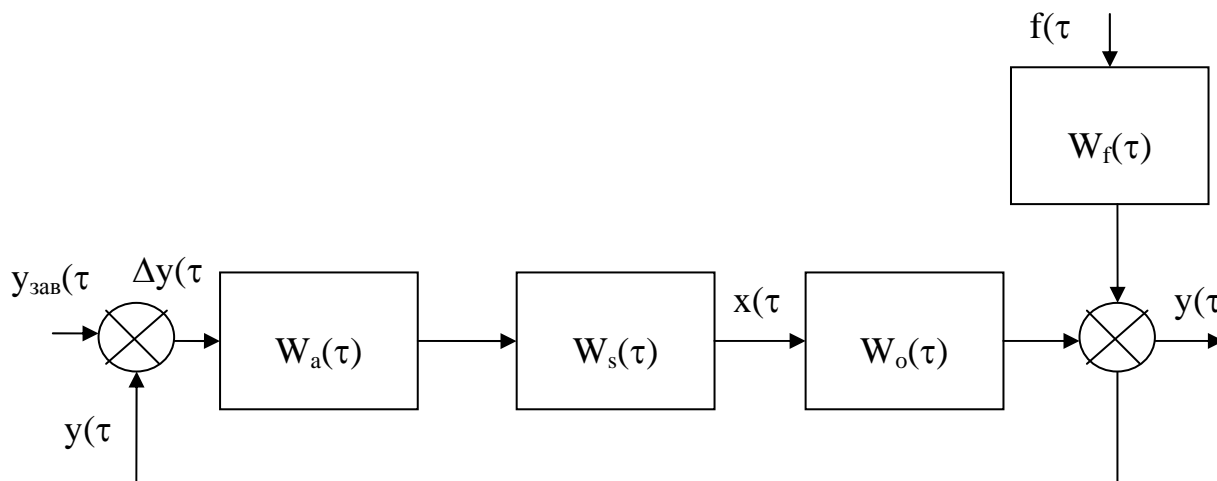


Рис. 2.1. Структурна схема автоматичної системи регулювання

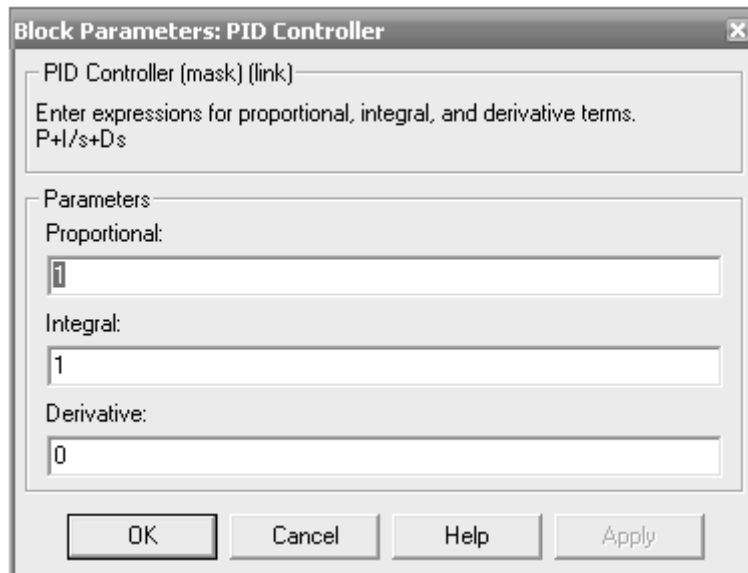


Рис. 2.2. Вікно параметрів блоку **PID controller**

В замкнутій системі регулювання значення

$$\Delta y(\tau) = y_{\text{зад}}(\tau) - y(\tau) \quad (2.1)$$

Значення вихідної величини можна порахувати з рівняння:

$$y(\tau) = W_a(\tau) \cdot W_s(\tau) \cdot W_o(\tau) [y_{\text{зад}}(\tau) - y(\tau)] - W_f(\tau) \cdot f(\tau) \quad (2.2)$$

Для реалізації системи регулювання в середовищі Simulink MATLAB скористаємось додатковою бібліотекою пакету **Simulink Extras**. В цій бібліотеці є набір додаткових лінійних блоків **Additional Linear**, де знаходяться два блоки PID-контролерів.

Блок PID-контролер (**PID controller**) – це універсальний блок, вихідний сигнал якого задається операторним виразом

$$\text{OUT} = P + I/s + Ds, \quad (2.3)$$

де P – вихідний сигнал, I – його інтеграл і D – його похідна. Параметр P (за замовчуванням 1) фактично задає компоненту вихідного сигналу, пропорційну вхідному сигналу, параметр I задає пропорційність інтегралу вхідному сигналу, і, врешті, параметр D задає пропорційність похідної вхідного сигналу. Змінюючи параметри P , I і D , можна задавати різний вид вихідного сигналу, в тому числі і у вигляді інтегралу або похідної від вхідного. Для введення даних по параметрах ми можемо викликати вікно через команду меню **mask parameters...** (рис. 2.2). Після приєднання блоку до моделі можна викликати інше вікно параметрів (рис. 2.3).

В цьому вікні крім коефіцієнтів пропорційної, інтегральної та диференційної складової регулятора задаються параметри часу регулювання і побудови кривої вхідного сигналу. Змінюючи завдання у вікні еталонного часу **Sample time** можна добитися прискорення побудови кривої результату оброблення сигналу регулятором.

Операції диференціювання виконуються даним PID регулятором досить грубо, тому у випадку активного використання диференційної складової регулятора краще використати інший блок регулювання **PID**

controller with Approximate Derivative (PID-контролер з поліпшеним обчисленням похідної), який обчислює вихідний сигнал як:

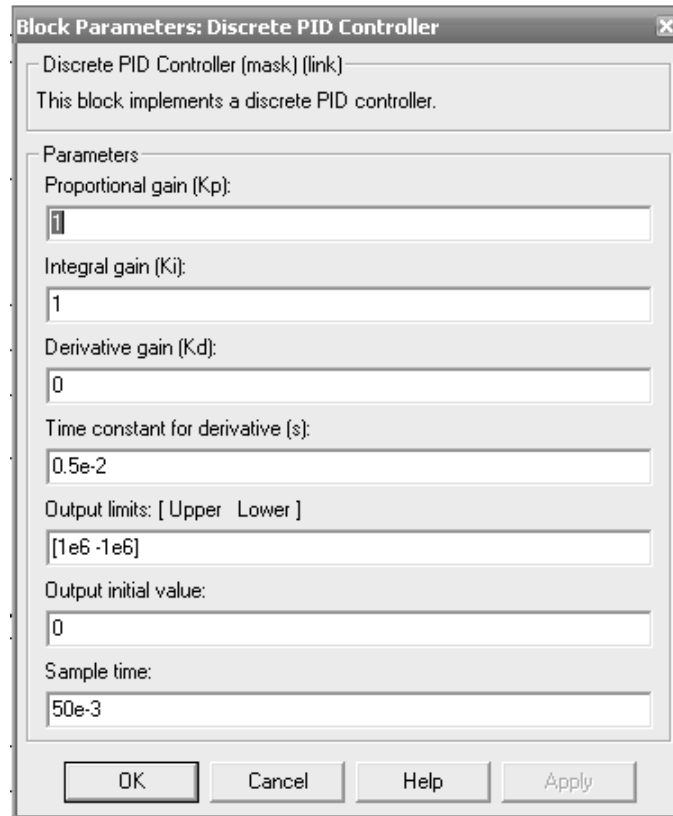


Рис. 2.3. Вікно параметрів вбудованого блоку *PID controller*

$$OUT = Z + I/s + Ds/(1/Ns + 1). \quad (2.4)$$

Тут за рахунок використання додаткового параметра N поліпшується обчислення похідної.

2.2. Математична модель змішування розчину в мішалці

Змішувачі різних типів використовуються в сільськогосподарському виробництві для приготування суміші, кормів, інтенсифікації процесів тепло і масообміну. Перемішування виконується одним із трьох способів: механічним, поточковим і пневматичним (рис. 2.4).

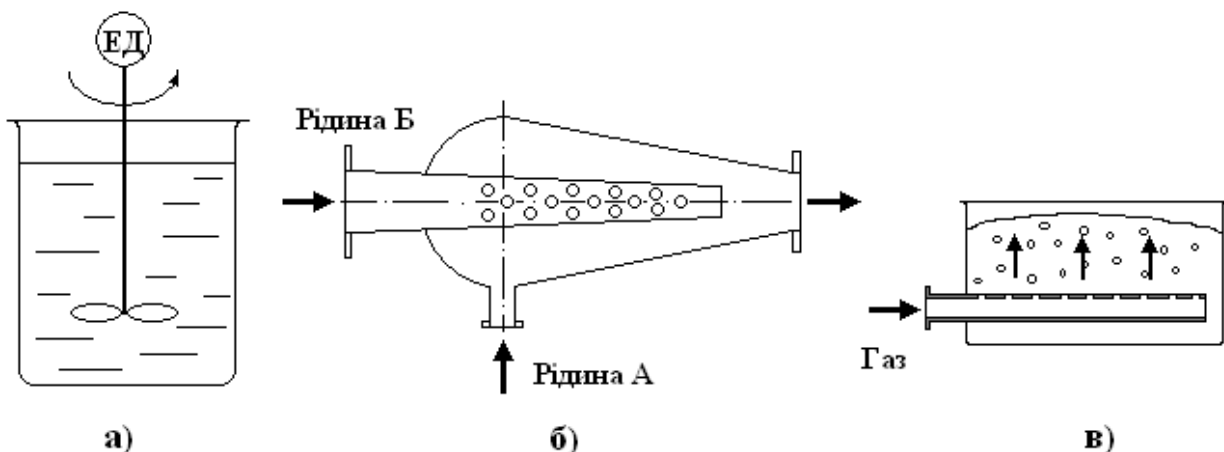


Рис. 2.4. Три типи змішувачів

Механічне перемішування (рис.2.4, а) виконується періодично в мішалках. Існує три основних групи мішалок, які відрізняються конструкцією пристроїв для перемішування, це: лопатеві, пропелерні і турбінні. Потокове перемішування виконується за рахунок тісної взаємодії двох або більше потоків безперервно. Для цього використовуються змішувачі з перегородками і інжекторні пристрої (рис.2.4, б). Пневматичне перемішування виконується з використанням газу або пари. Таке перемішування буває барботажним (рис. 2.4, в) або ерліфтрним.

Розглянемо типовий об'єкт управління – ємність із змішувачем, апарат безперервної дії, в якому змішуються дві речовини А (з концентрацією цільової компоненти C_A) і Б (з концентрацією цільової компоненти C_B) для отримання гомогенізованого розчину, суміші, із заданою концентрацією цільової компоненти C_C (живильний розчин). При цьому концентрація речовини А значно більша від концентрації речовини Б. Схема апарату показана на рис. 2.5.

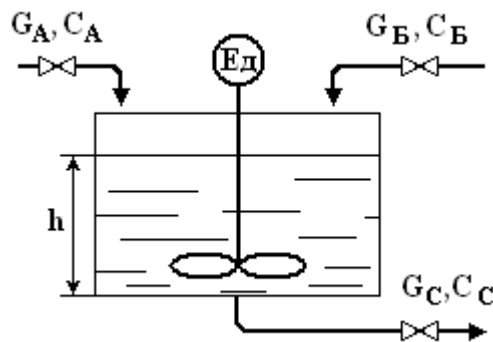


Рис. 2.5. Мішалка для змішування двох речовин А і Б

Математична модель даного об'єкту буде складатися з рівнянь статички і динаміки процесу змішування.

Рівняння статички є системою балансових рівнянь мас потоків і мас сухих речовин потоків:

$$G_A + G_B - G_C = 0 \quad (2.5)$$

$$G_A C_A + G_B C_B - G_C C_C = 0 \quad (2.6)$$

В динамічному режимі маса продукту в апараті і маса сухих речовин в ємності буде змінюватись. Допускаючи, що ємність змішувача має однаковий діаметр по всій висоті, то маса продукту в апараті дорівнює:

$$G_{an} = \frac{\pi \cdot D_{an}^2}{4} h \cdot \rho_c \quad (2.7)$$

де D_{an} – діаметр ємності, м; h – висота рідини в ємності, м; ρ_c – густина суміші, кг/м³.

$$\frac{dG_{an}}{d\tau} = S \cdot \rho_c \frac{dh}{d\tau} = G_A + G_B - G_C \quad (2.8)$$

де S – площа поперечного перетину ємності, м².

$$\frac{dG_{an} C_C}{d\tau} = V \cdot \rho_c \frac{dC_C}{d\tau} = G_A C_A + G_B C_B - G_C C_C, \quad (2.9)$$

де V – об’єм суміші в ємкості змішувача, м^3 .

Збільшення рівня рідини в ємкості h приводить до підвищення гідростатичного тиску і впливає на витрати суміші із змішувача G_C . Залежність витoku суміші від рівня описується рівнянням:

$$G_C = a_c \cdot S \sqrt{2 \cdot g \cdot h}, \quad (2.10)$$

де a_c – коефіцієнт витрат регулюючого органу витoku суміші.

Блок схема математичної моделі показана на рис. 2.6. В ній вхідними параметрами будуть: концентрації речовин А і Б, C_A , C_B , конструктивні розміри: поперечний перетин мішалки S і коефіцієнт витрат регулюючого органу на вихідному потоці суміші a_c і густина суміші ρ_c . У випадку виконання розрахунків запізень по каналах управління ще необхідно вводити дані по густині розчинів А і Б, ρ_a , ρ_b і об’ємів труб від регулюючих органів до мішалки для розчинів А і Б, V_{tA} , V_{tB} .

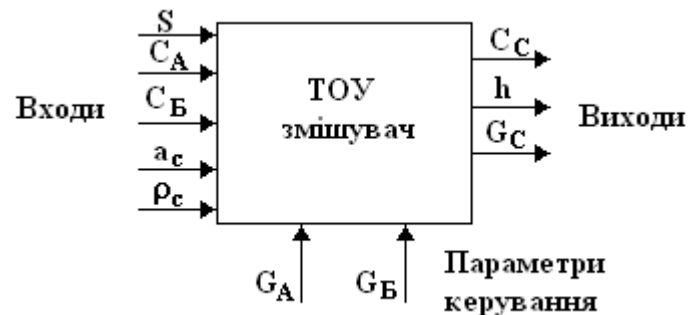


Рис. 2.6. Параметрична схема математичної моделі змішувача

Параметрами керування будуть витрати речовин А і Б, G_A , G_B .

Вихідними параметрами будуть регульовані параметри: концентрація суміші C_C і рівень суміші в змішувачі, h , а також витрати суміші на виході апарату G_C . Ці витрати також можуть бути параметром керування, але для наступних стадій переробки суміші.

Апарат має два канали управління: управління концентрацією суміші C_C за рахунок витрат речовини G_A і управління рівнем в змішувачі h за рахунок витрат речовини G_B .

Передатною функцією змішувача по каналу управління витрати речовини А, G_A – концентрація суміші C_C з урахуванням транспортного запізнення τ буде рівняння:

$$W(p) = \frac{K_{об}}{T_{об} \cdot p + 1} \cdot e^{-p \cdot \tau}, \quad (2.11)$$

$$\text{де: } T_{об} = \frac{\rho_c \cdot V}{G_C}; \quad K_{об} = \frac{(C_A - C_C) G_A}{G_C C_C}; \quad \tau = \frac{\rho_A V_{tA}}{G_A}, \quad (2.12)$$

де $T_{об}$ – стала часу об'єкта, $K_{об}$ – коефіцієнт передачі об'єкта по каналу G_A , C_C – концентрація добрив потоку C , ρ_A – густина речовини А, $V_{тА}$ – об'єм труби для речовини А від регулюючого органу до змішувача.

Передатною функцією по каналу управління витрати речовини Б, G_B – рівень суміші у змішувачі h з урахуванням транспортного запізнення τ буде рівняння:

$$W(p) = \frac{1}{T_{об} \cdot p} \cdot e^{-p \cdot \tau}, \quad (2.13)$$

$$\text{де:} \quad T_{об} = \frac{\rho_c \cdot V}{G_B}; \quad \tau = \frac{\rho_B \cdot V_{тБ}}{G_B}, \quad (2.14)$$

де $T_{об}$ – стала часу об'єкта по каналу $G_B - h$, ρ_B – густина речовини Б, $V_{тБ}$ об'єм труби для речовини Б від регулюючого органу до змішувача.

Для створення моделі в системі Simulink MATLAB приведемо рівняння (2.8) і (2.9) до виду Коші і запишемо:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{S \cdot \rho_c} (G_A + G_B - G_C), \quad (2.15)$$

$$\frac{dC_C}{d\tau} = \frac{1}{S \cdot \rho_c \cdot h} (G_A C_A + G_B C_B - G_C C_C), \quad (2.16)$$

Також порахуємо початкове значення густини розчину на виході

$$\rho_c = \frac{\rho_A \cdot G_A + \rho_B \cdot G_B}{G_A + G_B}, \quad (2.17)$$

і коефіцієнт витрат регулюючого органу витоку суміші:

$$a_c = \frac{G_C}{S \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \quad (2.18)$$

2.3. Імітаційне моделювання регулювання рівня в мішалці і концентрації добрив в живильному розчині

Завдання роботи. Встановити два ПІД регулятори на моделі змішування живильного розчину в мішалці, рис. 2.7. Завдання для моделі брати по заданому варіанту. Задати коефіцієнти по каналах вхідного сигналу інтегрування і диференціювання вхідного сигналу відповідно: 1, 1, 0. Задати значення завдань для параметрів регулювання по каналу рівня суміші в мішалці і по каналу концентрації суміші. Підібрати коефіцієнт підсилення регулятора по каналу рівня суміші і концентрації розчину на виході. Вивести на екран осцилографа криві зміни регульованого рівня розчину $h(\tau)$, і концентрації розчину на виході з мішалки – $C_c(\tau)$, і на дисплей кінцеве цих параметрів після закінчення регулювання.

Характеристики об'єкта. В змішувач безперервно поступає речовина А з концентрацією $C_A = 0,12$ і речовина Б з концентрацією $C_B = 0,007$ в частках до маси речовини. Площа поперечного перетину апарату $S = 3 \text{ м}^2$. Густина суміші складає $\rho_c = 1100 \text{ кг/м}^3$. Для вивчення об'єкту в статичному режимі прийємо витрати речовини А рівні $G_A = 7,5 \text{ кг/с}$, а

витрати речовини в $G_B = 4,0$ кг/с. Діаметри труб для подачі розчинів до мішалки складають $d = 0,096$ м, а довжина труб від заслінок до змішувача: для труби А, $l_A = 20$ м, для труби Б, $l_B = 15$ м. Густина розчинів А і Б складає $\rho_A = 1170$ кг/м³ і $\rho_B = 1030$ кг/м³

Визначити характеристики передаточних функцій по каналах регулювання рівня розчину у змішувачі і концентрації суміші. Побудувати модель об'єкту в середовищі Simulink визначити перехідні характеристики і по них визначити час перехідних процесів по вказаних каналах регулювання. Завдання для регулятора рівня 3 метри, а регулятора концентрації 0,08.

Імітаційна модель об'єкта на Simulink без регулятора

За допомогою блоків *Constant* введемо необхідні дані для вирішення системи рівнянь (2.15) - (2.16) значень параметрів G_A , C_A , G_B , C_B , a_c , S , ρ_c . Використовуючи блоки *Sum* і *Product* сформуємо праві частини диференційних рівнянь. Для обчислення рівняння (2.15) використаємо блоки *Gain* і *Math Function*. В останній виставимо процедуру обчислення квадратного кореня *sqrt*. Результати обчислень правих частин диференційних рівнянь посилаємо на блоки розв'язку цих рівнянь *Integrator*. Початкові значення для цих блоків по обчисленню рівня візьмемо 2,45, а по обчисленню концентрації суміші 0,06. Якщо ми помилилися спочатку з вибором величин цих параметрів, то пізніше їх можна виправити. Початкове нульове значення цих параметрів може призвести до помилки.

Для виведення результатів обчислень по рівню h і концентрації C_C використаємо блоки осцилографів *Scope*. Значення витрат суміші на виході змішувача G_C можна вивести на блок *Display*. Враховуючи, що стала часу об'єкту перевищує 2000 с., виберемо час моделювання 10000 с. Для цього в параметрах моделювання **Simulation** → **Simulation Parameters** у вікні **Stop time** введемо число 10000 секунд. Якщо далі цього часу не вистачить для досягнення рівнем або концентрацією усталеного значення, його слід збільшити. Такий самий час треба встановити і на вкладці параметрів **General** блоку *Scope* у вікні команди **Time range**.

В результаті отримаємо імітаційну-схему моделі змішування із двох компонент (рис. 2.7).

Для запуску моделі клацнемо мишкою на кнопці запуску, або виконаємо команду **Start** меню **Simulation**. Щоб побачити результат обчислень, двічі клацнемо на блоці *Scope* і побачимо вікно графіка цього блоку. Якщо масштаб виведення невірний, то клацнувши на кнопці меню **Autoscale**, автоматично встановимо масштаб осей.

Розрахунки на моделі без регуляторів показують, що стала часу по каналу регулювання об'єкту $G_A - C_C$ становить 717 секунд, а по каналу $G_B - h$ становить 2062 секунди.

На рис. 2.8 показані розгінні криві рівня суміші в апараті і концентрації суміші.

З рисунка 2.3 бачимо, що розраховані значення сталих часу співпадають з даними рисунку. Час перехідного процесу по каналу рівня складає близько 7000 с, а по каналу концентрації близько 3000 с. При даних значення вхідних параметрів система саморегулюється на рівні 2,503 м і на концентрації суміші 0,081.

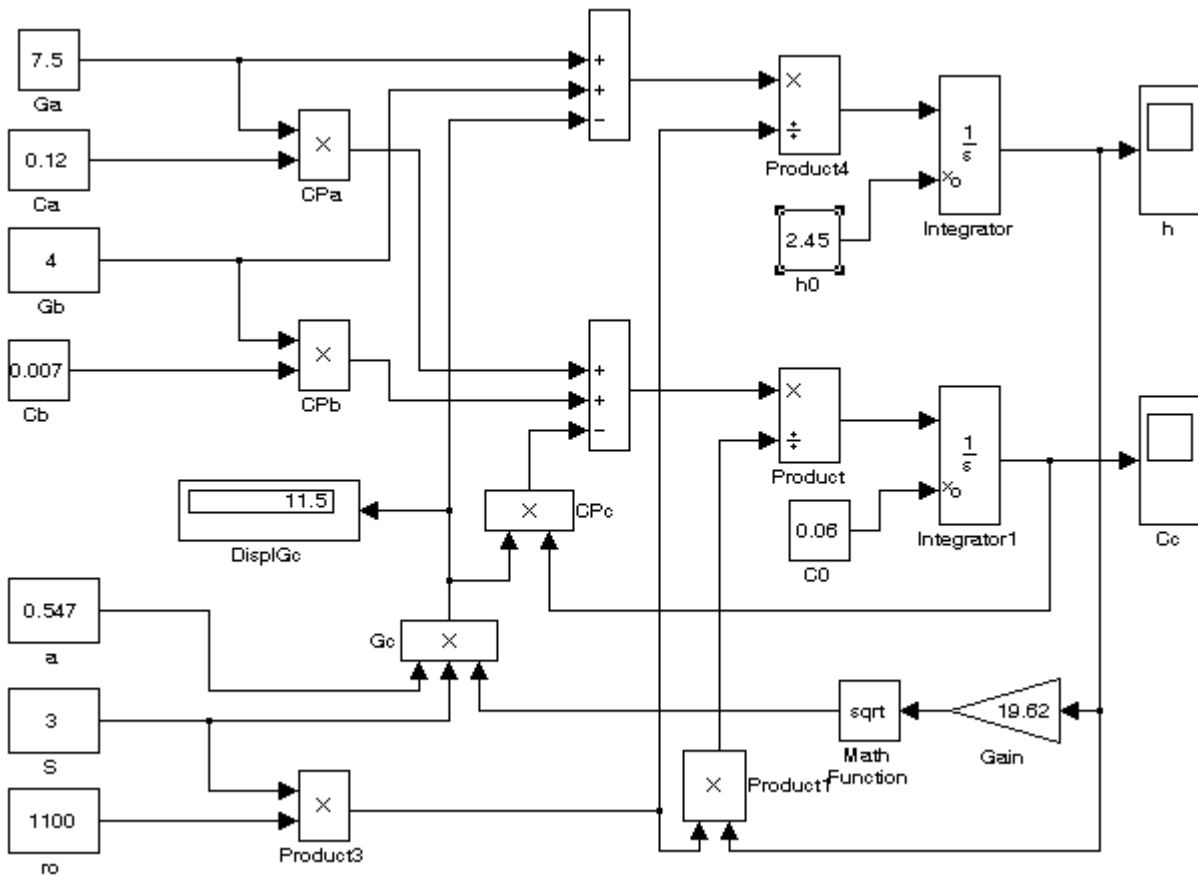


Рис. 2.7. Імітаційна схема моделі змішування в блоках Simulink MATLAB

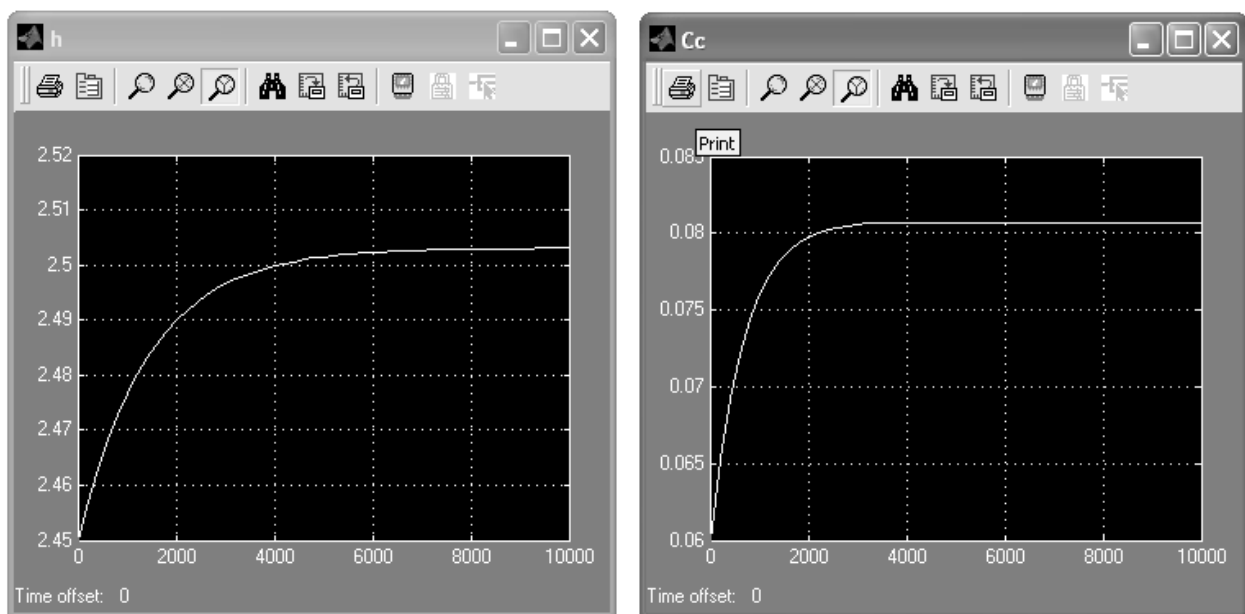


Рис. 2.8. Розгінні криві зміни рівня суміші і концентрації суміші в змішувачі

Імітаційна модель об'єкта на Simulink з регулятором

Добавимо до моделі об'єкту блоки *PID controller* для виконання регулювання процесу зміни рівня в змішувачі, h за рахунок зміни витрат продукту А і концентрації суміші C_C за рахунок зміни витрат продукту Б, блоки *Sum* для обчислення похибок регулювання $\Delta y(\tau)$, блоки *Gain* для підсилення вихідного сигналу і блоки *Saturation* для обмежень сигналу, який поступає на регулюючі органи. Так як значення параметрів керування визначаються регулятором, то блоки, які задають ці параметри, вилучаються з моделі. В блоках регуляторів необхідно виставити задані завдання коефіцієнтів регулювання. Якщо параметри регулювання не розраховуються, то коефіцієнти пропорційної і інтегральної складової можна лишити рівними 1, а диференціальну складову можна вилучити введенням 0. Якщо динаміка розрахунків процесу задовільна, то показник еталонного часу **Sample time**, можна не збільшувати. Важливим є встановлення завдання на підсилення сигналу, що виходить з регулятора. Від цього залежить час регулювання. У даному випадку коефіцієнт підсилення сигналу по каналу рівня вибрано 7, а по каналу концентрації 2. Час моделювання був збільшений до 15000 секунд. Для контролю витрат речовини А і Б вводимо блоки *Display*. Враховуючи можливості роботи регулюючих органів в блоки *Saturation* введемо нижнє 0 і верхнє 20 кг/с обмеження на витрати продуктів А і Б. Схема об'єкту з регуляторами відображено на рис. 2.9. а криві регулювання параметрів на рис. 2.10.

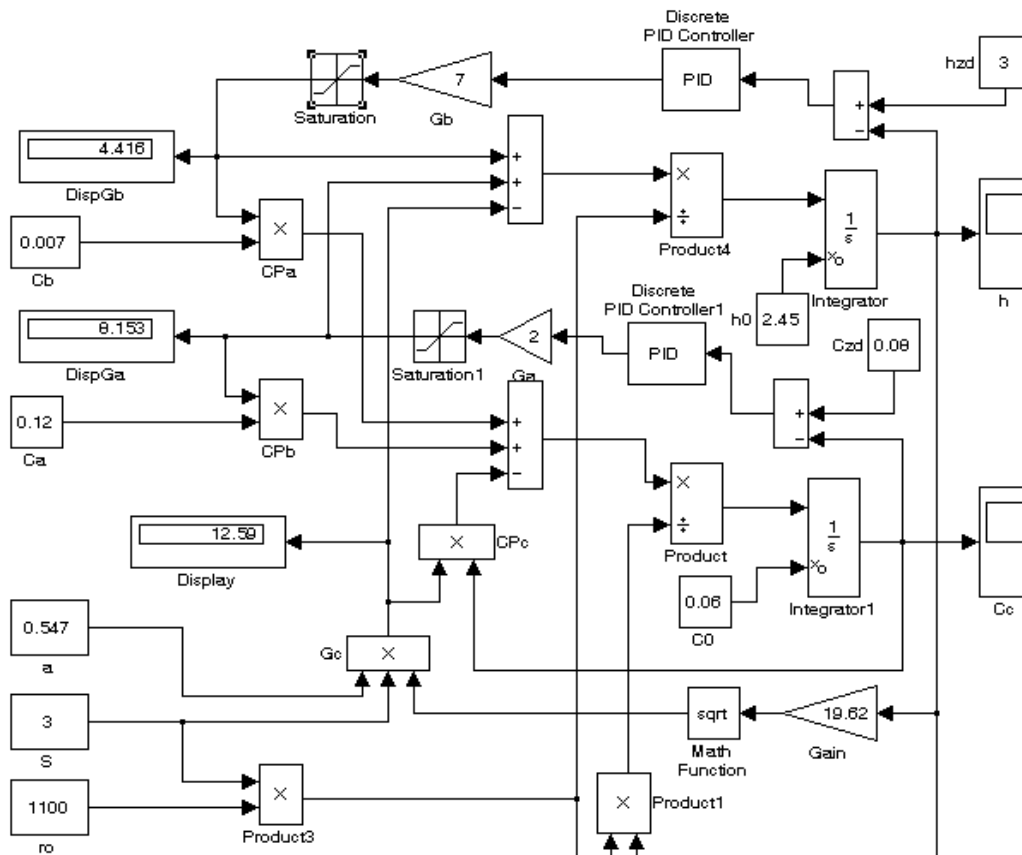


Рис. 2.9 Імітаційна схема автоматизації змішувача в блоках Simulink
MATLAB з регуляторами

Як видно з даних дисплею, після 15000 секунд регулювання для підтримання рівня суміші в апараті 3 метри і концентрації суміші 0,08 витрати речовини А становлять 8,153 кг/с, а витрати речовини Б становлять 4,416 кг/с. По даних графіків осцилографа видно, що час регулювання рівня в апарату складе близько 13000 секунд, а час регулювання концентрації приблизно такий самий час.

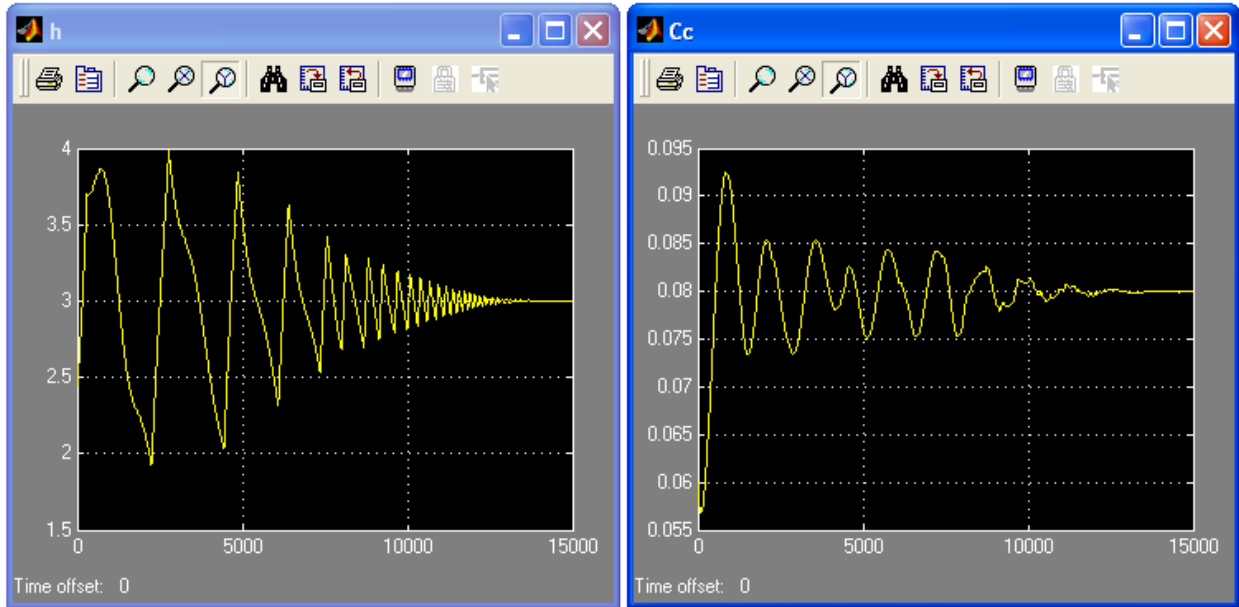


Рис.2.10. Графіки регулювання рівня і концентрації суміші в змішувачі

Висновки

Як видно з даних дисплею, після 15000 секунд регулювання для підтримання рівня суміші в апараті 3 метри і концентрації суміші 0,08 витрати речовини А становлять 8,153 кг/с, а витрати речовини Б становлять 4,416 кг/с. По даних графіків осцилографа видно, що час регулювання рівня в апарату складе близько 13000 секунд, а час регулювання концентрації приблизно такий самий час. Перехідний процес має велику коливальність і вимагає налагодження.

2.4. Завдання до роботи

№ вар.	S, м ²	G _a , Кг/с	G _b , Кг/с	C _a ,	C _b ,	ρ _a , Кг/м ³	ρ _b , Кг/м ³	L _a ,	L _b , м	h ₀ , м	D _{тр} , мм
1	2,5	3	3,2	0,13	0,005	1220	1022	15	30	3,1	64
2	3,2	4,2	4	0,16	0,006	1150	1036	20	18	2,8	80
3	2,8	3,5	3,5	0,12	0,007	1260	1040	18	22	4,2	96
4	3,3	4,1	3	0,14	0,004	1180	1027	23	27	2,5	64
5	3,1	3	2,5	0,11	0,006	1130	1033	30	31	3,9	80
6	3,8	5,2	3,5	0,15	0,005	1190	1044	22	19	3,3	96
7	4,0	4	3,9	0,12	0,004	1210	1052	19	33	2,7	64
8	3,5	3,3	2,5	0,145	0,005	1240	1026	31	28	4,0	80
9	3,3	3	2,8	0,14	0,007	1200	1031	22	16	2,8	96
10	4,1	6,3	3,2	0,125	0,006	1230	1020	29	40	4,2	64

Самостійна роботи №3

на тему: **Вивчення аналітичного конструювання регуляторів за допомогою класичного варіаційного обчислення на математичній моделі, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку.**

Мета самостійної роботи:

Визначити оптимальне управління технологічним об'єктом на основі застосування методів варіаційного обчислення, використавши задачу Лагранжа на умовний екстремум. Модель використовує математичну модель, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку.

3.1. Теоретичні відомості

Об'єкт управління описується лінійним диференціальним другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$a_2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + x = k \cdot U. \quad (3.1)$$

$$\text{Початкові умови } x(0) = 0; \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

$$\text{Кінцеві умови: } x(\infty) = 0; \quad \frac{dx(\infty)}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

Використаємо квадратичні оцінки, які дають в результаті лінійний закон управління. Системи, що забезпечують мінімум функціоналу:

$$I(U) = \int_0^\infty (x^2 + C \cdot U^2) dt \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

називаються лінійними оптимальними системами з оптимальною стабілізацією. Тут $U(t)$ – алгоритм управління, x – параметр керування. Знаючи алгоритм управління $U(t)$, конструюють регулятор.

У математичному аналізі функціонал – це відображення з простору X у простір дійсних чисел, або іноді і в простір комплексних чисел, з метою встановлення обчислювальних структур простору X . Залежно від задачі, такі відображення можуть вважатися лінійними чи нелінійними, або визначатись на всьому просторі.

Таким чином сталими коефіцієнтами, які характеризують об'єкт і регулятор є коефіцієнти a_1 , a_2 , k і C .

Зробимо заміни $x_1 = x$ і $x_2 = \frac{dx}{dt}$ і приведемо рівняння (3.1) до нормальної форми (системи рівнянь 1-го порядку):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{(-x_1 - a_1 x_2 + k \cdot U)}{a_2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Позначим $\frac{dx_1}{dt}$ і $\frac{dx_2}{dt}$ як \dot{x}_1 і \dot{x}_2 і рівняння (3.4) напишемо у виді:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, U) &= \dot{x}_1 - x_2 = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, U) &= \dot{x}_2 - \frac{1}{a_2} \cdot (-x_1 - a_1 \cdot x_2 + k \cdot U) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Для розв'язку введемо множники Лагранжа λ_i і складемо нову функцію:

$$\Phi = V + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2, \text{ або}$$

$$\Phi = x_1^2 + C \cdot U^2 + \lambda_1 \cdot (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot \left[\dot{x}_2 - \frac{1}{a_2} \cdot (-x_1 - a_1 \cdot x_2 + k \cdot U) \right]. \quad (3.6)$$

Візьемо похідні від функції Φ по параметрах x_1, x_2 і U і отримаємо рівняння Ейлера.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Phi}{d\dot{x}_1} \right) &= 2 \cdot x_1 + \frac{1}{a_2} \cdot \lambda_2 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Phi}{d\dot{x}_2} \right) &= -\lambda_1 + \frac{a_1}{a_2} \cdot \lambda_2 - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Phi}{d\dot{U}} \right) &= 2 \cdot C \cdot U - \frac{k}{a_2} \cdot \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

З останнього рівняння системи (3.7) визначимо U :

$$U = \frac{k}{2 \cdot a_2 \cdot C} \cdot \lambda_2. \quad (3.8)$$

Підставивши здобуте значення U у рівняння об'єкта, остаточно побудуємо систему рівнянь з врахуванням (3.7), витягнувши похідні по множниках Лагранжа з 1-го і 2-го рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{a_2} \cdot (-x_1 - a_1 \cdot x_2 + \frac{k^2}{2 \cdot a_2 \cdot C} \cdot \lambda_2) \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= 2 \cdot x_1 + \frac{1}{a_2} \cdot \lambda_2 \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1 + \frac{a_1}{a_2} \cdot \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Для визначення закону управління U із системи диференціальних рівнянь (3.9) знаходимо λ_2 . Для цього складемо характеристичний визначник системи рівнянь (3.9):

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-1}{a_2}\right) & \left(\frac{-a_1}{a_2} - \alpha\right) & 0 & \frac{k^2}{2 \cdot a_2^2 \cdot C} \\ 2 & 0 & -\alpha & \left(\frac{1}{a_2}\right) \\ 0 & 0 & -1 & \left(\frac{-a_1}{a_2} - \alpha\right) \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Напишемо в MathCad як матрицю 4x4.

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a_2} & \frac{-a_1}{a_2} & -\alpha & 0 \\ 2 & 0 & -\alpha & \frac{1}{a_2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}$$

Виконаємо символну операцію: Матриця, Визначник і отримаємо:

$$\frac{C \cdot a_2^2 \cdot \alpha^4 - C \cdot a_1^2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot C \cdot a_2 \cdot \alpha^2 + k^2 + C}{C \cdot a_2^2}$$

Виконаємо спрощення виразу і прирівняємо до 0:

$$\alpha^4 + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \cdot \alpha^2 + \frac{C+k^2}{C \cdot a_2^2} = 0 \quad (3.11)$$

Ступінь характеристичного рівняння (3.11) – парний, а тому воно має одну пару коренів b_1, b_2 , що розташовані у лівій півплощині, і пару коренів b_3, b_4 - у правій півплощині. Система вважається стійкою, якщо $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, а тому коренями b_3, b_4 нехтуємо.

3.2. Виконання лабораторної роботи в MathCad

1. Вводимо в комп'ютер дані свого варіанта для побудови характеристичного визначника

$$k := 2 \quad a_1 := 2.5 \quad a_2 := 1 \quad C := 2 \quad \alpha := 0$$

Заповнюємо матрицю D.

$$\frac{-1}{a_2} = -1 \quad \frac{-a_1}{a_2} = -2.5 \quad \frac{k^2}{2 \cdot a_2^2 \cdot C} = 1 \quad \frac{1}{a_2} = 1 \quad \frac{a_1}{a_2} = 2.5$$

$$D1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2.5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.5 \end{pmatrix}$$

2. Визначаємо власні числа і власні вектори визначника D1. Для цього скористаємось функціями *eigenvals* (M) і *eigenvec* (M,z),

Функція `eigenvals(M)` повертає вектор власних значень квадратної матриці M .

Функція `eigenvec(M,z)` повертає нормований власний вектор, що відповідає власному значенню z квадратної матриці M . Власний вектор нормований на одиницю довжини.

$$\begin{aligned}
 & C1 := \text{eigenvals}(D1) \\
 & C1 = \begin{pmatrix} -0.945 \\ 0.945 \\ -1.832 \\ 1.832 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} & V0 := \text{eigenvec}(D1, C1_0) \\ & V1 := \text{eigenvec}(D1, C1_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & V2 := \text{eigenvec}(D1, C1_2) \\ & V3 := \text{eigenvec}(D1, C1_3) \end{aligned} \\
 & V0 = \begin{pmatrix} -0.46 \\ 0.435 \\ 0.744 \\ 0.216 \end{pmatrix} \qquad V1 = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.118 \\ 0.828 \\ 0.533 \end{pmatrix} \qquad V2 = \begin{pmatrix} -0.432 \\ 0.792 \\ 0.419 \\ 0.097 \end{pmatrix} \qquad V3 = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 0.167 \\ 0.545 \\ 0.816 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Розраховуємо параметри функції оптимального управління:

$$m1 := V0_0 \qquad m2 := V0_1 \qquad m3 := V1_0 \qquad m4 := V1_1$$

$$A1 := V3_0 \qquad A2 := V3_1$$

$$m1 = -0.46 \qquad m2 = 0.435 \qquad m3 = 0.125 \qquad m4 = 0.118 \qquad A1 = 0.091 \qquad A2 = 0.167$$

$$\Delta := m1 \cdot m4 - m2 \cdot m3 \qquad \Delta = -0.109$$

4. Записуємо функцію оптимального управління, задаємо діапазон зміни параметрів управління $x1$ і $x2$ і рахуємо значення функції оптимального управління на полі допустимих значень.

$$\lambda(x1, x2) := \frac{A1 \cdot m4 - A2 \cdot m3}{\Delta} \cdot x1 + \frac{A2 \cdot m1 - A1 \cdot m2}{\Delta} \cdot x2$$

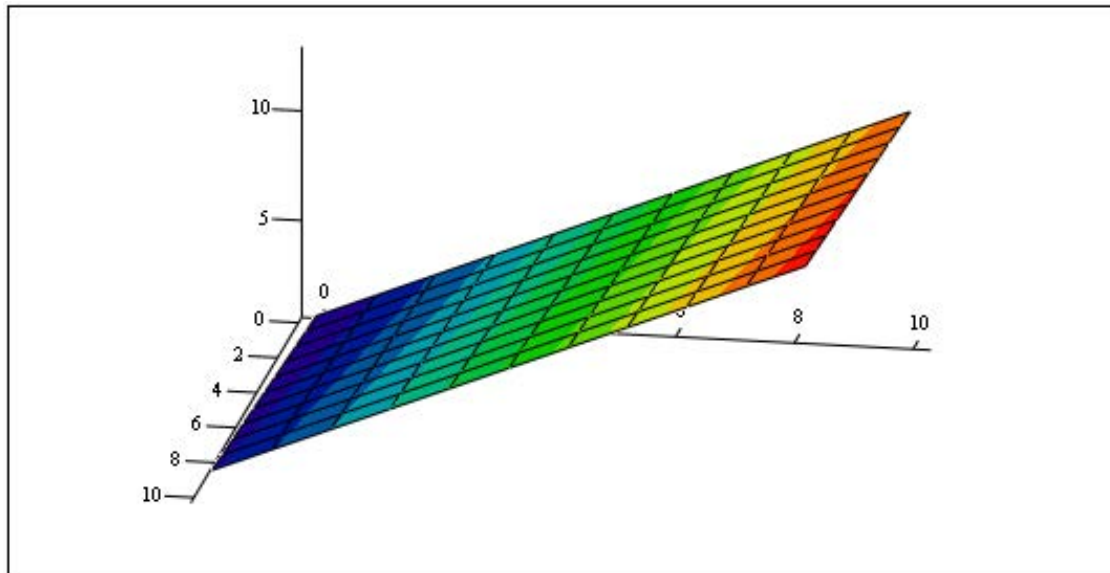
$$i := 0..10 \qquad j := 0..10$$

$$x1_i := 10 + i \qquad x2_j := 0 + j \qquad U_{i,j} := \lambda(x1_i, x2_j)$$

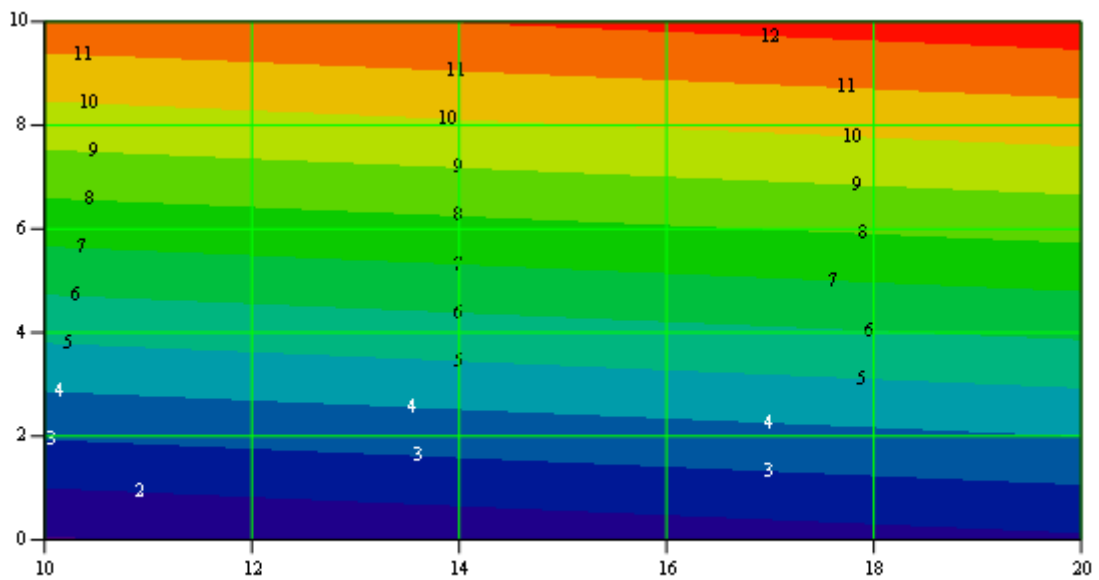
5. Будуємо графічне зображення управління де визначимо мінімальне значення функції λ :

$U =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.932	2.004	3.076	4.148	5.219	6.291	7.363	8.435	9.507	10.579
1	1.025	2.097	3.169	4.241	5.313	6.385	7.456	8.528	9.6	10.672
2	1.118	2.19	3.262	4.334	5.406	6.478	7.55	8.622	9.693	10.765
3	1.211	2.283	3.355	4.427	5.499	6.571	7.643	8.715	9.787	10.859
4	1.305	2.376	3.448	4.52	5.592	6.664	7.736	8.808	9.88	10.952
5	1.398	2.47	3.542	4.613	5.685	6.757	7.829	8.901	9.973	11.045
6	1.491	2.563	3.635	4.707	5.779	6.85	7.922	8.994	10.066	11.138
7	1.584	2.656	3.728	4.8	5.872	6.944	8.016	9.087	10.159	11.231
8	1.677	2.749	3.821	4.893	5.965	7.037	8.109	9.181	10.253	11.324
9	1.77	2.842	3.914	4.986	6.058	7.13	8.202	9.274	10.346	11.418
10	1.864	2.936	4.007	5.079	6.151	7.223	8.295	9.367	10.439	11.511



U



U

3.3. Завдання до роботи

№ вар.	a1	a2	k	C
1	1.2	2.3	1.5	2.5
2	0.8	2.5	2.1	2
3	1.5	3	2.5	3
4	1.3	2	2	3.5
5	0.9	2.1	2.7	2.8
6	2.5	1.2	3	1.8
7	2	1.5	1.8	2.2
8	1.4	2.5	1.7	2.7
9	1.0	2.8	2.3	2.2
10	1.7	2.6	2.7	3.2

Самостійна роботи №4

на тему: **Вивчення методу динамічного програмування для аналітичного конструювання регулятора керування електродвигуном дробарки**

Мета самостійної роботи:

Визначити закон керування електродвигуном, за яким сумарна енергія витрат, що використовується двигуном на переборення в'язкого тертя та нагрів агрегату, буде мінімальною. Задачу оптимального керування визначити методом динамічного програмування.

4.1. Теоретичні відомості

Нехай динаміка об'єкта керування описується деяким диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (4.1)$$

де x – вектор змінних стану об'єкта, а u – вектор змінних керування.

Задаємо функціонал:

$$I = \int_0^T G_1(x, u) dt + \varphi_1[x(T)] \quad (4.2)$$

Задача оптимізації вирішується в дискретній формі, коли параметр T (час керування) розбивається на N інтервалів і розв'язок виконується в скінчено різницевої формі.

Розглянемо розв'язок в неперервній формі, коли задані початкові умови для (6.1) $x(0) = x_0, U(0) = U_0$.

Виберемо критерій оптимальності:

$$I = \int_0^\infty G(x, U) dt, \quad (4.3)$$

де U – функція керування, яка мінімізує функціонал I .

Позначимо $S(x_0) = \min I$ мінімальне значення функціонала, яке залежить від початкових умов та керування U .

Припустимо існування оптимальної траєкторії $x^*(t)$, що забезпечує мінімальне значення виразу (4.3). Розіб'ємо цю траєкторію на два інтервали: перший від $t = 0$ до $t = \tau$ другий від $t = \tau$ до $t = \infty$. Р. Беллманом сформульований принцип оптимальності, згідно з яким майбутня поведінка системи, тобто при $t > \tau$ не залежить від “передісторії” (поведінки системи в минулому) і визначається лише її теперішнім станом, тобто в момент часу $t = \tau$. Тому якщо траєкторія від $t = 0$ до $t = \tau$ оптимальна, то другий інтервал оптимальної траєкторії також є оптимальним. Окрім цього, другий інтервал може розглядатися як самостійна траєкторія з початковими умовами $x^*(\tau)$.

Для використання принципу оптимальності, подаємо вираз (6.3) у вигляді:

$$S(x_0) = \min \left[\int_0^\tau G(x, U) dt + \int_\tau^\infty G(x, U) dt \right]. \quad (4.4)$$

Згідно з принципом оптимальності Беллмана, якщо $U(t)$ надає мінімум інтегралу $\int_0^\tau G(x, U)dt$, то ця функція надаватиме мінімум також інтегралу $\int_\tau^\infty G(x, U)dt$. Тому, враховуючи (4.4), маємо:

$$S(x_0) = \min [\int_0^\tau G(x, U)dt] + S[x(\tau)], \quad (4.5)$$

де $S[x(\tau)]$ – функція від початкового стану $x(\tau)$ в момент $x = \tau$.

Вважаємо τ досить малою величиною. У цьому випадку:

$$S[x(\tau)] = S[x_0 + \Delta x] = S[x_0 + f(x, U) \cdot \tau]. \quad (4.6)$$

Застосовуємо до виразу (4.6) формулу кінцевих приростів:

$$S[x_0 + f(x, U) \cdot \tau] = S(x_0) + f(x, U) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \tau. \quad (4.7)$$

З виразу (4.5) та з врахуванням (4.6) можна записати:

$$S(x_0) = \min [G(x_0, U_0) \cdot \tau + S(x_0) + f(x_0, U_0) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \tau]. \quad (4.8)$$

Віднімемо з обох частин рівності (4.7) $S(x_0)$. Матимемо:

$$\min [G(x_0, U_0) + f(x_0, U_0) \cdot \frac{\partial S}{\partial x}]. \quad (4.9)$$

Для здобуття мінімуму за U слід диференціювати (4.9) по U_0 . У результаті отримаємо:

$$\frac{\partial G(x_0, U_0)}{\partial U_0} + \frac{\partial f(x_0, U_0)}{\partial U_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

Згідно з принципом оптимальності початкові умови x_0, U_0 можна замінити на поточні координати x, U . Тоді матимемо кінцеві функціональні рівняння Беллмана:

$$\left. \begin{aligned} G(x, U) + f(x, U) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial G(x, U)}{\partial U} + \frac{\partial f(x, U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Вираз (4.11) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Тому застосування цього методу в багатьох випадках потребує складних розрахунків. Виключимо з виразу (4.11) $\frac{\partial S}{\partial x}$ і матимемо співвідношення:

$$f(x, U) \cdot \frac{\partial G(x, U)}{\partial U} = G \cdot \frac{\partial f(x, U)}{\partial U}. \quad (4.12)$$

Розглянутий метод динамічної оптимізації використовуються для синтезу оптимальних регуляторів – так зване аналітичне конструювання регуляторів.

Його сутність полягає в тому, що закон зміни координати керування та дії керування задається аналітично у вигляді деякого функціонала $I(x, U)$, який потрібно мінімізувати шляхом підбору дії керування. Знаючи алгоритм керування $U(t)$, конструюють регулятор.

Особливого значення при аналітичному конструюванні регуляторів набуває вибір критеріїв оптимальності. Загальних критеріїв оптимальності для будь-яких об'єктів керування не має. Кожний критерій керування має свої показники якості. Критерій якості повинен повністю відповідати найкращій роботі об'єкта і в той же час бути достатньо простим для того,

щоб задача не виявилася занадто складною, чи взагалі такою, що не розв'язується аналітично.

Визначення критеріїв якості є самостійною задачею і досить важливою. Найбільш широкого застосування знайшли квадратичні критерії. Застосування квадратичних оцінок дає в результаті лінійний закон керування, тому системи, що забезпечують мінімум $I(U) = \int_0^{\infty} (x^2 + C \cdot U^2) dt$, називаються лінійними оптимальними системами, а визначення закону керування, що доставляють мінімум $I(U)$ – аналітичним конструюванням регулятора. Стабілізація систем відносно положення рівноваги за допомогою законів керування, що забезпечують мінімум $I(U) = \int_0^{\infty} (x^2 + C \cdot U^2) dt$, називаються оптимальною стабілізацією.

Функціонали, що є відмінними від квадратичних, забезпечують нелінійні закони керування і тому вся система керування для досягнення мінімуму відповідних оцінок повинна бути нелінійною. Така задача характеризується більш складним аналітичним виразом.

4.2. Математична модель керування електродвигуном

Механічний рух електричного приводу з двигуном постійного струму незалежного збудження описується другим законом Ньютона за рівнянням:

$$M_d - M_o = J \cdot \frac{d\omega}{dt}, \quad (4.13)$$

де момент опору навантаження в'язкого тертя (змішувача, подрібнювача та ін.) визначається рівнянням:

$$M_o = k_1 \cdot \omega, \quad (4.14)$$

де ω – оберти електродвигуна, рад/с; J – момент ротора електродвигуна, кг м²; k_1 – коефіцієнт пропорційності опору, Н·м·с;

Електродвигун працює в режимі, коли падіння напруги $U_1 = I \cdot R_d$ значно більше оберненої величини електрорушійної сили $E = C_e \cdot \omega$.

Момент електродвигуна визначаємо за формулою:

$$M_d = C_m \cdot I_d, \quad (4.15)$$

де I_d – струм на електродвигуні, А; R_d – опір електродвигуна, $R_d = R_r + R_s$ – сумарний опір ротора і статора, ом; C_e – коефіцієнт пропорційності по е. р. с., В с; C_m – коефіцієнт пропорційності моменту електродвигуна, Н м/А.

При рішенні задачі впливом індуктивності в ланці ротора нехтуємо.

Відповідно до закону Кірхгофа функція керування (керована напруга) дорівнює:

$$U_y = I_d \cdot R_d + C_e \cdot \omega. \quad (4.16)$$

З рівняння (4.16) знаходимо: $I_d = \frac{U_y - C_e \cdot \omega}{R_d}$ і підставивши цей вираз у рівняння (4.13) отримаємо:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{U_y}{R_d} C_m - \left(\frac{C_e \cdot C_m}{R_d} + k_1 \right) \omega \quad (4.17)$$

Першу складову в дужках рахувати не будемо, тому що $\frac{C_e \cdot C_m}{R_d} \ll k_1$. Спростимо рівняння динаміки обертів двигуна (4.17) до виду:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_m}{R_d} U_y - k_1 \omega \quad (4.18)$$

Перетворимо диференціальне рівняння і приведемо його до виду Коші, ввівши коефіцієнти, $b = -k_1/J$ і $m = C_m/(R_d J)$.

$$\frac{d\omega}{dt} = b \cdot \omega + m \cdot U_y \quad (4.19)$$

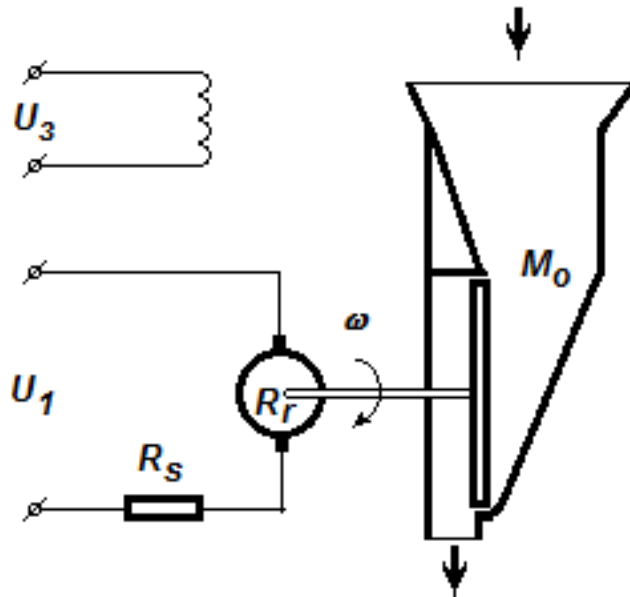


Рис. 4.1. Схема електричного приводу з двигуном постійного струму для дробарки

Метою роботи є визначення залежності керуючої дії U_y від обертів двигуна ω при мінімальних затратах потужності на теплові втрати і на переборення в'язкого тертя в. наприклад, подрібнювачі (рис. 4.1). При цьому слід врахувати, що двигун працює в режимі, коли $C_e \cdot \omega \ll I_d \cdot R_d$ і тоді струм двигуна приблизно буде рівним, А:

$$I_d = \frac{U_d}{R_d}. \quad (4.20)$$

Потужність втрат струму на тепло складе, Вт:

$$P_e = I_d \cdot U_y = \frac{U_y^2}{R_d}. \quad (4.21)$$

Потужність втрат струму на переборення в'язкого тертя складе, Вт:

$$P_t = M_o \cdot \omega = k_1 \cdot \omega^2. \quad (4.22)$$

Завданням роботи є мінімізація сумарної електричної енергії втрат, яка представлена у вигляді функціонала:

$$I = \int_0^\infty (a_1 \cdot \omega^2 + a_0 \cdot U_y^2) dt, \quad (4.23)$$

де коефіцієнти $a_1 = t_1$, Дж с, а $a_0 = 1/R_d$, Вт В⁻².

Задачу визначення оптимального управління, що забезпечує мінімум інтегрального рівняння (4.23) розв'язуємо методом динамічного

програмування. Для системи, що розглядається, рівняння динамічного програмування матимуть вигляд:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \omega^2 + a_0 \cdot U_y^2 + (b \cdot \omega + m \cdot U_y) \cdot \frac{d\Psi}{d\omega} = 0; \\ 2 \cdot a_0 \cdot U_y + m \cdot \frac{d\Psi}{d\omega} = 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

де Ψ – допоміжна функція, яка визначається рівнянням

$$\frac{d\Psi}{dt} = -V, \quad (4.25)$$

в якій V – підінтегральна функція функціоналу, який мінімізується. Розв’яжемо друге рівняння системи (4.12) і знайдемо:

$$\frac{d\Psi}{d\omega} = -\frac{2 \cdot a_0}{m} \cdot U_y. \quad (4.26)$$

Після підстановки значення $\frac{d\Psi}{d\omega}$ в перше рівняння (4.24) отримаємо квадратне рівняння відносно керуючої дії U_y .

$$m \cdot a_0 \cdot U_y^2 + 2 \cdot a_0 \cdot b \cdot \omega \cdot U_y - a_1 \cdot m \cdot \omega^2 = 0 \quad (4.27)$$

Розв’язок рівняння має вигляд:

$$U_y = -k \cdot \omega, \quad (4.28)$$

де k – корінь квадратного рівняння дорівнює:

$$k = -\frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{a_1}{a_0}}. \quad (4.29)$$

По рівнянню (4.28) будуюмо функцію оптимального управління по мінімальним втратам електричної енергії на електродвигуні.

Слід зауважити, що враховуючи припущення про режим роботи електродвигуна $C_e \cdot \omega \ll I_d \cdot R_d$, отриманий закон справедливий для таких значень обертів двигуна які $\omega \ll \frac{U_y}{C_e}$.

4.3. Виконання лабораторної роботи в MathCad

1. Введемо в MathCad дані свого варіанту. Це: J – момент ротора електродвигуна, кг·м²; C_e – коефіцієнт пропорційності по е. р. с., В·с; C_m – коефіцієнт пропорційності моменту електродвигуна, Н·м/А, k_1 – коефіцієнт пропорційності опору, Н·м·с; R_d – сумарний опір ротора і статора, Ом;

$$\begin{aligned} J &:= 1.96 \cdot 10^{-5} & C_e &:= 0.096 & C_m &:= 2.94 \cdot 10^{-3} \\ k_1 &:= 0.981 \cdot 10^{-3} & R_d &:= 5 \end{aligned}$$

2. Розрахуємо коефіцієнти спрощеного диференціального рівняння руху електродвигуна (6.19).

$$b := \frac{-k_1}{J} \quad b = -50.051 \quad m := \frac{C_m}{R_d \cdot J} \quad m = 30$$

3. Розрахуємо коефіцієнти інтегрального рівняння (6.23) функціонала:

$$a_0 := \frac{1}{R_d} \quad a_0 = 0.2 \quad a_1 := k_1 \quad a_1 = 9.81 \times 10^{-4}$$

4. Знайдемо корінь квадратного рівняння керуючої дії U_y .

$$k := -\frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{a1}{a0}} \quad k = 3.338$$

5. Порахуємо залежність оптимального значення керуючої дії від обертів електродвигуна при односторонній його роботі.

$$\omega := 0,1 \dots 100 \quad U_y(\omega) := -k \cdot \omega$$

6. Побудуємо графік функції оптимального керування при мінімальних втратах електричної енергії на електродвигуні.

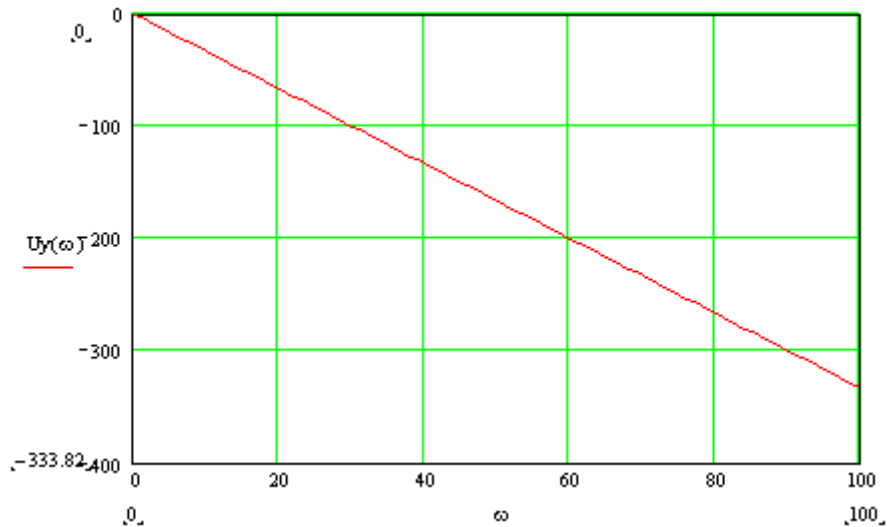


Рис. 4.2. Графік функції оптимального керування

Висновки:

Оптимальний закон керування при мінімальних втратах електричної енергії на електродвигуні є лінійним. Оберти двигуна повинні бути невеликими враховуючи, що $\omega \ll \frac{U_y}{C_e} \ll 10U_y$.

4.4. Завдання до роботи

Діапазон зміни параметра ω брати в діапазоні від 0 до 100 рад/с з кроком 1.

№ вар.	$J \cdot 10^{-5}$, кг·м ²	C_e , В·с	$C_m \cdot 10^{-3}$, Н·м/А	$k_1 \cdot 10^{-3}$, Н·м·с	R_d , ом
1	1,95	0,091	2,75	0,97	5
2	2,10	0,110	2,93	0,98	7
3	1,88	0,105	3,05	1,02	9
4	1,90	0,095	2,88	1,05	4
5	2,07	0,118	2,97	0,95	6
6	2,03	0,088	3,02	0,97	8
7	2,12	0,091	2,79	0,98	5
8	1,99	0,110	3,01	1,02	7
9	2,15	0,105	2,82	1,05	9
10	1,85	0,095	2,77	0,96	4

ЛІТЕРАТУРА:

1. Лисенко В.П., Мірошник В.О., Штепа В.М. Комп'ютерно-інтегровані технології. Основи MatLab. Навчальний посібник., К.: Вид.центр НУБіП України, 2010, – 80 с.
2. Мірошник В.О., Решетюк В.М. Типові технологічні об'єкти і процеси в птахівництві. Навчальний посібник. К.: НУБіПУ, ПП «Універсіл», 2010. – 139 с.
3. Лисенко В.П., Кузьменко Б.В., Головінський Б.Л. Оптимальні системи автоматичного управління. – К.: ВЦ НАУ, 2003. – 96 с.
4. Мірошник В.О. Оптимізація технологічних процесів галузі. Курс лекцій. – К.: НУХТ, 2008 – 94 с.
5. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів. Навчальний посібник. / В.Лисенко, Є.Чернишенко, В.Решетюк, В.Мірошник, Н.Заєць, І.Цигульов. – К.:АграрМедіаГруп, 2016. – 476 с.
6. Методи синтезу та аналізу систем автоматичного керування в АПК / В. Лисенко, В. Решетюк, В. Мірошник, Н. Заєць – К.: "КОМПРИНТ", 2017. – 621 с.
7. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування. – К.: Задруга, 1999. – 424 с.
8. Букетов А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів і систем. – Тернопіль: СМП «Тайп».- 2009. – 260 с.
9. Рожков П.П., Краснобаєв В.А., Фурман І.О. та ін. Ідентифікація та моделювання технологічних процесів. – Харків: Факт, 2007.– 240 с.
10. Thornley J.H.M., Hurd R.G., Pooley A. A model of growth of the fifth leaf of tomato. – Annals of Botany 48, 1981. p. 327 – 340.
11. Єресько Г.О., Шинкарик М.М., Ворошук В.Я. Технологічне обладнання молочних виробництв. – К.: Фірма „ІНКІОС”, центр навчальної літератури, 2007. – 344 с. Розділ «Пластинчасті теплообмінники» с.108 – 122.
12. Практикум з годівлі сільськогосподарських тварин/ Ібатуллін І.І., Панасенко Ю.О., Кононенко В.К. та ін. – К.: Вища освіта, 2003. – 432 с.
13. «Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів» В.О.Мірошник, В.М. Решетюк, В.Є. Лукін, О.О. Опришко. Навчальний посібник – Київ. Редакційно-видавничий відділ НУБіП України. 2023. – 784с.
14. Вступ до планування оптимального експерименту: Навч. посібн. для студ. спец. 092502 – Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва / Уклад.: Г.О. Статюха, Д.М. Складанний, О.С. Бонаренко – К.: ІВЦ «Політехніка», 2011. – 117 с.

В.С. Лукін, В.М. Теплюк, В.В. Григораш

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ АГРАРНОГО СПРЯМУВАННЯ

Навчальний посібник

для здобувачів
третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти,
які навчаються за спеціальністю 151- Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
технології та G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка
галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво
Кваліфікація: PhD доктор філософії

Підписано до друку 06.11.25 Формат 60x84\16
Ум. друк. арк. 15,8 Наклад 100 прим. Зам. № 250740

Виготовлювач Національний університет біоресурсів
і природокористування України,
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, 03041.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 4097 від 17.06.2011