

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І  
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ТА АВТОМАТИКИ АПВ НААН  
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



**ЗБІРНИК  
ТЕЗ ДОПОВІДЕЙ**

*XI Міжнародної науково-технічної конференції з нагоди  
117-ї річниці від дня народження  
доктора технічних наук, професора,  
віцепрезидента УАСГН  
КРАМАРОВА  
Володимира Савовича  
(1906-1987)*

**«КРАМАРОВСЬКІ ЧИТАННЯ»**

*22-23 лютого 2024 року  
м. Київ*

УДК 631.17+62-52-631.3

Збірник тез доповідей XI Міжнародної науково-технічної конференції «Крамаровські читання» з нагоди 117-ї річниці від дня народження доктора технічних наук, професора, віцепрезидента УАСГН Крамарова Володимира Савовича (1906-1987) 22-23 лют. 2024 р., м. Київ / МОН України, Національний університет біоресурсів і природокористування України. К.: Видавничий центр НУБіП України, 2024. 505 с.

Proceedings of the XI International Scientific and Technical Conference dedicated to the 117th anniversary of the birth of Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice President of the UAAS Kramarov Volodymyr Savovych (1906–1987), February 22–23, 2024, Kyiv / MES of Ukraine, National University of Life And Environmental Sciences of Ukraine. Kyiv: Publishing center of NULES of Ukraine, 2024. 505 p.

В збірнику представлені тези доповідей науково-педагогічних працівників, наукових співробітників, аспірантів та студентів НУБіП України, провідних вітчизняних і закордонних вищих навчальних закладів та наукових установ, в яких розглядаються завершені етапи розробок.

The Proceedings presents abstracts of reports of scientific and pedagogical workers, research staff, graduate students and students of the NULES of Ukraine, leading domestic and foreign higher educational institutions and scientific institutions, in which completed stages of development are considered.

УДК 631.3

**АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ЗОВНІШНІЙ  
ПОВЕРХНІ РУХОМОГО ЦИЛІНДРА**

**Т. М. ВОЛІНА**, кандидат технічних наук, доцент  
*Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
Сумський національний аграрний університет*

Циліндрична поверхня є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин. По ній переміщується технологічний матеріал. Для циліндричних рухомих поверхонь досліджується, в основному, переміщення частинки по внутрішній поверхні. Цікавим з пізнавальної точки зору є рух частинок по зовнішній поверхні циліндра, оскільки при великому його радіусі обмежена ділянка поверхні, де відбувається відносний рух, буде

близькою до площини. Відповідно і траєкторії відносного руху в такому випадку мають бути подібними до траєкторій на площині.

Верхня половина циліндра розташована таким чином, що його вісь нахилена до горизонтальної площини під кутом  $\beta$  (рис. 1).

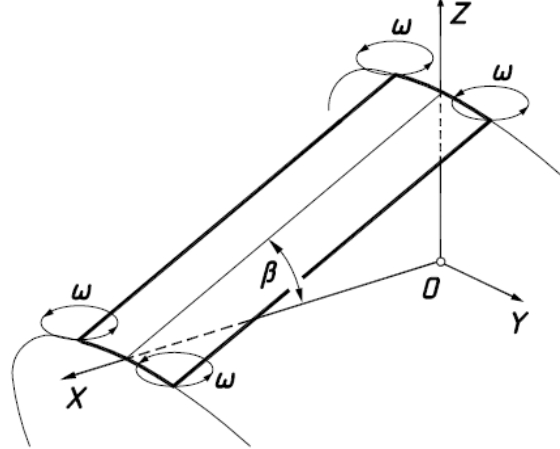


Рис. 1. Схема руху точок похилого циліндра по колах із кутовою швидкістю  $\omega$

Циліндр здійснює поступальні коливання таким чином, що всі його точки описують кола в горизонтальних площинах (на рис. 1 показані траєкторії переміщення чотирьох точок циліндра).

Рівняння циліндра із горизонтальною віссю, якою є вісь  $OX$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= u; \\ Y &= R \cos \alpha; \\ Z &= -R \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $R$  – радіус циліндра;

$\alpha$ ,  $u$  – незалежні змінні поверхні:  $\alpha$  – кут повороту точки циліндра навколо його осі;  $u$  – довжина прямолінійної твірної циліндра.

Параметричні рівняння циліндра (1) після його повороту на кут  $\beta$  навколо осі  $OY$  запишуться:

$$\begin{aligned} X &= u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\ Y &= R \cos \alpha; \\ Z &= u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Абсолютний рух частинки розглядається по відношенню до нерухомої системи координат  $OXYZ$ . Якщо циліндр прив'язати до рухомої системи координат, то при коливанні циліндра осі рухомої і нерухомої систем весь час будуть паралельними. Це означає, що абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху циліндра, точки якого описують кола, і відносного руху точки по поверхні циліндра:

$$\begin{aligned} x &= x_n + x_g; \\ y &= y_n + y_g; \\ z &= z_n + z_g, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x_e = x_e(t)$ ;  $y_e = y_e(t)$ ;  $z_e = z_e(t)$  – траєкторія переносного руху циліндра у функції часу  $t$ ;

$x_r = x_r(t)$ ;  $y_r = y_r(t)$ ;  $z_r = z_r(t)$  – траєкторія відносного руху частинки по поверхні циліндра у функції часу  $t$ .

Радіус кіл, по яких рухаються точки циліндра, позначено через  $r$ . Тоді переносний рух точок циліндра описується рівняннями:

$$\begin{aligned}x_e &= r \cos \omega t; \\y_e &= r \sin \omega t; \\z_e &= h,\end{aligned}\tag{4}$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання точок циліндра по колах;

$h = \text{const}$  – висота точки циліндра по відношенню до початку координат.

По циліндру точка ковзатиме по певній траєкторії. Рівняння траєкторії можна одержати, якщо зв'язати між собою незалежні змінні  $\alpha$  і  $u$  поверхні (2). Цей зв'язок має записано через час  $t$ , тобто координати частинки на поверхні циліндра будуть функціями часу:  $\alpha = \alpha(t)$  і  $u = u(t)$ . У такому випадку відносний рух частинки описується рівняннями:

$$\begin{aligned}x_r &= u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\y_r &= R \cos \alpha; \\z_r &= u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha.\end{aligned}\tag{5}$$

Сумуючи переносний (4) і відносний (5) рухи за формулою (3), можна отримати рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$\begin{aligned}x &= u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha + r \cos \omega t; \\y &= R \cos \alpha + r \sin \omega t; \\z &= u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha + h.\end{aligned}\tag{6}$$

Залежності, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по поверхні циліндра), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (6) по часу  $t$  було отримано проекції абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned}x' &= -r\omega \sin \omega t + u' \cos \beta + R\alpha' \sin \beta \cos \alpha; \\y' &= r\omega \cos \omega t - R\alpha' \sin \alpha; \\z' &= u' \sin \beta - R\alpha' \cos \beta \cos \alpha.\end{aligned}\tag{7}$$

Диференціювання виразів (7) дасть проекції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}x'' &= -r\omega^2 \cos \omega t - R\alpha'^2 \sin \beta \sin \alpha + u'' \cos \beta + R\alpha'' \sin \beta \cos \alpha; \\y'' &= -r\omega^2 \sin \omega t - R\alpha'^2 \cos \alpha - R\alpha'' \sin \alpha; \\z'' &= R\alpha'^2 \cos \beta \sin \alpha + u'' \sin \beta - R\alpha'' \cos \beta \cos \alpha.\end{aligned}\tag{8}$$

Складемо рівняння руху у вигляді  $m\bar{\omega} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\bar{\omega}$  – вектор абсолютного прискорення,  $\bar{F}$  – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги  $mg$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція  $N$  поверхні циліндра та сила тертя  $fN$  при ковзанні частинки по поверхні циліндра ( $f$  –

коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроекціювати на осі системи координат  $OXYZ$ .

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; \quad 0; \quad -mg\}. \quad (9)$$

Реакція поверхні циліндра  $N$  спрямована по нормалі до нього і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній циліндра. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= R \sin \beta \cos \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= -R \sin \alpha; & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} &= -R \cos \beta \cos \alpha; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \beta; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (10)$$

Векторне множення векторів (10) може дати два протилежно спрямованих вектори нормалі – або всередину циліндра, або на зовні від нього. Це залежить від заміни місцями векторів (10) у визначнику векторного добутку. Перший добуток відповідає руху частинки по внутрішній поверхні циліндра, а другий – по зовнішній. Із врахуванням цього було знайдено вектор нормалі і приведено його до одиничного:

$$\{\sin \beta \sin \alpha; \quad \cos \alpha; \quad -\cos \beta \sin \alpha\}. \quad (11)$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону, може бути знайдено проекції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (5):

$$\begin{aligned} x'_e &= u' \cos \beta + R\alpha' \sin \beta \cos \alpha; \\ y'_e &= -R\alpha' \sin \alpha; \\ z'_e &= u' \sin \beta - R\alpha' \cos \beta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Геометрична сума складових (12) дасть величину швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі:

$$V_e = \sqrt{x'^2_e + y'^2_e + z'^2_e} = \sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}. \quad (13)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі системи  $OXYZ$  було отримано діленням проекцій (12) на величину вектора (13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u' \cos \beta + R\alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ \frac{R\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ \frac{u' \sin \beta - R\alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Векторне рівняння  $m\bar{\omega} = \bar{F}$ , розписане в проекціях на осі системи координат, з урахуванням того, що сила тертя  $fN$  спрямована вздовж одиничного вектора (14) в протилежну до нього сторону, має вигляд:

$$\begin{aligned}
 mx'' &= N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R\alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 my'' &= N \cos \alpha - fN \frac{R\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 mz'' &= -mg - N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R\alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Підстановка в рівняння (15) других похідних (проекцій абсолютного прискорення) із (8) дає систему із трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
 m(-r\omega^2 \cos \omega t - R\alpha'^2 \sin \beta \sin \alpha + u'' \cos \beta + R\alpha'' \sin \beta \cos \alpha) &= \\
 &= N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R\alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m(-r\omega^2 \sin \omega t - R\alpha'^2 \cos \alpha - R\alpha'' \sin \alpha) &= \\
 &= N \cos \alpha - fN \frac{R\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m(R\alpha'^2 \cos \beta \sin \alpha + u'' \sin \beta - R\alpha'' \cos \beta \cos \alpha) &= \\
 &= -mg - N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R\alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

До системи (16) входить три невідомі функції:  $N=N(t)$ ,  $u=u(t)$  і  $\alpha=\alpha(t)$ . Розв'язок її відносно  $N$ ,  $u''$  і  $\alpha''$  дає наступні вирази:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' &= \frac{1}{R} \left[ -r\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t + (r\omega^2 \sin \beta \cos \omega t + g \cos \beta) \cos \alpha \right] + \\
 &\quad + \frac{Af\alpha'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 u'' &= r\omega^2 \cos \beta \cos \omega t - g \sin \beta + \frac{Afu'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}};
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$N = -mA,$$

$$\text{де } A = R\alpha'^2 + g \cos \beta \sin \alpha + r\omega^2 (\cos \alpha \sin \omega t + \sin \beta \sin \alpha \cos \omega t).$$

Система (17) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Знайшовши залежності  $\alpha=\alpha(t)$  і  $u=u(t)$  і підставивши їх у рівняння (2), можна отримати відносну траєкторію руху частинки по поверхні циліндра, тобто траєкторію ковзання.

Розроблений підхід дозволяє дослідити траєкторії руху частинки по поверхні циліндра при різних початкових умовах. Наприклад, якщо кут  $\beta=0$ , тобто циліндр розташований так, що всі його прямолінійні твірні паралельні горизонтальній площині. Інтегрування системи (17) здійснювалося при  $r=0,05$  м,  $R=5$  м. На рис. 2 побудовані відносні траєкторії частинки, яка попадає на поверхню циліндра біля його найвищої прямолінійної твірної. Коливальний рух частинки відбувається в напрямі, перпендикулярному твірним циліндра, тобто в

напрямі лінії найбільшого нахилу. В залежності від точки попадання частинка рухається в одну або протилежну сторону, причому амплітуда коливань зростає. Як видно із рис. 2, відносний рух частинки дуже чутливий до частоти коливань: при зростанні  $\omega$  з  $10 \text{ c}^{-1}$  до  $11 \text{ c}^{-1}$  довжина пройденого шляху суттєво зростає.

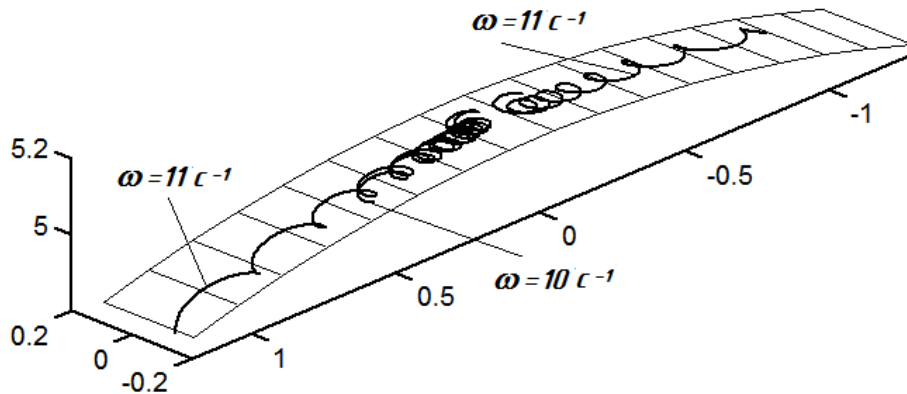


Рис. 1. Траєкторії відносного руху частинки по поверхні горизонтального циліндра, який здійснює коливальний рух протягом 5 с при  $R=5 \text{ м}$ ;  $r=0,05 \text{ м}$ ;  $f=0,3$

Розроблений підхід дає можливість досліджувати траєкторію руху частинок по поверхні циліндра, який здійснює коливальні рухи в горизонтальній площині, що може бути використано для сепарації технологічного матеріалу за його фрикційними властивостями.